

Valuación de opciones financieras con arbitraje por medio de la ecuación de Black Scholes mediante un esquema de diferencias finitas

Financial Option Valuation with Arbitrage by means of the Black Scholes Equation using a Finite Differences Scheme

Guillermo Sierra Juárez*

Víctor Hugo Gualajara Estrada**

Juan Martín Casillas González***

(Fecha de recepción: 27 de abril de 2018, Fecha de aceptación: 4 de diciembre de 2018)

RESUMEN

La solución a la ecuación de Black-Scholes, con las condiciones de frontera adecuadas, es una técnica conocida por su utilidad para obtener el valor de la prima de las opciones financieras, y existen diversos métodos para resolverla. Por otra parte, es frecuente encontrar diferencias entre los valores teóricos y los operados en los mercados de opciones financieras, estas diferencias son abordadas por varias teorías. En este trabajo, con el objetivo de explicar la mencionada diferencia de valores, se plantea un modelo de Black-Scholes el cual incluye, desde el principio, la posibilidad de arbitraje, y se propone un esquema para resolverlo con base al método explícito

* Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas,
Departamento de Métodos Cuantitativos,
Universidad de Guadalajara, Jalisco, México
gsierraj@cucea.udg.mx

** Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas,
Departamento de Métodos Cuantitativos,
Universidad de Guadalajara, Jalisco, México
vgualajara@cucea.udg.mx

*** Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías,
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guadalajara, Jalisco, México.
jmartin.casillas@academicos.udg.mx

de diferencias finitas. Además, el resultado obtenido se compara con la solución sin arbitraje. El arbitraje se plantea como un impulso que varía mediante un parámetro λ . Se propone su solución y se analizan los resultados tomando diferentes valores del impulso, de la volatilidad y del plazo del vencimiento. Una contribución adicional es que se ofrece el algoritmo computacional para la solución del modelo planteado.

Clasificación JEL: G12, G15, G20

Palabras clave: derivados financieros, modelo de Black Scholes, método de diferencia finitas.

ABSTRACT

The solution to the Black-Scholes equation, considering the right boundary conditions, is a technique widely used to obtain the prime value of financial options, and several methods have been proposed to solve it. On the other hand, a difference between the theoretical values and financial options market values is often found. This difference has been considered by several theories. In this paper, aiming to explain the mentioned value differences, a Black-Scholes model is proposed, which includes from the start, the possibility of arbitrage and a scheme to solve it, based on the explicit Method of Finite Differences. The results obtained are compared with the solution without arbitrage. Arbitrage is modeled as an impulse that varies by a parameter λ . A solution is proposed and the results are analyzed considering different values of the momentum, the volatility and the term to maturity. An additional contribution is that a computational algorithm for the solution of the proposed model is offered.

JEL Clasificación: G12, G15, G20

Keywords: Financial Derivatives, Black Scholes Model, Finite Differences Method.

Introducción

El presente trabajo presenta una solución al Modelo de Black Scholes (Black y Scholes, 1973) en presencia de arbitraje, es decir, en condiciones fuera de equilibrio utilizando el método explícito de diferencias finitas. Como se recordará, la solución del modelo sin condiciones de arbitraje es ampliamente conocida, considerando soluciones analíticas y numéricas, desde los años 70's.

El caso que se analiza es de una opción europea financiera (call y put) cuyo valor se puede encontrar resolviendo la ecuación diferencial propuesta por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton en su artículo presentado en 1973. Un equilibrio libre de arbitraje es una precondition para un equilibrio económico general, en finanzas cuantitativas se utiliza frecuentemente este concepto para calcular un precio neutral al riesgo, principalmente en el caso de productos derivados.

El arbitraje ocurre cuando el mismo activo no se comercia al mismo precio en todos los mercados, o bien, cuando dos activos con idénticos flujos de efectivo no tienen el mismo precio. También puede entenderse como si en el mercado financiero se pudieran tener mayores ganancias sin tomar riesgos, aprovechando que los mercados no actúan con eficiencia. Eugene Fama, el creador del concepto de la “Hipótesis de los Mercados Eficientes” (EMH), (Fama, 1970) sostiene que los precios de los activos financieros, incorporan eficientemente todo el conjunto de información disponible y en consecuencia, componen un mercado perfecto. Otra forma de entender el arbitraje en economía y finanzas, es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados y realizar una combinación de transacciones precisamente complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios, así, la utilidad se logra debido a la diferencia de precios de los mercados. Por medio del arbitraje, los participantes en el mercado pueden lograr una utilidad instantánea libre de riesgo Aragonés y Marcareñas (2010).

En la valuación de las opciones financieras, en el contexto de Black-Scholes, el precio teórico es justo tanto para las posiciones largas como para las cortas. Sin embargo, en la práctica los mercados financieros funcionan de forma menos eficiente de lo que supone la teoría, ya que los precios acordados en la compra y venta de opciones, no coinciden con los valores teóricos o justos, lo que puede generar condiciones de arbitraje. Aunque en la práctica el tema es de gran interés para poder establecer el (valor de la prima de las opciones) precio de las opciones, cuando existen condiciones de arbitraje o bien cuando se encuentran fuera de equilibrio los mercados, la literatura referente es muy limitada.

De acuerdo con el modelo de equilibrio general, existe un precio en donde la oferta coincide con la demanda, y es en ese momento en el que ocurre una transacción tanto para bienes como para activos financieros. Sin embargo, se ha observado en la práctica, que en los mercados financieros, el valor de las primas de las opciones financieras (call o put) que se cotizan no coinciden en muchos casos con el valor teórico estimado mediante la solución de la ecuación Black-Scholes.

Lo anterior presenta una problemática real, y proponer la explicación de esta diferencia entre el precio teórico y el de mercado es un problema actual de las finanzas cuantitativas, ya que los mercados no están operando como “mercados eficientes”, puesto que generan oportunidades de arbitraje, aunque éstas aparezcan durante breves períodos o sólo de manera instantánea.

Existen distintas explicaciones sobre la diferencia entre el precio teórico y el de mercado, entre las que cabe mencionar: cambiar los supuestos de series independientes a series correlacionadas o bien a series con memoria de los activos subyacentes, también puede presentarse, al cambiar de volatilidades históricas a implícitas, o incluso al cambiar medidas de probabilidad.

En el presente trabajo se propone una forma distinta de enfrentar el problema. Se plantea que la diferencia entre el precio teórico y el precio de mercado de la prima de la opción financiera, obedece a que el sistema se encuentra en posibilidad de obtener arbitraje, donde éste, es modelado por un impulso que decae exponencialmente en el tiempo, y en la medida que éste va desapareciendo, se va aproximando al precio de la prima tradicional Black-Scholes. El objetivo del modelo propuesto es plantear un sistema fuera de equilibrio, es decir, que presenta condiciones de arbitraje, y resolverlo mediante el método explícito, para observar el comportamiento gráfico de las opciones, de tal forma que permita conocer si hay una sobreestimación o subestimación del precio tradicional Black-Scholes.

En la siguiente sección se presenta un resumen de los principales trabajos relacionados con el tema de arbitraje y opciones, y se recuerdan los supuestos y resultados del modelo Black-Scholes. En la sección 2 se revisan los conceptos básicos de la metodología de diferencias finitas a utilizar. En particular el método explícito. En la sección 3 se presenta el modelo propuesto y sus soluciones gráficas incluyendo la posibilidad de arbitraje. Finalmente, en la sección 4 se ofrecen los principales resultados y al final se enuncian las conclusiones.

Antecedentes

En esta sección se hace una revisión de los principales trabajos relacionados con la valuación de opciones financieras con arbitraje, propuestas por distintos autores y con técnicas distintas de solución. El arbitraje es un tema central de las finanzas modernas, y a pesar de su importancia se ha estudiado con relativa modestia en el tema de derivados.

La propuesta de Ilinski (2001) sugiere la presencia de un “arbitraje virtual”. En su trabajo, plantea y resuelve una ecuación más general que se encuentra fuera de equilibrio para las opciones *plain vanilla* europeas call y put. La novedad de este planteamiento en la ecuación de Black Scholes, es el empleo de la teoría de norma y de sus conceptos y definiciones formales como son haces fibrados, curvatura (término directamente vinculado con

el concepto de arbitraje), conexiones, transporte paralelo y estructura. Los cuales, se han utilizado de manera exitosa en áreas de la física como lo son la gravitación y el electromagnetismo. Se trabaja con las ideas geométricas de física, análogas para el caso de finanzas, aplicándolas en conceptos de activos, divisas, acciones y al valor del dinero en el tiempo. Además de la idea de circuitos en planos (plaquetas), o trayectorias locales cerradas y curvatura, para intercambios financieros y su relación con condiciones de arbitraje.

Por otra parte, en Otto M. (1999) se hace referencia al modelo propuesto por Ilinski y Kalinin (1998), en donde se consideran fluctuaciones alrededor del estado de equilibrio, introduciendo una dinámica de relajación del tipo Ornstein-Uhlenbeck como ruido aleatorio, para desviaciones intermedias y que el autor denomina como rendimiento de arbitraje virtual. Además, se propone para el análisis una escala diferente de tiempo en donde se pueda generar el arbitraje. El autor introduce un modelo dentro del marco de las ideas de martingalas, para establecer precios para derivados en mercados incompletos, usando un mapeo para la teoría de precios de opciones con tasas de interés estocásticas, y el rendimiento de arbitraje es considerado como una componente de una tasa de interés ficticia, en un mundo virtual con el objeto de facilitar su implementación. La influencia de rendimientos, proviene del arbitraje en el precio de derivados, en el mundo real puede compensarse como un promedio de los rendimientos (no observables) en el momento de la valuación. Usando la metodología de integrales de trayectoria, para las opciones *call* y *put*, y considerando la influencia de rendimiento de arbitraje virtual, se obtienen aproximaciones para la valuación, considerando rendimientos de arbitraje inicial, a través de métodos numéricos. El resultado se complementa con una discusión sobre estrategia de cobertura, asociada a los derivados que replica el mensaje el pago final, aunque no sea autofinanciable en el mundo real.

Fedotov y Panayides (2005) revisan el papel del arbitraje en la determinación del precio de los derivados financieros. Los autores proponen un portafolio estocástico en un momento fuera de equilibrio, con un rendimiento de arbitraje estocástico estacionario que cambia rápidamente en el tiempo. Se utiliza el hecho que la valuación de la opción y los rendimientos de arbitraje están en diferentes escalas de tiempo, lo que permite analizar el comportamiento asintótico en el tiempo y se restringe a bandas independientes de las características independientes de precios, más que precios exactos. De las conclusiones, lo más interesante es que puede explicarse el “*smile*” de volatilidad en términos de los rendimientos de arbitraje aleatorio.

Young K. (1999) también hace una propuesta de modelo de mercado cambiario a partir de la teoría de norma. Los tipos de cambio pueden expresarse como exponenciales de la teoría de norma en haces fibrados, mientras que las tasas de interés son potenciales de norma en haces fibrados. Se generan oportunidades de arbitraje para valores de la curvatura distintos de cero en circuitos cerrados, que involucran tasas cruzadas en el tiempo actual, y que son equivalentes en el área de la física, a campos magnéticos, y en contratos futuros, las oportunidades de arbitraje corresponden a campos eléctricos.

Haven (2002) considera las implicaciones implícitas del modelo de Black-Scholes dentro del marco de física cuántica. El precio es considerado como una función de Estado y con un potencial, que permite al precio satisfacer la ecuación diferencial de Schrödinger. A partir de la función de potencial libre de arbitraje, se procede a la construcción del potencial que incluya arbitraje. Esta función permite definir una función de amplitud de probabilidad, y de esta forma resolver la ecuación de Schrödinger. Se muestra la existencia del precio libre de arbitraje cuando la función potencial converge a uno y la existencia de arbitraje, cuando el valor de la constante de Planck es diferente de cero. Esta constante está relacionada con el parámetro (de creencia) que regula la existencia de una trayectoria, además se plantea una discusión interesante sobre el papel de esta constante. El establecer una relación entre el valor de dicha constante y el número de trayectorias es importante, ya que cuando hay trayectorias múltiples, es decir, cuando son estratégicas, se debe de indicar que hay una racionalidad límite y por tanto se utiliza la integral de Feynman. Al final se muestra que el modelo de Black-Scholes puede utilizarse dentro de la física cuántica e incluir el arbitraje de una forma natural.

Por otra parte Sukhomlin N. (2007) estudia la ecuación de Black-Scholes a partir de leyes de conservación y muestra que, sin limitaciones complementarias, los modelos pueden tener al menos dos volatilidades. Lo anterior, consecuentemente, tiene varias limitaciones para los parámetros del sistema dinámico con el objeto de garantizar la definición correcta.

En Zhou y Xiao (2010), se revisa el modelo de derivados financieros desde el punto de vista de la simetría de normalización y muestra que la forma de la ecuación puede permanecer invariante bajo transformaciones de numerarios locales, además muestra una relación entre curvatura del haz fibrado y arbitraje. Los autores cambian de numeralia y se refieren a esta nueva simetría de ecuaciones de precios, como un conjunto de transformaciones de forma.

En Farinelli (2014), el autor incorpora un modelo a la teoría de finanzas estocásticas, que denomina “Teoría de Arbitraje Geométrico”, en este contexto se muestra que se pueden describir el arbitraje como curvatura de haz fibrado y parametrizar las estrategias de arbitraje. Además, el autor caracteriza la teoría del arbitraje geométrico por cinco principios y demuestra que son consistentes con la teoría clásica de las finanzas estocásticas.

En Sornette (1998) se hace una crítica a la teoría de normalización de finanzas. El autor comenta, que aunque la idea en sí es interesante, ni la distribución log-normal, ni las ecuaciones de Black-Scholes demuestran la veracidad de la teoría. Reconoce que el elemento de la introducción del arbitraje aparece de forma correcta como parte de una teoría, pero uno de los problemas que enfrentan las teorías es que en los mercados reales (incompletos) este operador no es único.

Mirador (2009) presenta dos formas de resolver el problema de los precios de opciones europeas y americanas (opciones de vainilla y barrera), a través del uso del método de diferencias finitas. La propuesta considera, en primer lugar, la transformación de la ecuación de Black-Scholes en la ecuación de calor, y en segundo lugar el uso de la función $z = \log(S)$. Sin embargo, se llega a la conclusión de que el primer enfoque no es adecuado cuando se necesita aplicar este método a situaciones reales. Finalmente, se propone una manera de calibrar el Modelo de Black-Scholes con una aplicación de datos reales.

Ankudinova *et al.* (2018) trabaja con varios modelos de las clases más importantes de ecuaciones no lineales de Black-Scholes, para opciones europeas y americanas, con una volatilidad que depende de diferentes factores, como: el precio de las acciones, el tiempo, el precio de la opción y sus derivados debido a los costos de transacción. Ankudinova *et al.*, abordan el problema analíticamente para el precio de la opción, transformando el problema para una opción Europea, en una ecuación de convección-difusión con un término no lineal, y el problema de frontera libre para una opción denominada estadounidense, en una ecuación parabólica no local, completamente no lineal, definida en un dominio fijo.

Por otra parte, en Contreras *et al.* (2010), se desarrolla un modelo de valuación de opciones con arbitraje estocástico endógeno, que es capaz de modelar de manera general, cualquier activo futuro y subyacente que se desvíe de su equilibrio de mercado. El autor realiza su investigación al calibrar empíricamente el arbitraje sobre los futuros del índice S&P 500, utilizando datos

de transacciones desde septiembre de 1997 hasta junio de 2009, en donde utiliza un tipo específico de arbitraje denominado “burbuja de arbitraje”.

Finalmente, Contreras *et al.* (2018) realizan un proceso a la inversa del modelo de valuación de opciones con arbitraje estocástico endógeno (Contreras, 2010); es decir, deducen que es posible extraer el potencial dependiente del tiempo $U(t)$ y su forma de burbuja asociada, $f(t)$ a partir de los datos financieros empíricos reales.

Según lo observado, la ecuación de Black Scholes ha sido resuelta utilizando diversas técnicas y mediante diferentes métodos. Como se mencionó, en este trabajo se propone un escenario del Modelo de Black Scholes con arbitraje, utilizando el método explícito de diferencias finitas.

1. Metodología

En esta sección se presenta un procedimiento numérico de diferencias finitas, aplicado para resolver la ecuación de Black Scholes. Se emplean los esquemas descritos por Hull (2010) que son similares a los descritos por Hackmann (2009) y Day (2011), pero añadiendo arbitraje al modelo numérico. Se utiliza específicamente, el esquema explícito de diferencias finitas. Aunque otros métodos pueden ser empleados para fines de prueba se descartaron en esta investigación. Las soluciones a la ecuación encontrada representan lo que se conoce como el precio de la opción.

Recordando que la ecuación diferencial parcial para el modelo de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial S} rS - rV = 0. \quad (1)$$

Las opciones que se consideran se dividen en dos clases: *call* y *put*. Una opción call europea sobre una acción otorga al comprador el derecho pero no la obligación de comprar una cantidad de acciones (el activo subyacente para las opciones sobre acciones) por un precio específico (K) precio de ejercicio, en una fecha específica (T) en el futuro. Si el precio de la acción (S) está por debajo del precio de ejercicio, se dice que la opción de compra (call) está *fuera del dinero*, mientras que una opción de compra con un precio de ejercicio por debajo del precio de la acción se clasifica *en el dinero*. Los parámetros del modelo son la tasa libre de riesgo (r), la volatilidad (σ) y la

tasa de dividendo (q). El valor de la opción es, por lo tanto, una función de S y del tiempo, y la ganancia que describe el valor de la opción en la fecha T , está dada por

$$C(S, T) = \max(S - K, 0) .$$

Una opción put europea, le da al comprador el derecho de vender una cantidad de acciones por un precio específico en un momento específico. La ganancia que describe el valor de una opción de venta en el momento T , está dada por

$$P(S, T) = \max(K - S, 0) .$$

Con el fin de establecer una solución a (1) es necesario plantear argumentos financieros acerca del comportamiento cuando $V(S; t) = C(S; t)$, o cuando $V(S; t) = P(S; t)$ en el instante t y para valores extremos de S . De esta manera, si en el momento T , el precio está dentro de la posibilidad de compra, entonces, el precio tiene un valor positivo, si está fuera de la posibilidad de compra, entonces, se puede descartar. Además, si en algún instante $S = 0$, de (1), se tiene que $dS = 0$, de modo que no es posible un cambio adicional en S . Esto implica que la opción call no se ejercerá y $C(0; t) = 0$, mientras que la opción put seguramente se ejercerá, y tendrá un valor de $P(0; t) = Ee^{-r(T-t)}$. El término $e^{-r(T-t)}$ se agrega en esta última expresión para expresar el valor presente del precio de ejercicio en el momento $T - t$. Esto es necesario, porque en el instante $t = T$, $P(0; T) = E$, que es equivalente a $Ee^{-r(T-t)}$ invertido a una tasa libre de riesgo durante un período de $T - t$. Finalmente, cuando $S \rightarrow \infty$, es casi seguro que se ejerza la opción call, de modo que $C(S; t) \sim S - Ee^{-r(T-t)}$, mientras que es muy poco probable que la opción put, se ejerza de manera que $P(S; t) \rightarrow 0$.

Aquí, el símbolo \sim se utiliza bajo el siguiente contexto, cuando $x \rightarrow a$ la relación $f(x) \sim g(x)$ ocurre, sí y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Entonces considerando las condiciones de frontera para (1) de las opciones call y put se tiene para la opción call europea

$$\begin{aligned} C(S; T) &= \max(S - K, 0), \quad S > 0, \\ C(0, t) &= 0, \quad t > 0, \\ C(S; t) &\sim S - Ke^{-r(T-t)}, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty, t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Y para la opción put europea

$$\begin{aligned} P(S; T) &= \max(K - S, 0), \quad S > 0, \\ P(0; t) &= Ee^{-r(T-t)}, \quad t > 0, \\ P(S; t) &\rightarrow 0, \quad \text{cuando } S \rightarrow \infty, t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

1.1. Aproximación mediante diferencias finitas

Con el fin de presentar un modelo Black Scholes clásico de discretización mediante diferencias finitas de la ecuación (1), a continuación, se muestra la forma equivalente de discretizar derivadas (1as y 2as) para funciones con una variable independiente y que serán de utilidad para extender la estrategia a funciones de dos variables independientes.

Sea $V(x)$ una función dos veces diferenciable, al emplear el Teorema de Taylor se tiene:

$$V'(x) = \frac{1}{2\Delta x} (V(x + \Delta x) + V(x - \Delta x)) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (4)$$

$$V''(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} (V(x + \Delta x) - 2V(x) + V(x - \Delta x)) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (5)$$

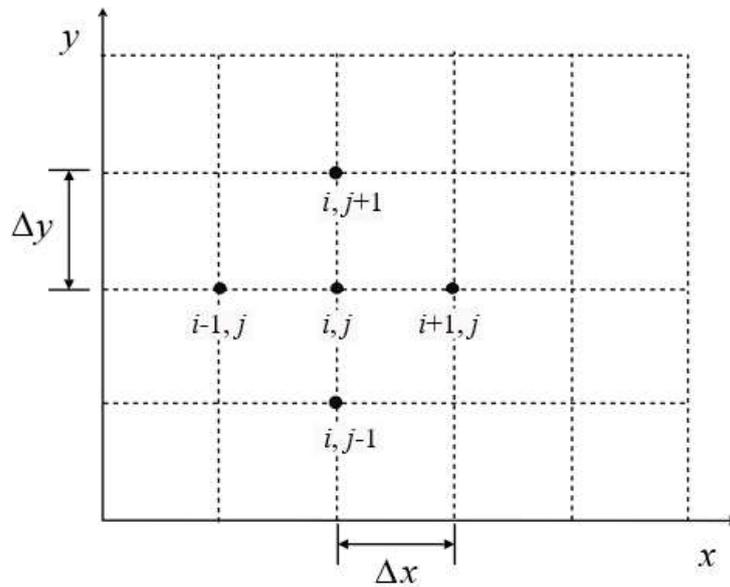
La ecuación (4) es llamada aproximación de diferencia central, pero también es posible determinar aproximaciones de diferencias hacia adelante y aproximación de diferencias hacia atrás, que son respectivamente,

$$V'(x) = \frac{1}{\Delta x} (V(x + \Delta x) - V(x)) \quad (6)$$

$$V'(x) = \frac{1}{\Delta x} (V(x) - V(x - \Delta x)) \quad (7)$$

Es posible replicar la estrategia en función de dos variables. Sea V una función de las variables x, y , definida en una región rectangular $R = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$, acotada. Sea \mathcal{P} una partición de R , de manera que esta partición en R genera una malla, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Partición de la región R



Fuente: Hull (2010, 2014).

Con esta construcción los rectángulos interiores tienen ancho $\Delta x = h$ y altura $\Delta y = k$. Así, es posible presentar un punto (x, y) en R sobre la esquina de cualquier rectángulo, haciendo $x = ih$ y $y = jk$, para apropiados $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces, al denotar el valor de V en este punto como $V(x, y) = V(ih, jk) = V_{i,j}$ y siguiendo la forma que tiene la ecuación (5), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{V((i+1)h, jk) - 2V(ih, jk) + V((i-1)h, jk)}{h^2} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Con una guía de error de orden h^2 . Similarmente, es posible determinar las segundas derivadas respecto a y , para redefinir la aproximación de diferencia hacia adelante y hacia atrás en términos de la nueva notación para dos variables,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{k^2} + \mathcal{O}(k^2) \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k).$$

Para el caso de la ecuación de Black-Scholes (1), se toma la variable x por S , donde S es el precio del subyacente. Se cambia la variable y por t , donde t es el tiempo definido en el intervalo $[0, T]$. Siguiendo el procedimiento anterior, se define una partición en el plano. Al dividir el intervalo, en M subintervalos igualmente espaciados, se tiene

$$k = \Delta S = \frac{S}{M}$$

De manera análoga, el intervalo $[0, T]$, se corta en N subintervalos de igual tamaño, por lo cual

$$h = \Delta t = \frac{T}{N}.$$

A partir de aquí, los índices i corresponderán a la variable S y los índices j a la variable t . Es relevante seleccionar la partición adecuada para que sean considerados los casos en que $S_0 = 0$ y $t_0 = 0$.

1.2. Condiciones iniciales y de frontera

La versión discreta de las condiciones iniciales y de frontera (2) y (3), se establecen en un plano truncado, donde $S \in [S_{min}, S_{max}]$, y $t \in [0, T]$. Las condiciones se muestran en la Tabla 1. Aquí, $V(S, t)$ es el valor de la opción en el precio *stock* S y al tiempo t .

Tabla 1. Las condiciones en cada frontera de la cuadrícula para una opción europea.

Frontera	Call Europea	Put Europea
$t = T$	$V(S, T) = \max(S_{min} + j\Delta S - K, 0)$	$V(S, T) = \max(K - S_{min} - j\Delta S, 0)$
$S = S_{min}$	$V(S_{min}, t) = \max(S_{min} - K, 0)$	$V(S_{min}, t) = \max(S_{min} - K, 0)$
$S = S_{max}$	$V(S_{min}, t) = \max(S_{max} - K, 0)$	$V(S_{max}, t) = \max(K - S_{max}, 0)$

Fuente: Edwards (2015).

1.3. Método explícito

Una de las principales ventajas de utilizar el método explícito, es la relativa facilidad para llevar a cabo la programación, lo que resulta adecuado para la modificación de escenarios. Con el objeto de probar el algoritmo en la ecuación Black Scholes con arbitraje, se seleccionó este método que no descuida las condiciones de convergencia. Otra característica interesante del método explícito, es que requiere un tiempo de ejecución menor que otras metodologías.

En este método se asume que los valores de $\frac{\partial V}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ en un punto dado (i, j) son los mismos que en el punto $(i + 1, j)$. Entonces, se tiene:

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2(j\Delta S)^2 \frac{V_{i+1,j+1} + V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j}}{(\Delta S)^2} = rV_{i+1,j}.$$

Al reorganizar los coeficientes $V_{i+1,j-1}$, $V_{i+1,j}$ y $V_{i+1,j+1}$, se tiene la siguiente expresión.

$$V_{i,j} = a_j^* V_{i+1,j-1} + b_j^* V_{i+1,j} + c_j^* V_{i+1,j+1} \quad (11)$$

Donde los coeficientes dados, tienen los siguientes valores

$$a_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left(-\frac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left(\frac{1}{2}(r - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right).$$

Los esquemas están apoyados en la metodología empleada en Hull (2010). Como se mencionó, r representa la tasa libre de riesgo, σ la volatilidad y q la tasa de dividendos.

2. Modelo de Black Scholes con arbitraje

En esta sección, se propone la ecuación de Black-Scholes con arbitraje usando el método explícito de diferencias finitas.

Dado el arbitraje

$$r = r_0 + x, \quad (12)$$

donde r_0 es la tasa libre de riesgo y x es el arbitraje. Esta expresión se introduce en la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial V}{\partial S} (r + x)S - (r + x)V = 0, \quad (13)$$

con la forma

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \quad C = \max(S - K, 0). \quad (14)$$

El esquema propuesto por Ilinski (2001) es ahora:

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + (r + x)j\Delta S \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2(j\Delta S)^2$$

$$\frac{V_{i+1,j+1} + V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j}}{(\Delta S)^2} = (r + x)fV_{i+1,j} .$$

Reorganizando los coeficientes $V_{i+1,j-1}$, $V_{i+1,j}$ y $V_{i+1,j+1}$ se obtiene una expresión similar a (10)

$$V_{i,j} = a_j^*V_{i+1,j-1} + b_j^*V_{i+1,j} + c_j^*V_{i+1,j+1} .$$

Sin embargo, los coeficientes ahora son

$$a_j^* = \frac{1}{1 + (r + x)\Delta t} \left(-\frac{1}{2}((r + x) - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1 + (r + x)\Delta t} \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1 + (r + x)\Delta t} \left(\frac{1}{2}((r + x) - q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right),$$

para el caso de la opción *call* europea se tiene la siguiente condición de frontera

$$V(S, T) = \max(S_{min} + j\Delta S - K, 0)$$

$$V(S_{min}, t) = \max(S_{min} - K, 0) .$$

Para incluir en el modelo el comportamiento del arbitraje, se propone una función con decaimiento rápido, de la forma $e^{-\lambda x}$. Por lo que se añade a la ecuación en diferencias, la derivada $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ que se aproxima mediante el Método de Euler ponderado y que evoluciona en el método explícito mediante la fórmula en términos de diferencias:

$$x_i = x_{i-1} \frac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h} \quad (15)$$

En la sección 4 se muestran los resultados de diferentes pruebas para diferentes valores de λ .

2.1 Convergencia y estabilidad

Para analizar la convergencia y estabilidad del método explícito, se observó que la ecuación (10) se puede reacomodar como

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + a_{i,j} \frac{V_{i+1,j+1} + V_{i+1,j-1} - 2V_{i+1,j}}{(\Delta S)^2} + b_{i,j} \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + c_{i,j} V_{i+1,j} = O(\Delta t, \Delta S^2),$$

o también

$$V_{i+1,j} = A_{i,j} V_{i,j-1} + (1 + B_{i,j}) V_{i,j} + C_{i,j} V_{i,j+1} \quad (16)$$

donde

$$A_{i,j} = v_1 a_{i,j} - \frac{1}{2} v_2 b_{i,j}$$

$$B_{i,j} = -2v_1 a_{i,j} + \Delta t c_{i,j}$$

y

$$C_{i,j} = v_1 a_{i,j} + \frac{1}{2} v_2 b_{i,j},$$

con $v_1 = \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2}$ y $v_2 = \frac{\Delta t}{\Delta S}$.

Observe que el valor de la opción en cualquier instante j , hasta el paso final M está dado por

$$V_{M,j} = V_{0,j} + \sum_{i=0}^{M-1} (V_{i+1,j} - V_{i,j}). \quad (17)$$

En este caso, los términos del error en la suma generados por las aproximaciones de la serie de Taylor tienen un orden $O(M\Delta t^2, M\Delta tS^2)$. Ya que existen M términos en la sumatoria. Si se evalúa la opción en un valor finito de T entonces $M = O(\Delta t^{-1})$, así que el error en el valor de la opción final es $O(\Delta t^2, \Delta tS^2)$.

El método explícito es simple de implementar, pero no siempre converge. La convergencia del método depende del tamaño del paso en las variables temporal y espacial y del tamaño de los coeficientes $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ y $c_{i,j}$.

Considere cada término, de la ecuación (17), de la forma

$$V_{i,j} = \alpha^i e^{2\pi j\sqrt{-1}/\lambda}, \quad (18)$$

Este detalle permite ver a la solución como oscilador de longitud de onda λ , pero que es inestable cuando $|\alpha| > 1$. Al sustituir (18) en la ecuación (17), se obtiene

$$\alpha = \left(1 + c_{i,j}\Delta t + 2a_{i,j}v_1(\cos(2\pi/\lambda) - 1)\right) + \sqrt{-1}b_{i,j}v_2 \sin(2\pi/\lambda). \quad (19)$$

Para que la serie (17) sea convergente, el valor α debe cumplir $|\alpha| < 1$, esto implica que en (19) se debe cumplir

$$c_{i,j} \leq 0,$$

$$2a_{i,j}v_1 - c_{i,j}\Delta t \leq 0,$$

y

$$\frac{1}{2}v_2|b_{i,j}| \leq a_{i,j}v_1.$$

Para simplificar este resultado, se asume que todos los coeficientes varían lentamente sobre las escalas de longitud ΔS . En problemas de finanzas, siempre se tiene un valor

$$c_{i,j} = r < 0,$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Las otras dos restricciones son las que realmente limitan la aplicabilidad del método explícito. Por comodidad, se elige v_1 a ser de orden $O(1)$. En tal caso la segunda restricción es aproximadamente

$$v_1 \leq \frac{1}{2a_{i,j}}.$$

Esta es una seria limitación sobre el tamaño del paso en la variable temporal, como se mencionó anteriormente. En la ecuación de Black-Scholes esta restricción en el tamaño de paso en el tiempo, se convierte en:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta S^2}{2a} = \frac{\Delta S^2}{\Delta^2 S^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2,$$

o

$$\sigma^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2.$$

Esta condición demuestra que tanto la estabilidad como la convergencia del método implícito dependen de la selección de los tamaños de paso ΔS y Δt en la malla de valores. Este criterio se describe más ampliamente en Wilmott (2005) y coincide con Hackmann (2009).

3. Resultados

En la sección anterior se planteó el modelo de Black-Scholes con arbitraje, propuesto en forma de un impulso que decae exponencialmente con una velocidad definida por el parámetro λ .

La novedad de este modelo, es que se analiza fuera de equilibrio y al transcurrir el tiempo cuando el arbitraje decae, el modelo converge al caso de Black-Scholes tradicional.

A continuación, se analizan los resultados gráficos, después de haber aplicado el método explícito al caso de *call* y *put* largos y cortos, cuando se presentan condiciones de arbitraje.

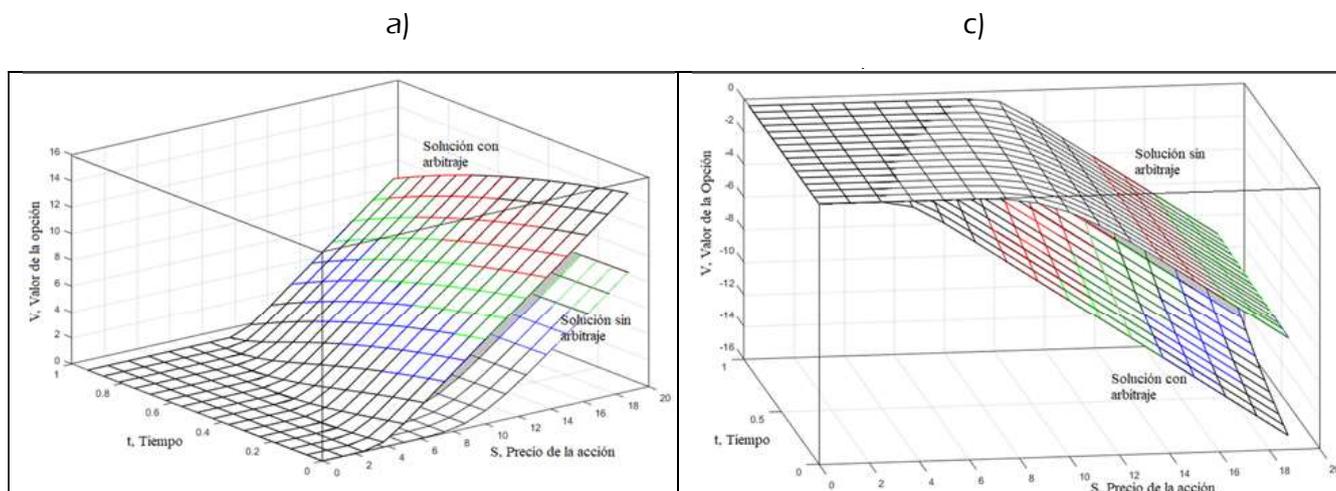
3. Resultados gráficos 1

De acuerdo a la metodología del método explícito de diferencias finitas se hace una representación de las variables t , S y V en tres dimensiones.

La gráfica 1(a) representa *call* largo, la gráfica 1(b) representa el *call* corto, la gráfica 1(c) representa el *put* largo y la gráfica 1(d) representa el *put* corto. De las gráficas anteriores se puede ver que para un λ pequeño que representa una respuesta lenta de arbitraje ($T = 1, r = 0.04, \sigma = 0.20$ y $\lambda = 1/1000$).

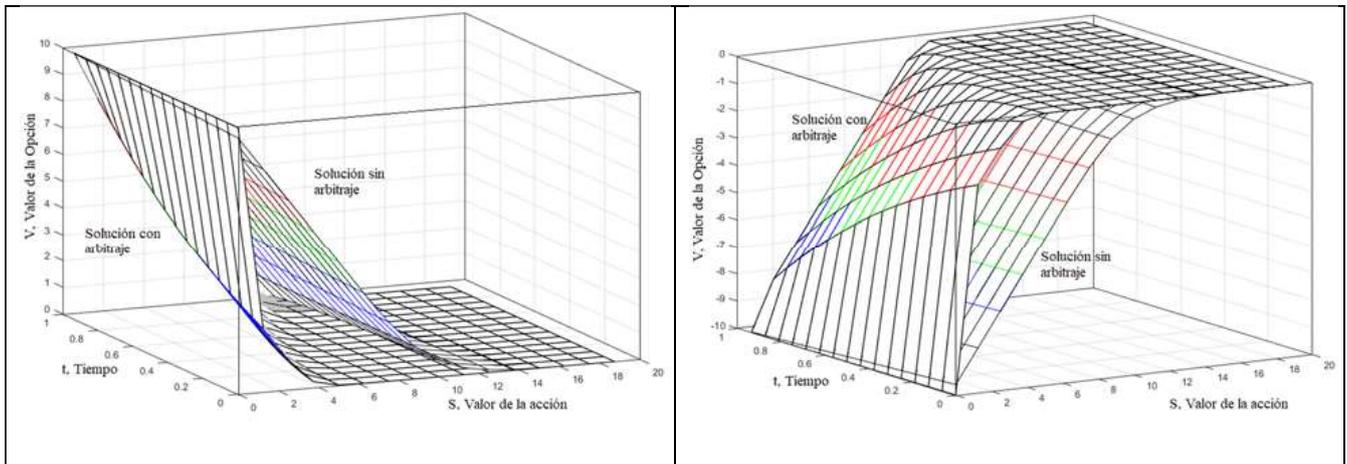
Se puede observar que el precio estimado de un *call* largo del caso con arbitraje es mayor que en el caso tradicional, lo que representa que en caso de existir arbitraje se estaría sobreestimando el precio de la opción. En el caso del *put*, sucede lo contrario, por tanto, se estaría subestimando el precio de la opción.

Gráfica 1. Comparativo que *call* y *put* europeas, posición larga y posición corta. (Parámetros $T=1, r= 0.04, \sigma = 0.20$ y $\lambda = 1/1000$)



b)

d)



Fuente: elaboración propia.

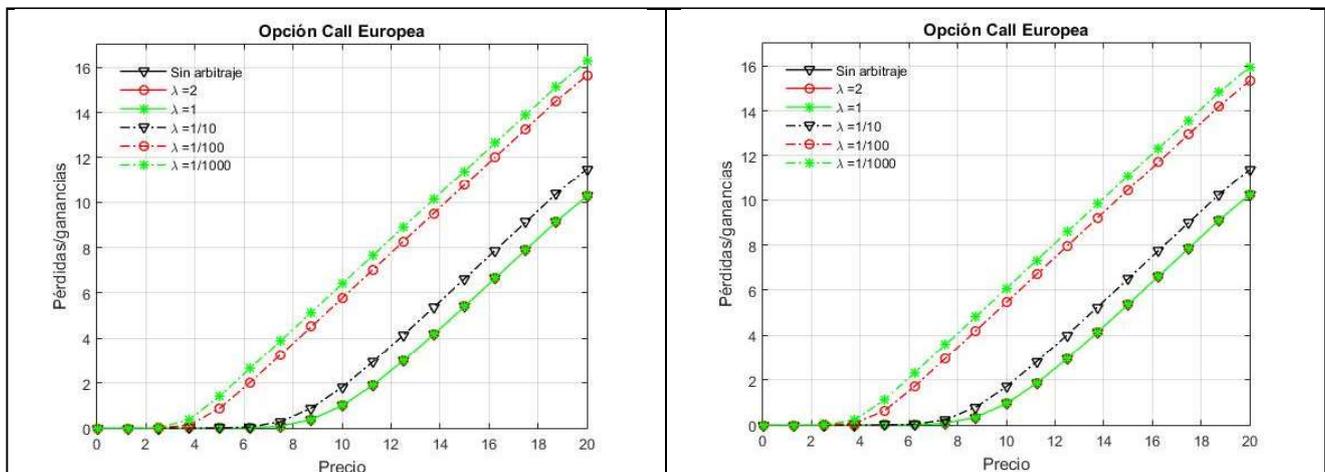
3.2. Resultados gráficos 2

En la gráfica 2 se presentan los resultados para diferentes valores de λ y diferentes tiempos de vencimiento. Se observa que el comportamiento es muy similar para cualquier vencimiento, el efecto es importante para el parámetro λ . Lo interesante aquí es que ocurre para diferentes tiempos de vencimiento, se analizan los casos de T en 0, 3, 6, 9 y 12 meses en los recuadros a,b,c,d,e y f respectivamente, y se observa conforme se va aumentando la fecha de vencimiento, el modelo converge con los

Gráfica 2. La opción CALL con diferentes valores de lambda en diferentes instantes de tiempo

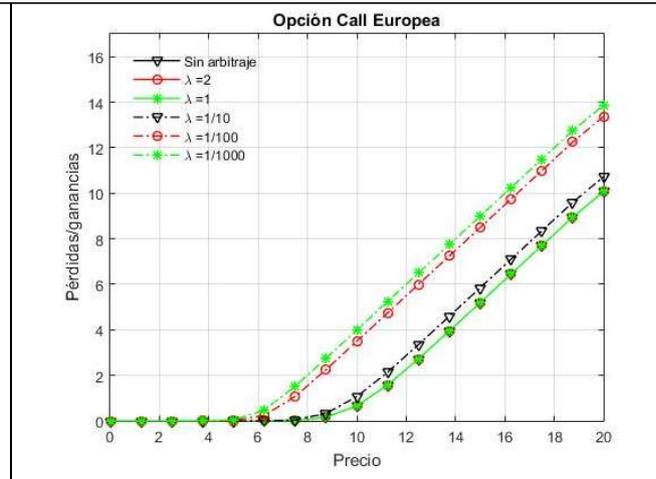
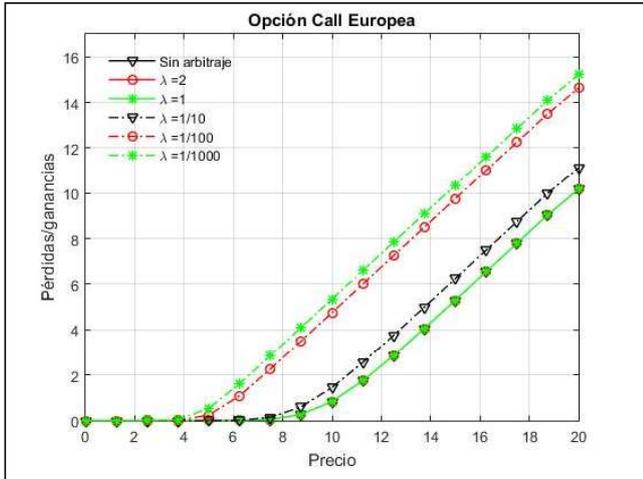
a) $T=0$

b) $T=1$ mes



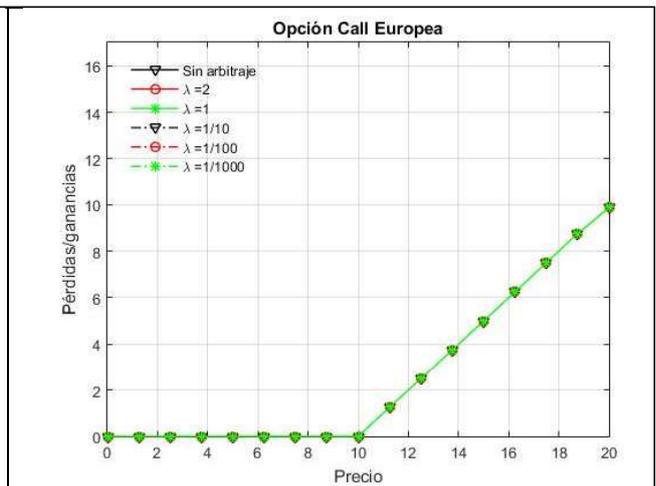
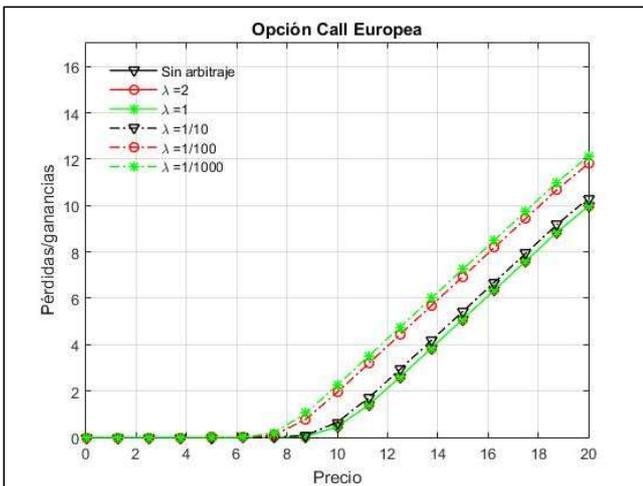
c) $T=3$ meses

d) $T=6$ meses



e) $T=9$ meses

f) $T=12$ meses



Fuente: elaboración propia.

resultados del caso sin arbitraje. Sería importante señalar que en estos casos analizados cuando el modelo tiende al caso sin arbitraje. El caso del put es muy similar.

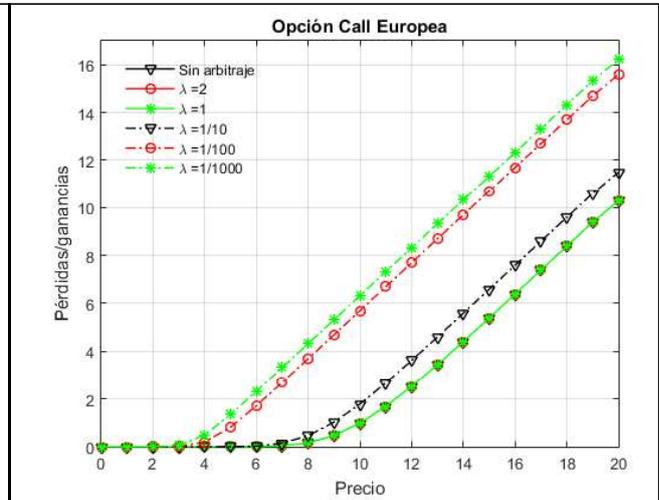
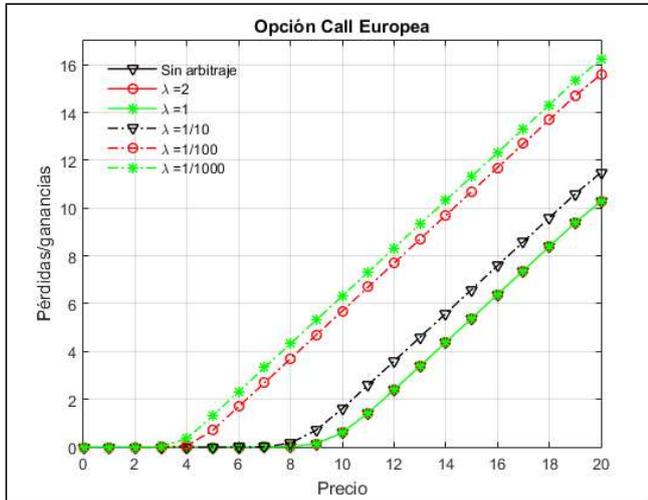
3.3. Resultados gráficos 3

Otro parámetro muy importante en la valuación de opciones es la volatilidad σ . La gráfica 3 muestra el comportamiento de la solución para diferentes valores de la volatilidad en un tiempo fijo ($T = 3$ meses). Se puede observar cómo la curva sube más rápidamente conforme σ aumenta. Esto significa que el valor de la opción crece más rápidamente conforme la volatilidad y el precio del subyacente aumentan, como era de esperarse.

Gráfica 3. La opción CALL con diferentes valores de lambda en diferentes valores de sigma

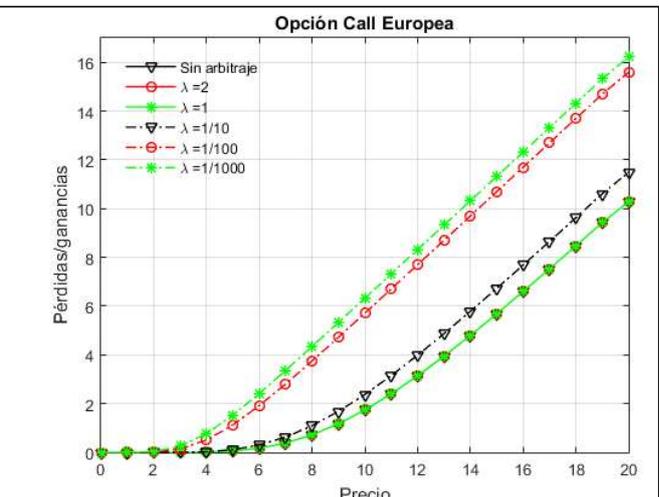
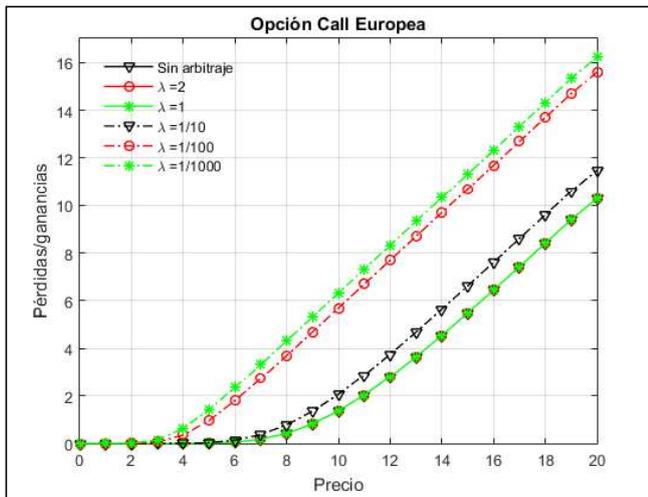
a) $\sigma = 0.10, T=3$ meses

b) $\sigma = 0.20, T=3$ meses



c) $\sigma = 0.30, T=3$ meses

d) $\sigma = 0.40, T=3$ meses



Fuente: elaboración propia.

Según las pruebas realizadas en Matlab de la solución del B&S, el método explícito es rápido y proporciona buenos resultados, sin embargo, está sujeto a condiciones muy específicas para que el método sea convergente.

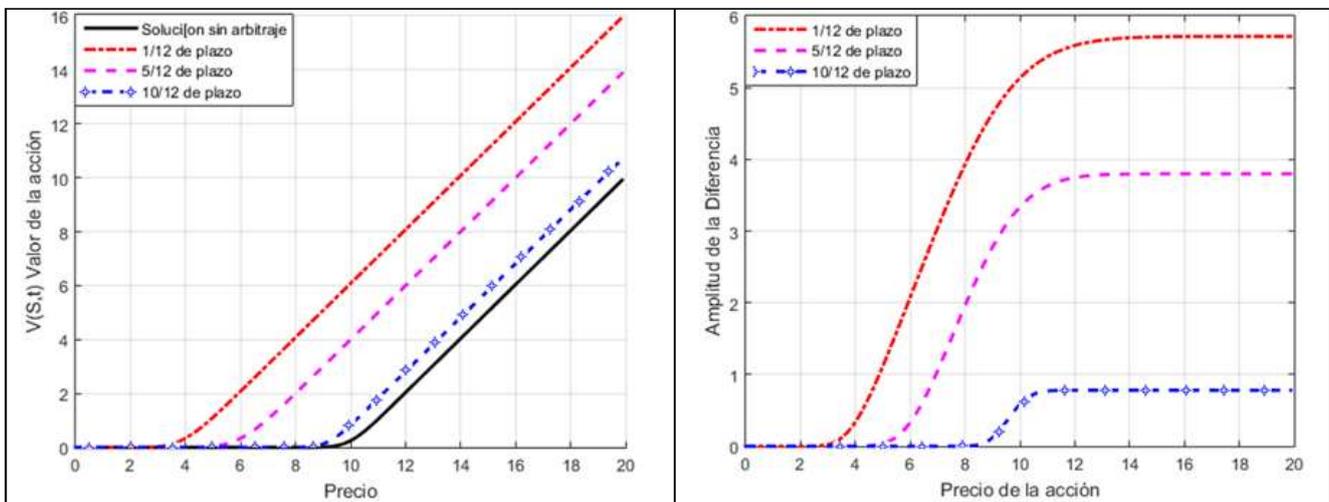
3.4. Resultados gráficos 4

Para complementar el comportamiento de la solución encontrada, en la gráfica 4.a, se muestra la forma en que evoluciona la solución con arbitraje

Gráfica 4. La opción CALL en diferentes valores de T con parámetros σ y λ fijos

a) $\sigma = 0,20$, $\lambda = 1/1000$

b) Diferencia entre la solución, con y sin arbitraje



Fuente: elaboración propia.

en diferentes instantes de tiempo. Y en la gráfica 4.b, se muestra la diferencia entre la solución con arbitraje y su convergencia.

Se realizaron pruebas con mallas de datos de 6400×6400 , en donde la variable temporal ($T = 1$ año) se dividió en tamaños de paso de longitud $\Delta t = 1/6400$, la variable del precio del subyacente en tamaños de paso de longitud $\Delta s = 1/640$, con un precio máximo de la acción de 20 y volatilidad $0.1 \leq \sigma \leq 0.4$. Con este conjunto de valores, la metodología propuesta para el modelo con arbitraje, converge adecuadamente. El comportamiento de la solución numérica encontrada, es comparable a los resultados obtenidos por Contreras *et al.* (2018), quienes utilizan una metodología diferente.

Conclusiones

Como se ha mencionado en una situación de equilibrio (en ausencia de arbitraje) los modelos de economía y finanzas en general se utilizan para determinar el precio neutral al riesgo para derivados. La aportación del presente trabajo es que se propone una solución al modelo de Black-Scholes con existencia de arbitraje mediante una solución numérica con la intención de aportar una explicación a la diferencia entre los valores y teóricos de las primas de las opciones financieras.

En esta propuesta se plantea una solución a la ecuación de Black-Scholes, con un arbitraje modelado mediante un impulso que decae exponencialmente en el tiempo, con una velocidad determinada por el parámetro λ . Después de aplicar la solución numérica es importante observar gráficamente lo que ocurre con el valor de la opción para diferentes valores de λ . Cuando $\lambda \rightarrow \infty$, el valor de la opción se aproxima al valor del modelo sin arbitraje, y en el caso donde $\lambda \rightarrow 0$, el valor de la opción se aleja del valor sin arbitraje y se posiciona arriba de la opción. En los mercados reales, la diferencia entre precios, debida a la ineficiencia de los mercados, genera oportunidades de arbitraje en instantes cortos de tiempo.

Las condiciones de frontera, para el esquema numérico, se definieron a partir de argumentos financieros típicos que se presentan en los mercados. El esquema empleado es estable y converge, siempre y cuando se cumplan las condiciones descritas en la sección 3.1.

Otras líneas de investigación posibles son las de trabajar con arbitraje virtual empleando expresiones analíticas diferentes al impulso que decae exponencialmente. Por ejemplo, un pulso gaussiano, entre otras opciones. También, es posible utilizar otros métodos de diferencia finitas o emplear alternativas diferentes para aproximar la volatilidad.

Referencias bibliográficas

- Ankudinova, J. y Ehrhardt, M. (2008). "On the Numerical Solution of Nonlinear Black-Scholes Equations, Computers and Mathematics with Applications", núm. 56, pp 799-812.
- Aragones, J. y Marcareñas, J. (2010). "La eficiencia y el equilibrio en los mercados de Capital", *Análisis Financiero*, núm. 64, 1994, pp. 76-89.
- Black, F. y Scholes M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate". *Journal of Political Economy*, núm. núm, 81, pp. 637-659.
- Contreras, M.; Montalva, R.; Pellicer, R. y Villena, M. (2010). "Dynamic Option Pricing with Endogenous Stochastic Arbitrage", *Physica A*, núm. 389, pp 3552- 3564.
- Contreras, M.; Montalva, R.; Pellicer, R.; Villena, M. y Santiagos, D. (2018). "Calibration and Simulation of Arbitrage Effects in a Non-Equilibrium Quantum Black-Scholes Model by Using Semiclassical Methods", *Journal of Mathematical Finance*, March 21, arXiv:1512.05377v1 [q-fin.MF].

- Day, M. (2011). "Black-Scholes Option Pricing: PDEs, Probability, and Matlab", Department of Mathematics, Virginia Tech, May 4.
- Fama, E. F. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". *The Journal of Finance*, vol. 25, núm. 2, pp. 383-417.
- Farinelli S. (2014). "Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics". PDF, [en línea] Recuperado Octubre 2014; Disponible en <http://arxi.org/pdf/0910.1671.pdf>.
- Fedotov S. y Panayides S., (2005). "Arbitrage Return and its Implication for Option Pricing". *Physica A*, núm. 345, pp. 207-217.
- Hackmann, D. (2009). "Solving the Black Scholes Equation Using a Finite Difference Method"; PDF. [en línea] Recuperado en Abril 2016; Disponible en <http://math.yorku.ca/~dhackman/BlackScholes7.pdf>.
- Haven E. (2002). "A Discussion on Embedding the Black-Scholes Option Pricing Model in a Quantum Physics Setting". *Physica A*, núm. 304, pp. 507-524.
- Hull J. (2010). *Options, Futures, and Other Derivates*. Prentice Hall, (5ta Ed), pp 744.
- Hull, J. C. (2014). *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. (8a Ed.), Pearson, pp. 607.
- Ilinski K. y Kalinin G. (1998). Black-Scholes Equation from Gauge Theory of Arbitrage; PDF. [en línea], Recuperado en octubre 2014; Disponible en <http://arxi.org/abs/hep-th/9712034>.
- Ilinski K. (2001). "Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing". John Wiley and Sons, NY USA, p. 326.
- Mirador M. (2009). "Finite Differences Schemes for Pricing of European and American Options". IST Technical University of Lisbon Lisbon, Portugal, November.
- Otto M. (1999). "Stochastic Relaxational Dynamics Applied to Finance: Towards Non-Equilibrium Option Pricing Theory". *The European Physical Journal B*, núm. 2, pp. 383-394.
- Sierra Juárez, G. (2015). "Modelación de Medidas y Norma en Finanzas". *Revista Digital Estocástica. Finanzas y Riesgo*, vol. 5, núm. 2, julio-diciembre; pp 143-186.
- Sornette D. (1998). "Gauge Theory of Finance". PDF [en línea], Recuperado en abril 2017; Disponible en <http://arxi.org/abs/cond-mat/98044045>.
- Sukhomlin N. (2007). "The Black-Scholes Type Financial Models and the Arbitrage Opportunities". *Revista de Matemática: Teorías y Aplicaciones* vol. 14, núm. 1, pp. 1-6.

Wilmott P. (2005). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, (First Edition), New York USA, John Wiley & Son, Ltd Edition

Young K. (1999). "Foreign Exchange Market as a Lattice Gauge Theory". *Am. J. Phys.* vol. 67, núm. 10, pp. 862-868.

Zhou S. y Xiao L. (2010). "An Application of Symmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance". *Symmetry* 2010, núm. 2, pp. 1763-1775.

Anexo

Algoritmo para resolver la ecuación de B-S con arbitraje. Opción Call europea

Entradas:

r (tasa de interés), σ (volatilidad), S_{max} (precio máximo de la acción), S_{min} (precio mínimo de la acción), T (tiempo de expiración del contrato), E (Precio de ejercicio del subyacente), q (dividendos), M (número de puntos en la variable temporal), (número de puntos para el precio) λ (argumento de la función exponencial, que funciona como arbitraje), x_n (valor inicial del pulso exponencial).

Salida:

$$V_{i,j} = V(S_i, t_j) \text{ (matriz de valores de la opción)}$$

Asignar

$$\Delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{N} \text{ (tamaño de paso en e precio)}$$

$$\Delta t = \frac{T}{M} \text{ (tamaño de paso en el tiempo)}$$

$$V_{i,1} = \max(S_{min} - K, 0)$$

$$V_{1,j} = 0$$

$$V_{N,j} = ((N - 1) * \Delta S + S_{min}) - E * e^{-r(T-t_j)}$$

$$x_1 = 1$$

Calcular los coeficientes iniciales a_1^*, b_1^*, c_1^* , en el modelo con arbitraje (sección 4)

Para j , desde 2 hasta N

Para i , desde 2 hasta $M-1$

$$V_{i,j} = a_j^* V_{i+1,j-1} + b_j^* V_{i+1,j} + c_j^* V_{i+1,j+1}$$

Calcular a_i^*, b_i^*, c_i^* y $x_j = x_{j-1} * (2 - \lambda * \Delta t) / (2 + \lambda * \Delta t)$

Fin del ciclo para i

Fin del ciclo para j