

La profundidad de mercado y el impacto cruzado de precios

Market depth and the cross impact of prices

Erick Treviño Aguilar*

Refugio Vallejo Gutiérrez**

Fecha de recepción: 3 de febrero de 2015

Fecha de aprobación: 22 de junio de 2015

* Universidad de Guanajuato
Departamento Economía y Finanzas
erick.trevino@ugto.mx

** Universidad de Guanajuato
Departamento Economía y Finanzas
cuco@ugto.mx

RESUMEN

En el mundo de las finanzas escuchamos muchas veces hablar de la profundidad de mercado, y de impacto cruzado de precios. Intuitivamente hablando, las ideas son claras, pero pocas veces se hacen precisas. En un contexto multidimensional en el que se realizan transacciones con más de un activo simultáneamente, tiene sentido hablar del impacto cruzado, un parámetro que tiene relación con la correlación de los valores fundamentales de los activos, pero los conceptos no son equivalentes. En esta nota se explica cómo en el modelo de Kyle [1985] es posible aterrizar las nociones intuitivas y convertirlas en conceptos precisos. En particular se demostrará la existencia del impacto cruzado sin correlación de los valores. Recíprocamente, se demostrará la existencia de correlación de los valores fundamentales y aun así no existir un efecto de impacto cruzado.

Clasificación JEL: C10, C13, C60

Palabras clave: correlación, equilibrio, impacto cruzado, modelo de Kyle, profundidad de mercado.

ABSTRACT

In the world of finance we often hear about the depth of the market and the cross impact of prices. Intuitively speaking, the ideas are clear but are seldom precise. In a multidimensional context in which transactions are made simultaneously with more than one asset, it makes sense to talk about cross impact, a parameter that is related to the correlation of the asset's fundamental values, but the concepts are not equivalent. This article explains how it is possible to turn the intuitive notions into precise concepts using the Kyle model [1985]. In particular the existence of cross impact without values correlation will be demonstrated. Conversely, it will be demonstrated that the correlation of the fundamental values exists and yet there is no cross impact effect.

JEL Classification: C10, C13, C60

Key words: *correlation, equilibrium, cross impact, Kyle model, market depth.*

Introducción

Una ley básica en economía es la ley de la oferta y la demanda. Intuitivamente hablando, esta ley dice que los precios se determinan como aquellos en donde la oferta iguala a la demanda y permite entender la forma en que los precios se relacionan con las estrategias de los participantes del mercado. Por ejemplo, si un vendedor llega al mercado ofreciendo una dotación grande de un producto, es decir la oferta aumenta sin que cambie nada más, entonces el mercado “reacciona” bajando el precio al cual se está dispuesto a comprar. La acción del vendedor tiene un *costo de impacto* (price impact) y la idea básica es que existe un cambio de precios observados como consecuencia al flujo de órdenes. Parece evidente que existen mejores alternativas en el interés del vendedor que simplemente llegar al mercado y emitir una orden de venta de gran tamaño. Es mejor dividir la dotación en pequeños lotes y distribuirlos en órdenes de venta a lo largo de una ventana de tiempo. Las posibilidades en que se puede realizar la distribución de lotes son inmensas, más exactamente, son infinitas. Entonces una decisión a la que se enfrenta el vendedor es la de determinar la mejor de las estrategias para disminuir su costo de impacto. Ésta es una pregunta que no se puede responder sin antes entender cuáles son los factores que influyen en la forma que los mercados reaccionan y de ésta, el costo de impacto que tiene la estrategia del vendedor.

Así planteadas las preguntas (¿Cuáles son los factores que influyen en la reacción de los mercados?, ¿Cuál es la mejor estrategia para liquidar una dotación grande?) son muy generales y en formas especiales han ocupado a especialistas en las últimas décadas. Es necesario acotar las preguntas y hacerlas más específicas. En este trabajo se considerarán mercados financieros en los que existe evidencia empírica de que las dotaciones grandes son divididas en lotes pequeños que se van llevando al mercado dinámicamente. Por ejemplo, en un estudio empírico, Chan y Lakonishok [1995] analizan una muestra de 1.2 millones de transacciones y encontraron que más de 53% se completaban en un período de cuatro o más días. En concordancia, Vaglica *et al.* [2008] documentan que el número de transacciones en que un lote se divide es proporcional al valor mercado del mismo. Bouchaud *et al.* [2009]

discuten cómo la ejecución gradual de lotes es un factor que genera memoria larga en la serie de tiempo de transacciones. Este fenómeno de distribuir dinámicamente la ejecución de una dotación, ha llevado a proponer modelos en los que se estudia el problema de ejecución óptima, ver e.g., Bertsimas y Lo [1998], Almgren y Chriss [2001], Obizhaeva y Wang [2013], Bank y Fruth [2014]. Un concepto fundamental que caracteriza la reacción del mercado a un cambio en las curvas de demanda/oferta es la *profundidad del mercado* (depthness) y es el tema central del presente trabajo. Intuitivamente hablando, la profundidad de mercado es la cantidad adicional necesaria que se debe demandar para inducir el incremento de una unidad monetaria en el precio-marcado en el mercado.

En un contexto multidimensional en el que se opera con varios productos simultáneamente surge el fenómeno de *impacto cruzado* (cross impact), y continúa relacionado a la noción de profundidad de mercado. La idea esencial es que existen productos cuyos precios están relacionados, y una transacción de gran magnitud que genera un movimiento significativo del precio del producto, implica también un movimiento del producto relacionado. En analogía con la profundidad de mercado surge la pregunta: ¿Cuál es la cantidad necesaria que se debe demandar del primer producto para generar un aumento de una unidad monetaria en el segundo? La correlación de los valores fundamentales está incorporada en dicho impacto cruzado pero sólo en casos muy especiales se pueden identificar. En general, el impacto cruzado incorpora otros aspectos del mercado. En efecto, los precios observados en mercados financieros presentan varios componentes, ver e.g., Fama y French [1988]. Incorporar explícitamente dicha estructura en procedimientos estadísticos es crucial, ver e.g., Ait-Sahalia y Yu. [2009]. El primer componente incorpora el valor fundamental de la acción, mientras que el segundo captura la actividad transaccional y provisión de liquidez. En este sentido, Underwood [2009] presenta evidencia empírica de la capacidad explicativa del flujo de órdenes en el mercado de bonos en rendimientos de acciones. Harford y Kaul [2005] muestran la existencia de factores comunes entre rendimientos de acciones cotizando en el índice S&P 500 y el volumen de transacciones, siendo el efecto más significativo para acciones que forman parte del índice. Hasbrouck y Seppi [2001] presentan evidencia empírica con datos del mercado de intercambio de acciones de Nueva York (NYSE) en el que el flujo de órdenes y rendimiento de precios tienen factores correlacionados. Resultados análogos aunque con métodos diferentes, son válidos en el mercado financiero de intercambio de futuros en China (CFFEX); ver Wang *et al.* [2013]. Bernhardt

y Taub [2008] desarrollan un modelo teórico en el que demuestran que la covarianza de los precios es determinada por los valores fundamentales de los activos mientras que la covarianza del flujo de órdenes es determinada por efectos de liquidez. En el equilibrio del modelo, se da sustento teórico a los resultados empíricos de Hasbrouck y Seppi [2001]. Chordia *et al.* [2011] documentan empíricamente con datos de mercados financieros en Estados Unidos (NYSE y NASDAQ) la generación de autocorrelación cruzada en rendimientos bajo condiciones de iliquidez. El efecto es transmitido de las acciones de mayor tamaño a las menores. Esto concuerda con los resultados de Pasquariello y Vega [2013] quienes demuestran teóricamente, y verifican empíricamente, que la interacción estratégica de ocultar ventajas informacionales generan en equilibrio, impacto cruzado de precios.

Los trabajos anteriormente citados evidencian (principalmente de manera empírica) que el impacto cruzado incorpora factores comunes de volúmenes transaccionales junto con valores fundamentales, que ante la heterogeneidad de información y motivaciones, generan un mecanismo de acoplamiento. Nuestro objetivo en esta nota es dar evidencia teórica de estos hechos empíricos. Para este fin, se considerará el modelo de Kyle [1985] con dos activos financieros y se darán condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio lineal en el que exista un efecto de impacto cruzado aun cuando los valores fundamentales sean no correlacionados; ver Proposición 3.3. Recíprocamente, se darán condiciones generales para la existencia de correlación de valores fundamentales sin efecto de impacto cruzado; ver Proposición 3.4.

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 1, se amplía la introducción y se presentan con mayor detalle los elementos necesarios para desarrollar los resultados del trabajo. En la Subsección 1.1, se presenta un breve panorama de los mercados de activos que están organizados mediante un libro electrónico de órdenes (LEO), así como una breve taxonomía de los tres diferentes tipos de participantes que se considerarán. En la Subsección 1.2, se describe el modelo de Kyle [1985] y se identifican las características de profundidad de mercado. Se concluye esta parte con una revisión breve de la literatura cercana al modelo de Kyle y que tiene relación con el presente trabajo. En la Subsección 1.3, se describe la versión bidimensional del modelo de Kyle en el que se identifica el impacto cruzado. En la Sección 2, se presentan los resultados teóricos que sustentan la distinción entre impacto cruzado y correlación de los valores fundamentales. La Sección 3, concluye el trabajo con una discusión.

1. Marco teórico

1.1 Mercados financieros y caracterización de los agentes

Los mercados financieros están conformados por un conjunto de participantes y reglas bajo las cuales interactúan. Hoy en día la gran mayoría de los mercados financieros están organizados mediante libros electrónicos de órdenes (LEO) tal como es el caso de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). El LEO está basado en el Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (SENTRA) y formalizada su operación en la circular 10-237 de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público. Los proveedores de servicios financieros ofrecen diversos canales para interactuar con dicho mecanismo, principalmente sobre Internet. En esta clase de mercados, los participantes emiten órdenes de acuerdo a sus estrategias de inversión, y el libro electrónico lleva un registro y control de toda la actividad. El libro está conformado por dos lados, en el primero se lleva el registro de las órdenes de compra y en el otro el registro de las órdenes de venta. Existen dos tipos de órdenes muy importantes. Las *órdenes pasivas*, también llamadas órdenes de mercado, son aquellas en las que un participante emite una orden de compra (o venta) por un monto de activos sin especificar un precio. Cuando llega una orden del otro lado del libro para el mismo activo, se ejecuta la transacción y ambas órdenes se liquidan total o parcialmente dependiendo del balance de los montos. Las órdenes pasivas aceptan el precio de la contraparte. En contraste, las *órdenes limitadas* no sólo especifican un monto del activo a transaccionar, sino que también el precio al cual se está dispuesto a realizar la operación. En este sentido, estos dos tipos de órdenes ofrecen versatilidad en la implementación de estrategias de inversión a los participantes en función de sus objetivos. El efecto que tienen en el mercado esta clase de órdenes es alto, ver e.g., Hautsch y Huang [2012]. La microestructura de mercados financieros organizados por un LEO ha recibido mucha atención, ver Gould *et al.* [2013] para una revisión bibliográfica sistemática de modelos, observaciones empíricas y hechos estilizados.

En los mercados organizados por un LEO existe una clase muy especial de participante denominado *agente creador de mercado* (market maker). Un creador de mercado es un participante que ha acordado contractualmente que cotizará precios de compra y de venta en forma continua. El creador de mercado está obligado a publicar en todo momento precios a los que está dispuesto a comprar o vender el valor cotizado. Los precios se difunden a través

del sistema del libro electrónico y si llegan otros participantes interesados en “cruzar” dicha cotización, entonces el creador de mercado está obligado a servir la operación. La actividad del creador de mercado involucra el riesgo en todo momento, pero en premio a éste, tiene la oportunidad de generar ganancias debido al diferencial (spread) entre los mejores precios de compra y venta. Su función es fundamental porque garantiza la liquidez del mercado en los dos lados del libro.

Considérese la siguiente situación. Un *agente informado* es un participante del mercado que sistemáticamente monitorea la evolución del mercado así como diversos indicadores del desempeño de las empresas que emiten los activos. El término puede referirse a una persona o a una institución. Al analizar la información determina que es óptimo adquirir acciones de un emisor en particular. Entonces va al mercado y emite una orden de compra. Supóngase que en el mercado todos los participantes son agentes informados con la misma información. Un momento de reflexión permite llegar a la observación de que el agente tendrá el problema de no encontrar una orden del otro lado del libro con la que se pueda liquidar la transacción. Efectivamente, si todos los participantes son racionales y cuentan con la misma información, también querrán comprar. Ni siquiera la existencia del creador de mercado garantiza la operación ya que el precio de venta que ellos publicarán será tan alto que desincentivará al agente informado. Esto sugiere que bajo la situación planteada, habrá una escasa actividad con muy pocos registros en el libro de órdenes, y con una cantidad todavía menor de ellas que se pueden liquidar. Es posible diseñar modelos que capturen el fenómeno de que existe una relación entre la diferenciación de información y el nivel de actividad en el mercado; ver e.g., Batthacharya *et al.* [1995]. Sin embargo, los mercados financieros gozan de gran actividad. Por ejemplo, Nanex una empresa de servicios de información, estima 8 billones de órdenes por día en algunos de los mercados con tecnología de “transacción de alta frecuencia”.

Entonces, en los mercados financieros existen diferentes clases de participantes que cuentan con diferentes niveles de información. La heterogeneidad en la información genera una diversidad de fenómenos que han sido tema de investigación en la literatura especializada. Veamos algunos de ellos. Bajo ciertas condiciones de mercado, la información diferenciada es agregada y en equilibrio integrada en los precios; ver e.g., Ostrovsky [2012]. Así mismo, Boulatov *et al.* [2013] dan evidencia empírica en que información privada de firmas explican autocorrelaciones positivas cruzadas en rendimientos de activos pertenecientes al mismo sector industrial. Información

en la forma de nuevos eventos, particularmente cuando se anuncian ganancias de una firma emisora, impacta precios en otras acciones. Esto es así, aun cuando las emisoras pertenezcan a distintos sectores industriales; ver e.g., Chakrabarty y Moulton [2012]. En mercados financieros integrados, diferencias significativas en información privada son elementos que aunados con la interconectividad, incrementan la probabilidad de un contagio generalizado de una anomalía localizada en un mercado en específico, ver e.g., Pasquariello [2007]. Resulta entonces razonable la propuesta recurrente de la diseminación de información, ver e.g., Andrade *et al.* [2013]. En el otro extremo de homogeneidad informacional, Andrade *et al.* [2008] desarrollan un modelo con datos del mercado financiero de intercambio de acciones en Taiwan (TSE) en el que no hay ventaja informacional y muestran la generación de volatilidad en exceso debido al flujo de órdenes de participantes que tienen diferentes niveles de tolerancia al riesgo.

En el modelo de Kyle [1985] que se presentará en la Subsección 1.2 se distinguen entre dos clases de participantes además de los creadores de mercado. Los agentes informados y los *participantes ruidosos* (Noisy traders). Como ya se mencionó anteriormente, los agentes informados monitorean la evolución del mercado así como diversos indicadores de desempeño. Ésta es información pública pero ciertamente requiere una capacidad de recolección y análisis de datos. También pueden adquirir un mayor nivel de información y efectivamente en una tendencia muy vanguardista existen empresas dedicadas a proveer servicios de información; ver por ejemplo la nota periodística Rothfeld y Patterson [2013]. En el polo opuesto se encuentran los participantes ruidosos. En armonía con la discusión de Black [1986] se puede decir que los participantes ruidosos son los que hacen que los mercados financieros sean factibles, aun cuando los hace imperfectos. Si no existieran los agentes ruidosos existiría un nivel muy bajo de actividad de transacción y no se verían operaciones en forma regular. Un participante ruidoso posee información acerca del precio futuro del activo que sin embargo no es confiable y no representa ninguna ventaja competitiva. Los agentes informados pueden explotar esta falla hasta cierta proporción; ver Bradford De Long *et al.* [1990].

1.2 El modelo de Kyle

En el modelo de Kyle [1985] interaccionan tres tipos de participantes:

- Agentes informados quienes tienen información del valor del activo en una fecha futura.

- Agentes creadores de mercado quienes emiten precios de compra/venta.
- Participantes ruidosos cuya información es incorrecta y en la terminología de Bradford De Long *et al.* [1990] consiste tan sólo de pseudo-señales.

Por cada clase se considera un único representante, y cada uno de ellos emite una orden de compra (o venta) de un único activo. El valor del activo es representado por una variable aleatoria S_1 que tiene distribución normal de media s_1 y varianza $\sigma_{S_1}^2$. La demanda de los participantes ruidosos viene dada por una variable aleatoria Y_1 con distribución normal de media cero y varianza $\sigma_{Y_1}^2$. La cantidad transaccionada por el agente informado es denotada por X_1 . Las variables aleatorias Y_1 y S_1 son independientes.

La transacción del activo ocurre en dos pasos. En el primero, el agente informado elige la cantidad X_1 y emite una orden pasiva. Al momento de tomar su decisión él tiene conocimiento del valor del activo S_1 pero no conoce la demanda del participante ruidoso Y_1 . En el paso dos, el creador de mercado determina el precio P al cual cotizará el activo y emite una orden limitada. Al tomar su decisión, él observa la demanda agregada $X_1 + Y_1$ tanto del agente informado como del participante ruidoso, pero no puede observar en forma aislada ninguna de las cantidades X_1 o Y_1 . Las ganancias del agente informado, denotado $\Pi(X_1, P_1)$, se generan a partir de la divergencia entre el valor del activo y el precio que cotiza el creador de mercado, es decir:

$$\Pi(X_1, P_1) = (S_1 - P_1)X_1. \quad (1)$$

La siguiente definición establece el mecanismo bajo el cual el agente informado determina su demanda al utilizar al máximo su información privada. En la definición, se fija un espacio de probabilidad $(\Omega, \sigma, \mathbf{P})$. El valor esperado de una variable aleatoria Z condicionada a otra variable Y se denotará $E[Z|\sigma(Y)]$.

Definición 1.1 Un equilibrio es un par de variables aleatorias (X_1^*, P_1^*) que determina la demanda del agente informado X_1^* y el precio que cotiza el creador del mercado P_1^* y que satisface la condición de optimalidad

$$E[\Pi(X_1^*, P_1^*) | \sigma(S_1)] \geq E[\Pi(X', P_1^*) | \sigma(S_1)], \quad (2)$$

para X' variable de demanda,

y la condición de eficiencia de mercado

$$P_1^* = E[S_1 | \sigma(X_1 + Y_1)] \quad (3)$$

Esta es la noción de equilibrio que introduce y analiza Kyle [1985]. La ecuación (2) es una condición de optimalidad que quiere decir que el agente informado elegirá su demanda de tal forma que sus ganancias condicionadas al conocimiento del valor de la acción S_1 son máximas. La ecuación (3) es una condición de eficiencia de mercado. Se interpreta como que el creador de mercado genera predicciones correctas del valor del activo dado su conocimiento de la demanda agregada.

Kyle [1985] demuestra que existe un único equilibrio en la clase de vectores de demanda y precio que dependen linealmente de las variables que definen el modelo, es decir el valor del activo S_1 y la demanda del participante ruidoso Y_1 . Para describir la forma de dicho equilibrio necesitaremos introducir la siguiente constante:

$$\lambda := 2 \frac{\sigma_{S_1}}{\sigma_{Y_1}}. \quad (4)$$

La demanda para el agente informado dada por

$$X_1^* = \frac{2}{\lambda} (S_1 - s_1), \quad (5)$$

y el precio que emite el creador de mercado

$$P_1^* = s_1 + \lambda(X_1^* + Y_1), \quad (6)$$

determinan el único equilibrio lineal (X_1^*, P_1^*) .

Veamos las propiedades del equilibrio lineal determinado por las ecuaciones (5) y (6). La demanda X_1^* del agente informado es proporcional a la

realización del precio S_1 menos su valor esperado s_1 . El valor del activo puede tomar valores por arriba o por abajo de su valor esperado. Como consecuencia, la estrategia en equilibrio que sigue el agente informado puede implicar vender o comprar el activo dependiendo de la realización del precio S_1 . Es decir que en equilibrio el agente informado puede transaccionar en ambos lados del libro.

El precio de equilibrio P_1^* cotizado por el creador de mercado es proporcional a la demanda agregada que exhibe el agente informado y el participante ruidoso. Es decir que la constante de proporcionalidad λ se puede interpretar como la elasticidad del precio relativo a la demanda agregada. Si la demanda agregada en equilibrio $X_1^* + Y_1$ aumenta en $\frac{1}{\lambda}$ unidades monetarias, entonces el precio que cotiza el creador de mercado en equilibrio aumenta en una unidad monetaria.

La *profundidad del mercado* en el modelo de Kyle se determina por

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{S_1}},$$

y representa un balance entre la incertidumbre (expresada mediante la desviación estándar σ_{Y_1}) de la estrategia que adoptará el participante ruidoso y la incertidumbre (expresada mediante la desviación estándar σ_{S_1}) del valor del activo. Este resultado es intuitivo. Menor nivel de incertidumbre en el valor del activo, o utilizando el argot financiero menor volatilidad, siempre se asocia con mayor confianza de los participantes y mayor estabilidad del precio. Mayor nivel de incertidumbre en la estrategia del participante ruidoso, es decir mayor nivel en la desviación estándar σ_{Y_1} , aumenta la profundidad del mercado ya que aumenta la probabilidad de que al enviar una cotización al libro de órdenes, habrá un participante ruidoso que esté dispuesto a cruzar la operación, resultando nuevamente en la estabilidad del precio.

1.3 Extensiones y generalizaciones

La literatura en relación de lo que se conoce como microestructura de mercados y en especial la formación de precios, es extensa. De acuerdo a Biais *et al.* [2005] se pueden distinguir grandes temas tales como: costos de transacción, información asimétrica, costo de inventario, finanzas corporativas

y valuación de activos, entre otros. El modelo de Kyle se ubica en el tema de información asimétrica ya que distingue la información que poseen los agentes informados de los creadores de mercado. Una revisión de la literatura especializada motivada por el modelo de Kyle, está fuera del objetivo del presente trabajo. No obstante, en esta sección se mencionan algunas extensiones concretas que se han desarrollado en conexión al modelo de Kyle y con la que es posible situar el objetivo del presente trabajo de diferenciar el impacto cruzado de la correlación. Una revisión sistemática de la literatura en micro-estructura de mercados, y en particular el modelo de Kyle puede consultarse en Biais *et al.* [2005].

En el modelo original de Kyle las variables aleatorias tienen distribución normal. La existencia de equilibrio para distribuciones más generales fue demostrada por Rochet y Vila [1994]. En dicho artículo, los autores formulan una variante al modelo de Kyle en la que los agentes informados conocen de antemano la transacción de los participantes ruidosos y demuestran la existencia y unicidad del equilibrio, sin suponer que las variables del modelo tienen distribución normal.

Trabajos en donde se demuestra la existencia de equilibrio en el que se transacciona un conjunto de activos en el mercado, es decir una formulación multivariada, incluyen Caballè y Krishnan [1994], Lasserre [2004] y Vitale [2012]. La lista no es exhaustiva e incluye diferentes formulaciones. Algo en común en ellos es la hipótesis de distribuciones normales y evidencian que el incremento en la complejidad de una dimensión al caso multivariado es significativo. Otro modelo bien conocido que también incorpora un contexto multivariado es formulado por Admati [1985]. El trabajo de Admati es contemporáneo al artículo de Kyle pero su objetivo es diferente, siendo éste el estudio de la agregación de información. En relación al presente trabajo, son éstos los artículos que tienen la relación más cercana debido a que aquí se considera una versión multivariada del modelo de Kyle. Sin embargo, el objetivo aquí es el de identificar y diferenciar los conceptos de impacto cruzado y correlación, mientras que en las anteriores referencias el objetivo es demostrar la existencia de equilibrio.

Una extensión al modelo de Kyle en la que se incorpora la aversión al riesgo es la obtenida por Cho y El Karoui [2000], quienes consideran distribuciones generales y caracterizan los precios y demanda de equilibrio y dan ejemplos con fórmulas exactas. Un modelo con aversión al riesgo en el que se dispone de un conjunto de activos, es la obtenida por Vitale [2012]. En este trabajo, el autor considera un agente informado adverso al riesgo que

maximiza una función de utilidad perteneciente a la familia exponencial que se conoce como CARA por sus siglas en inglés. Las distribuciones que se consideran en el trabajo son normales.

La primera formulación del modelo de Kyle en un contexto dinámico en tiempo continuo fue desarrollada por Back [1992]. En la extensión de Back se demuestra la existencia de equilibrio y la unicidad en una clase especial de estrategias. Al igual que en el modelo de Kyle, se considera un agente informado neutral al riesgo. Una versión del modelo de Back en la que el agente informado es adverso al riesgo y maximiza una función de utilidad es la desarrollada por Lasserre [2004].

Un estudio de la formación de precios de equilibrio en un contexto en que las distribuciones de las variables son inciertas y los agentes del mercado enfrentan ambigüedad de modelo, es el trabajo de Ozsoylev y Werner [2011]. En este contexto, se identifica cómo la ignorancia de las propiedades distribucionales del mercado conlleva alta volatilidad y falta de liquidez.

1.4 El modelo de Kyle en dos dimensiones

El modelo de Kyle considera un mercado con un único activo y tres diferentes clases de participantes. Al considerar mercados en los que se transacciona a la vez más de un activo, surge el fenómeno de impacto cruzado. Para concretar ideas consideremos un mercado en el que existen dos activos cuyos valores fundamentales S_1 y S_2 presentan correlación. Es posible conjeturar que al transaccionar uno de los activos entonces el segundo tendría que “reaccionar” debido a la correlación.

Por ejemplo, si se vende una dotación grande del primer activo y la correlación es positiva con el segundo, entonces es factible pensar en un precio posterior de ambos activos a la alza. Este simple razonamiento es de conocimiento común para todos los participantes del mercado y debe estar reflejado en sus estrategias. Retomando el tema principal del artículo, surge la interrogante de precisar el significado de la profundidad de mercado en este nuevo contexto, y la reacción que tiene el precio de uno de los activos dado que se transacciona en el otro. La conjetura en la que se identifica el impacto cruzado con la correlación no es del todo correcta: es posible que exista el impacto cruzado de precios aún cuando los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados; ver Proposición 3.3. También es posible que exista correlación y no obstante, el impacto cruzado sea cero; ver Proposición 3.4.

La versión bidimensional del modelo de Kyle se especifica de la siguiente forma. Existen dos activos cuyos valores son modelados por un vector $S := (S_1, S_2)$ con distribución normal bivariada de valor esperado $s := (s_1, s_2)$ y matriz de covarianzas Σ_S . La demanda del participante ruidoso en cada uno de los activos está dada por $Y := (Y_1, Y_2)$ y tiene una distribución normal bivariada con valor esperado $y := (y_1, y_2)$ y matriz de covarianzas Σ_Y . El agente informado decide su demanda en cada uno de los activos y lo denotamos $X := (X_1, X_2)$. El vector de valores S es independiente del vector de demanda Y . Las ganancias del agente informado se definen extendiendo la ecuación (1) al contexto bidimensional:

$$\Pi(X, P) = (S_1 - P_1)X_1 + (S_2 - P_2)X_2.$$

Las transacciones ocurren en dos pasos como en el modelo unidimensional de Kyle. Es decir, el agente informado y el agente ruidoso envían órdenes pasivas. El agente informado conoce el vector de valores S pero no la demanda del agente ruidoso. Posteriormente, el creador de mercado observa la demanda agregada $X + Y$ sin poder distinguir sus partes y envía órdenes limitadas.

La noción de equilibrio de Kyle en dos dimensiones es la siguiente.

Definición 1.2. *Un equilibrio es un vector de demanda $X^* := (X_1^*, X_2^*)$ y un vector de precios $P^* := (P_1^*, P_2^*)$ los cuales determinan la demanda del agente informado y los precios del creador de mercado respectivamente, y satisfacen las siguientes dos propiedades:*

$$E[\Pi(X^*, P^*) | \sigma(S)] \geq E[\Pi(X', P^*) | \sigma(S)], \text{ para } X' \text{ vector de demanda,}$$

y

$$P_i^* = E[S_i | \sigma(X^* + Y)], \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Las interpretaciones de las condiciones de equilibrio son similares al caso unidimensional. Considérense vectores *lineales* de demanda

$$X_1 = a_1 + b^{1,1} S_1 + b^{1,2} S_2, \quad (7)$$

$$X_2 = a_2 + b^{2,1} S_1 + b^{2,2} S_2, \quad (8)$$

y vectores *lineales* de precios

$$P_1 = u_1 + \frac{1}{2} \lambda^{1,1} (X_1 + Y_1) + \frac{1}{2} \lambda^{1,2} (X_2 + Y_2), \quad (9)$$

$$P_2 = u_2 + \frac{1}{2} \lambda^{2,1} (X_1 + Y_1) + \frac{1}{2} \lambda^{2,2} (X_2 + Y_2). \quad (10)$$

La clase de vectores lineales (9) y (10) capturan la idea de impacto cruzado: una demanda adicional $\frac{2}{\lambda^{1,2}}$ de unidades del segundo activo incrementa el precio del creador de mercado del primer activo en una unidad y esto cuantifica el impacto cruzado del segundo activo en el primero. Análogamente, $\frac{2}{\lambda^{2,1}}$ mide el efecto cruzado del primer activo en el segundo. Existe un equilibrio lineal cuyos parámetros involucran la correlación de los activos pero también incorpora información de la estrategia del participante ruidoso.

A manera de recordatorio, si A es una matriz cuadrada entonces su raíz cuadrada es una matriz que se denota $A^{\frac{1}{2}}$ y que satisface $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$. Mediante $A^{-\frac{1}{2}}$ se denota la matriz inversa de la raíz cuadrada de la matriz A .

Se necesitarán las siguientes matrices

$$\Lambda := \Sigma_Y^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \Sigma_Y^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

y

$$M := \Sigma_Y^{\frac{1}{2}} \Sigma_S \Sigma_Y^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Existe un equilibrio especificado de la siguiente forma:

$$X^* = \Lambda^{-1}(S - s), \quad (13)$$

$$P^* = (s_1, s_2) + \frac{1}{2} \Lambda (X^* + Y - y). \quad (14)$$

La demostración es una adaptación del argumento de Kyle [1985]. Teorema 1, utilizando el hecho de que las distribuciones del modelo son bivariadas normales; el problema multidimensional más general con N activos y K agentes informados e información heterogénea ha sido resuelto por Caballè y Krishnan [1994] y con un agente informado adverso al riesgo por Vitale [2012]. Obsérvese que el equilibrio definido por el vector de demanda (13) y el vector de precios (14) pertenecen a la clase lineal (7), (8) y (9), (10), respectivamente. La matriz Λ contiene la información de la profundidad de mercado y del impacto cruzado. Siempre es simétrica y esto dice que en equilibrio, el impacto cruzado del activo S_1 en S_2 es igual al impacto cruzado del activo S_2 en S_1 . La matriz Λ es positiva definida y tiene las siguientes dos consecuencias. Los elementos de la diagonal $\lambda^{i,i}$ deben ser positivos y entonces, en equilibrio se satisface la ley de la demanda: mayor demanda del activo, induce un mayor precio. También dice que el “impacto primario” dado por el producto de los componentes de la diagonal $\lambda^{1,1} \lambda^{2,2}$ domina el impacto cruzado $\lambda^{1,2} \lambda^{2,1}$, debido a que el determinante de la matriz Λ es positivo.

A manera de ilustración se presenta la estimación del sistema de precios (9) y (10), por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para obtener estimadores de las matrices de impacto cruzado, se eligieron dos pares de acciones que cotizan en la BMV, y forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC); ver BMV [2015]. La información con la que se hará la estimación es pública, la cual se puede compartir si es solicitada a los autores. Tiene periodicidad diaria comenzando en febrero del 2002 hasta mayo de 2015. Las series se han normalizado para que sus máximos, respectivamente, sean igual a uno.

El primer par elegido corresponde a las emisoras GFINBUR y GFNORTE. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.52 & 0.28 \\ 1.02 & 0.65 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

En este caso, las emisoras son empresas pertenecientes al mismo sector industrial (servicios financieros) y se observa un efecto cruzado positivo en ambas direcciones.

El segundo par elegido corresponde a las emisoras ICA e ICH. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.48 & 0.79 \\ 0.67 & 0.33 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

En este caso se observa una situación cercana al primer par en el que existe un efecto de impacto cruzado en ambas direcciones. Las emisoras de este ejemplo tienen actividades diferenciadas (ICA con servicios de consultoría de ingeniería, ICH con producción de aceros) pero relacionadas a la construcción.

Al final de la Sección 2 se presentará un tercer ejemplo en el que el efecto de impacto cruzado es únicamente en una dirección.

2. Correlación vs Impacto cruzado

En esta sección se trabajará bajo la siguiente:

Hipótesis 2.1 *Las matrices de covarianzas Σ_S y Σ_Y son positivas definidas y pueden diagonalizarse simultáneamente.*

Bajo la Hipótesis 2.1, es posible determinar explícitamente el impacto cruzado y caracterizar cuándo es igual a cero.

Una matriz cuadrada E se dice ortogonal si el producto con su matriz transpuesta E^{tr} es igual a la matriz identidad. Es decir, si la matriz E tiene los componentes

$$E = \begin{pmatrix} e^{1,1} & e^{1,2} \\ e^{2,1} & e^{2,2} \end{pmatrix},$$

entonces la condición de ortogonalidad es

$$e^{1,1}e^{2,1} + e^{1,2}e^{2,2} = 0. \quad (17)$$

Las filas de la matriz estarán normalizadas si

$$\begin{aligned}(e^{1,1})^2 + (e^{1,2})^2 &= 1, \\ (e^{2,1})^2 + (e^{2,2})^2 &= 1.\end{aligned}$$

La hipótesis de que las matrices de covarianzas Σ_S y Σ_Y son positivas definidas y son mutuamente diagonalizables, quiere decir que existe una matriz ortogonal E , y matrices diagonales D_S y D_Y tales que

$$\begin{aligned}\Sigma_S &= E D_S E^{tr}, \\ \Sigma_Y &= E D_Y E^{tr}.\end{aligned}$$

En este caso, la matriz Λ se define en la ecuación (11) satisface

$$\Lambda = E D_S^{\frac{1}{2}} D_Y^{-\frac{1}{2}} E^{tr}. \quad (18)$$

En la siguiente proposición se observa una condición suficiente para que no exista el impacto cruzado.

Proposición 2.2. *Supóngase que los valores S_1 y S_2 son no correlacionados y las demandas Y_1 y Y_2 del participante ruidoso son independientes. En este caso tampoco existirá un impacto cruzado.*

En efecto, las matrices Σ_S y Σ_Y son diagonales y en particular son mutuamente diagonalizables. La matriz Λ toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_{S_1}}{\sigma_{Y_1}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{Y_2}} \end{pmatrix},$$

debido a la ecuación (18).

La siguiente proposición caracteriza la existencia de impacto cruzado sin que los valores S_1 y S_2 sean correlacionados.

Proposición 2.3 (Impacto cruzado sin correlación). *Supóngase las condiciones de la Hipótesis 2.1. Más aún, supóngase que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ no es el vector cero. Condiciones necesarias y suficientes para que el impacto cruzado no sea cero y los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados son*

$$D_S^1 = D_S^2, \quad (19)$$

$$D_Y^1 \neq D_Y^2. \quad (20)$$

En efecto, la matriz de covarianzas Σ_S es diagonal y es igual al producto $ED_S E^{tr}$ en la que D_S es también una matriz diagonal. Una condición necesaria y suficiente para que esto sea posible es

$$e^{1,1}e^{2,1}D_S^1 + e^{1,2}e^{2,2}D_S^2 = 0. \quad (21)$$

La ecuación (21) es equivalente a la identidad (19), debido a la ecuación de ortogonalidad (17). La matriz Λ es igual a

$$\begin{pmatrix} (e^{1,1})^2 \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + (e^{1,2})^2 \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} & e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} \\ e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} & (e^{1,1})^2 \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + (e^{2,2})^2 \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

El impacto cruzado es igual a cero si y sólo si

$$e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} = 0. \quad (23)$$

Dado que se satisface la ecuación de ortogonalidad (17) y la identidad de no correlación (19), la ecuación (23) es equivalente a la negación de la

ecuación (20). Es decir que si D_Y^1 no es igual a D_Y^2 mientras que $D_S^1 = D_S^2$, entonces existirá un impacto cruzado aún cuando los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados.

Reconsiderando la conclusión de la Proposición 2.3 se puede afirmar que no sólo la correlación de los valores, sino también la estrategia del participante ruidoso puede generar el efecto de impacto cruzado. Pero también puede ocurrir que exista correlación entre los valores, y la estrategia del participante ruidoso anule el impacto cruzado como se demuestra en el siguiente resultado.

Proposición 2.4 (Correlación sin impacto cruzado). *Supónganse las condiciones de la Hipótesis 2.1. Más aún, supóngase que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ no es el vector cero. Una condición necesaria y suficiente para que no haya impacto cruzado aun cuando los valores S_1 y S_2 sean correlacionados es*

$$\frac{D_Y^2}{D_Y^1} = \frac{D_S^2}{D_S^1}. \quad (24)$$

En efecto, en este caso la ecuación (23) se satisface y en conjugación con la ecuación de ortogonalidad (17) requieren que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ sea ortogonal a los vectores $(1,1)$ y $\left(\sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}}, \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}}\right)$. Entonces colinealidad implica que

$$\sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} = \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}}, \quad (25)$$

que es una forma equivalente de la ecuación (24). Recíprocamente, la ecuación (24) implica que la ecuación (23) se satisface debido a la ecuación de ortogonalidad (17).

Para concluir esta sección, se estimará el sistema de precios (9) y (10), por el método MCO, para las emisoras GFNORTE e ICA, continuando de esta forma, los ejemplos que se incluyeron al final de la Sección 1.3. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.60 & 0.56 \\ 0.02 & 0.51 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

En este ejemplo, el coeficiente de impacto cruzado de GFNORTE en ICA, igual a 0.02, no fue significativo. Es decir que el impacto cruzado se satisface en una sola dirección; en la que la evolución de precios de ICA tienen un impacto en GFNORTE. Vemos así que la acción emitida por la empresa consultora impacta en el sector financiero representado por el grupo Banorte. De acuerdo a la teoría desarrollada en esta sección, dicho impacto cruzado puede ser debido a correlación de valores fundamentales en combinación con el flujo de órdenes y provisión de liquidez. No obstante, una mirada a la situación de la empresa inclina la balanza en favor de un factor transaccional en el impacto cruzado unidireccional. En efecto, la empresa ICA presenta un alto nivel de apalancamiento debido a créditos por varios millones de pesos, estableciendo un vínculo entre la empresa y el sector financiero; ver *El Economista* [2015]. En investigación futura se caracterizará estadísticamente, para el mercado mexicano, la sensibilidad del impacto cruzado a valores fundamentales y al flujo de órdenes.

3. Discusión

Las nociones de profundidad de mercado y de impacto cruzado de precios son intuitivas y frecuentemente citadas en discusiones de los mercados financieros. En este artículo se ha presentado la teoría del modelo de Kyle que entre otras propiedades, permite cuantificar dichas nociones en términos de conceptos básicos como la tendencia y volatilidad de los valores de los activos. El impacto cruzado de precios mantiene un vínculo con la correlación. Sin embargo, el mensaje más importante del presente trabajo es que los conceptos no son equivalentes. Se ha demostrado que puede existir un efecto cruzado sin que exista la correlación de los valores. Recíprocamente, los valores pueden estar correlacionados y no obstante, no existir el efecto de impacto cruzado. Esto es posible debido a que el impacto cruzado incorpora características más allá de la correlación, convirtiéndolo en un fenómeno multidimensional. En el modelo de Kyle se identifica que el impacto cruzado es el resultado de la correlación así como de la heterogeneidad de los diferentes participantes del mercado. Descubrir que otras dimensiones del impacto cruzado existen, y cómo impacta en la liquidación de portafolios, es un tema de investigación contemporánea.

Referencias bibliográficas

- Admati, A. R. (1985). "A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-Asset Securities Markets". *Econometrica*, 59: 629–657.
- Ait-Sahalia, Y. y Yu, J. (2009). "High Frequency Market Microstructure Noise Estimates and Liquidity Measures". *The Annals of Applied Statistics*, 3: 422–457.
- Almgren, R. F. y Chriss, N. (2001). "Optimal Execution of Portfolio Transactions". *Journal of Risk*, 3: 5–40.
- Andrade, S. C., Chang, C. y Seasholes, M. S. (2008). "Trading Imbalances, Predictable Reversals, and Cross-Stock Price Pressure". *Journal of Financial Economics*, 88(2): 406–423.
- Andrade, S. C., Bian, J. y Bursch, T. R. (2013). "A Practical Anti-Bubble Prescription". *The Economists' Voice*, 9(1).
- Back, K. (1992). "Insider Trading in Continuous Time". *The Review of Financial Studies*, 5(3): 387–409.
- Bank, P. y Fruth A. (2014). "Optimal Order Scheduling for Deterministic Liquidity Patterns". *SIAM J. Financial Math.*, 5: 137–152.
- Batthacharya, U., Reny, P. J. y Spiegel, M. (1995). "Destructive Interference in an Imperfectly Competitive Multi-Security Market". *Journal of Economic Theory*, 65: 136–170.
- Bernhardt, D. y Taub, B. (2008). "Cross-Asset Speculation in Stock Markets". *The Journal of Finance*, LXIII(5): 2385–2427.
- Bertsimas, D. y Lo, A. (1998). "Optimal Control of Execution Costs". *Journal of Financial Markets*, 1: 1–50.
- Biais, B., Glosten L., y Spatt C. (2005). "Market Microstructure: A Survey of Micro-Foundations, Empirical Results, and Policy Implications". *Journal of Financial Markets*, 8: 217–264.
- Black, F., Noise. (1986). *The Journal of Finance*. XLI(8): 529–543.
- BMV. (2015). "Relación de las primeras 55 series accionarias de acuerdo a los criterios de selección del IPC". *Portal de Internet: www.bmv.com.mx*.
- Bouchaud, J.-P., Farmer, J.-D. y Lillo F. (2009). "How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand". In *Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution*, ed. T. Hens, K. R. Schenkhoppe, pp. 57–130. *Elsevier: Academic Press*,
- Boulatov, A., Hendershott, T. y Livdan D. (2013). "Informed Trading and Portfolio Returns". *Review of Economic Studies*, 80(1): 35–72.

- Bradford De Long, J., Schleifer, A., Summers, S. L. H. y Waldmann, R. J. (1990). "Noise Trader Risk in Financial Markets". *The Journal of Political Economy*, 98(4): 703–738.
- Caballè, J. y Krishnan, M. (1994). "Imperfect Competition in a Multi-Security Market With Risk Neutrality". *Econometrica*, 62(3): 695–704.
- Chakrabarty, B. y Moulton, P. C. (2012). "Earnings Announcements and Attention Constraints: The Role of Market Design". *Journal of Accounting and Economics*, 53(3): 612–634.
- Chan, L. K. y Lakonishok, J. (1995). "The Behavior of Stock Prices Around Institutional Trades". *Journal of Finance*, 50(4): 1147–1174.
- Cho, K. H. y El Karoui, N. (2000). "Insider Trading and Nonlinear Equilibria: Single Auction Case". *Annales d'économie et de statistique*, 60: 21–41.
- Chordia, T. A., Sarkar, y Subrahmanyam, A. (2011). "Liquidity Dynamics and Crossautocorrelations". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 46: 709–736.
- El Economista*. "¿Es tiempo de adquirir acciones de ICA?" *Nota periodística en internet*: <http://eleconomista.com.mx/fondos/2015/04/16/tiempo-adquirir-acciones-ica>, 2015.
- Fama, E. F. y French K. R. (1988). "Permanent and Temporary Components of Stock Prices". *Journal of political economy*, 96(21): 246–273.
- Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J. y Howison S. D. (2013). "Limit Order Books". *Quantitative Finance*, 13(11): 1709–1742.
- Harford, J. y Kaul, A. (2005). "Correlated Order Flow: Pervasiveness, Sources, and Pricing Effects". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40: 29–55.
- Hasbrouck, J. y Seppi, D. J. (2001). "Common Factors in Prices, Order Flows, and Liquidity". *Journal of Financial Economics*, 59(3): 383–411.
- Hautsch N. y Huang, R. (2012). "The Market Impact of a Limit Order". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(4): 501–522.
- Kyle, A. S. (1985). "Continuous Auctions and Insider Trading". *Econometrica*, 53(6): 1315–1335.
- Lasserre, J. B. (2004). "Asymmetric Information and Imperfect Competition in a Continuous Time Multivariate Security Model". *Finance and Stochastics*, 8: 285–309.
- Obizhaeva, A. y Wang, J. (2013). "Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics". *Journal of Financial Markets*, 16: 1–32.
- Ostrovsky, M. (2012). "Information Aggregation in Dynamic Markets with Strategic Traders". *Econometrica*, 80(6): 2595–2647.

- Ozsoylev, H. y Werner, J. (2011). "Liquidity and Asset Prices in Rational Expectations Equilibrium with Ambiguous Information". *Economic Theory*, 48(2): 469–491.
- Pasquariello, P. (2007). "Imperfect Competition, Information Heterogeneity, and Financial Contagion". *Review of Financial Studies*, 20(2): 391–426.
- Pasquariello, P. y Vega, C. (2013). "Strategic Cross-Trading in the U.S. Stock Market". *Review of Finance*, 19(1): 229–282.
- Rochet, J. C. y Vila, J. L. (1994). "Insider Trading without Normality". *The review of economic studies*, 61(1): 131–152.
- Rothfeld, M. y Patterson S. (2013). "Traders Seek an Edge with High-Tech Snooping". *The Wall Street Journal*, URL <http://online.wsj.com>.
- Underwood, S. (2009). "The Cross-Market Information Content of Stock and Bond Order Flow". *Journal of Financial Markets*, 12: 268–289.
- Vaglica, G., Lillo, F., Moro, E. y Mantegna R. (2008). "Scaling Laws of Strategic Behavior and Size Heterogeneity in Agent Dynamics". *Physical Review E*, 77(3).
- Vitale, P. (2012). "Risk-Averse Insider Trading in Multi-Asset Sequential Auction Markets". *Economic Letters*, 117: 673–675.
- Wang, D. H., Suo, Y. Y., Yu, X. W. y Lei, M. (2013). "Price-Volume Cross-Correlation Analysis of CSI300 Index Futures". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(5):1172–1179.