



# Análisis comparativo entre el modelo ARMA y su versión continua CARMA sobre la dinámica del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Comparative analysis between the ARMA model and its continuous version CARMA on the Dynamics of the Price and Quotation Index of the Mexican Stock Exchange

---

Nallely Jacqueline Reyes-García\*

Francisco Venegas-Martínez\*\*

María Teresa Verónica Martínez-Palacios\*\*\*

(Fecha de recepción: 17 de julio de 2020. Fecha de aceptación: 7 de enero de 2021)

## RESUMEN

Esta investigación realiza un análisis comparativo entre la versión discreta de los modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA por su acrónimo en inglés) y su versión continua CARMA. Esta última es conducida por procesos de Lévy del tipo varianza gamma. Particularmente, se encuentra que la dinámica del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) se reproduce mejor con la distribución marginal del proceso CARMA ya que ésta permite capturar amplia-

---

\* Escuela Superior de Economía,  
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México  
njacqueline.reyesg@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7888-5430

\*\* Escuela Superior de Economía,  
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México  
fvenegas1111@yahoo.com.mx, ORCID: 0000-0003-1157-0298

\*\*\* Escuela Superior de Economía,  
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México  
terevioleta@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-6338-131X

mente el exceso de curtosis, la asimetría en la volatilidad y las colas pesadas de la distribución empírica del IPC.

Clasificación JEL: C22, C32, C58, G17.

**Palabras Clave:** procesos de Lévy, modelo CARMA, procesos varianza gamma.

#### ABSTRACT

*This paper carries out a comparative analysis between the discrete version of the Autoregressive Moving Average (ARMA) model and its continuous version CARMA. The latter is driven by a variance gamma type Lévy process. Particularly, it is found that the dynamics of the Price and Quotation Index of the Mexican Stock Exchange (IPC, its acronym in Spanish) is best reproduced using the marginal distribution of the CARMA process since this allows to assess more accurately kurtosis excess, volatility asymmetry and the effect of heavy tails on the IPC empirical distribution.*

*Classification JEL: C22, C32, C58, G17.*

**Keywords:** Lévy processes, CARMA model, variance gamma processes.

## Introducción

Un mejor modelado sobre la dinámica de los precios de los activos en los mercados financieros es una necesidad constante por parte de inversionistas y autoridades. Los hechos ocurridos en la crisis financiera asiática de 1997, la crisis hipotecaria estadounidense de 2007, y la crisis bursátil global de octubre de 2008 son recordatorios constantes de los efectos negativos en la mayor parte de las economías de todo el orbe por las caídas bruscas y repentinas en los precios de diversos activos.

Minsky (1992) propuso una teoría sobre las crisis en economías capitalistas en la que interrelaciona los ciclos, la expansión del sector financiero y la evolución de los sectores reales de la economía. Su teoría sostiene que la inestabilidad es consecuencia directa de los procesos dinámicos inherentes a la acumulación de capital, lo que significa que cuando una economía capitalista se encuentra en auge, los inversionistas tienden a sobrestimar las buenas noticias, lo que conlleva a una confianza futura exagerada y a sostener excedentes de inversión y deuda como patrones.

Las consecuencias que han dejado las crisis descritas anteriormente condujeron a: 1) graves problemas de liquidez, 2) altos niveles de inflación, 3) mayor desempleo y 4) un fuerte deterioro de la actividad económica (reducción significativa en el crecimiento). De acuerdo con Minsky (1992), sobrestimar las buenas noticias lleva a sobrestimar los precios de los activos

en los mercados financieros, lo cual tiende a dar información errónea a los inversionistas para su toma de decisiones.

El dinamismo que tienen los mercados financieros es importante no sólo para sus participantes, sino también para todos los sectores de la economía. Las crisis en los mercados financieros han llevado a los investigadores a mejorar la flexibilidad y confiabilidad estadística de los modelos que buscan capturar la dinámica de los precios de los diferentes activos disponibles. Incluso si no se puede predecir una irrupción o catástrofe, el objetivo de los gestores de riesgos, administradores de portafolios y reguladores; es limitar los daños y perjuicios potenciales (Rachev *et al.* 2011).

Las irrupciones se reflejan en las colas pesadas en las series de tiempo de los precios de los activos. En otras palabras, los eventos extremos presentan una mayor probabilidad de ocurrencia comparada, por ejemplo, con la que proporciona la distribución normal. Aunque la teoría clásica financiera supone que los rendimientos de los precios de los activos se distribuyen normalmente, la evidencia empírica, casi siempre, indica lo contrario. En el análisis de series de tiempo de rendimientos de activos financieros se mencionan frecuentemente diversos hechos estilizados, que incluyen sesgo, exceso de curtosis, colas pesadas y agrupamiento de volatilidad; características alejadas, por demás, del típico supuesto de normalidad. Para el caso mexicano véanse Rojas-Altamirano y Trejo-Pech (2014), Martínez-Palacios *et al.* (2015), Reyes-García *et al.* (2018) y Venegas-Martínez (2001).

En finanzas aplicadas, particularmente, en econometría financiera es frecuente para el análisis de series temporales que se utilicen modelos en tiempo discreto bajo el supuesto de normalidad. Un problema importante que presentan este tipo de modelos financieros es que han fracasado al no reflejar de forma realista el comportamiento de los rendimientos en los mercados financieros como aconteció en la crisis de 2008 (Rachev *et al.* 2011).

Los procesos autorregresivos y de medias móviles (ARMA del inglés Autoregressive Moving Average), fueron introducidos por Box y Jenkins (1970). Esta herramienta de predicción se basa en el análisis de las propiedades probabilísticas o estocásticas de las series de tiempo, en donde una variable se explica en función de sus valores pasados. En general, algunos de los supuestos más importantes que incorpora la metodología de Box y Jenkins (1970) son que las características esenciales de la serie permanecen constantes a través del tiempo, especialmente para los periodos futuros. Los residuos se distribuyen de forma normal y la serie de tiempo es estacionaria, es decir, su media, su varianza y su autocovarianza (en diferentes rezagos) son in-

variantes respecto al tiempo, es decir, permanecen iguales sin importar el momento en el cual se midan.

Por otro lado, los llamados modelos CARMA (del inglés Continuous-time Autoregressive Moving Average) y, en particular, los procesos autorregresivos en tiempo continuo (CAR) han cobrado, recientemente, especial interés en el modelado de la dinámica de precios de activos. Los pioneros de la literatura sobre procesos estocásticos estacionarios de tiempo continuo son Doob (1944), Bartlett (1946), Phillips (1959) y Durbin (1960). Más tarde, Brockwell (2001), introduce los procesos continuos CARMA asociados a procesos de Lévy.

Los modelos de umbral ARMA de Tong (1983) y (1990) han sido, particularmente exitosos, al modelar adecuadamente una amplia variedad de precios de activo. Así mismo, Brockwell (2001) realiza un análisis de los modelos ARMA de tiempo continuo, destacando sus propiedades básicas y su comparación con los modelos ARMA de tiempo discreto, así como un estudio de los procesos no lineales análogos a los de tiempo continuo de los modelos ARMA de umbral de Tong.

Brockwell *et al.* (2011) examinan las propiedades de procesos CARMA conducidos por los procesos de Lévy para modelar volatilidad estocástica. Los autores obtienen una clase mucho más amplia de procesos estacionarios de tiempo continuo de colas pesadas. También encuentran que, si el proceso de Lévy tiene momentos finitos de segundo orden, la estructura de la correlación del proceso CARMA es la misma que la del proceso CARMA gaussiano correspondiente.

La propuesta de investigación con respecto de la literatura actual será retomar la definición de un proceso CARMA gaussiano, permitiendo que los procesos de Lévy reemplacen el movimiento browniano como lo ejemplifica Brockwell. Y así se vinculará un modelo de media móvil autorregresivo continuo (CARMA) conducido por un proceso varianza gamma, lo que no se ha aplicado, hasta donde los autores saben, al mercado accionario mexicano. Con lo cual se podría evidenciar que los procesos lineales impulsados por procesos de Levy tienen la capacidad de incorporar saltos y así permitir el modelado de cambios abruptos e inesperados.

Este trabajo tiene como objetivo indagar cuál de los dos modelos ARMA discreto o ARMA continuo (CARMA) genera predicciones más adecuadas del IPC. Al respecto es importante mencionar que el proceso CARMA es conducido por un proceso de Lévy de tipo varianza gamma que podría capturar de manera más adecuada el exceso de curtosis y las colas pesadas.

Esta investigación se ha organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se presenta una descripción del estado del arte sobre los modelos ARMA tanto en su versión discreta como continua y se destaca la importancia de la utilización de los procesos de Lévy; en la sección 2 se establecen los supuestos básicos de cada modelo; en la sección 3 se realizan las aplicaciones empíricas de comparación; finalmente, en la sección 4 se discuten los resultados de las estimaciones; y por último se ofrecen las conclusiones.

## 1. Breve revisión bibliográfica del proceso CARMA

El supuesto de normalidad que se hace en las distribuciones de los rendimientos es poco o nada realista. Los modelos CARMA se utilizan frecuentemente para generalizar la fórmula de Black y Scholes (1973) y Merton (1973). El supuesto de que el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano no refleja completamente la realidad del mercado ya que imposibilita considerar saltos bruscos hacia arriba o hacia abajo en los precios de los activos.<sup>1</sup> Y en tanto no se consideren dichos saltos, las colas pesadas y el exceso de curtosis no se podrán capturar de forma realista.<sup>2</sup> Por último es importante mencionar que para mejorar los supuestos del modelo de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) se propusieron los modelos de Lévy a finales de la década de 1980 y se han extendido en diversas direcciones para tener en cuenta las diferentes características de los precios y rendimientos de los activos.

Desde principios de 1990 se han realizado muchas investigaciones sobre los procesos de Lévy para describir la dinámica de los rendimientos de diversos activos. Los procesos de Lévy son procesos con incrementos estacionarios e independientes que tienen propiedades analíticas deseables y, la mayoría de las veces, reproducen adecuadamente las características estadísticas de los rendimientos. Las contribuciones pioneras de los modelos se deben a Bertoin (1996), Barndorff-Nielsen (1998) y Sato *et al.* (1999).<sup>3</sup> Posteriormente se desarrollaron varios trabajos que utilizan procesos CARMA, entre los cuales destacan: Barndorff-Nielsen y Shephard (2002) que

---

<sup>1</sup> Véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008).

<sup>2</sup> Un modelo de valuación de opciones que incorpora saltos en el precio del activo subyacente se encuentra en Merton (1976).

<sup>3</sup> Para revisar la evolución y generalización de los procesos de Lévy véanse, por ejemplo, Applebaum (2004) y Schoutens (2003).

utilizaron un proceso de Lévy CAR(1) (o del tipo Ornstein Uhlenbeck) para construir un modelo de volatilidad estocástica;<sup>4</sup> Todorov y Tauchen (2006) y Todorov (2011) que aplican el modelo Lévy CARMA(2,1) para modelar la volatilidad del tipo de cambio diario Deutsche Mark-Dólar estadounidense; y Brockwell y Marquardt (2005) que proponen el modelo CARMA integrado fraccionalmente para capturar la dependencia de largo plazo en las series de tiempo financieras.

Los rendimientos logarítmicos no se comportan de acuerdo con una distribución normal ya que la volatilidad cambia aleatoriamente con el tiempo y se agrupa. Las bondades del modelo Lévy-CARMA enmiendan esta deficiencia pues permiten que la distribución marginal del proceso CARMA sea asimétrica y de colas pesadas. Aunque existen diferentes procesos de Lévy, este trabajo únicamente considera los procesos de Lévy del tipo Varianza Gamma (VG) incorporados al modelo ARMA en su versión continua, porque se simulará una distribución varianza gamma y se comparará con el histograma del IPC durante el periodo de estudio.

## 2. Comparación de modelos

De cierta forma, los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (ARIMA)( $p, d, q$ ) son una generalización de los modelos ARMA( $p, q$ ) cuando este último es diferenciado, el cual tiene un comportamiento asintótico a un proceso ARMA ( $p, q$ ). El caso general de un proceso ARMA( $p, q$ ) se representa mediante<sup>5</sup>

$$\phi(B)\bar{Z}_t = \theta(B)a_t, \quad (1)$$

en donde los polinomios  $\phi(B)$  y  $\theta(B)$  son de orden  $p$  y  $q$ , respectivamente, es decir,

$$\bar{Z}_t - \phi_1\bar{Z}_{t-1} - \dots - \phi_p\bar{Z}_{t-p} = a_t - \theta_1a_{t-1} - \dots - \theta_qa_{t-q}. \quad (2)$$

Para que este proceso sea estacionario se requiere que la raíces de  $\phi(x) = 0$  estén fuera del círculo unitario, y la condición para que sea inver-

<sup>4</sup> Véase también Barndorff-Nielsen et al. (1998).

<sup>5</sup> Véase Ramírez et al. (2011).

tible es que las raíces de la ecuación  $\theta(x) = 0$  se encuentren también fuera del círculo unitario; si ambas cosas ocurren, el proceso admite las representaciones AR y MA.

Si el proceso original  $\{\bar{Z}_t\}$  no presenta estacionariedad debido a una tendencia polinomial no determinista, es posible construir el proceso estacionario  $\{W_t\}$  a partir de  $\{\bar{Z}_t\}$  al aplicar un operador de diferencia  $\nabla^d$  de orden  $d$ , lo que permite eliminar su tendencia. De tal manera que

$$W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \text{ para toda } t \quad (3)$$

Para el proceso  $\{W_t\}$  se puede obtener un modelo ARMA,  $\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$  lo que es equivalente a considerar un modelo ARIMA

$$\phi(B)\nabla^d \bar{Z}_t = \theta(B)a_t, \quad d \geq 1 \quad (4)$$

para  $\{\bar{Z}_t\}$ , en donde  $\{a_t\}$  es un proceso de ruido blanco. El término integrado se refiere a que  $Z_t$  se obtiene de la relación (3) por inversión del operador  $\nabla^d$  dando una suma finita de  $W_t$ . De esta manera, un modelo ARIMA( $p, d, q$ ) indica que consta de un polinomio autorregresivo de orden  $p$ , de una diferencia de orden  $d$  y, de un polinomio de promedios móviles de orden  $q$ , de tal manera que:

$$ZW_t - \phi_1 W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \text{con } W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \quad (5)$$

A continuación se presentan los fundamentos del proceso Lévy-CARMA. Para la construcción del modelo, primero se necesita describir algunos hechos fundamentales respecto a los procesos de Lévy. Para lo cual se retoma el trabajo de Brockwell (2009).

Considere un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq \infty}, P)$  donde  $F_0$  contiene todos los conjuntos de probabilidad cero de  $F$  y la filtración  $(F_t)$  es continua por la derecha.

*Definición 1:* Proceso de Lévy. Un proceso adaptado  $\{(L(t), t \geq 0)\}$  se dice que es de Lévy si:

- i.  $L(0) = 0$  casi dondequiera.

- ii.  $L(t) - L(s)$  es independiente de  $F_s$ ,  $0 \leq s < t < \infty$ ,
- iii.  $L(t) - L(s)$  tiene la misma distribución que  $L(t - s)$  y
- iv.  $L(t)$  es continua en probabilidad.

También se supone que un proceso de Lévy es càdlàg<sup>6</sup> (continuo por la derecha con límites izquierdos). La función característica de  $L(t)$   $\phi_t(\theta) := E(\exp(i\theta L(t)))$ , tiene la siguiente representación Lévy-Khintchine.

$$\phi_t(\theta) = \exp(t\xi(\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (6)$$

donde

$$\xi(\theta) = i\theta m - \frac{1}{2}\theta^2 s^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left( e^{i\theta x} - 1 - ix\theta 1_{\{|x|<1\}} \right) \nu(dx), \quad (7)$$

Para algún  $m \in \mathbb{R}$  y  $s \geq 0$ . La medida  $\nu$  está definida en los subconjuntos de Borel de  $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Esta medida  $\nu$  es conocida como la medida de Lévy del proceso  $L$  y satisface la condición  $\int_{\mathbb{R}_0} \min(1, |u|^2) \nu(du) < \infty$ . Si  $\nu$  es la medida cero, entonces  $\{L(t)\}$  es un movimiento browniano con  $E(L(t)) = mt$  y  $\text{Var}(L(t)) = s^2 t$ . Si  $m = s^2 = 0$  y  $\nu(\mathbb{R}_0) < \infty$ , entonces  $L(t) = at + P(t)$  donde  $\{P(t)\}$  es un proceso de Poisson compuesto con tasa del salto  $\nu(\mathbb{R}_0)$  y distribución del tamaño del salto  $\nu/\nu(\mathbb{R}_0)$ . La constante  $a$  satisface

$$a = - \int_{\mathbb{R}_0} \frac{u}{1+u^2} \nu(du).$$

Muchas distribuciones para  $L(t)$  pueden ser definidas dependiendo de la elección de la medida.

**Teorema 1.** (Lévy-Itô) Sea  $X_t$  un proceso de Lévy con distribución parametrizada por  $(\beta, \sigma^2, \nu)$ , entonces  $X_t$  se descompone en  $X_t = \beta t + \sigma B_t + J_t + M_t$  donde  $B_t$  es un movimiento browniano y

<sup>6</sup> Es una denominación a funciones definidas sobre los reales y se refiere a una clase de objetos para los que se tiene continuidad lateral por la derecha y simultáneamente existen sus límites por la izquierda en todos sus puntos. Schoutens (2003). Las funciones càdlàg son útiles para los procesos estocásticos, donde se admite la existencia de saltos, en contraste con el movimiento browniano en el que sus realizaciones son continuas.



$\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ ,  $t \geq 0$  es un proceso de punto de Poisson independiente con medida de intensidad  $\nu$ . Los procesos  $J_t$  y  $M_t$  satisfacen,

$$J_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s| > 1\}} \quad (8)$$

y  $M_t$  es una martingala con saltos

$$\Delta M_T = \Delta X_t 1_{\{|\Delta X_t| > 1\}}. \quad (9)$$

En particular se cumple que:

$$Z \geq 0 \Leftrightarrow E(e^{-\lambda Z}) = \exp\left\{-\beta' \lambda - \int_{0, \infty} (1 - e^{-\lambda x}) \nu(dx)\right\} \quad (10)$$

de tal modo que para un proceso gamma  $\beta' = 0$ ,  $\nu(x) = f(x)dx$  con  $f(x) = ax^{-1} \exp\{-bx\}$  y  $x > 0$ . Por lo tanto  $X_t$  se distribuye Gamma  $(at, b)$ .

La extensión de Brockwell (2001) del modelo CARMA gaussiano por procesos de Lévy con momentos finitos de segundo orden será empleado para permitir incrementos asimétricos y colas pesadas, los cuales son observados en series temporales de rendimientos de acciones o índices bursátiles. Considerando la revisión que se realiza en Iacus y Yoshida (2017) se retomará su definición.

Sean  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p > q \geq 0$ , el proceso CARMA  $(p, q)$  está definido como:

$$a(D)Y_t = b(D)DL_t \quad (11)$$

donde  $a$  y  $b$  son polinomios

$$\begin{aligned} a(z) &= z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p \\ b(z) &= b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_{p-1} z^{p-1} \end{aligned}$$

con coeficientes  $a_1, \dots, a_p$  y  $b_0, \dots, b_{p-1}$  tales que  $b_q \neq 0$  y  $b_j = 0 \quad \forall j > q$  y  $D$  es el operador de diferenciación con respecto a  $t$ . El modelo CARMA  $(p, q)$  tiene la siguiente representación espacio-tiempo.

$$Y_t = \mathbf{b}^T X_t \quad (12)$$

donde  $X_t$  es solución al proceso  $p$ -dimensional para

$$dX_t = AX_t dt + \mathbf{e} dL_t \quad (13)$$

y la matriz  $A$  de  $p \times p$  está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_p & \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores de  $p \times 1$  definidos como

$$\mathbf{e} = [0, \dots, 0, 1]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{p-1}]^T$$

Si  $X_s$  tiene forma:

$$X_t = e^{A(t-s)} X_s + \int_s^t e^{A(t-u)} \mathbf{e} dL_u, \forall t > s \quad (14)$$

donde  $e^A$  es la matriz exponencial

$$e^A = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

y si la parte real de los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $A$  son negativos, entonces  $X_t$  en (14) tiene una solución estacionaria en covarianza (Brockwell 2001). Es decir,

$$X_t = \int_s^t e^{A(t-u)} \mathbf{e} dL_u = \int_0^{+\infty} e^{Au} \mathbf{e} dL_u \quad (15)$$

con

$$E[X_t] = \frac{\mu}{a_p} \mathbf{e}$$

$$\text{Cov}[X_{t+h}, X_t] = \sigma^2 e^{Ah} \int_0^{+\infty} e^{Au} \mathbf{e} \mathbf{e}^T e^{AuT} du \quad \text{para } h \geq 0$$

donde  $\mu = E[L_1]$  y  $\sigma^2 = \text{Var}[L_1]$ .

### 3. Comparación empírica

La aplicación empírica se realizará con el lenguaje de programación R para los modelos ARIMA y se utilizará el paquete *tseries*. También se utilizará el *software EViews* para contrastar los resultados. La información que se emplea del IPC son datos diarios desde enero 2007 a septiembre de 2009.

Por otra parte, para los modelos Lévy CARMA se emplea el trabajo de Iacus y Mercuri (2015) sobre el paquete R YUIMA, también en R, disponible en CRAN para la simulación y la estimación de modelos Lévy-CARMA. El paquete es muy flexible, en el sentido de que se puede elegir específicamente una distribución paramétrica de Lévy para los incrementos, lo que resulta bastante útil para este trabajo ya que el tipo de distribución sigue a un proceso varianza gamma VG.<sup>7</sup>

#### 3.1. Modelo ARIMA

La teoría de las series temporales se basa en el supuesto de estacionariedad de segundo orden. Las series de tiempo a menudo no son estacionarias ya que pueden exhibir una tendencia lineal a lo largo del tiempo, o tienen un efecto estacional. Con la metodología Box-Jenkins se puede trabajar con una serie estacionaria y si no es estacionaria se puede diferenciar. Los pasos a seguir con la metodología Box-Jenkins son: a) verificar la estacionariedad

<sup>7</sup> La clase de distribuciones de VG fue introducida por Madan y Seneta como modelo para los rendimientos sobre acciones VG, véanse Madan y Seneta (1990) y Madan et al. (1998).

de la serie, si ésta no es estacionaria, diferenciarla hasta alcanzar estacionariedad; b) identificar un modelo tentativo, c) estimar el modelo, d) verificar el diagnóstico (si éste no es adecuado, volver al paso b); y e) usar el modelo para pronosticar. En la Gráfica 1 se puede observar que el IPC no es estacionario.

Gráfica 1: Índice de Precios y Cotizaciones  
enero de 2008 a septiembre de 2009



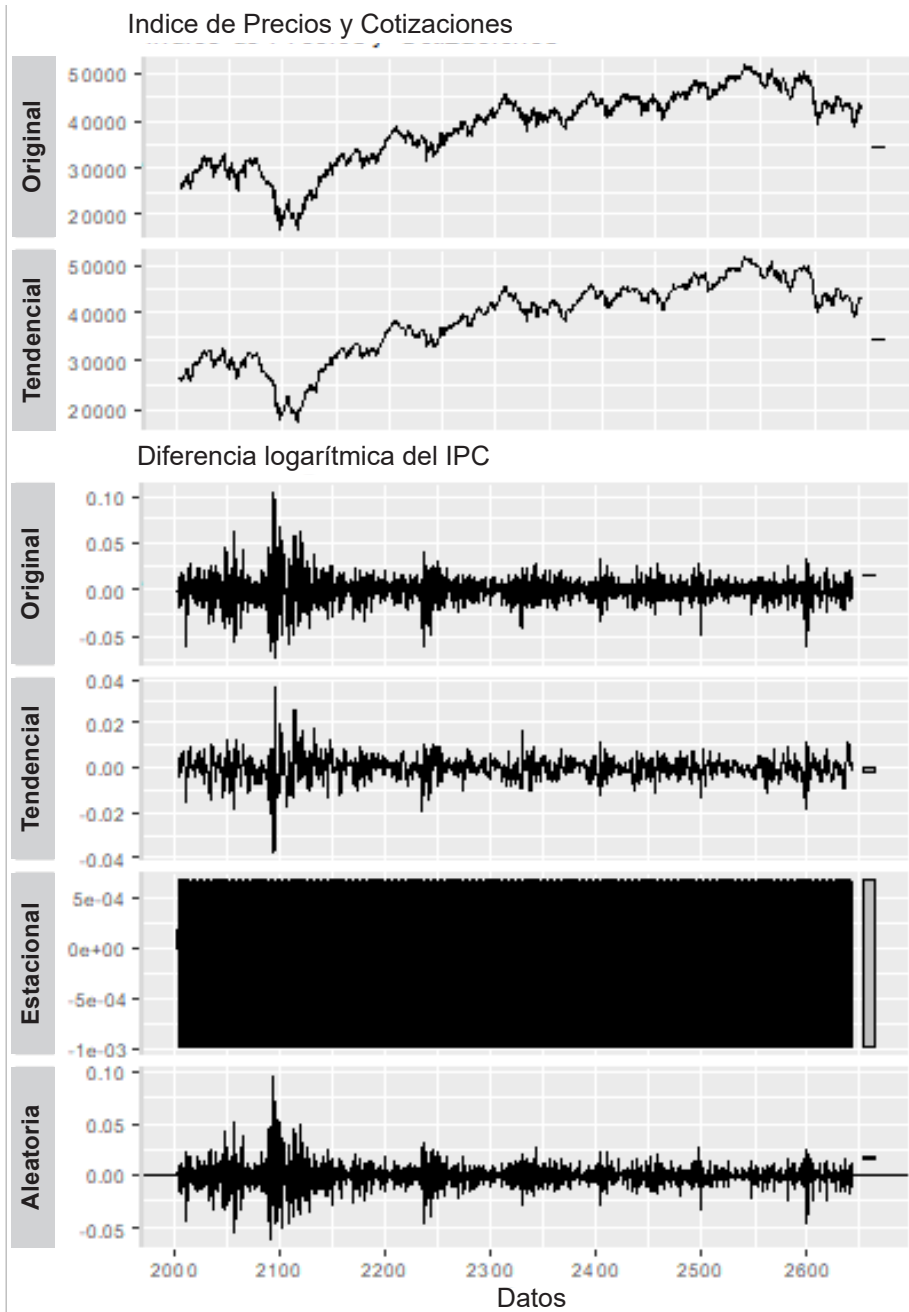
Fuente: elaboración propia a partir de datos obtenidos de Yahoo Finance.

En la Gráfica 2 se observa que la serie original muestra una tendencia creciente, además se tiene que eliminar el componente estacional. Se observa que cuando se considera la diferencia logarítmica, la tendencia desaparece y de esta manera la serie del IPC se vuelve estacionaria.

Al realizar la prueba de Dickey-Fuller aumentada se obtiene un nivel de significancia del 95% en la transformación logarítmica del IPC con un  $p\text{-value} = 0.4309$ . En la primera diferencia de dicha transformación se obtiene un  $p\text{-value} = 0.01$  con lo que se comprueba que al utilizar una diferencia del logaritmo del IPC es suficiente para eliminar la tendencia.

En la Gráfica 3 se presenta la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). En el caso de la ACF de la serie logarítmica ésta tiene una caída lenta lo que indica que la serie no es estacionaria, en comparación con la serie diferenciada la cual sí es estacionaria.

Gráfica 2: Descomposición de serie temporal IPC

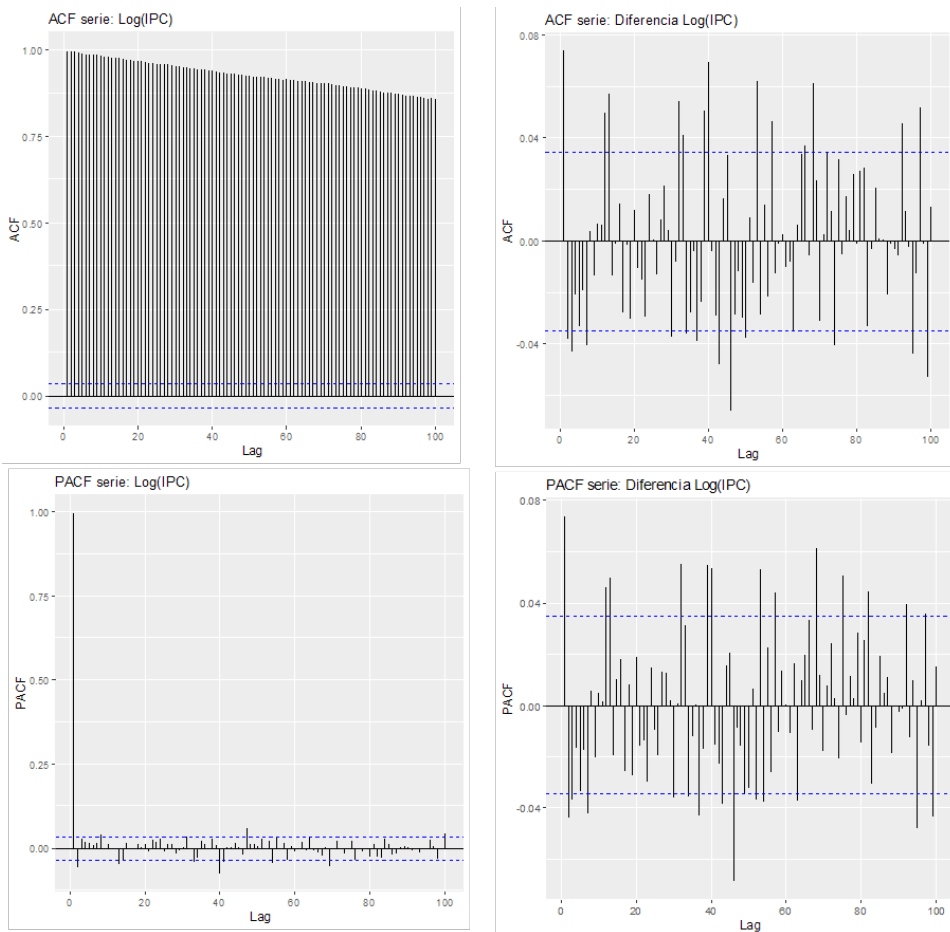


Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 3, en los paneles de residuos, se estimó el modelo ARIMA a través de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) tanto de logaritmos del IPC como de sus diferencias. También se encontró que, de acuerdo con el criterio de Akaike, como se muestra en el Cuadro 1, el modelo que mejor se ajustó fue el ARIMA(2,1,1).

Para elegir el número de parámetros se consideran los tres criterios de información más comunes: el criterio de información (AIC) de Akaike, el criterio de información bayesiano (BIC) y el criterio de Hannan-Quinn (HQ).

Gráfica 3: Comparación ACF y PACF



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con Brooks (2014), ningún criterio es superior a otro. Por ejemplo, el criterio BIC es consistente pero ineficiente, AIC no es consistente, pero es más eficiente, por estas razones se muestran los tres criterios en el Cuadro 1.

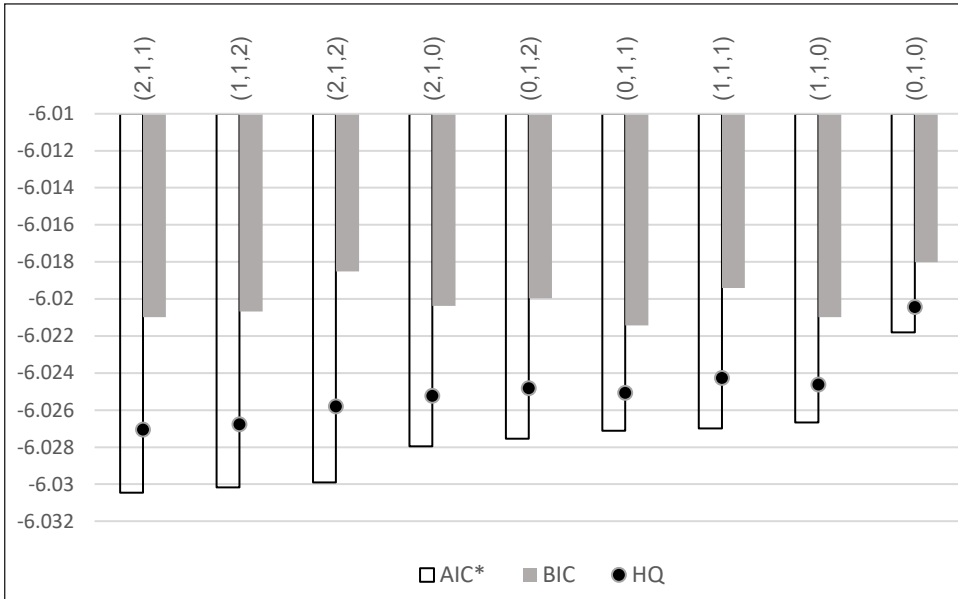
Cuadro 1: Criterios de selección por modelo

Variable dependiente: Diferencia Log(IPC)				
Modelo	LogL	AIC	BIC	HQ
(2,1)(0,0)	9653.738106462414	-6.030461316539009	-6.020975525775276	-6.02706048605576
(1,2)(0,0)	9653.272303445466	-6.030170189653416	-6.020684398889685	-6.026769359170169
(2,2)(0,0)	9653.835203172779	-6.029897001982988	-6.01851405306651	-6.02581600540309
(2,0)(0,0)	9648.740046468654	-6.027962529042909	-6.020373896431925	-6.02524186465631
(0,2)(0,0)	9648.073006364806	-6.027545628978004	-6.01995699636702	-6.024824964591405
(0,1)(0,0)	9646.383472455579	-6.027114670284736	-6.021423195826498	-6.025074171994788
(1,1)(0,0)	9647.194619428562	-6.02699663714285	-6.019408004531866	-6.024275972756251
(1,0)(0,0)	9645.664692486652	-6.026665432804156	-6.020973958345918	-6.024624934514208
(0,0)(0,0)	9636.894301406278	-6.021808938378924	-6.018014622073431	-6.020448606185625

Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 4 muestra los resultados del modelo que mejor se ajustó de acuerdo con los criterios AIC, BIC y HQ fue el ARIMA(2,1,1).

Gráfica 4: Comparación de criterios AIC, BIC y HQ por Modelo



Fuente: elaboración propia.

### 3.2. Modelos Lévy-CARMA

Para realizar la aplicación al IPC, se tomó la versión adaptada por Brouste, A., *et al.* (2014) en el paquete YUIMA quienes retoman a Iacus y Mercuri (2015). En vista de que el componente  $X_t$  de la ecuación (13) en el proceso CARMA no es observable, el procedimiento para la estimación con observaciones consta de tres etapas las cuales se pueden realizar con el paquete YUIMA.

Primero se simula la trayectoria de un proceso CARMA (2,1) conducido por un proceso varianza gamma  $\gamma$ , posteriormente, se utiliza esta trayectoria para el procedimiento de estimación. Dado que el modelo es considerado una mezcla de normales, la estimación de máxima verosimilitud se realiza mediante un algoritmo de “Esperanza-Maximización”  $EM^8$  de Karlis (2002)

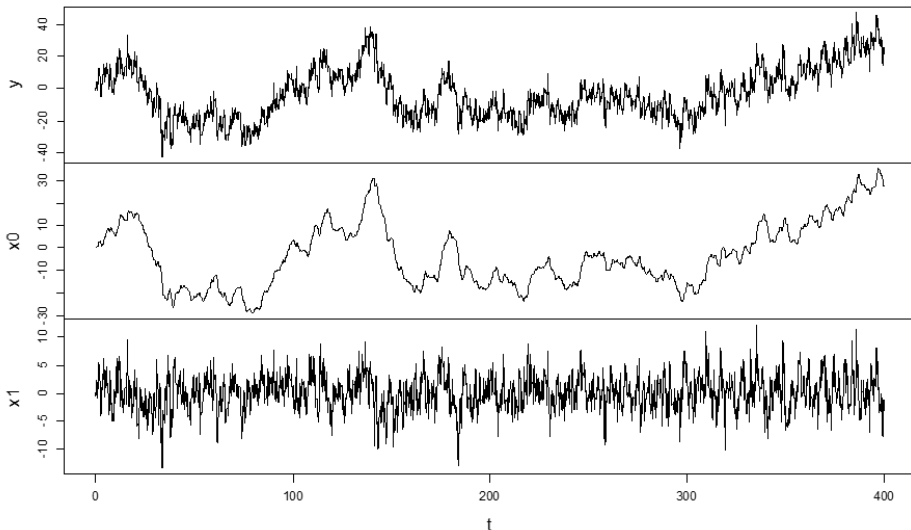
<sup>8</sup> El algoritmo EM se utiliza para aprender Mezclas Gaussianas, debido a su utilidad, es una herramienta importante en muchos procesos de aprendizaje automático o



y de acuerdo con lo propuesto por Iacus y Mercuri (2015) que se basan en el trabajo de Loregian *et al.* (2012) para el caso de varianza gamma.

Se realizaron 400 simulaciones de incrementos de Lévy para el modelo VG CARMA con fines comparativos y también se hizo el cálculo promedio de saltos para determinar el valor del parámetro de intensidad  $\lambda = 12$ , el cual se obtuvo dividiendo los 139 saltos entre 11.5 años que fue el horizonte de planeación de la muestra para la simulación. La Gráfica 5 muestra el modelo VG-CARMA (2,1) que se obtuvo con este parámetro y el uso del paquete YUIMA en R.

Gráfica 5: Modelo VG CARMA (2,1)



Fuente: elaboración propia con el paquete YUIMA en R<sup>9</sup>

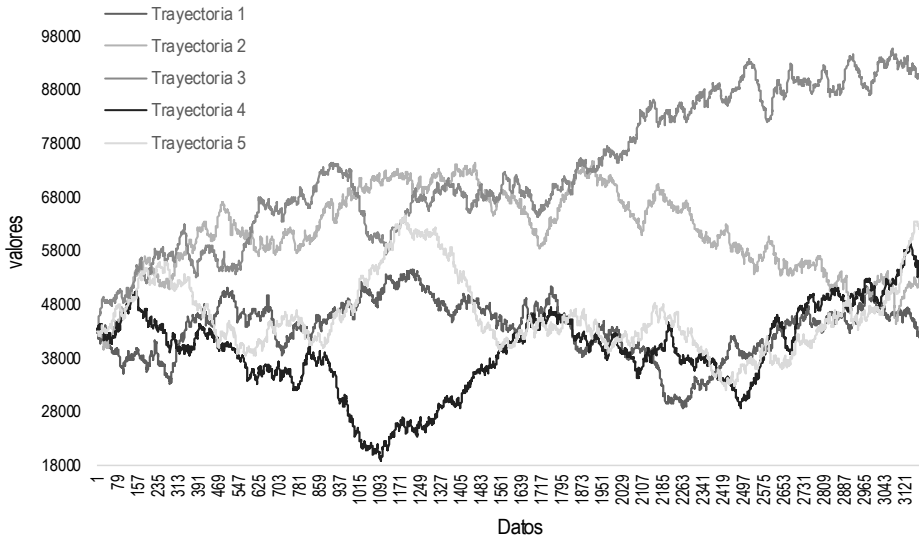
A continuación, en la Gráfica 6, se muestran sólo cinco de las trayectorias que se obtuvieron con fines meramente ilustrativos; muchas simulaciones no se apreciarán.

---

Machine Learning por su capacidad para manejar información faltante y observar variables ocultas de acuerdo con McLachlan, G. J. y Krishnan, T. (2008).

<sup>9</sup> The observed mean percentage variation of daily prices, provided by Valmer's CETES benchmark.

Gráfica 6: Simulación CARMA (2,1)  $Y_0 = 43011.27$



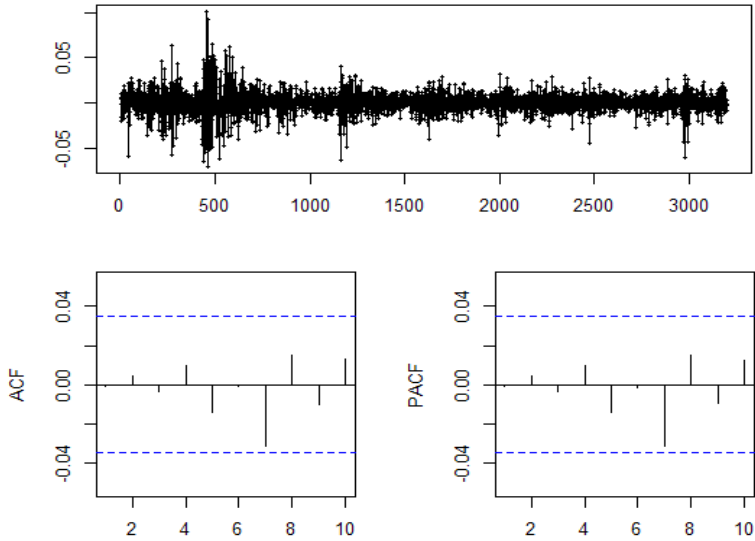
Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

#### 4. Discusión de los resultados empíricos

A través del análisis residuos del modelo ARIMA se pudo corroborar el ajuste de la serie IPC diferenciada una vez, tal como se muestra en la Gráfica 7.

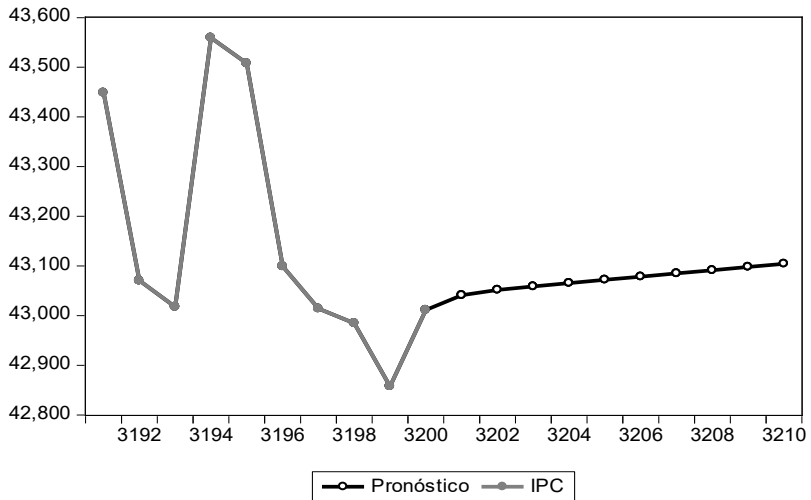
Con el fin de corroborar los resultados obtenidos con R, también se utilizó *EViews*, con el cual se obtuvieron más términos AR y MA de tal manera que el mejor modelo que se ajusta a la serie del IPC es un modelo ARIMA(3,1,4). Por el principio de parsimonia se elige el modelo ARIMA(2,1,1). Se realizó un pronóstico con el modelo ARIMA(2,1,1) con *EViews* para diez valores a futuro, es decir, 2 semanas en los mercados financieros. Los resultados se muestran en la Gráfica 8.

Gráfica 7: Residuos del Modelo ARIMA(2,1,1)



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 8. Pronóstico ARIMA(2,1,1) en EViews



Fuente: elaboración propia.

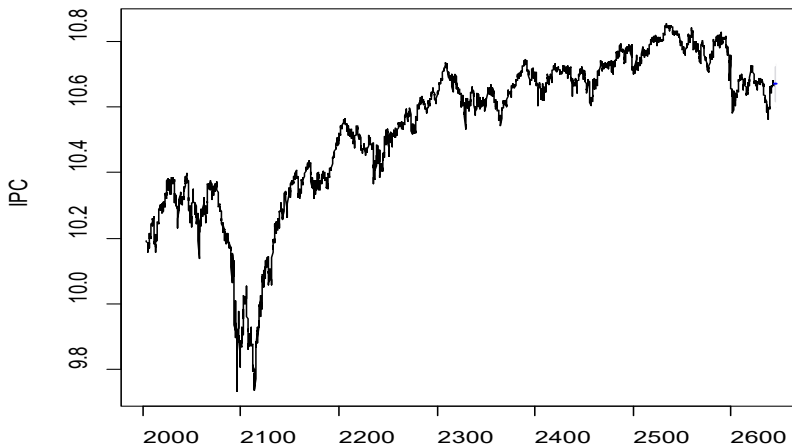
Cuadro 2: Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en EViews

Día	Precio de cierre IPC	Estimación del IPC EViews
01/10/2019	42937.16	43041.16711
02/10/2019	42222.90	43051.49851
03/10/2019	42443.31	43058.69698
04/10/2019	43416.90	43065.36401
07/10/2019	42952.29	43071.92198
08/10/2019	42535.14	43078.4464
09/10/2019	42501.92	43084.95511
10/10/2019	42929.76	43091.45484
11/10/2019	43214.60	43097.94918
14/10/2019	43299.53	43104.44039

Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 9 muestra el pronóstico ARIMA(2,1,1) en R. Considerando que el promedio de los precios de cierre del IPC del 1 de octubre de 2019 al 14 de octubre de 2019 fue de 42,845.3511721 puntos, entonces se concluye que los valores obtenidos por el pronóstico están sobrestimados de acuerdo con los resultados del Cuadro 2.

Gráfica 9. Pronóstico ARIMA(2,1,1) en R



Fuente: elaboración propia.

Cuadro 3: Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en R

		Pronóstico del IPC		
Día	Precio de cierre IPC	Promedio	Intervalo pronosticado	
01/10/2019	42937.16	43034.1816	42046.44	44044.6865
02/10/2019	42222.9	43036.7637	41595.6137	44527.8449
03/10/2019	42443.31	43036.3334	41281.5109	44866.1997
04/10/2019	43416.9	43035.903	41037.4359	45132.144
07/10/2019	42952.29	43035.903	40833.9858	45356.102
08/10/2019	42535.14	43035.4727	40655.9307	45554.2863
09/10/2019	42501.92	43035.4727	40496.0614	45734.1243
10/10/2019	42929.76	43035.4727	40348.5202	45900.8998
11/10/2019	43214.6	43035.0423	40211.1661	46057.2285
14/10/2019	43299.53	43035.0423	40081.8944	46205.7718

Fuente: elaboración propia.

Al considerar los valores del intervalo obtenidos por el pronóstico en R vistos en el Cuadro 3, se puede observar que todos los precios de cierre del IPC del 1º de octubre de 2019 al 14 de octubre de 2019 ocurrieron dentro del intervalo pronosticado. Pero si se realiza la comparación con el promedio del intervalo, se obtiene que los días 4, 11 y 14 de octubre se subestimaron los puntos del IPC, mientras que los demás días tuvieron un pronóstico sobrestimado. Para realizar la comparación de los pronósticos se presenta en el Cuadro 4.

Cuadro 4: Comparación estadística sobre los pronósticos

Parámetros	Precio de cierre IPC	Pronóstico ARIMA(2,1,1) EViews	Pronóstico ARIMA(2,1,1) R	Pronóstico trayectorias CARMA
Promedio	42845.351	43074.58945	43035.55873	51815.8471
Desviación estándar	402.7046475	20.65203519	0.725814337	10462.87983
Sesgo	-0.091810902	-0.144274651	-0.215349736	-0.086870307
Kurtosis	-1.289332021	-0.994656373	0.564577259	-0.659214883

Fuente: elaboración propia.

En el Cuadro 4 se puede observar el sesgo y la kurtosis que se obtuvieron con los modelos ARIMA y VG-CARMA. Como puede advertirse, el modelo CARMA al considerar procesos de Lévy, muestra más bondades estadísticas para replicar la dinámica del IPC que el modelo ARIMA.

## 5. Conclusiones

En esta investigación, el modelo CARMA ha mostrado replicar las propiedades estadísticas del IPC, lo cual lo convierte en una herramienta útil para la toma de decisiones de inversionistas y reguladores. Los resultados que arroja la investigación son consistentes con la hipótesis inicial del trabajo y aunque la asimetría de la volatilidad fue mejor capturada que la kurtosis con el modelo CARMA, deberían, por supuesto, considerarse en futuras investigaciones otros procesos y modelos más robustos.

Aunque, la ergodicidad del sistema sólo es capaz de capturar los efectos de kurtosis y asimetría que suceden dentro del mercado, este análisis permite elaborar pronósticos sobre el comportamiento del precio de cierre del IPC y sus rendimientos futuros ante efectos asimétricos en su volatilidad. Y dado que el principal objetivo del IPC es ser un indicador representativo del mercado mexicano accionario para servir como referencia y subyacente de productos financieros, sin duda, un pronóstico adecuado de éste es primordial para la toma de decisiones de inversionistas y reguladores.

## Referencias bibliográficas

- Applebaum, D. (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. y Sørensen, M. (1998). "Some Stationary Processes in Discrete and Continuous Time". *Advances in Applied Probability*, vol. 30, núm. 4, pp. 989-1007.
- Barndorff-Nielsen, O. E. y Shephard, N. (2002). *Financial Volatility, Lévy Processes and Power Variation*. Unpublished book, Nuffield College.
- Bartlett, M. S. (1946). "On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series". *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 8, núm. 1, pp. 27-41.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*, vol. 121, Cambridge: Cambridge University Press.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1970). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Holden-Day. San Francisco. CA.
- Brooks, C. (2014). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press.
- Brockwell, P. J. (2001). "Continuous-time ARMA Processes". *Handbook of Statistics*, núm. 19, pp. 249-276.
- Brockwell, P. J. y Marquardt, T. (2005). "Lévy-driven and Fractionally Integrated ARMA Processes with Continuous Time Parameter". *Statistica Sinica*, pp. 477-494.
- Brockwell, P. J. (2009). "Lévy-driven Continuous-time ARMA Processes. In Handbook of Financial Time Series". Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 457-480.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A. y Yang, Y. (2011). "Estimation for Non-negative Lévy-driven CARMA Processes". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 29, núm. 2, pp. 250-259.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S. M., Kamatani, K., Koike, Y., Yoshida, N. (2014). "The YUIMA project: A Computational Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations". *Journal of Statistical Software*, vol. 57, núm. 4, pp. 1-51. <https://doi.org/10.18637/jss.v057.i04>
- Doob, J. L. (1944). "The Elementary Gaussian Processes". *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, núm. 3, pp. 229-282.

- Durbin, J. (1960). "Efficient Fitting of Linear Models for Continuous Stationary Time Series from Discrete Data" (No. MS249). North Carolina University at Chapel Hill Dept of Statistics.
- Karlis, D. (2002). "An EM Type Algorithm for Maximum Likelihood Estimation for the Normal Inverse Gaussian Distribution". *Statistics Probability Letter*, vol. 57, núm. 1, pp 43-52. DOI: 10.1016/S0167-7152(02)00040-8.
- Iacus, I. y Mercuri, L. (2015). "Implementation of Lévy CARMA model in Yuima package". *Computational Statistics*, vol. 30, núm. 4, pp. 1111-1141.
- Iacus, S. M. y Yoshida, N. (2017). *Simulation and Inference for Stochastic Processes with YUIMA*. Springer series in statistics. Springer, New York zbMATH.
- Loreigan A., Mercuri L. y Rroji E. (2012). "Approximation of the Variance Gamma Model with a Finite Mixture of Normals". *Statistis and Probability Letters*, vol. 82, núm. 2, pp. 217-224. DOI: doi.org/10.1016/j.spl.2011.10.004
- McLachlan, G. J. y Krishnan, T. (2008). *The EM Algorithm and Extensions*. John Wiley and Sons.
- Madan, D. B. y Seneta, E. (1990). "The Variance Gamma (VG) Model for Share Market Returns". *Journal of Business*, vol. 63, núm. 11, pp. 511-524.
- Madan, D. B., Carr, P. P. y Chang, E. C. (1998). "The Variance Gamma Process and Option Pricing". *Review of Finance*, vol. 2, núm. 1, pp. 79-105.
- Martínez-Palacios, T., Martínez-Sánchez, J. F. y Venegas-Martínez, F. (2015). "Consumption and Portfolio Decisions of a Rational Agent that has Access to an American Put Option on an Underlying Asset with Stochastic Volatility". *International Journal on Pure and Applied Mathematics*, vol. 102, núm. 4, pp. 711-732.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*, vol. 4, núm. 1, pp. 141-183.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, núm. 3, pp. 125-144.
- Minsky, H. P. (1992). "The Financial Instability Hypothesis". *The Jerome Levy Economics Institute Working Paper*, núm. 74.
- Phillips, A. W. (1959). "The Estimation of Parameters in Systems of Stochastic Differential Equations". *Biometrika*, vol. 46, núm. 1-2, pp. 67-76.
- Rachev, S. T., Kim, Y. S., Bianchi, M. L. y Fabozzi, F. J. (2011). *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*. John Wiley and Sons, vol. 187.
- Ramírez, A. O., Sánchez-Daza, A. y Venegas-Martínez, F. (2011). "Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC". *Análisis Económico*, vol. 26, núm. 62, pp. 31-50.



- Reyes-García, N. J., Venegas-Martínez, F. y Cruz-Aké, S. (2018). "Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para modelar la volatilidad de Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores". *Panorama Económico*, vol. 14, núm. 27, pp. 34-34.
- Rojas-Altamirano, O. y Trejo-Pech, C. (2014). "Financial Time Series: Stylized facts for the Mexican Stock Exchange Index compared to Developed Markets". *arXiv preprint arXiv:1412.3126*.
- Sato, K. I., Ken-Iti, S. y Katok, A. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Book Series: Wiley Series in Probability and Statistics.
- Todorov, V. y Tauchen, G. (2006). "Simulation Methods for Lévy-driven Continuous-time Autoregressive Moving Average (CARMA) Stochastic Volatility Models". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 24, núm. 4, pp. 455-469.
- Todorov, V. (2011). "Econometric Analysis of Jump-driven Stochastic Volatility models". *Journal of Econometrics*, vol. 160, núm. 1, pp. 12-21.
- Tong, H. (1983). "Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis". *Lecture Notes in statistics*, núm. 21.
- Tong, H. (1990). "Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach". *Oxford University Press*.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. pp. 32, 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición. Cengage Learning. México.