

Curvatura de Ricci como indicador de fragilidad en el contagio del COVID-19 y de los mercados financieros en el mundo

Ricci Curvature as an indicator of fragility in the contagium of COVID-19 and in financial markets around the world

Guillermo Sierra Juárez*

(Fecha de recepción: 21 de diciembre de 2020. Fecha de aceptación: 6 de abril de 2021)

RESUMEN

El presente trabajo presenta una forma alternativa en la medición del comportamiento de contagios ya sea en salud como el caso de las pandemias o en los mercados financieros utilizando el concepto matemático de curvatura. Utilizando este indicador de la geometría diferencial, aplicado a otras áreas del conocimiento como la física, con la intención de medir la robustez o fragilidad de ciertos sistemas en casos discretos como en la teoría de gráficas. El modelo se aplica en dos casos: al crecimiento de los contagios COVID-19 de distintos países del mundo y a la caída en distintos índices de bolsas representativas. Los resultados de la aplicación del indicador de curvatura Ollivier-Ricci muestran consistencia con el comportamiento de las series entre curvatura y fragilidad.

Clasificación JEL: C02, C63, E37, G01

Palabras clave: COVID-19, crisis financiera, Ricci, curvatura, fragilidad.

ABSTRACT

This paper presents an alternative method to measure the behavior of contagions, either in health, such as pandemics, or in financial markets, using the mathematical concept of curvature. This concept of differential geometry used in other areas of knowledge, such

* Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA
Universidad de Guadalajara
gsierra@cucea.udg.mx, ORCID: 0000-0002-1927-834X

as physics, is applied in this paper to measure the robustness or fragility of certain systems in discrete cases such as graph theory. The model is applied in two instances: The growth of COVID-19 infection in different countries and in representative stock market indices around the world. The results of the application of the Ollivier-Ricci curvature indicator show consistency with the behavior of curvature and fragility of the series.

JEL Classification: C02, C63, E37, G01

Keywords: COVID-19, Financial Crisis, Ricci, Curvature, Fragility.

Introducción

El tema de los contagios en las pandemias y en los mercados financieros ha sido ampliamente estudiado en la literatura y especialmente en la actualidad con la aparición del COVID-19. En el caso de contagios de enfermedades ésta se esparce mediante virus, bacterias u otro agente infeccioso y la transmisión es de persona a persona. Sin embargo, en el caso de contagios en la información financiera el comportamiento de contagio se da a través de medios de comunicación electrónicos, es decir, por correos electrónicos, redes sociales o búsquedas en los navegadores que con un evento que lo dispare se transmite y sirve de indicador de crecimiento y caída de precios.

El impacto inmediato y de corto plazo en la economía y mercados financieros ha sido devastador en todo el mundo y en particular para México. La pandemia del COVID-19 no sólo ha impactado al sector real de la economía y de igual forma los mercados financieros, sino que además, la pandemia ha afectado las cadenas de producción, la movilidad de trabajadores, el turismo, el transporte y casi todas las industrias han entrado en crisis como poco veces se ha visto en el pasado.

El tema de las pandemias, así como de los contagios en el mundo financiero y sus modelos es muy amplio y variado y han mostrado avances muy significativos.

Un punto de vista alternativo o complementario al estudio de los contagios es analizar la robustez o fragilidad de los sistemas económicos y de salud utilizando una idea relativamente nueva a través del concepto de curvatura.

Si bien, este concepto fue introducido desde un inicio en las matemáticas en el marco de la geometría diferencial particularmente la curvatura de Ricci, también ha tenido aplicaciones en varias áreas del conocimiento, por ejemplo, en física en el desarrollo de la relatividad, gravitación y teoría de campos, sobre todo explicando la actuación de una fuerza como la deformación de la geometría sobre todo en espacios continuos y utilizando el formalismo tensorial se construye el conocido tensor de Ricci.

Estos conceptos de curvatura se han aplicado también en los mercados financieros tratando explicar la existencia de arbitraje, es decir, cuando existe dicha curvatura en alguno de los mercados como son: el de divisas, acciones o en el mercado de derivados se puede interpretar como la aparición de oportunidades de arbitraje, Ilinski (1998, 2001)

El concepto de curvatura puede extenderse combinándose con la teoría de gráficas para establecer la robustez de los nodos o agentes participantes construyendo el caso discreto de curvatura de Ricci que en ese caso se aplicara a los mercados financieros y al crecimiento en el contagio entre países de la pandemia de COVID-19. Existen distintas formas de discretizar la curvatura en una gráfica, pero las más comunes son Curvatura Ollivier-Ricci y Curvatura Forman-Ricci.

El objetivo del presente trabajo es medir la fragilidad o robustez del contagio del COVID-19 en diez países y de diez índices de bolsa en mercados financieros alrededor del mundo durante el 2020. Se propone como hipótesis de investigación que en los periodos de mayor contagio tanto en la pandemia como en los mercados se vea reflejado una mayor curvatura en cada una de las series, en un mayor riesgo sistémico y en una mayor fragilidad. El documento se encuentra distribuido de la siguiente manera: primeramente se hace una introducción de los objetivos y del tema del artículo. En la siguiente sección se revisa la literatura relacionada con el tema robustez y medición de curvatura, además de los hechos estilizados. Posteriormente en la sección dos y tres se presenta los modelos propuestos y sus aplicaciones. Para finalmente, en la sección cuatro, ofrecer los resultados obtenidos y en la última sección las conclusiones.

1. Revisión de la Literatura

En la siguiente sección se presenta una revisión de la literatura con especial interés en el concepto de curvatura de gráficas y su relación con la fragilidad

o robustez en los casos de mercados financieros y de la salud, como el caso de la pandemia.

En (Tse Ch. *et al.* 2010) se presenta un trabajo que estudia cómo redes complejas son construidas para estudiar la relación de precios de cierre de bolsas de valores principalmente de Estados Unidos. Las acciones se representan por nodos y las aristas representan las correlaciones cruzadas de los rendimientos y del volumen de transacciones en cada periodo, además utilizan una aproximación *winner-take-all* para determinar si dos nodos están conectados. Los resultados sugieren que la variación del precio de las acciones está fuertemente influenciado por un pequeño número de acciones y propone una nueva aproximación para la inclusión en un índice y compararlo con los existentes. Entre otras cosas, se concluye, que el mercado es altamente dominado por acciones del sector financiero.

En Cushing D. *et al.* (2019) se clasifican todas las gráficas cúbicas con curvatura de Ollivier-Ricci y curvatura Bakry-Émery, como no negativas en cualquier momento y se muestra que ambas nociones de curvatura negativa son gráficas prisma a Möbius ladders. El trabajo es importante porque introduce una calculadora de curvatura como herramienta en línea para calcular este indicador en distintas variantes de las nociones de curvatura. El trabajo considera las nociones de curvatura de Ricci en gráficas discretas y algunas adaptaciones principalmente como Bakry-Emery y Ollivier- Ricci. Según el autor, las nociones de curvatura discreta han sido aplicadas al estudio de redes biológicas discretas, además de cuantificar el riesgo sistémico y fragilidad de sistemas financieros, en el estudio del fenómeno de congestión en redes bajo un proceso de difusión del calor y en el estudio de problemas de gravedad cuántica.

Sandhu *et al.* (2015) mencionan que las interacciones de células pueden ser modeladas como un sistema dinámico complejo representado por gráficas ponderadas y la funcionalidad de tales redes, incluyendo la medida de robustez, desempeño y eficiencia son asociadas a la topología y geometría de la gráfica subyacente. El trabajo revisa las nociones de curvatura en gráficas ponderadas e investiga las propiedades de las redes geométricas derivadas de estudios genómicos a gran escala en el caso del cáncer. Se encontró que las redes de células con cáncer exhiben mayores curvaturas que en su contraparte de células normales y la formulación matemática de la propuesta alcanza una solución exacta para calcular cambios en la curvatura, la cual era no factible computacionalmente utilizando los métodos previos conocidos.

Por otra parte, Ollivier Y. (2009, 2010) recuerda la definición de curvatura Ricci de espacios métricos en términos de distancias usuales y distancias en pequeñas esferas cercanas (distancia Wasserstein) respecto a sus centros, esta definición se extiende naturalmente a cualquier espacio métrico. El trabajo considera entre otras cosas una generalización de Ricci considerando la curvatura Bakry-Émery Ricci que incluye un movimiento browniano con tendencia en una variedad Riemanniana.

Samal *et al.* (2018) realizan una comparación empírica de dos nociones distintas de curvatura de Ricci discreta para gráficos o redes: la curvatura de Forman-Ricci y la curvatura de Ollivier-Ricci. El trabajo destaca que estas dos discretizaciones de la curvatura de Ricci se desarrollaron basándose en diferentes propiedades de la noción clásica y por tanto arrojan información sobre diferentes aspectos de la estructura y el comportamiento de la red, sin embargo, a partir de un análisis computacional en una amplia gama de modelos y redes del mundo real muestra que las dos discretizaciones de la curvatura de Ricci están altamente correlacionadas en muchas redes. Además de las posibles implicaciones teóricas de su trabajo, la estrecha relación entre las dos discretizaciones tiene implicaciones prácticas por las que se puede emplear la curvatura de Forman-Ricci en lugar de la curvatura de Ollivier-Ricci para un cálculo más rápido en redes más grandes del mundo real siempre que el análisis basto sea satisfactorio.

Por otro lado, en Sia *et al.* (2019) identifican estructuras comunitarias en una red compleja que resultan de crucial importancia para el entendimiento de la función, organización, solidez y seguridad del sistema. Su trabajo presenta un nuevo enfoque en la curvatura de Ollivier-Ricci inspirada en la identificación de comunidades en redes complejas y se demuestra que la base geométrica intrínseca de dicha curvatura ofrece un enfoque natural para descubrir estructuras comunitarias inherentes dentro de una red basada en la interacción entre entidades. Se desarrolla un algoritmo de identificación de comunidades basado en la curvatura de Ollivier-Ricci y en la idea de la eliminación secuencial de bordes curvados negativamente sintomáticos de interacciones altas (por ejemplo, el tráfico). Finalmente, el algoritmo construido puede identificar comunidades con una precisión de rendimiento mejor o comparable y descubrir estructuras jerárquicas más nerviosas de la red, lo que abre nuevas vías geométricas para el análisis de la dinámica de redes complejas.

En Sandhu *et al.* (2016) se menciona que para medir el riesgo sistémico y la fragilidad de los sistemas financieros es muy importante analizar

la eficiencia del mercado, de igual forma, para decidir sobre la asignación en un portafolio y para contener los contagios financieros, consideran que los sistemas financieros pudieran representarse como gráficas ponderadas que caracterizan la compleja red de agentes que interactúan e intercambian flujo de información (por ejemplo, deuda, rendimiento de acciones y propiedad de los accionistas). Su trabajo muestra que la fragilidad es una característica del comportamiento del mercado y que los colapsos financieros son precedidos invariablemente por cambios en la robustez a nivel del sistema. En un trabajo previo, los autores sugieren que la curvatura de Ricci, que es una característica geométrica clave de una red determinada, se correlaciona negativamente con el aumento de la fragilidad de la red. Para ilustrar esta propuesta, los autores examinan los rendimientos diarios de un conjunto de acciones del índice S&P 500 (Standard and Poor's 500) durante un período de 15 años para resaltar el hecho de que los cambios correspondientes en la curvatura de Ricci constituyen un "sello distintivo" financiero. Este trabajo sienta las bases para comprender como poder diseñar sistemas bancarios y regulaciones de una manera que pueda combatir las inestabilidades financieras expuestas en época de crisis.

En Barros de Souza *et al.* (2020), enmarca su estudio dentro de la nueva enfermedad del coronavirus COVID-19 que está alcanzando escalas sin precedentes y menciona que existen numerosos modelos epidemiológicos clásicos que intentan cuantificar las métricas epidemiológicas donde por lo general para pronosticar epidemias, los enfoques clásicos necesitan estimaciones de parámetros, como la tasa de contagio o el número de reproducción básico. Los autores proponen un enfoque geométrico, libre de parámetros y basado en datos para acceder al surgimiento de un estado pandémico mediante el estudio de las curvaturas de las redes Forman-Ricci y Ollivier-Ricci.

La curvatura discreta de Ollivier-Ricci se ha utilizado con éxito para pronosticar el riesgo en las redes financieras y se sugiere que esos estudios pueden proporcionar resultados análogos para las series de tiempo de la epidemia de COVID-19. Los autores calculan ambas curvaturas, primero en un modelo de "juguete" de series de tiempo epidémicas con retrasos, lo que nos permite crear redes epidémicas. Al hacerlo, pueden verificar que las curvaturas de Ollivier-Ricci y Forman-Ricci pueden ser una estimación sin parámetros para identificar un estado pandémico en la epidemia simulada. Sobre esta base, se estiman las curvaturas de Forman-Ricci y Ollivier-Ricci para redes de epidemias reales creadas a partir de series de tiempo de epidemias de COVID-19 disponibles en la Organización Mundial de la Salud

(OMS). Ambas curvaturas permiten detectar los primeros signos de alerta del surgimiento de la pandemia, y la ventaja del método propuesto consiste en proporcionar un marcador de datos geométricos tempranos para el estado de la pandemia, independientemente de la estimación de parámetros y el modelado estocástico. El trabajo abre la posibilidad de utilizar geometría discreta para estudiar redes epidémicas y se concluye que la curvatura Ricci es un fuerte indicador del estado pandémico de la red de la epidemia del COVID-19.

En el trabajo de Tannenbaum (2015), se presenta la noción geométrica de curvatura con la idea de estudiar la robustez de redes del cáncer. El problema es motivado por el problema de heterogeneidad de células cancerosas y es un ejemplo de profunda relación entre los conceptos de evolución darwinianos y la termodinámica Boltzmann. La idea es que la entropía macroscópica incrementa bajo colisiones moleculares microscópicas, mientras la evolución macroscópica puede ser parcialmente explicada vía el incremento de entropía, el razonamiento es en la línea con los que presenta su trabajo que utiliza la curvatura para cuantificar la robustez de la red.

El trabajo de Akguller (2021) muestra que si bien las discretizaciones de la curvatura Ricci ya se han aplicado a sistemas complejos, éstas no se habían aplicado a conjuntos blandos. Recordando que dichos conjuntos blandos son estructuras matemáticas para modelar sistemas múltiples donde básicamente son sistema de conjuntos y donde es posible establecer un espacio métrico y que a través de un embebido se puede proponer una discretización de la curvatura de Ricci. Las curvaturas tipo Forman u Ollivier que siguieren, cuantifican la decisión entre el tamaño del parámetro y la cardinalidad de la participación de los elementos del universo parametrizados.

En ese estudio se pregunta si el concepto geométrico definido, determina las estadísticas para los modelos de conjuntos blandos y se discuten dos ejemplos para esta pregunta. El primer ejemplo de Ricci aplica el modelo en accidentes laborales de conjuntos blandos ocurridos en Turquía 2013-2014 y es comparada con la distancia de Wasserstein de las distribuciones de curvatura. El segundo ejemplo hace uso de las curvaturas de Ricci como indicador en el modelo de los conjuntos blandos en un sistema financiero mientras el sistema esta estresado, estos ejemplos de la vida real muestran que las curvaturas de Ricci discretas para conjuntos suaves ofrecen estadística efectivas

Finalmente, Saucan (2019) menciona que se ha introducido recientemente la discretización Forman de la curvatura Ricci en redes no dirigidas.

La curvatura Forman-Ricci en diversos modelos y en redes no dirigidas del mundo real revela que en la medida de curvatura varios aspectos de la organización de redes complejas no dirigidas aunque muchas redes importantes de la vida real sea dirigidas por naturaleza y la definición de redes no dirigidas es inadecuada para el análisis de tales redes. El trabajo es una extensión de la curvatura de Forman-Ricci para redes no dirigidas partiendo de las redes dirigidas y compara dicho resultado con la curvatura Forman-Ricci con la adaptación de redes dirigidas con otra noción discreta de curvatura de Ricci. Sin embargo, las medidas mencionadas de curvatura no tienen en cuenta las correlaciones de orden superior entre vértices por lo que se ajusta la definición original de Forman a la de Ricci para tener en cuenta el complejo simplicial dirigido y se explora el potencial aumentando la curvatura Forman-Ricci en redes complejas dirigidas.

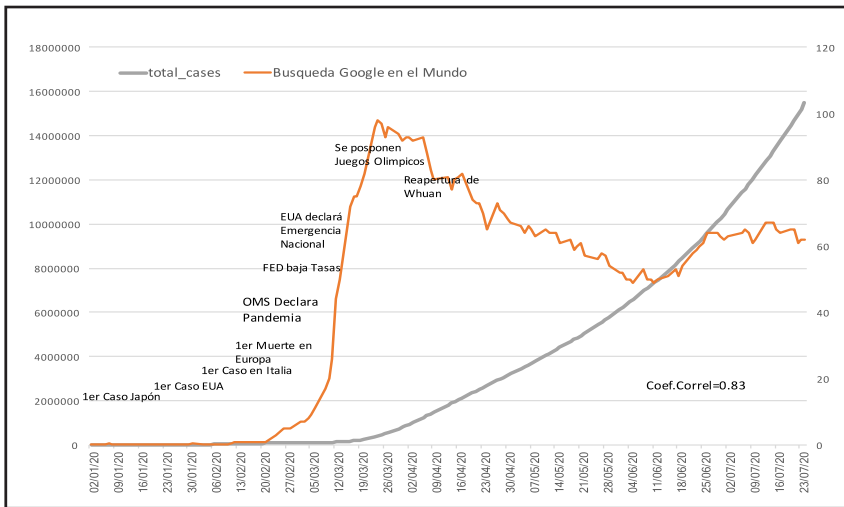
1.1. Hechos estilizados

El brote del coronavirus COVID-19 y su dispersión alrededor del mundo en 2020, como se ha mencionado ha traído consecuencias negativas al sistema financiero mundial. En la Gráfica 1 se observa el aumento de contagios a nivel mundial en contraste con la búsqueda del término COVID-19 en el Internet, concretamente en el buscador Google, donde se puede observar que son los anuncios sobre la pandemia y sus posibles consecuencias de situaciones de tipo económico y financiero las que tienen efectos más inmediatos y determinantes en el contagio de la información en general y en particular para los *traders* financieros, en varios casos más que el mismo número creciente de enfermos alrededor del mundo, al menos en el corto plazo.

En los hechos, la llegada de la epidemia principalmente a Estados Unidos y Europa, así como la declaración de pandemia por parte de la OMS, el movimiento de la tasa de interés por parte de la Federal Reserve System (FED) y la guerra comercial del petróleo provocaron un crecimiento desmedido de búsquedas en el Internet. Por otra parte, en la Gráfica 1, se aprecia un rápido crecimiento y una posterior caída suave, que anticipa el crecimiento real de los contagios y se observa una correlación mínima entre estas dos variables.

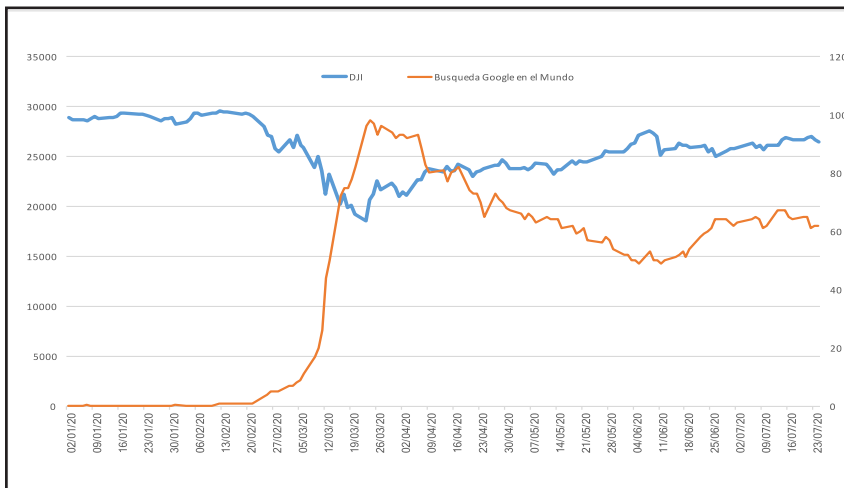
En la Gráfica 2 se observa una correlación negativa entre las búsquedas en Google de la población general en el mundo de la palabra COVID-19 (que en particular pueden ser una muestra representativa de los *traders*) y los anuncios económicos y financieros, así como los propios de la pandemia, con la caída en los mercados mundiales representados por un típico índice mun-

Gráfica 1. Crecimientos de contagios de COVID-19 y efecto en la búsqueda en Google en el mundo



Fuente: elaboración propia <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> y Google Trends.

Gráfica 2. Búsqueda en Google y comportamiento del Índice Accionario en el Mundo



Fuente: yahoo finance y Google Trends.

dial como el Dow Jones (DJI). En otra palabras, de la pandemia real de enfermedad humana se puede pensar que se pasa a una pandemia financiera de acciones humanas de los *traders* por medio de la comunicación instantánea de las redes sociales o el Internet como en este caso.

2. El Modelo

En esta sección se presenta el marco teórico con los antecedentes y fundamentos técnicos para el cálculo de la curvatura, en particular la curvatura Ollivier-Ricci en el contexto de la teoría de gráficas (nodos, aristas y conexiones) con la intención de poder estimar la fragilidad y robustez en el comportamiento del crecimiento de la pandemia COVID-19 y de los mercados financieros. En primer lugar se presentara una revisión de conceptos básicos de geometría diferencial, con las definiciones basadas en Sandhu (2016).

Sea X una variedad Riemanniana (la generalización de una superficie suave en cualquier dimensión). Se pueden medir distancias X y definir la longitud de una curva γ las geodésicas son curvas que localmente tiene la distancia más corta entre dos puntos de esa variedad X , tales curvas son básicas para introducir el concepto de curvatura

Dado un punto $x \in X$ sea T_x el espacio tangente en x y sea $u_x, w \in T_x$ vectores unitarios ortogonales. Si atravesamos el campo a lo largo de la curva geodésica γ en x en dirección de w , denotamos un punto final de la travesía por $y \in X$. Existe un conjunto de vectores tangentes en y , pero solo interesa un vector tangente específico denotado $u_y \in T_y$ el cual debería ser el mismo que u_x , es decir, si quiere comparar dos vectores tangentes que viven en espacios diferentes en forma canónica, esto se hace a través de lo que se conoce como transporte paralelo.

Debido a la curvatura, las geodésicas a lo largo de u_x y u_y (denotadas por $exp_x t u_x$ y $exp_y t u_y$, respectivamente, t denota el parámetro de curvatura) que pudieran converger o divergir uno al otro, con esto en mente se puede definir la curvatura de Ricci a través de una curva seccional, otra vez u_y el cual es un transporte paralelo $deu = u_x$ desde x a y en la dirección w , para $\varepsilon, \delta > 0$ suficientemente pequeños.

$$d(exp_x \varepsilon u_x exp_y \varepsilon u_y) = \delta \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K(u, w) + o(\varepsilon^3 + \varepsilon^3 \delta) \right) \quad (1)$$

el término $K(u,w)$ denota una curva seccional en x en el plano tangente (u,w) , entonces la curvatura Ricci es simplemente obtenida por el promedio en todas las direcciones de u .

Por otra parte, para el caso discreto la medición de curvatura en la teoría de gráficas se apoyara en los conceptos siguientes:

La curvatura de Ricci puede servir como indicador del riesgo sistemático en redes y particularmente de la fragilidad en mercados financieros, en un sentido intuitivo, la curvatura es una desviación de un objeto geométrico de lo plano, que es el caso geométrico más simple. Desde el punto de vista de la geometría euclidiana el contexto, el grado de aplanamiento refleja la conectividad e interdependencia entre los nodos sobre todo los distantes y entonces la generalización de curvatura y aplanamiento para espacios discretos como redes son modelados por gráficas ponderadas.

Considere la siguiente definición de robustez (y por ende de fragilidad), dada una red, uno puede considerar una perturbación aleatoria que resulta de la perturbación de algo observable, más formalmente, sea $q_\delta(t)$ que denote la probabilidad que la media se desvíe por más de δ de su valor original en algún tiempo t , bajo suposiciones estándar $q_\delta(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y la tasa relativa a la cual el sistema se relaja y devuelve su medida de estado no perturbado, su fragilidad y se expresa por la siguiente expresión,

$$R := \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \log_\delta(t) \right) \quad (2)$$

lo que significa que si R es grande, hay un rápido retorno al estado original (esto se conocerá como robustez) y si R es pequeña, significa un lento regreso al estado original (fragilidad). En el área de termodinámica, es bien conocido que la entropía y sus funciones de cambio de grandes desviaciones son muy cercanas, el teorema de fluctuación es una expresión de este hecho para redes y puede expresarse en términos de fragilidad y entropía S_e

$$\Delta S_e \Delta F \leq 0 \quad (3)$$

Por otro lado, sea X una variedad Riemanniana, si se consideran las siguientes superficies concretas: una esfera, un paraboloides hiperbólico (conocida como silla de montar) y una superficie plana, se denotan los vértices del triángulo geodésico en cada una de las superficies por x_0, x_1, x_2 . Se puede

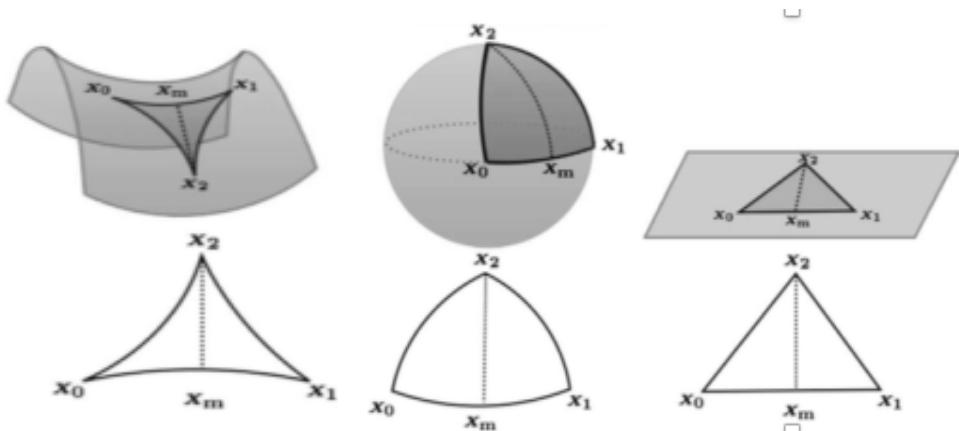
plantear en cada uno, un triángulo geodésico que es una curva cuya distancia es la longitud más corta entre los puntos. Supongamos x_m es el punto medio de la curva geodésica que conecta x_0 y x_1 , si X posee una curvatura seccional no negativa (esfera o superficie plana), la siguiente expresión se mantiene para todos los triángulos suficientemente pequeños

$$d(x_2, x_m)^2 \geq \frac{1}{2}d(x_2, x_0)^2 + \frac{1}{2}d(x_2, x_1)^2 - \frac{1}{4}d(x_0, x_1)^2 \quad (4)$$

donde d es la distancia en X , esta desigualdad muestra que en espacios curvados positivamente los triángulos son más inflados que los triángulos euclidianos y si X tiene curvatura seccional negativa, la superficie será más delgada que su contraparte euclidiana (ver Gráfica 3).

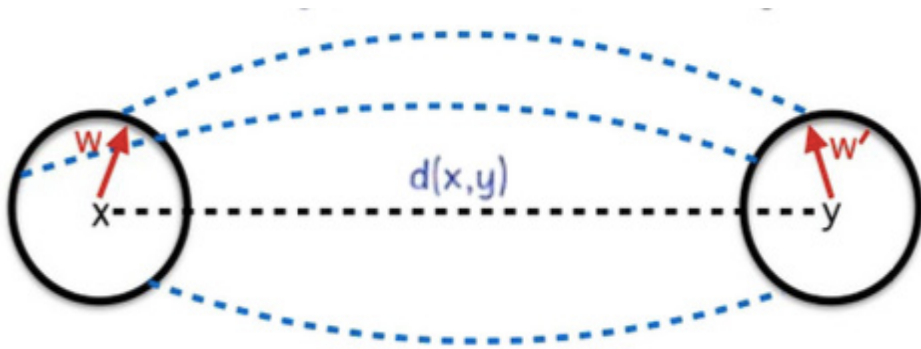
En el caso de la teoría de redes y gráficas se necesita una noción equivalente para expresar este comportamiento y se utilizará la noción de curvatura de Ricci a partir del trabajo de Ollivier para redes discretas. La idea es motivada porque la distancia entre dos pequeñas esferas(geodésica) es menor que la distancia entre sus centros en un espacio curvado y mayor que la distancia de los centros en un espacio curvado(ver Gráfica 4).

Gráfica 3



Fuente: elaboración propia con base en De Sandhu (2016).

Gráfica 4



Fuente: propia con base en De Sandhu (2015),

La curvatura Ollivier-Ricci para redes es definida de la siguiente forma: Sea $G = (V, E)$ una gráfica ponderada no direccionada, donde V y E denotan sus vértices y aristas respectivamente, la función de longitud de trayectoria $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ se define como la longitud más corta entre dos nodos, induce una métrica para un conjunto de nodos de G . La vecindad de un nodo $x \in V$ es un subconjunto de nodos conectados por una arista y se denota por π_x . Sea $\alpha \in [0,1]$ y $x \in V$ definido como μ_x^α una medida de probabilidad sobre un conjunto de nodos como

$$\mu_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & \text{si } y = x \\ \frac{1-\alpha}{\text{deg}(x)} & \text{si } y \in \pi_x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

En particular, sea (X,d) el espacio métrico equipado con una medida de probabilidad $\{\mu_x: x \in X\}$, se define la curvatura Ollivier-Ricci a lo largo de la geodésica que conecta x, y

$$\kappa(x, y) = 1 - \frac{W(\mu_x^\alpha, \mu_y^\alpha)}{d(x,y)} \quad (6)$$

donde W_1 denota la distancia Wassertein-1 y d es la distancia tradicional en X , esto sería el análogo discreto de la curvatura de Ricci. Donde μ_x

y μ_y juegan el papel de las esferas geodésicas, por tanto la distancia entre centros $d(x, y)$ es comparada con la distancia entre las esferas μ_x y μ_y , vía Wassertein-1. Para el caso de las gráficas ponderadas se tiene

$$d_x = \sum_y w_{xy} y \mu_x(y) = w_{xy} / d \geq 2 \quad (7)$$

donde d_x es la suma de todos los vecinos del nodo x y w_{xy} denota la ponderación del edge que conecta al nodo x y y ($w_{xy} = 0$ si $d(x, y) > 1$). Por otro lado, recordando la distancia Wassertein y otros conceptos de teoría de transporte, dicha distancia es definida de la siguiente forma

$$W_p(\mu_1, \mu_2) := \left(\inf_{\mu \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \iint d(x, y)^p d\mu(x, y) \right)^{1/p} \quad (8)$$

donde X es una medida de métrica equipada con distancia d y $\Pi(\mu_1, \mu_2)$ es un conjunto de acoplamientos entre μ_1 y μ_2 que tiene la misma masa y el p -ésimo momento, el acoplamiento entre μ_1 y μ_2 es una medida μ en $X \times X$ tal que (son las marginales de μ)

$$\int_y \mu(x, y) = d\mu_1(x), \int_x \mu(x, y) = d\mu_2(x) \quad (9)$$

Para completar estas ideas, se define la distancia Wassertein en un espacio de medidas discretas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y sean μ_1 y μ_2 dos distribuciones con la misma masa y sea $d(x, y)$ la distancia entre x y $y \in X$, entonces $W_1(\mu_1, \mu_2)$ puede ser definida como sigue

$$W_1(\mu_1, \mu_2) = \min_{\mu} \sum_{i,j=1}^n d(x_i, x_j) \mu(x_i, x_j) \quad (10)$$

donde $\mu(x, y)$ es un acoplamiento sujeto a las siguientes restricciones

$$\mu(x, y) \geq 0 \text{ para } x, y \in X \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu(x, y_i) = \mu_1 \text{ para } x \in X \quad (11 \text{ a})$$

$$\sum_{i=1}^n \mu(x_i, y) = \mu_2 \text{ para } y \in X \quad (11 \text{ b})$$

que para el costo se encuentra en el acoplamiento de la masa de movimiento definida por μ_1 y μ_2 que correspondería a la de mínimo esfuerzo.

3. Aplicación del Modelo

Esta sección está fundamentada en el marco teórico de la sección anterior y se utiliza el cálculo del estimador de curvatura de gráficas Ollivier-Ricci, además de la calculadora de curvatura de gráficas desarrollada en <http://www.mas.ncl.ac.uk/graph-curvature/> que se convierte en una herramienta poderosa que facilita el cálculo de manera práctica haciendo uso con una interface del *software* de *Python graphcurvature.py*.

La calculadora mencionada en el párrafo anterior, está diseñada en un modelo de cliente-servidor con una estructura distribuida que descarga el trabajo computacional de los posibles usuarios de máquina y browser de web a una máquina o servidor remotos. Los cálculos numéricos sofisticados y los problemas de optimización están en lugar del lado del servidor y una vez realizados simplemente regresa los resultados al usuario de la máquina.

Del lado del usuario la calculadora de curvatura gráfica provee en forma de *website* hospedado en el Internet público. El *website* provee una interface de usuario gráfico (GUI) permitiendo una entrada de gráfica y manipulación con cálculos de curvatura gráfica desplegada dentro de la gráfica.

Del *software* del lado del cliente, permite a los usuarios definir gráficas para el cálculo de curvatura Ollivier-Ricci de dos formas: la primera con una gráfica que sea cargada dentro del *software* construyendo una matriz adjunta llamada JSON, o bien de una segunda forma donde intuitivamente el usuario puede dibujar gráficas interactuando con el *website* usado el *mouse*.

El presente trabajo estima la fragilidad en los mercados financieros y la producida durante el contagio de la pandemia del COVID-19 en 2020. En lo que respecta a la información, se seleccionan diez índices de bolsas de valores representativas en los diferentes continentes en el siguiente periodo de tiempo del 11 de noviembre de 2019 al 9 de noviembre de 2020 obtenidas las series de yahoo.finance (Tabla 1). Por otra parte, se hace una selección del crecimiento de contagios en diez distintos países alrededor de mundo en el periodo de tiempo del 21 de enero de 2020 al 9 de noviembre de 2020, consiguiendo los datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> (ver Tabla 2) y que no necesariamente coinciden con los países donde se encuentran las bolsas de valores. Finalmente se considera

el caso combinado de ambas series el periodo de estudio es del 13 de febrero de 2020 al 9 de noviembre de 2020.

Debido a que el estudio se divide por los efectos en mercados financieros y por contagios en países, se presentan a continuación los datos de los índices de las bolsas y de los países que se analizarán.

A partir de la información de las series de datos de los índices del mercado y del crecimiento del número de contagios mencionada en las Tablas 1 y 2 respectivamente, como paso siguiente se calculan los rendimientos aritméticos de ambas series y posteriormente se estima su matriz de coeficientes de correlación. Más adelante, asociando a cada índice de bolsa o cada país como un nodo en una gráfica (primero por grupos de índices, luego por grupos de países y luego combinando ambos) se conectan mediante aristas a otros países o bolsas según sea el caso siguiendo el criterio *winner-take-all* (Tse Ch. *et al.* 2010). Dos nodos están conectados si el valor absoluto de su correlación es mayor que un valor umbral de 0.6 (para no considerar la dirección de la arista y el umbral puede cambiar) y por supuesto hay que notar los nodos no pueden estar conectados consigo mismo en este tipo de gráfi-

Tabla 1. Índices de bolsas consideradas en el estudio de fragilidad de Mercados

Símbolo	Nombre del Índice
DJI	Dow 30
TA125.TA	TA125
00001.SS	SSE Composite Index
GDAXI Index	DAX Performance
BVSP	IBOVESPA
N100	EURONEXT 100
MXX	IPC
N225	NIKKEI 225
GSPC	S&P 500
RUT	RUSELL 2000

Tabla 2
Países considerados en el estudio de fragilidad por pandemia COVID-19

Países
México
EUA
Japón
Reino Unido
China
Emiratos Árabes
Brasil
Alemania
Italia
Taiwan

cas. Esta forma de determinan la ponderación de las aristas con los nodos se aplicara a distintos casos y distintas ventanas móviles (en una aproximación de una por vez por mes en 2020).

Una vez construidas las matrices de ponderación, se utiliza el software para el cálculo de la curvatura Ollivier-Ricci y se estima el promedio de los valores para cada caso de su red y en cada ventana temporal.

Se plantearon ventanas temporales (mensuales) para cada uno de los siguientes casos del indicador de curvatura Ollivier-Ricci

- 1) Redes de mercado con índices de bolsas de valores indicadas en la tabla 1.
- 2) Redes de pandemia con valores del crecimiento de contagios de la tabla 2.
- 3) Simultáneamente, una red con índices de las bolsas de valores indicadas en la tabla 1 y valores del crecimiento de contagios de la tabla 2.
- 4) Simultáneamente, red con un valor de una bolsa representativa mundial (DJI), crecimiento de contagios de COVID- 19 (consideran-

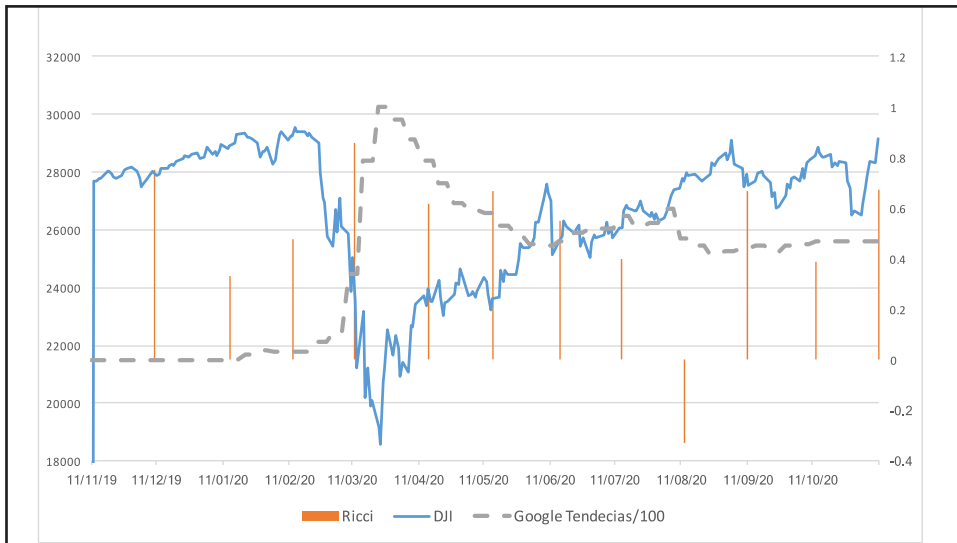
do a nivel mundial) y comportamiento de búsquedas de la palabra COVID-19 mundial en Google trends.

Al final se compara el promedio obtenido del estimador de curvatura Ollivier- Ricci en cada uno de los cuatro casos mencionados anteriormente y para diferentes ventanas de tiempo mensuales. En la siguiente sección se mostrarán los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

4. Resultados

Con el marco de la teoría utilizada de la sección 1 y el modelo y su aplicación secciones anteriores 2 y 3 a continuación se presentan los resultados obtenidos del cálculo del promedio del estimador Curvatura Ollivier-Ricci. A partir de los diez índices de las bolsas del mundo de la tabla 1 en la siguiente Gráfica 5 aparece la curvatura Ollivier-Ricci, en contraste con los comportamientos históricos de un índice representativo del mercado y las búsquedas en Google Trends, los gráficos de las redes generadas para el cálculo de la curvatura pueden consultarse en el apéndice A.

Gráfica 5. Comparativo Mercado DJI y Promedio de la Curvatura de Ollivier-Ricci Mensual (Bolsas del mundo)



Fuente: elaboración propia con datos de google trends, yahoo finance.

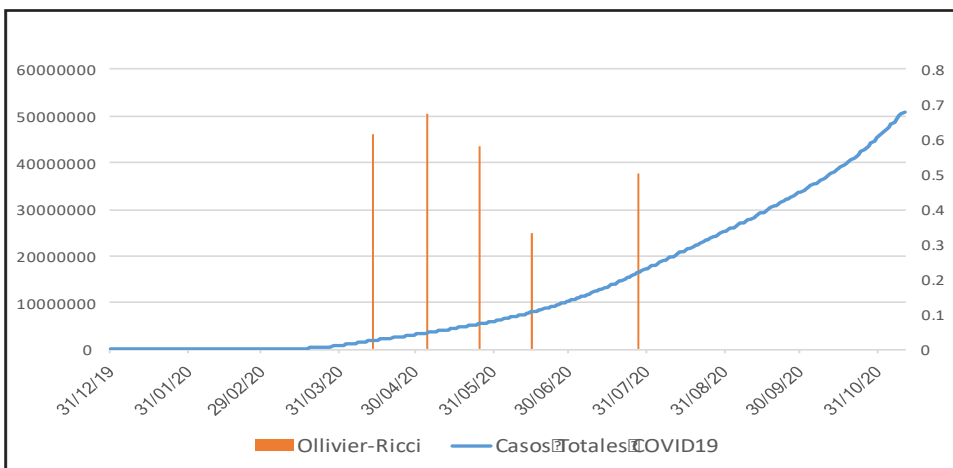
En la gráfica 5 se presenta el contraste del promedio de la curvatura Ollivier-Ricci con un índice representativo mundial como es el DJI y el reporte de la búsqueda de la palabra COVID-19 en Google Trends (reescalado). Se puede apreciar en la misma gráfica que en general los mayores valores de la curvatura corresponden a las principales caídas de DJI tal vez con un pequeño desfase en el tiempo. Si se compara el valor de la curvatura con las búsquedas en Google, se observa el efecto contrario, mayores valores de la curvatura o valores constantes se relaciona mayores búsquedas en Google del COVID-19. Un resultado atípico ocurre en agosto de 2020.

Como segundo caso se analiza el contagio de COVID-19 dado entre diez países del mundo (tabla 2) y se estima nuevamente la curvatura Ollivier-Ricci. En la Gráfica 6 donde aparece con un comparativo del crecimiento mundial.

El periodo inicial de máximo crecimiento corresponde a los valores más altos de la curvatura Ollivier-Ricci y hay varios meses, sobre todo en los meses finales de 2020, que la curvatura es cero.

Como tercer caso, ahora en una misma red se incluyen un combinado de los dos grupos anteriores, es decir, los índices de bolsa y el crecimiento de

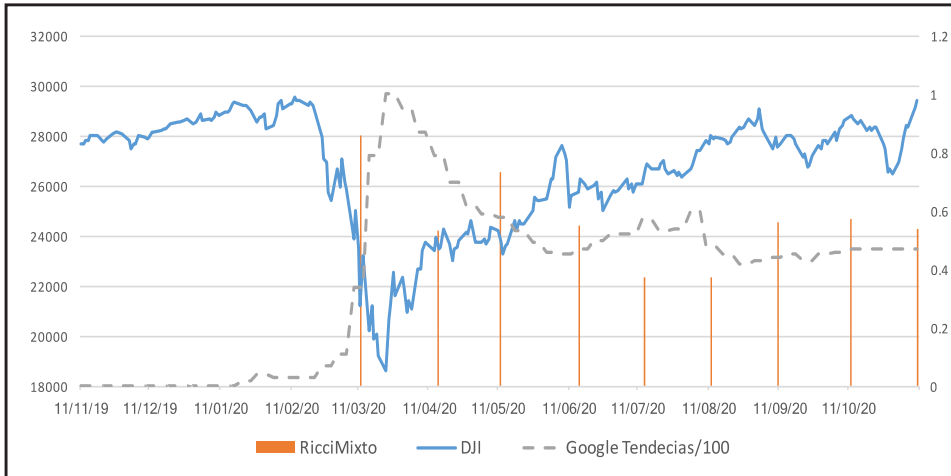
Gráfica 6. Comparativo contagio COVID-19 mundial y Curva Ollivier-Ricci mensual



Fuente: elaboración Propia con datos de:
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

contagios de COVID-19 y se estima en una sola gráfica el índice Ollivier-Ricci, en otras palabras, para un total de 20 nodos, teniendo el cuidado de coincidencias en periodos (que provoca un reducción en los datos de las series). El resultado se muestra en la Gráfica 7.

Gráfica 7. Comparativo Mercado DJI y Curvatura de Ollivier-Ricci mensual (COVID-19-Mercado)



Fuente: elaboración Propia con datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Nuevamente se calcula el estimador de curvatura Ollivier-Ricci de los 20 datos combinados y se compara con un índice representativo del mercado mundial como es el DJI y las búsquedas en Google Trends sobre el COVID-19. Se puede observar otra vez que la curvatura es mayor en periodos de caída de los mercados (DJI) o incremento de búsquedas. Es de notar, que los mayores valores de la curvatura ocurren en las intersecciones de estas dos últimas series.

Como último análisis, se consideran solamente la serie histórica para tres nodos, la del COVID-19, el DJI y el Google Trends. Como resultado la curvatura siempre es cero excepto en el caso de agosto a septiembre de 2020, incluso no aunque se haga el mismo ejercicio con desfase de un mes no cambia el resultado.

Conclusiones

El efecto de contagio en los mercados financieros internacionales (a través de índices representativos), y de contagios de salud en el mundo por ejemplo de la pandemia COVID-19 (utilizando los reportes de crecimiento de contagios), pueden ser analizados de una forma novedosa mediante los conceptos de robustez y/o fragilidad de sus estructuras.

La herramienta utilizada en el presente trabajo es el concepto de curvatura, específicamente la curvatura Ollivier-Ricci para casos discretos, con teoría de gráficas, que sirve como indicador del riesgo sistemático y de movimientos de *crash* o caídas, donde el grado de curvatura refleja la conectividad entre nodos. Un incremento en el indicador de curvatura está correlacionado negativamente con la fragilidad del sistema o bien la robustez con la habilidad de la red para dispersar posibles perturbaciones. En resumen, la medida de curvatura está relacionada con las caídas de los mercados y con la aparición de arbitraje financiero.

En el caso del crecimiento de la pandemia de COVID-19, entre los meses de marzo y mayo del 2020 se muestran los valores más grandes de la curvatura Ollivier-Ricci entre los diez países seleccionados en la Tabla 1 y que muestra consistencia con lo comentado en el párrafo anterior, sobre la relación de curvatura y crecimientos o caídas de los valores de las series. Con lo anterior se confirma la hipótesis inicial de que una mayor fragilidad y crecimiento de contagios en la pandemia está relacionada a mayores valores de curvatura y que a su vez refleja en un mayor riesgo sistémico o de incremento de contagios.

En el caso de comportamiento del valor de índices de bolsas alrededor del mundo, la caída (o *crash*) está vinculada a los más grandes valores de la curvatura, sobre todo en el mes de marzo de 2020, seguido de otras pequeñas caídas en meses posteriores. De forma gráfica se compara las búsquedas en Google de la palabra COVID-19, como un posible factor intrínseco de contagio de la pandemia a los mercados. Como en el párrafo anterior se comprueba la hipótesis de una mayor fragilidad, riesgo o posibilidad de crisis están asociados a mayores valores de curvatura.

Al combinar simultáneamente nodos de países en pandemia con nodos de índices de bolsas, si bien no existen interacciones entre ambos grupos (la combinación es una suma lineal), si se refuerza en cada caso el valor de la curvatura, siendo mayor el valor de este en las caídas de las bolsas. Un factor curioso es que en la intersección de ambas curvas (DJI y Google) se encuentran los mayores valores de curvatura.

El trabajo de investigación puede continuarse en varias direcciones, por ejemplo: si se incrementa la frecuencia de las ventanas móviles del tiempo, o bien si se agregan otros países distintos, o bien utilizando diferentes metodologías de la estimación de la curvatura, o tal vez incluyendo conceptos como el de flujo de Ricci o de comunidades.

Referencias bibliográficas

- Akgüller, Ö. (2021). Discrete Ricci Curvature-based Statistics for Soft Sets. *Soft Comput* 25, 599–612 doi.org/10.1007/s00500-020-05171-5.
- Barros de Souza D., Cunha J., Figueiroa E., Correia J., Da Silva H., De Lima J.L. Filho, Albuquerque J., Santos F., (2020). “Using Discrete Ricci Curvatures to Infer COVID-19 Epidemic Network Fragility and Systemic Risk”. *medRxiv* doi.org/10.1101/2020.04.01.20047225.
- Cushing D., Kangaslampi R., Lipiäinen V., Liu S Stagg G. (2019). «The Graph Curvature Calculator and the Curvatures of Cubic Graphs. *Experimental Mathematics*, DOI: 10.1080/10586458.2019.1660740.
- Ilinski K.; Kalinin G. (1998). “Black-Scholes Equation from Gauge Theory of Arbitrage; PDF. [en línea]”, Disponible en <http://arxiv.org/abs/hep-th/971203>. Recuperado en octubre 2014;
- Ilinski K. (2001). *Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing*. John Wiley and Sons, NY USA.
- Ollivier Y. (2009). “Ricci Curvature of Markov Chains on Metric Spaces”. *J. Funct. Anal*, 256:3, 810–864.
- Ollivier Y. (2010). “A Survey of Ricci Curvature for Metric Spaces and Markov Chains, Probabilistic Approach to Geometry”. *Adv. Stud. Pure Math.* 57, 343–381
- Samal, A., Sreejith, R.P., Gu, J. (2018). “Comparative Analysis of Two Discretizations of Ricci Curvature for Complex Networks”. *Sci Rep* 8, 8650 (2018). doi.org/10.1038/s41598-018-27001-3
- Sandhu, R., Georgiou, T., Reznik, E. *et al.* (2015). “Graph Curvature for Differentiating Cancer Networks”. *Sci Rep* 5, 12323. doi.org/10.1038/srep12323
- Sandhu, T. T. Georgiou, A. R. Tannenbaum, (2016). “Ricci Curvature: An Economic Indicator for Market Fragility and Systemic Risk”. *Sci. Adv.* 2, e1501495.
- Saucan, R.P. Sreejith, R.P. Vivek-Ananth, Jürgen Jost, Areejit Samal, (2019). Discrete Ricci Curvatures for Directed Networks. *Chaos, Solitons & Fractals* 118, (2019), 347-360. doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.031.

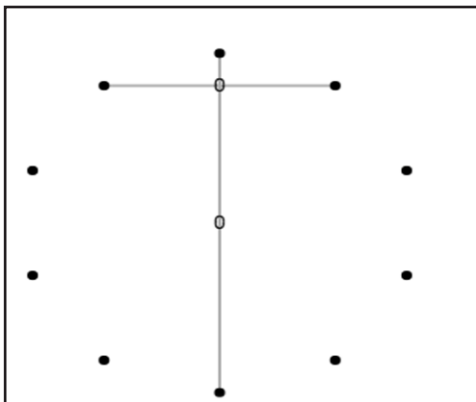
- S Sia, J., Jonckheere, E. & Bogdan, P. (2019). "Ollivier-Ricci Curvature-Based Method to Community Detection in Complex Networks". *Sci Rep* 9, 9800. doi.org/10.1038/s41598-019-46079-x
- S Tannenbaum A., Sander C., Zhu L., Sandhu R., Kolesov I., Reznik E., Senbabaoglu, Gergiou T. (2015). Ricci Curvature and Robustness of Cancer Networks. arXiv:1502.04512v2
- Tse Ch., Liu j., Lau F., (2010). "A Network Perspective of the Stock Market", *Journal of Empirical Finance*, 17(4), 659-667 doi.org/10.1016/j.jempfin.2010.04.008.

Apéndice A

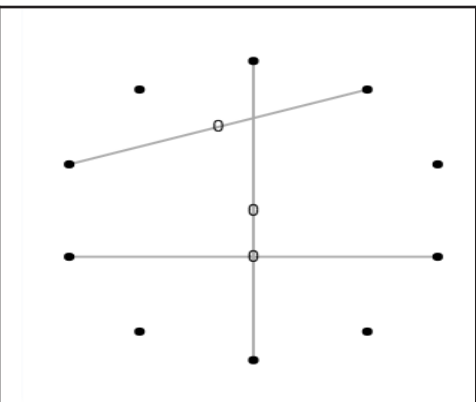
Gráficas Pandemia COVID-19 (10 países del mundo)

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando Graph curvature calculator v0.7.2 para 14 meses consecutivos utilizando las series históricas de Contagios de COVID-19 en 10 países representativos del mundo, donde cada país nodo representa un país.

Gráfica 1a

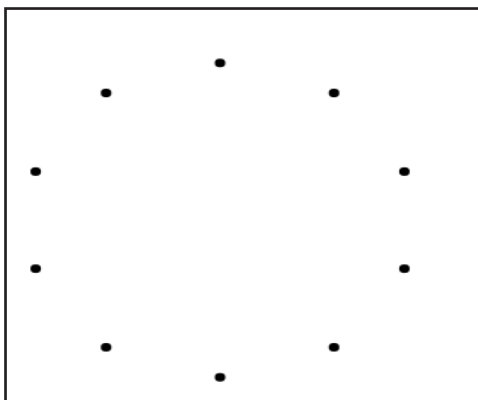


Gráfica 2a

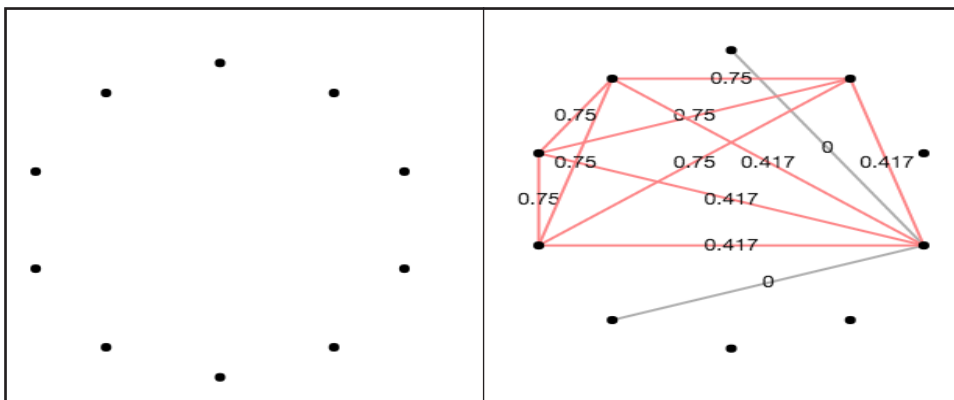


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 3a

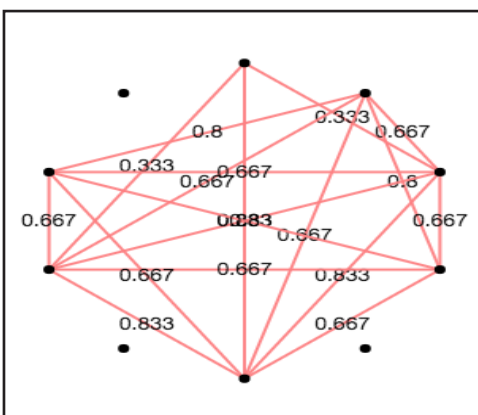


Gráfica 4a

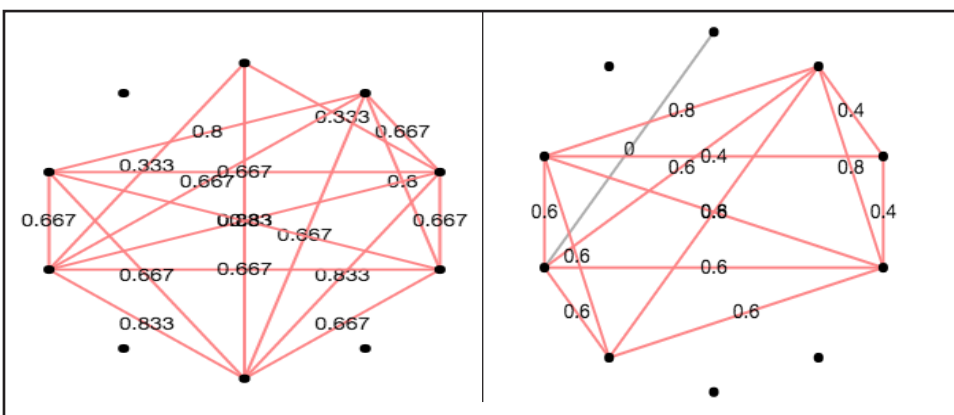


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 5a

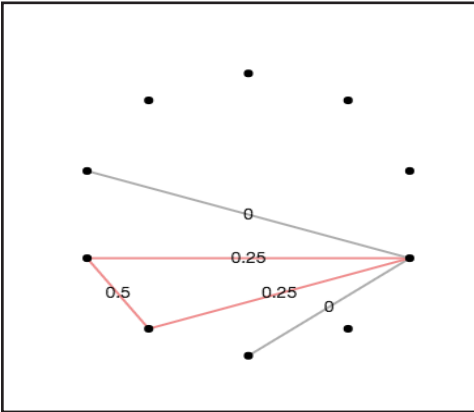


Gráfica 6a

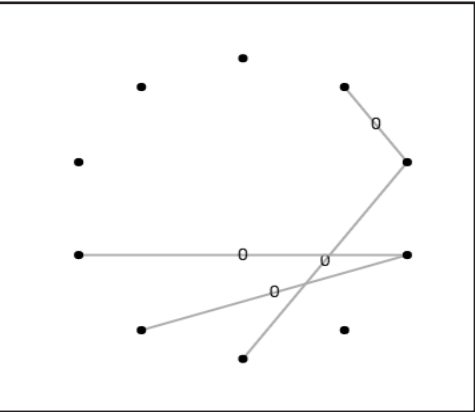


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 7a

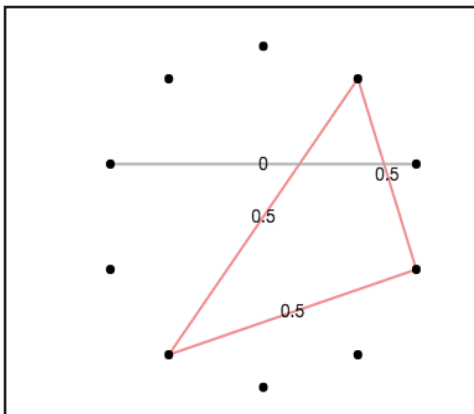


Gráfica 8a

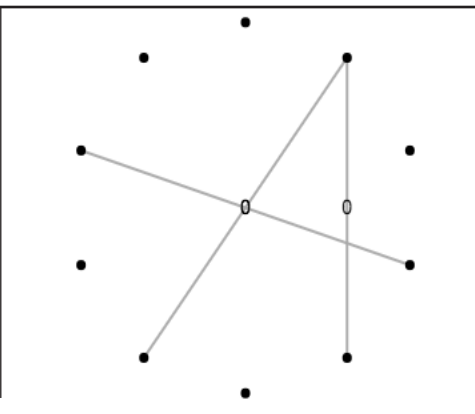


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 9a

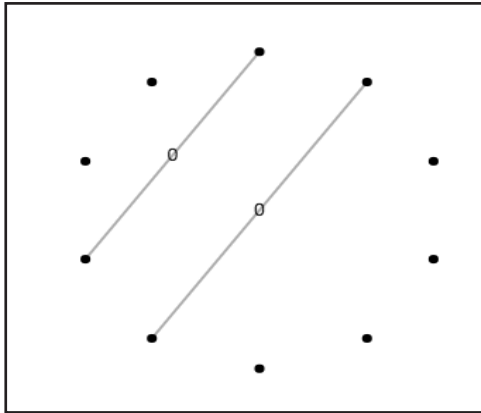


Gráfica 10a

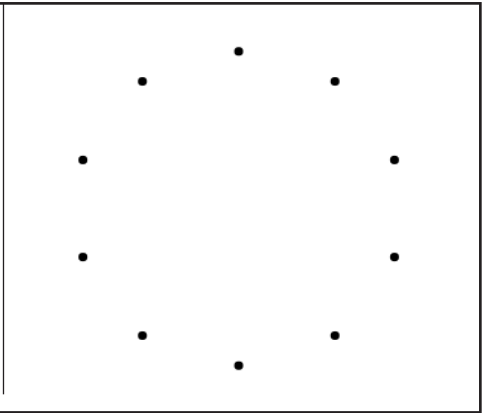


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 11a

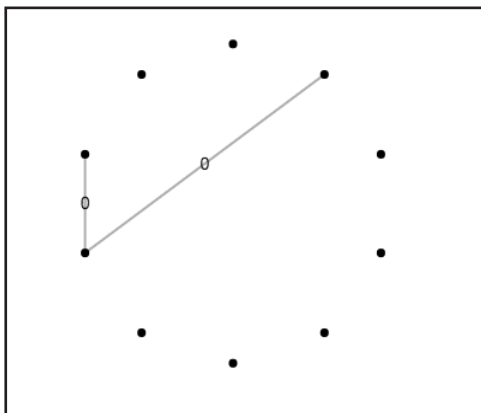


Gráfica 12a

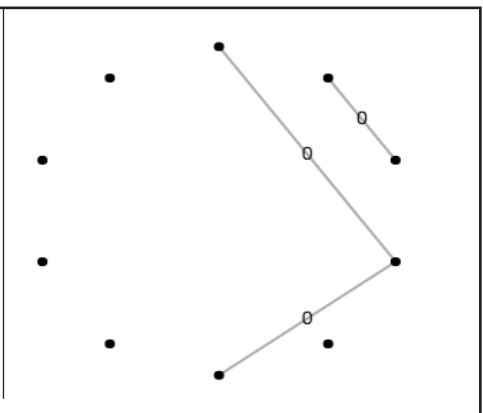


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 13a



Gráfica 14a



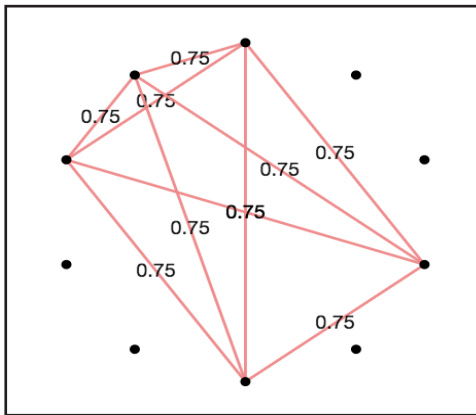
Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Apéndice B

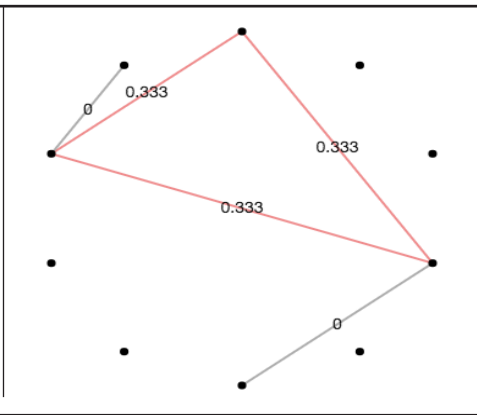
Gráficas Bolsas de Valores (10 Bolsas en el mundo)

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando *Graph curvature calculator* v0.7.2 para 12 meses consecutivos utilizando las series históricas de Bolsas en 10 países representativos del mundo, donde cada nodo representa un índice de bolsa de valores.

Gráfica 1 b

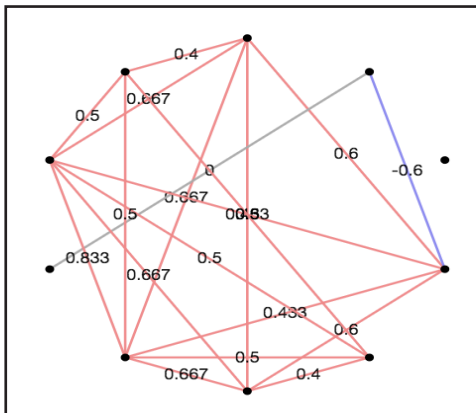


Gráfica 2 b

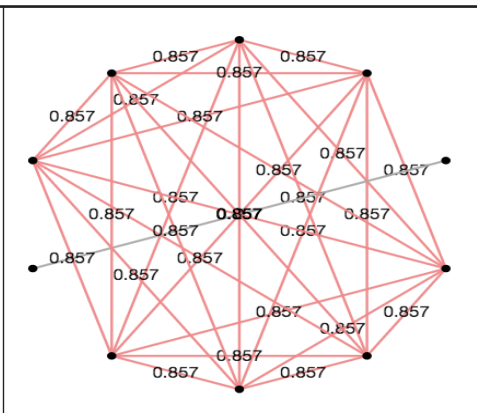


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 3 b

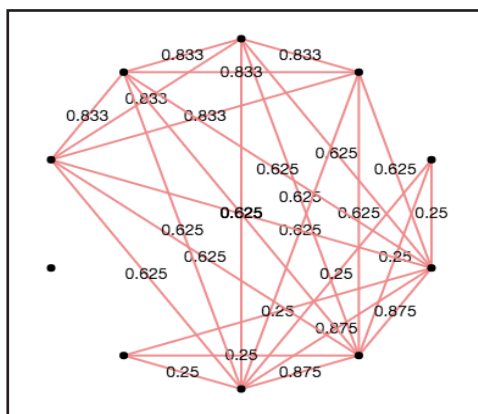


Gráfica 4 b

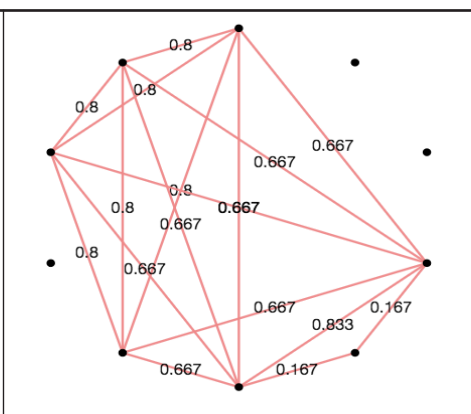


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 5 b

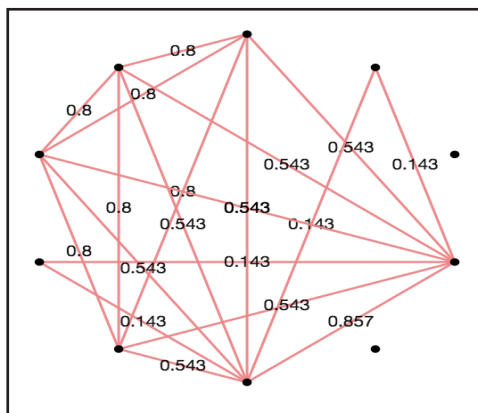


Gráfica 6 b

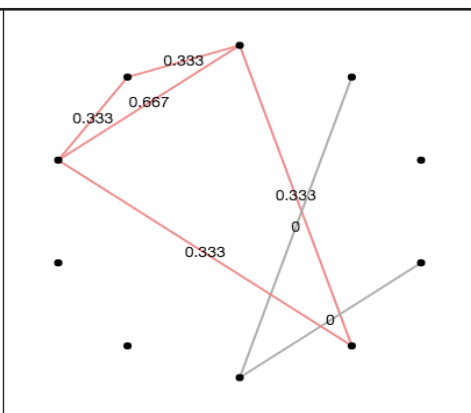


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 7 b

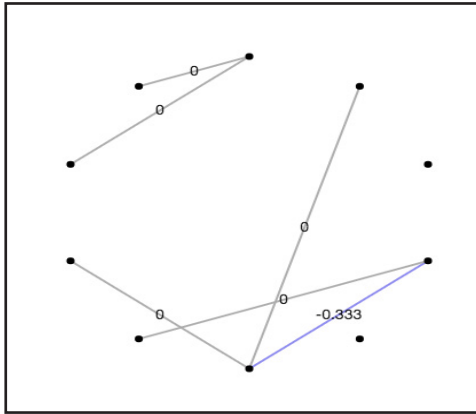


Gráfica 8 b

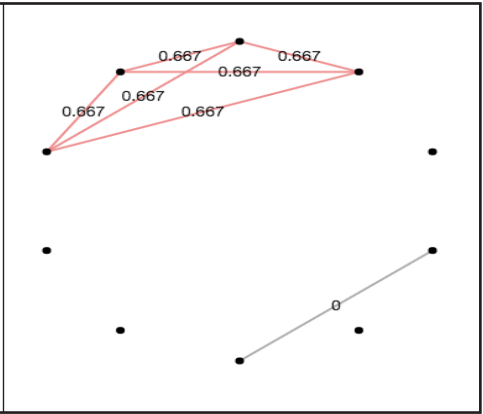


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 9 b

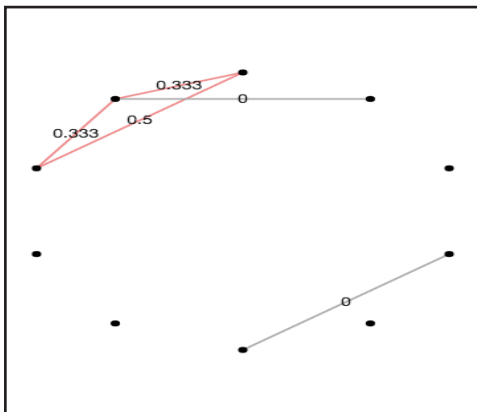


Gráfica 10 b

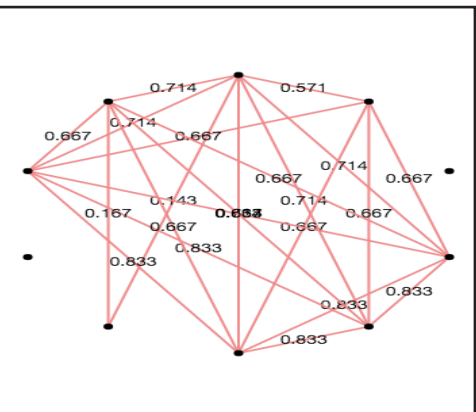


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 11 b



Gráfica 12 b



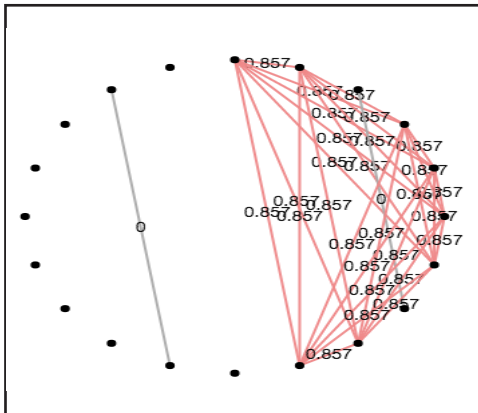
Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Apéndice C

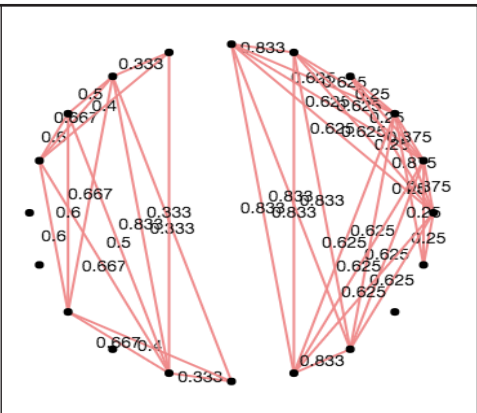
Gráficas Pandemia COVID-19- Bolsas de Valores países del mundo

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando Graph curvature calculator v0.7.2 para 9 meses consecutivos utilizando las series históricas de Contagios y Bolsas en 10 países representativos del mundo, donde cada nodo representa un índice de bolsa de valores o los contagios de un país, es decir, el combinado de los casos anteriores.

Gráfica 1 c

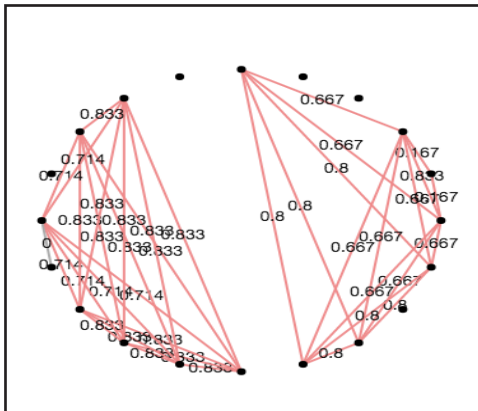


Gráfica 2 c

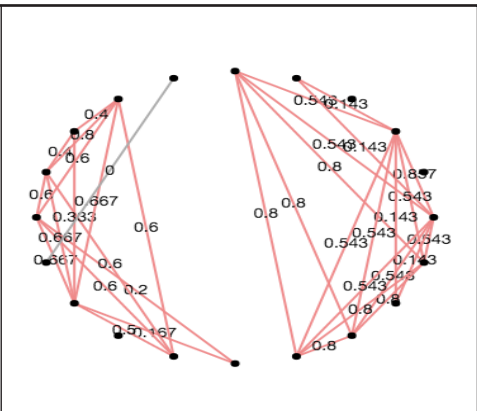


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 3 c

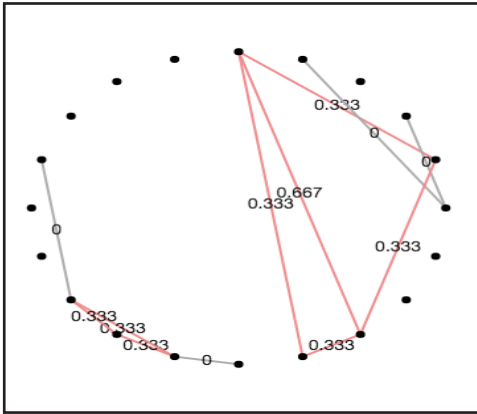


Gráfica 4 c

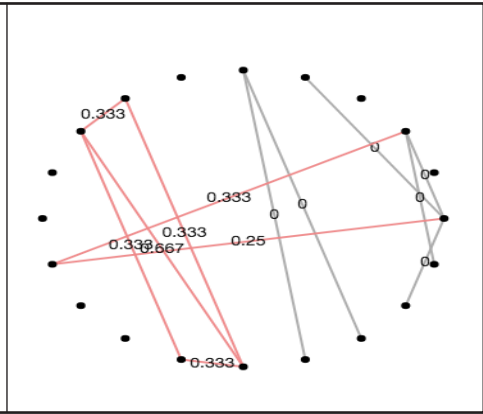


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 5 c

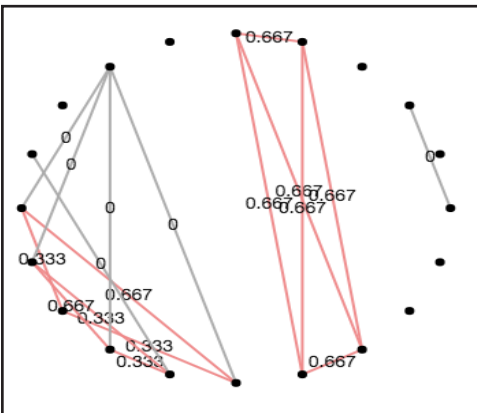


Gráfica 6 c

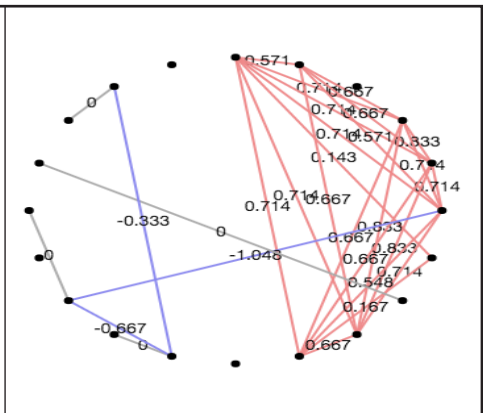


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 7 c

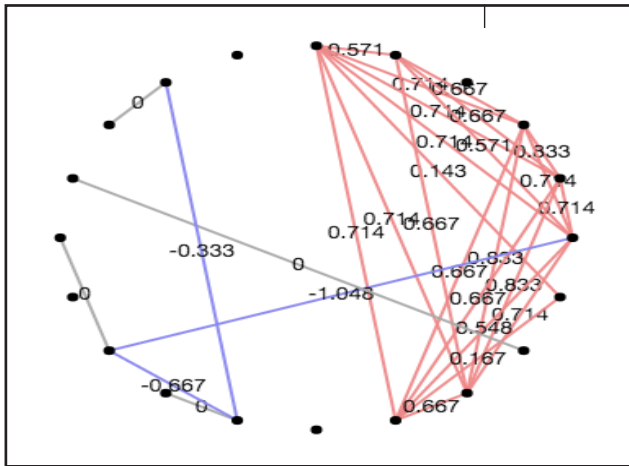


Gráfica 8 c



Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 9 c



Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>