

Modelo binomial borroso, el valor de la firma apalancada y los efectos de la deuda

Fuzzy binomial model, the value of levered firms
and the debt effects

Gastón Silverio Milanesi*

Fecha de recepción: 22 de octubre de 2014

Fecha de aceptación: 12 de diciembre de 2014

* Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina,
Departamento Ciencias de la Administración
milanesi@uns.edu.ar

RESUMEN

El trabajo propone un modelo de valuación de empresa, binomial borroso proyectando y condicionando escenarios de continuidad o liquidación de la firma. El modelo se basa en la Teoría de Opciones Reales y la Lógica Borrosa para estimar el valor de la firma, que resulta de un balance explícito de las ventajas y riesgos de tomar deuda, convirtiéndose en una propuesta que supera al *Descuento de flujos de fondos (DFF)* y al *Modelo binomial de valoración de opciones* clásico. El trabajo se estructura de la siguiente manera: se introducen las debilidades que presenta el DFF y el modelo binomial. A continuación se desarrolla el marco teórico que sirve de base al modelo: el modelo binomial clásico, su versión borrosa y el modelo propuesto. Luego se ilustra mediante un caso de aplicación comparando los resultados obtenidos mediante el modelo de descuento de flujos de fondos (valor presente ajustado) con el modelo binomial tradicional. Finalmente se concluye sobre las ventajas del modelo propuesto.

Clasificación JEL: G13-G32

Palabras claves: Opciones Reales, Binomial, Borroso, Deuda, Valuación.

ABSTRACT

This paper proposes a fuzzy binomial model for company valuation, considering continuity or liquidation scenarios. The Real Option Theory and the Fuzzy Logic are used for estimating the value of the firm which results from an explicit trade-off between the advantages and the risk of acquiring debts, resulting in a better proposal than the Discounted Cash Flow (DCF) and the traditional real option valuation binomial model. The structure of this paper is as follows: First, the weaknesses of the DCF and the binomial models are introduced. Next, the theoretical framework that serves as a basis for the model is developed: The traditional Binomial Model, its fuzzy version and the proposed model. The discounting cash flow model (adjusted present value) and the traditional binomial model are applied to a set of data comparing the results obtained. Finally, the advantages of the proposed model are discussed.

JEL Classification: G13-G3

Keywords: *Real Options, Binomial, Fuzzy, Debt, Valuation.*

Introducción

La primer referencia explícita al valor teórico o intrínseco de una acción corresponde a las ideas de Williams (1938) quien lo define como el valor actual de la corriente esperada de dividendos (Williams, 1938).¹ La formalización y popularización del modelo correspondió a Duran (1957) y Gordon (1962), dando origen al conocido modelo de valuación de descuento de dividendos (MDD), (Duran, 1957); (Gordon, 1962).² Como una adaptación del MDD a la valoración de empresas, nace el modelo de Descuento de Flujos de Fondos (DFF) (Pratt y Grabowski, 2008).³ Éste se caracteriza por ser uno de los métodos de valoración de mayor difusión (Fornero, 2011) y su formulación original reconoce variantes,⁴ específicamente por

-
- 1 Además el autor establece las premisas vinculadas a proyecciones financieras y a una primera clasificación de empresas de crecimiento y valor. Se agrupan como empresas de valor aquellas cuya razón VM/VL (valor de mercado o valor en libros) es inferior a la unidad y generalmente contienen altos valores en la razón PER (precio-rendimientos), mientras que las firmas de crecimiento tienen un VM/VL superior a la unidad y bajos PER. La presente clasificación es empleada a menudo en la administración de carteras de acciones.
 - 2 El tradicional modelo de descuento de dividendos ha sufrido variantes en función a la progresión del crecimiento (aritmética-geométrica), las etapas de crecimiento (una sola etapa-múltiples etapas), el comportamiento de la corriente esperada de dividendos (determinístico-estocástico) (Hurley y Fabozzi, 1998); (Hurley y Johnson, 1998); (Hurley, 2013).
 - 3 Los modelos de valuación de empresas pueden clasificarse en: a) valuación por múltiplos y comparables donde se encuentra la razón precio-ganancia (PER); valor de mercado-valor de libros (VM/VL) el valor de la firma (enterprise value) o razón ganancias antes de intereses y después de impuestos-valor de mercado de la firma, entre otros múltiplos; b) valuación en base a flujos de fondos agrupando al modelo de descuento de dividendos (con sus variantes de crecimiento determinísticas y estocásticas) y descuento de flujos de fondos (flujos de fondos a capital (FFC); valor presente ajustado (VPA); costo promedio ponderado del capital (CPPC)); c) modelos basados en el concepto de beneficio económico como las ganancias residuales (residual income) y valor económico añadido (EVA®); d) teoría de pagos contingentes (opciones reales) (Fernández, 2012).
 - 4 El método de descuento de flujos de fondos puede clasificarse en tres grandes grupos: a) Costo promedio ponderado: el valor de la empresa surge de actualizar la corriente de flujos de fondos libres a la tasa del costo promedio ponderado del capital, éste incorpora los efectos del ahorro fiscal producto de la deuda; b) Valor presente ajustado: el valor de la firma surge de la suma del valor de la empresa sin deuda más

el tratamiento asignado a la estructura de capital y el efecto del escudo fiscal, para estimar el valor de la firma (Booth, 2007). Ahora bien, una de sus principales debilidades reside en que la valuación no considera los posibles estados contingentes a los que se encuentra expuesta la empresa (Dixit y Pindyck 1994). Por lo general el analista parte del supuesto de “*empresa en marcha o continuidad*” como único estado contingente para la proyección de los flujos de fondos. Esto tiene consecuencias respecto al efecto deuda sobre el valor de la firma: si el estado “*empresa en marcha*” supone que los flujos de fondos libres proyectados superan al flujo de fondos de la deuda, entonces el efecto del escudo fiscal en relación al valor de la firma es positivo y variable linealmente en función al nivel de endeudamiento. Existen otros estados que pueden poner en riesgo la continuidad de la empresa como consecuencia de la probable insuficiencia de los flujos de fondos para atender los servicios de deuda, como el “*estado de liquidación*”. Para valorar una firma en marcha conjugando estados de “*empresa en marcha*” o “*liquidación*” requiere de adecuar el DFF con herramientas analíticas propias de un modelo dinámico de valoración, aplicando la Teoría de Opciones Reales y el uso de modelos de valuación binomiales (Trigeorgis, 1997).

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar, basado en la Teoría de Opciones Reales, un modelo binomial borroso de valuación de empresas condicionando su resultado⁵ a los posibles estados de “*continuidad*” o “*liquidación*” a los que se enfrenta la firma. En la literatura especializada existen modelos numéricos binomiales para determinar el valor de la firma considerando estados de “*continuidad-liquidación*” (Broadie y Kaya, 2007); (Milanesi, 2014 (a)), éstos aplican la lógica del clásico modelo binomial de valuación de opciones (Cox y Ross, 1976); (Cox, Ross y Rubinstein, 1979); (Rendleman y Bartter, 1979); (Jarrow y Rudd, 1982). El trabajo adapta los modelos binomiales borrosos de valoración, (Muzzioli y Torricelli, 2004);

el valor actual de los beneficios netos del endeudamiento; c) Flujos de capital: el valor de la firma surge de actualizar la corriente de flujos de fondos libres más el efecto de la deuda a la tasa del costo promedio ponderado del capital sin considerar el ahorro fiscal.

⁵ La decisión de financiamiento condiciona el valor estimado de los activos de la firma y el capital propio a la generación estocástica de flujo de fondos libres para atender los pagos originados por la deuda. La idea precedente es consistente con asimilar al valor del patrimonio neto de la empresa como una opción de compra a favor del propietario (Black y Scholes, 1973); suponiendo dos escenarios: (a) flujos de fondos libres superiores a los pagos de deuda, cuya consecuencia es la continuidad de la firma, (b) insuficiencia de flujos de fondos libres que deriva en la liquidación automática de la empresa y cancelación de los pasivos con los activos disponibles.

(Zdnek, 2010); (Shin-Yung y Cheng Fee, 2010); (Calle Fernández y Tamayo Bustamante, 2011); (Milanesi, 2013 (a) (Milanesi, 2014 (b), a las situaciones contingentes de suficiencia-insuficiencia de flujos de fondos libres para atender los pagos de deuda. Se supone la existencia de dos imperfecciones determinísticas de mercado vinculadas a las decisiones de financiamiento y con impacto en el valor de la empresa: impuestos corporativos a la renta y costos de liquidación.

El modelo binomial borroso propuesto describe y cuantifica la incertidumbre-ambigüedad utilizando la Teoría de Conjuntos Borrosos (*fuzzy set*) (Zadeh, 1965); (Dubois y Prade, 1980). El modelo propuesto constituye una importante mejora respecto del binomial tradicional ya que: a) explicita la gama de posibles valores intrínsecos de la firma a partir del rango de resultados bajo la forma de número borroso, b) captura el sesgo positivo de los pagos asimétricos borrosos correspondientes al activo (Carlsson y Fuller, 2003); para el caso bajo examen la opcionalidad está dada por la continuidad siempre que los flujos de fondos libres superen el valor de los servicios de deuda o su liquidación; c) presenta un valor medio borroso distinto al obtenido por el modelo binomial clásico, a partir de la media del número borroso y de considerar aspectos subjetivos del analista, mediante el uso de índices pesimismo-optimismo. Cabe destacar que si bien existe una rica literatura vinculada a los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma, éstas escapan del objetivo del presente trabajo.⁶

⁶ Desde los trabajos seminales (Modigliani, F. y Miller, M., 1958) (Modigliani, F y Miller M., 1963) se han desarrollado un conjunto de investigaciones tendientes a explicar los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma. Los trabajos avanzaron sobre la compatibilidad de los postulados y el enfoque del modelo CAPM (Capital Assets Pricing Model) (Rubinstein, 1973); la existencia de impuestos a la renta personal de los tenedores de bonos (Miller, D., 1977). Éstos no afectaron las clásicas proposiciones sobre el comportamiento de la estructura de capital y el valor de la firma. No obstante los estudios sobre la existencia de asimetría de información revisan los clásicos postulados. Éstos se pueden clasificar entre aquellos que estudian la existencia de asimetría de información antes y después del contrato. Antes del contrato constitutivo se tiene: (1) señalización: (a) rol de señalización de la deuda (Ross, 1977), (b) jerarquía financiera (Leland, H. y Pyle D., 1977) (Myers, S., 1984) (Myers, S. y Majluf, N., 1984) y (2) detección (Stiglitz, J. y Weiss, A., 1981). Después del contrato: (1) Problemas de Agencia; algunos de sus modelos: (a) costos de agencia de las acciones y las deudas (Jensen, M. y Meckling, W., 1976); (b) costos de agencia de los flujos de fondos libres (Jensen, M., 1986); (c) teoría de coinversión de los stakeholders (Titman, 1984) y (2) enfoque del ciclo de vida de la firma (Berger, A. y Udell, G., 1998). Paralelamente se puede citar los estudios sobre la teoría de la estrategia corporativa y sus efectos en las decisiones de financiamiento de la firma (Brander, J. y Lewis T., 1986). Existen trabajos que resumen las diferentes teorías sobre la estructura de capital, asimetría de información y costos de agencia, (Copeland, T., Weston, F. y Shastri, K., 2004).

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la primera sección se desarrollan formalmente los modelos de valuación de opciones reales binomial tradicional y borroso. A continuación se desarrolla el conjunto de ecuaciones que integran el modelo binomial borroso condicionado a los estados de continuidad-liquidación propuesto. En la tercera sección se ilustra su funcionamiento empleando un caso hipotético sobre un contrato de concesión de explotación petrolera. Se analizan y comparan los resultados obtenidos de aplicar el tradicional método Valor Presente Ajustado, el modelo binomial y el binomial borroso. Finalmente se presentan las principales conclusiones.

1. El modelo binomial probabilístico y borroso

A continuación serán expuestos los principales conceptos y ecuaciones de los modelos de valoración de opciones binomial tradicional y borroso, ya que luego serán adaptados y utilizadas en el modelo propuesto en el presente trabajo.⁷

1.1 El modelo binomial probabilístico

El supuesto base del modelo binomial consiste en que éste se desarrolla en un ambiente neutral al riesgo. Asumir dicha neutralidad implica que la tasa ajustada por riesgo o de crecimiento, a la cual evoluciona el valor subyacente no afecta el valor de la opción. No obstante, uno de los principales determinantes del valor de la opción está dado por la volatilidad relacionada con los rendimientos del subyacente.⁸ En las opciones, la valuación neutral al riesgo requiere de la existencia de perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción y del activo subyacente, debido a que el único factor de riesgo que explica el valor de la opción está dado por las variaciones del precio correspondiente al subyacente. Por ejemplo, una cartera compuesta por una posición larga en la opción y la adecuada posición corta en el subyacente no debería tener ningún tipo de fluctuación aleatoria, ya que las variaciones en el precio de la acción (posición corta) se balancean con las variaciones en la opción de compra. El resultado de la estrategia precedente es una cartera

⁷ Su tratamiento y análisis comparativo se pueden encontrar en Milanesi (2013 (a)); Milanesi (2014 (b)).

⁸ En la práctica es más complejo estimar la tasa de crecimiento que la volatilidad (Wilmott, 2009).

que genera un rendimiento equivalente al tipo libre de riesgo y la clave para su construcción consistió en determinar la cantidad de acciones a ser vendidas en corto.⁹ Esta cantidad se conoce como “Delta” y se estima a partir de un modelo financiero.¹⁰

Trabajar con valuación neutral al riesgo permite valorar utilizando proyecciones o simulaciones de recorridos neutrales al riesgo del subyacente, con el fin de calcular los flujos de fondos correspondientes a la opción. Seguidamente son recursivamente actualizados a la fecha de valoración y finalmente, promediados con el fin de obtener el valor intrínseco del derivado. Por lo tanto, el valor promedio de los flujos de fondos esperados actualizados de la opción constituye el valor teórico de la opción.¹¹

Valorar las opciones reales correspondientes a una inversión utilizando el modelo binomial, requiere primero estimar los coeficientes de ascenso (u) y descenso (d). Estos parámetros son los insumos base para: proyectar el proceso estocástico binomial del subyacente, la rejilla binomial con los flujos de fondos de la opción y los coeficientes equivalentes ciertos empleados en el proceso recursivo de valuación. Los coeficientes u , d son cuantificados a

⁹ Se denominan ventas en corto a la operación de apalancamiento donde se obtienen en calidad de préstamo acciones que son vendidas en el mercado para hacerse de liquidez, con la condición de devolver el mismo activo en la fecha de vencimiento estipulada.

¹⁰ Como usualmente se necesita un modelo matemático para calcular la letra griega Delta y los modelos financieros son aproximaciones no réplicas exactas de la compleja realidad, la eliminación total teórica del riesgo es un ideal difícil de verificar en la práctica. Las principales limitaciones instrumentales de la valuación neutral al riesgo son: (a) requiere un continuo balance de la cobertura, ya que Delta continuamente (no discretamente) cambia, por ende se debe vender-comprar acciones para mantener la posición libre de riesgo; (b) se deben cumplir ciertos supuestos vinculados al proceso estocástico del activo (seguir un movimiento geométrico browniano, sin saltos y con volatilidad conocida y finita).

¹¹ El ejemplo ilustra la idea detrás de la valuación neutral al riesgo; una acción tiene un precio de mercado de \$10,55 creciendo en promedio el 12% por año. Su volatilidad es de 23% y la tasa libre de riesgo es de 4% anual. Se quiere valorar una opción de compra con precio de ejercicio de \$11 con fecha de expiración dentro de dos meses. La tasa de 15% de crecimiento es totalmente irrelevante ya que el crecimiento promedio de la acción no afecta el precio de la opción. En realidad para valorar el derivado se deben simular recorridos del subyacente desde la fecha de valuación al vencimiento de la opción con crecimiento al tipo libre de riesgo de 4% y volatilidad de 22%. Luego se debe calcular el flujo de fondos correspondientes a los recorridos proyectados, actualizar los flujos al presente y calcular su valor promedio para obtener el valor teórico de la opción (en el modelo binomial no se necesitan todas las simulaciones, se proyectan los recorridos a partir de coeficientes de ascenso y descenso, calculados desde la volatilidad, los flujos son actualizados al tipo libre de riesgo y ponderados por coeficientes equivalentes ciertos).

partir de la volatilidad (σ) precio, obtenida de una cartera de activos financieros gemelos o réplica de los flujos de fondos del proyecto o activo real (subyacente). El modelo supone que los flujos de fondos correspondientes al activo siguen un proceso estocástico geométrico browniano modelado en tiempo discreto. Las ecuaciones correspondientes a los coeficientes y el recorrido aleatorio en la rejilla binomial del subyacente son:

$$u = e^{(\sigma \times \sqrt{t})} \quad (1)$$

$$d = e^{(-\sigma \times \sqrt{t})} \quad (2)$$

$$V_t = [V_{t-1} \times u; V_{t-1} \times d] \quad (3)$$

El valor expandido del proyecto, al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente menos el precio de ejercicio (X), $V_t = \max(V_t - X; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de compra financieras y $V_t = \max(X - V_t; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos ($p_u; p_d$). Los coeficientes y el valor actual se calculan con las siguientes expresiones:

$$p_u = \frac{(1+rf)-d}{u-d} \quad (4)$$

$$p_d = 1 - p_u \quad (5)$$

$$V_t = [V_{i(t+1)} \times p_u + V_{j(t+1)} \times p_d] \times e^{-rf} \quad (6)$$

Donde (rf) representa la tasa libre de riesgo o valor tiempo del dinero, $V_{i(t+1)}$; $V_{j(t+1)}$ el valor expandido en los nodos inmediatos posteriores.

La volatilidad actual o presente es el parámetro σ en la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes (BS); (Black y Scholes, 1972); (Black y Scholes, 1973), siendo uno de los principales insumos del modelo BS y del binomial. La volatilidad es un dato imposible de obtener través de la observación di-

recta de una variable de mercado, consecuentemente debe ser calculada empleando algún modelo estadístico. Las medidas de volatilidad pueden clasificarse en función al instante espacial en el tiempo de los datos empleados en su estimación: (a) volatilidad histórica o realizada, obtenida de las observaciones de precios del subyacente; (b) volatilidad implícita, el número en la fórmula de BMS que hace coincidir el valor teórico con el precio actual de mercado; (c) volatilidad proyectada (a partir de la implícita) corresponde a un momento futuro del tiempo, (d) volatilidad de cobertura (*hedging volatility*) es el parámetro a introducir en la estimación de la letra griega delta con el fin de calcular las unidades de subyacente a vender en corto plazo, con propósitos de cobertura (Wilmott, 2009).

En los modelos de opciones reales, las tres primeras medidas de volatilidad sirven de insumo a los modelos de valoración, siendo menester que exista un activo financiero o cartera correlacionada con los flujos del proyecto. Para que ello ocurra los mercados deben ser completos, siendo éste uno de los supuestos básicos y principal debilidad en la Teoría de Opciones Reales (Wang y Halal, 2010). En el caso de que dicha condición no se cumpla, es decir, la no disponibilidad de activos financieros réplicas y mercados incompletos, alternativamente se aplica el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) (Copeland y Antikarov, 2001); (Copeland y Tufano, 2004)¹² para estimar la volatilidad.

No obstante donde el mercado no es completo, predominando la vaguedad o ambigüedad en los datos (por ejemplo, proyectos de inversión en contextos financieros poco desarrollados, valoración de estrategias de in-

¹² El enfoque supone que el precio de mercado al cual se negociaría el proyecto es su valor actual neto. Por lo tanto su volatilidad (σ) se infiere de la siguiente manera (Smith, 2005):

- a) Los flujos de fondos del proyecto se someten a simulación Monte Carlo. Por cada iteración se obtiene una tasa de rendimiento (z) producto del logaritmo del cociente entre el valor actual neto del proyecto en el primer periodo (VAN_1) y el momento inicial (VAN_0); $z = \ln \left(\frac{VAN_1}{VAN_0} - 1 \right)$.
- b) La simulación arroja como resultado una muestra de valores (z_i), por iteración. A partir de éste se obtiene el rendimiento medio ($\bar{z} = E(z)$) y su desvío estándar (s), correspondientes al momento 0 y 1.
- c) La volatilidad del proyecto es igual a $(\sigma) = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$. Si el intervalo de tiempo en el que se encuentran expresados los flujos de caja del proyecto es igual a 1, entonces $(\sigma) = s$.

versión en activos reales producto de innovaciones, empresas de base tecnológica o empresas cerradas sin comparables), los modelos de valoración de opciones bajo la lógica borrosa (*fuzzy*) constituyen un complemento y alternativa superadora a la metodología binomial tradicional, en la próxima sección se introducirán sus principales conceptos.

1.2 El modelo binomial borroso

La lógica borrosa aplicada a los modelos de opciones permite complementar el enfoque de valuación probabilística trabajando en un marco de posibilidades. Estos modelos articulan con técnicas como escenarios y simulación, permitiendo capturar el sesgo positivo en la distribución de los posibles valores de la inversión, rasgo característico de las opciones reales contenidas en el activo (valor del potencial beneficio de la inversión limitando el riesgo de las posibles pérdidas).

Igual que el modelo binomial probabilístico, se requiere estimar los coeficientes de ascenso y descenso, en este caso borrosos, dando un área de posibles valores (Ecuaciones 7 y 8).

$$u' = [u_1, u_2, u_3] = [e^{((1-CV)\times\sigma)\times\sqrt{t}}, e^{(\sigma\times\sqrt{t})}, e^{((1+CV)\times\sigma)\times\sqrt{t}}] \quad (7)$$

$$d' = [d_1, d_2, d_3] = \left[\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3} \right] \quad (8)$$

Los valores extremos son $u'=[u_1, u_2, u_3]$ (ascenso) y $d'=[d_1, d_2, d_3]$ (descenso). Los escenarios representados son: u_1, d_1 menor amplitud de movimiento, u_3, d_3 mayor amplitud de movimiento y u_2, d_2 caso base. El resultado correspondiente al caso base (u_2, d_2) se estima con la volatilidad (σ) y el coeficiente de variación (CV), como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor de variación (Liao y Ho, 2010). El CV puede construirse a partir de opinión y juicios de los analistas. Si el mercado es incompleto, es decir no existen activos financieros réplica, la medida de volatilidad se obtiene aplicando el enfoque MAD.

Debido al sesgo positivo en la distribución de posibilidad triangular, el factor de ascenso genera mayor valor que el descenso, siendo el último el que los revierte a cero y el caso base arroja el mismo resultado que el obtenido en el modelo binomial. Con los tres resultados (ascenso-medio-descenso) se genera un número borroso triangular para cada uno de los nodos de la rejilla

binomial (Ecuación 9), siendo ésta la diferencia con el modelo binomial tradicional. En éste cada nodo está representado por el caso base (u_2, d_2) .

$$V'_t = [V'_{t-1} \times u'; V'_{t-1} \times d'] \quad (9)$$

Igual que en el modelo binomial, el valor expandido borroso del proyecto al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente borroso menos el precio de ejercicio (X), $VE'_t = \max(V'_{t,t} - X; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de compra financieras y $VE'_t = \max(X - V'_{t,t}; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos borrosos $(p'_u; p'_d)$.

$$p'_u = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} \quad (10)$$

$$p'_d = 1 - p'_u \quad (11)$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza el área de posibles valores correspondientes al activo real subyacente. Los pares de coeficientes equivalentes ciertos a ser utilizados en el proceso recursivo son combinados de la siguiente manera (Liao y Ho, 2010): (a) el escenario de menor amplitud combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de mínimo valor; (b) el escenario de mayor amplitud de movimiento combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de máximo.¹³ El caso base se resuelve de manera similar al tradicional modelo binomial. Así se logra la asimetría en la estimación de los posibles valores. Suponiendo un número borroso triangular con coeficientes de ascenso $u' = (1 \text{ menor}, 2$

¹³ El valor de las opciones reales es función directa de la volatilidad y los movimientos de ascenso y descenso están en función directa con ésta. Por lo tanto, a mayor amplitud de movimientos, mayor valor de la opción y viceversa. Esto conduce a suponer que escenarios optimistas (pesimistas) vinculados al proyecto se relacionan con volatilidad respecto del caso base mayor (menor) y con movimientos respecto del caso base de mayor (menor) amplitud.

base, 3 mayor), las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos a utilizar en el proceso recursivo quedan planteadas de la siguiente manera:

$$p'_u, p'_d = [(p'_{u3}, p'_{d1}); (p'_{u2}, p'_{d2}); (p'_{u1}, p'_{d3})] \quad (12)$$

El sesgo positivo, asimetría, correspondiente al número borroso (valor intrínseco de la opción) es capturado, reordenando los pares de coeficientes equivalentes ciertos (Ecuación 12). La justificación de la aseveración anterior obedece a que: la mayor (menor) ponderación es asignada a los valores del escenario de mayor (menor) amplitud. El coeficiente equivalente cierto borroso (p') es resultado del cociente entre la diferencia del factor de crecimiento al tipo sin riesgo ($1+r$), menos el movimiento de descenso (d') (numerador) y la diferencia entre el factor de ascenso y descenso ($u'-d'$) (denominador). Al ser el tipo sin riesgo constante, la variación es provocada por los valores de los movimientos. El coeficiente equivalente cierto obtenido del movimiento de mayor (menor) amplitud, presenta menor (mayor) numerador y mayor (menor) denominador. Por lo tanto es utilizado en la ponderación del ascenso para el valor de menor (mayor) amplitud y su complemento en el descenso de mayor (menor) amplitud (Ecuación 12). Luego, $u'_3 > u'_2 > u'_1 \rightarrow d'_3 < d'_2 < d'_1 \rightarrow p'_3 < p'_2 < p'_1 \rightarrow (1 - p'_3) > (1 - p'_2) > (1 - p'_1)$. El valor intrínseco expandido se determina recursivamente mediante la siguiente expresión:

$$V'_t = [V'_{i(t+1)} \times p'_u + V'_{j(t+1)} \times p'_d] \times e^{-rf} \quad (13)$$

Puede presentar confusión el modelo binomial borroso y las rejillas trinomiales. En el primero cada nodo de la rejilla binomial se compone por un número borroso triangular (V'_i). En cambio, la rejilla trinomial agrega al modelo binomial un nodo más, el intermedio, (Boyle, 1988); (Kamrad y Ritchken, 1991); (Derman, Kani y Chriss, 1996); (Mun, 2004); (Whaley, 2006).¹⁴

¹⁴ Las rejillas trinomiales proveen una representación alternativa y análoga al método binomial. Tiene tres parámetros de movimientos u, m, d y tres probabilidades de transición asociadas p_u, p_m y p_d . La manera de estimar los movimientos ascendentes y descendentes es similar a su contraparte binomial. La restricción propuesta por Boyle, (1988) y Kamrad y Ritchken, (1991) es suponer que el coeficiente de ascenso tiene la forma funcional $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ donde $\lambda \geq 1$, dándose la siguiente

Se podría pensar en un modelo trinomial borroso donde el nodo intermedio también sea un número borroso triangular añadiendo mayor granularidad al proceso estocástico proyectado del subyacente.

El valor central del número borroso triangular (Ecuación 13) se ve alterado por el sesgo hacia la derecha que tiene la distribución de posibles valores del proyecto (Carlsson, C-Fuller, R, 2001). Dado $VE' = [VE_1(\alpha); VE_3(\alpha)]$ número borroso y $\lambda \in [0,1]$, el valor actual neto esperado borroso (VANEB), $E(VE)'$ se define:

$$E(V') = \int_0^1 [(1 - \lambda)V_1(\alpha) + \lambda V_3(\alpha)] d\alpha \quad (14)$$

Donde λ representa el índice ponderado de “pesimismo-optimismo” (Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006) es estimado mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{AD}{AI+AD} \quad (15)$$

Obtenido el índice se sustituye en la Ecuación 15 y se obtiene el valor actual neto esperado borroso de la opción (Ecuación 16):

$$E(V') = \frac{[(1-\lambda)V_1+V_2+\lambda V_3]}{2} \quad (16)$$

igualdad $p_u + p_d = 1/\lambda^2$. El coeficiente equivalente cierto intermedio es igual a $p_m = 1 - 1/\lambda^2$. Los coeficientes equivalentes ciertos de ascenso y descenso son: $p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t}$ y $p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t}$. Si el coeficiente λ es igual a 1 el modelo colapsa a la modelo CRR, debido que la probabilidad de transición del nodo intermedio es igual a 0. Esto provoca la eliminación de los nodos del medio, el coeficiente de ascenso se resume a, $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes quedan iguales al modelo binomial. El valor del coeficiente λ es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, mayor el valor del coeficiente mayor la probabilidad de movimientos laterales (Milanesi, 2013(b)).

2. El modelo numérico binomial borroso y el impacto de la deuda en el valor del proyecto. Los estados de continuidad-liquidación

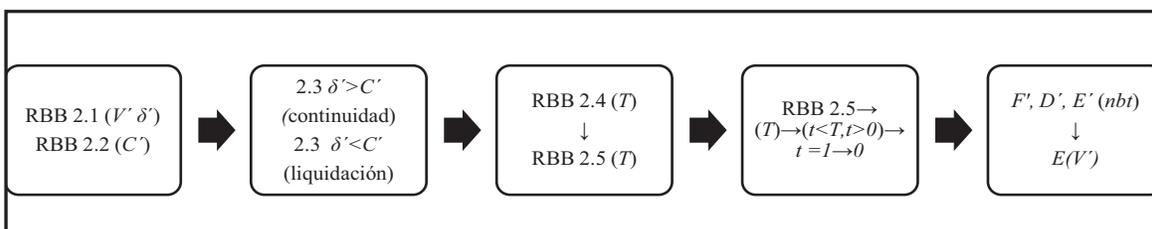
En la presente sección se desarrollará el modelo binomial borroso contemplando los posibles estados de continuidad y liquidación a la luz de la existencia de suficientes flujos de fondos libres para atender los servicios de la deuda. El modelo primero requiere de tres rejillas binomiales borrosas (RBB) con valores no condicionados a estados de continuidad-liquidación y una variable condicionante para estimar estados de continuidad-liquidación.

- a) RBB valor no apalancado de la firma y flujos de fondos (2.1).
- b) RBB flujo de fondos de la deuda (2.2).
- c) Flujo de fondos residual o del propietario (2.3).
- d) RBB valor de la firma, pasivo y capital propio no condicionada a escenarios continuidad-liquidación. (2.4).

Finalmente la cuarta rejilla que colecta los valores de las tres anteriores condicionada por el estado de continuidad-liquidación.

- e) RBB valor de los activos, pasivo y capital propio condicionada a escenarios de continuidad-liquidación (2.5). Esta última se divide en: ecuaciones para estimar valor en horizonte final (T); ecuaciones para estimar el valor en periodo intermedio ($t < T; t > 0$); ecuaciones para estimar el valor al inicio condicionado de la firma, pasivos y capital propio.

Figura 1. Secuencia correspondiente al método: V' valor borroso de la firma sin deuda, δ' flujos de fondos borrosos, C' intereses borrosos, F' valor de la firma con deuda y condicionado, D' valor de la deuda; E' valor capital propio condicionado; $E(V')$ VANEB



Fuente: Elaboración propia.

Las RBB a, b y la estimación de c, son el insumo para construir la RBB d. A partir de ésta se construye la RBB e, condicionada a c, y aplicando el conjunto de ecuaciones según el momento del tiempo (T ; ($t < T, t > 0$), $t = 1 \rightarrow 0$). A continuación se desarrolla el conjunto de ecuaciones correspondientes a cada RBB.

2.1 RBB valor no apalancado de la firma y flujos de fondos

El modelo numérico propuesto se desarrolla a partir del binomial borroso, incorporando una tasa de crecimiento del valor de la empresa (a) que surge de la diferencia entre la tasa libre de riesgo (r) y la tasa de pago de flujos de fondos (q);

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \quad (17)$$

Los coeficientes neutrales al riesgo borrosos (p') son obtenidos con la siguiente expresión

$$p_u' = \frac{a-d'}{u'-d'} \quad (18)$$

Los coeficientes u' , d' , p_u' , p_d' , se obtienen utilizando las ecuaciones 10, 11 y 12. Con los parámetros básicos se está en condiciones de proyectar las RBB. Cabe desatacar que aquí se derivan dos rejillas: a) RBB valor no apalancado de la firma y b) Obtenida a; RBB correspondientes a los flujos de fondos libres borrosos. Para estimar la RBB del valor no apalancado de la firma se toma como punto de partida el valor inicial de los activos de la firma sin apalancamiento (V_u),¹⁵ aplicando la ecuación 13. Obtenida ésta, se construye la RBB correspondiente al flujo de fondos libre borroso (δ_t') de la empresa. Para ello por cada nodo, se estima el flujo de fondos libres borroso como el producto entre el valor de la firma obtenida en la RBB anterior (ecuación 13); y la tasa de pago después de impuestos ($q = q_{at} \times (1 - \tau)$); siendo la expresión $V'_i \times q$. Alternativamente el flujo de fondos borroso puede estimarse de acuerdo a la siguiente expresión;

$$\delta_t' = V'_i e^{q\Delta t} - V'_i \quad (19)$$

¹⁵ Valor de los activos operativos totales de la empresa independientemente de su estructura de capital en el momento $t=0$.

2.2 RBB flujo de deuda

Para estimar la presente rejilla se calcula en cada nodo el flujo de la deuda. Se supone que la empresa emite un bono con pagos periódicos borrosos (C_t') compuesto por intereses y cancelación del capital (P) al final de la vida del bono. El valor del capital es determinístico, los intereses se suponen borrosos, explicitados por la tasa i' .¹⁶

$$C_t' = i' \times P \quad (20)$$

En un modelo con impuestos a la renta, el flujo de la deuda queda expresado como: $(1 - \tau)C_t'$. Siendo τ la tasa de impuesto a las ganancias, $\Delta' \tau = i' \times \tau$ el valor borroso correspondiente al ahorro fiscal.

2.3 Flujo de fondo residual o para el propietario

El flujo de fondo borroso residual o para el propietario surge por diferencia entre el flujo fondos libres borroso (RBB 2.1) y el flujo de fondos borroso de la deuda $\delta_t' - C_t'$ (RBB 2.2). Ésta es la variable condicionante de continuidad o liquidación, a saber: a) $\delta_t' > C_t'$ continuidad; b) $\delta_t' < C_t'$ procede a la cancelación de la deuda y liquidación del patrimonio neto. Estos escenarios son los que definen los valores finales del capital propio en T (RBB 2.4) y los que condicionan para los diferentes momentos (T ; $(t < T, t > 0)$, $t = 1 \rightarrow 0$) los valores de la empresa, deuda y capital propio en la RBB 2.5.

2.4 RBB valor del capital propio, deuda y valor de los activos no condicionados a estados continuidad-liquidación

Aquí se estiman los valores borrosos *no condicionados* correspondientes al capital propio (E'), deuda (D') y valor total de la firma (F'). El valor final (T) correspondiente a capital propio (E'_T) surge de la suma entre el valor final de la firma sin deuda (ecuación 13) (RBB 2.1), más el valor de los flujos de fondos libres (ecuación 19) (RBB 2.1); menos el valor del flujo de fondos de la deuda (ecuación 20) (RBB 2.2).¹⁷ La expresión es:

$$E'_{T,(u',d')} = V'_{T,(u',d')} + \delta'_{T,(u',d')} - C'_{T,(u',d')} .$$

¹⁶ Se supone un valor i y extremos mínimo y máximos $i-\alpha$; $i+\beta$.

¹⁷ Esto es así en tanto se active la condición de continuidad de la RBB 2.5, punto a.1; caso contrario los valores son los correspondientes a la RBB 2.5, punto a.2.

Definidos los valores borrosos en T , se obtienen recursivamente los valores intermedios no condicionados por los estados de continuación-liquidación de la firma mediante las siguientes ecuaciones;

$$E' = e^{-r\Delta t}(p'E'_{u'} + 1 - p'E'_{d'}) \quad (21)$$

$$D' = e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) \quad (22)$$

$$F' = e^{-r\Delta t}(p'F'_{u'} + 1 - p'F'_{d'}) \quad (23)$$

2.5 RBB valor del capital propio, deuda y valor de los activos **condicionados** a escenarios de insolvencia o continuidad

A continuación, se desarrollan los pasos para estimar el valor total de la firma con deuda, deuda y capital de los propietarios condicionados a la suficiencia de flujos de fondos libres para atender pago de deuda y consecuentemente a la continuidad o liquidación de la empresa. Existen dos estados contingentes que condicionan a nodos borrosos proyectados conforme fue indicado en 2.3:¹⁸ a) $\delta'_t > C'_t$ continuidad con repago de deuda, b) $\delta'_t < C'_t$ insuficiencia de fondos procediéndose a cancelar pasivo y liquidar patrimonio neto. Para ello es menester segregar el periodo total de proyección en tres momentos: (a) horizonte final de proyección de la rejilla (T); (b) nodos intermedios ($0 < t < T$) y (c) momento inicial ($t=1 \rightarrow 0$):

(a) Conjunto de ecuaciones para estimar los valores condicionados en el horizonte final (T):

a.1) Continuidad de la empresa (T): En este caso el valor borroso de la firma más el flujo de fondos libres borroso es superior o igual al pago de la deuda (interés borroso más capital). La expresión que condiciona y activa

¹⁸ Al considerar los estados contingentes liquidación-continuidad sobre los nodos borrosos posteriores, el valor de los nodos borrosos precedentes se condiciona por los estados contingentes indicados.

el estado de continuidad es: $V'_T + \delta'_T \geq (1 - \tau)C'_t + P$. Verificado dicho estado, el conjunto de ecuaciones para estimar los valores en T son:

$$E'_T = V'_T + \delta'_T - (1 - \tau)C'_t - P \quad (24)$$

$$D'_T = C'_t + P \quad (25)$$

$$F'_T = V'_T + \delta'_T + \Delta't \quad (26)$$

a.2) Liquidación (T): El valor de la firma borroso más el flujo de fondos libres borroso es insuficiente para el pago de la deuda (interés más capital). La expresión que condiciona y activa el estado de liquidación es $V'_T + \delta'_T < (1 - \tau)C'\Delta't + P$. En este caso se suponen costos de transacción producto de la liquidación, representados por α . Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones para estimar el valor de liquidación en T es:

$$E'_T = 0 \quad (27)$$

$$D'_T = (1 - \alpha)(V'_T + \delta'_T) \quad (28)$$

$$F'_T = (1 - \alpha)(V'_T + \delta'_T) \quad (29)$$

(b) Conjunto de ecuaciones para estimar el valor de los nodos intermedios condicionados ($t < T$; $t > 0$):

Para estimar el valor correspondiente a los nodos borrosos condicionados a los estados de continuación-liquidación se toma como punto de partida al valor del patrimonio neto borroso no condicionado (ecuación 21) (RBB 2.4) denotado como $\tilde{E}' = e^{-r\Delta t}(p'E'_u + 1 - p'E'_d)$. Los posibles escenarios son:

b.1) Continuidad de la empresa ($t < T$; $t \geq 1$): No existe riesgo de liquidación de la firma, en tanto la suma de flujo de fondos libres borroso y en cuanto

el valor presente del patrimonio neto borroso sea suficiente para atender los servicios corrientes borrosos de la deuda. La expresión que condiciona y activa el estado de continuidad es $\tilde{E}'_t + \delta'_t \geq (1 - \tau)C'\Delta't$. Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones utilizadas para valorar los nodos intermedios son:

$$E'_t = \tilde{E}'_t + \delta'_t - (1 - \tau)C'_t \quad (30)$$

$$D'_t = C'_t + e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) \quad (31)$$

$$F'_t = \delta'_t + \Delta't + e^{-r\Delta t}(p'F'_{u'} + 1 - p'F'_{d'}) \quad (32)$$

b.2) Liquidación ($t < T$; $t > 0$): Se produce la liquidación de la firma si la suma del flujo de fondos libres borrosos más el valor presente del patrimonio neto borroso es insuficiente para atender los servicios corrientes de la deuda. La expresión que condiciona y activa el estado de liquidación es $\tilde{E}'_t + \delta'_t < (1 - \tau)C'\Delta't$. Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones es:

$$E'_t = 0 \quad (33)$$

$$D'_t = (1 - \alpha)(V'_t + \delta'_t) \quad (34)$$

$$F'_t = (1 - \alpha)(V'_t + \delta'_t) \quad (35)$$

(c) Conjunto de ecuaciones para estimar el valor inicial condicionado ($t=1 \rightarrow 0$):

Finalmente el valor intrínseco, en $t=0$ se obtiene una vez calculados los valores finales (T , punto ($a1$, $a2$)) y los valores intermedios ($t < T$; $t >$ punto ($b1$, $b2$)) condicionados por los escenarios (continuación-liquidación) de los

nodos borrosos precedentes. En esta etapa simplemente se deben estimar recursivamente los valores iniciales a partir el período de tiempo $t=1$ hasta $t=0$; ($t=1 \rightarrow 0$). El conjunto de ecuaciones es:

$$E'_0 = e^{-rt}(p'(E'_{u'} + \delta'_{tu'} - (1 - \tau)C'_t) + 1 - p'(E'_{d'} + \delta'_{td'} - (1 - \tau)C'_t)) \quad (36)$$

$$D'_0 = e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) - \Delta't \quad (37)$$

$$F'_0 = e^{-r\Delta t}(p'(F'_{u'} + \delta'_{tu'}) + 1 - p'(F'_{d'} + \delta'_{td'})) \quad (38)$$

El resultado obtenido está dado por los valores (E'_0, D'_0, F'_0) . Éstos representan las expresiones borrosas correspondientes a los valores mínimo, máximo y más probable respectivamente del número borroso triangular para el valor de la firma apalancada, deuda y capital propio. Luego resta estimar el valor esperado medio borroso de la firma a partir de las ecuaciones 14, 15 y 16.

3. Desarrollo de un caso de aplicación: modelo binomial borroso y los estados de continuidad-liquidación

A continuación se procede a ilustrar el funcionamiento del modelo empleando como ejemplo un caso adaptado por Smith (2005). Se pretende determinar el valor de un proyecto de inversión de un contrato de concesión para la explotación de un yacimiento de petróleo por un período de 3 años. Los estudios técnicos y de factibilidad indican que las reservas totales son de cien millones (100 millones) de barriles. Al inicio se espera producir diez millones (10 millones) de barriles proyectándose una tasa de decrecimiento de la producción de 15% anual y una tendencia al aumento del precio del crudo a razón de un 3% anual partiendo de un precio en $t=0$ de US\$69 el barril.¹⁹ Los costos variables crecen a razón de 2% anual y

¹⁹ Western Texas Intermediate precio al 1/12/2014 <http://finance.yahoo.com/q?s=WTI>

representan 80% del precio de venta. Los costos fijos ascienden a US\$10 millones. El proyecto se financia con una estructura de capital integrada por 70% de deuda y 30% de capital propio. Las magnitudes de los componentes de la mezcla son determinados sobre el valor del proyecto desapalancado (V_u). Este último determinado por el método del Valor Actual Ajustado (VAA) (APV, *Adjusted Present Value*) como variante del método de descuento de flujos de fondos, con la siguiente expresión

$$V_l = V_u + ED \quad (39)$$

En la ecuación anterior el VAA o valor de la firma apalancada (V_l) es la suma del valor de la empresa sin deuda (V_u) más los efectos producidos por ésta. En este caso se consideran solamente los efectos derivados del ahorro fiscal de intereses, en donde la alícuota del impuesto t es del 35%. V_u se estima con la siguiente expresión:

$$V_u = \sum_{t=1}^n \frac{FFL_t}{(1+k_u)^t} \quad (40)$$

Siendo, FFL_t los flujos de fondos del proyecto y k_u la tasa del costo de capital desapalancado. Esta última se obtiene quitando el efecto de la estructura de capital de la tasa de costo de capital propio k_e (Fernández, P., 2012). Suponiendo que no existe riesgo en la tasa de la deuda la expresión utilizada es la siguiente;

$$\beta_u = \frac{\beta_l}{1+(1-\tau)W_d/W_e} \quad (41)$$

La tasa k_u es determinada aplicando el modelo CAPM (*Capital Assets Pricing Model*). El efecto del endeudamiento (ED) sobre el valor de la firma surge del ahorro fiscal producto del endeudamiento, (txC). La deuda se estructura con un bono tipo americano devengando cupón del 5% sobre el 70% de V_u , con rescate de capital al final del tercer año.

En la Tabla 1 se presentan los datos correspondientes a las proyecciones del flujo de fondos libres, valor actual de los flujos de fondos y valor de la firma sin deuda (ecuación 40); este último asciende a US\$455, 40 millones.

Tabla 1. Proyecciones de variables, flujos de fondos libres y estimación del valor actual de la firma sin deuda

Proyecciones	0	1	2	3
Reservas de petróleo (millones)	100,00	90,00	80,00	71,50
Nivel de producción (millones)	10,00	10,00	8,50	7,23
Tasa de costo variable operativo (millones) por millón	\$ 55,20	\$ 56,30	\$ 57,43	\$ 58,58
Precio de crudo (por barril)	\$ 69,00	\$ 71,07	\$ 73,20	\$ 75,40
Ingresos por ventas (millones)		\$ 710,07	\$ 622,02	\$ 544,08
Costos de producción (millones)		\$ -563,00	\$ -488,02	\$ -423,02
Costo Fijo (millones)		\$ -10,00	\$ -10,0	\$ -10,00
Flujo de Fondos Libres después de impuestos (millones)		\$ 137,07	\$ 124,1	\$ 111,5
Valor Actual Flujos de Fondos (VA@ku)		\$ 112,05	\$ 82,19	\$ 60,14
Valor del Proyecto sin deuda Vu (VA@ku)	\$ 254,38			

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 2 presenta los insumos utilizados para la determinación de la tasa de costo del capital sin deuda, a partir de la ecuación 41, que asciende a 10,92%.²⁰

El valor inicial del proyecto sin deuda (Vu) asciende a US\$254,38 millones, siendo el valor nominal de la deuda emitida (D) de 70% del valor indicado.

²⁰ Se supone que el proyecto de inversión en cuestión genera flujos de fondos correlacionados perfectamente con el precio del petróleo, cuya cotización y comercialización global se expresa en dólares estadounidenses. Los datos utilizados para estimar las variables que integran la tasa de costo de capital fueron obtenidos del sitio web de Aswath Damodaran: <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>. Los coeficientes betas apalancados y estructura de capital sectorial (oil/gas production and exploration) fueron obtenidos del cuadro "levered and unlevered betas by sector". El adicional por riesgo de mercado en dólares para Argentina surge del cuadro "Country default spread and risk premium-Risk premium for other markets: Total Equity Risk Premium.". Finalmente la tasa libre de riesgo de Estados Unidos 10 Y T-bonds media aritmética 2004-2014 del cuadro "Annual Returns on Stock, T.Bonds and T.Bills: 1928 - Current"

Tabla 2. Variables utilizadas para calcular la tasa de costo de capital sin deuda

Tasa de costo de capital	Valores
Tasa libre de riesgo (1) ver nota 20	4,27%
Rendimiento esperado de mercado (2) ver nota 20	26,41%
β apalancado observado comparable ver nota 20	1,68
Estructura de capital empresa comparable (W_d/W_e) ver nota 20	1,54
β desapalancado del proyecto (3) (ec.41)	0,83958021
K_u del proyecto $(1)+((2)-(1))*(3)$	22,86%

(Fuente sitio web de Aswath Damodaran:
<http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>) Fuente: Elaboración propia.

Consecuentemente D asciende a US\$178,06 millones con un cupón de 5%. El modelo numérico binomial borroso propuesto permite estimar un valor condicionado a los escenarios de continuidad-liquidación producto del apalancamiento financiero de la firma. Las variables de entrada del modelo binomial se exponen en la Tabla 3:

La tasa de pago de flujos de fondos (q) es del 5% y el ratio de apalancamiento D/V de 70%. La ambigüedad o incertidumbre del modelo es explicada en dos variables: a) los posibles valores del proyecto y flujos de fondos para los nodos borrosos, (V'_i ; δ'_t) ecuaciones 13 y 19 b) la tasa de interés del préstamo (i') ecuación 20. Conforme se expuso en el punto 2.3, la volatilidad se determina aplicando el enfoque MAD (Copeland, T- Antikarov, V, 2001).

Tabla 3. Variables iniciales

V_0 (firma sin deuda)	\$ 254,38
σ (desvío flujos)	30%
q (tasa pago flujos)	5%
r (tasa libre de riesgo)	6,00%
D (principal deuda)	\$ 178,06
i (tasa cupón deuda)	5%
t (tasa marginal impuestos)	35%
α (costos de liquidación)	1%

Fuente: Elaboración propia.

El intervalo para la construcción del número borroso triangular mínimo y máximo valor con el coeficiente de variación (CV) (Liao y Ho, 2010). La volatilidad según el enfoque MAD, asciende a 30% anual y la tasa de interés de la deuda actual es de 5%. El CV (coeficiente de variación) para volatilidad es de 15% y 30%; para la tasa de interés de la deuda conforme se expone en la Tabla 4;

Los valores de las tablas precedentes permiten estimar los coeficientes de ascenso, descenso y equivalentes ciertos borrosos (ecuaciones 7, 8, 10 y 11). En la tercera sección de la Tabla 5 se encuentran los pares de coeficientes equivalentes ciertos correspondientes a cada escenario (ecuación 12).

Tabla 4. Volatilidad, interés y extremos NBT

Extremos NBT (σ', i')	Fuzzy σ	CV (15%)	Fuzzy i	CV (30)
a, $\varepsilon(1)$ (base)	Σ	30,00%	i	5,00%
$a-\alpha$, $\varepsilon(0)$ (extremo negativo)	$(I-CV)*\sigma$	25,50%	$(I-CV)*i$	6,50%
$a+\beta$, $\varepsilon(0)$ (extremo positivo)	$(I+CV)*\sigma$	34,50%	$(I+CV)*i$	3,50%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Parámetros del modelo binomial borroso

Ascenso-Descenso	u'		d'	
Pesimista	$u'1$	1,290461621	$d'1$	0,774916498
Base	$u'2$	1,349858808	$d'2$	0,740818221
Optimista	$u'3$	1,41198992	$d'3$	0,708220353
Equivalentes ciertos borrosos	p'		$1-p'$	
Pesimista	$p'1$	0,456087467	$1-p'1$	0,543912533
Base	$p'2$	0,442059121	$1-p'2$	0,557940879
Optimista	$p'3$	0,428875911	$1-p'3$	0,571124089
Combinaciones coeficientes	p'		$1-p'$	
Pesimista	$p'3$	0,428875911	$1-p'1$	0,543912533
Base	$p'2$	0,442059121	$1-p'2$	0,557940879
Optimista	$p'1$	0,456087467	$1-p'3$	0,571124089

Fuente: Elaboración propia.

Los datos de las Tablas 4 y 5 permiten proyectar las rejillas para calcular el valor condicionado a escenarios de continuidad-liquidación. La secuencia de cálculo es la siguiente:

a) *Rejilla binomial proyección V' , δ' , C' (RBB 2.1, 2,2)*: Para su construcción se utilizan las ecuaciones 13, 19 y 20. Cada nodo de la RBB expone: Valor de firma (V') (primer fila), flujo de fondos libres netos de impuestos (δ') (segunda fila) y los pagos de deuda sin considerar los escudos fiscales (C') (tercera fila). El valor que arroja el modelo binomial tradicional el cual coincide con el valor del NBT a, $\varepsilon(1)$. En el extremo superior de cada nodo se ordena el valor mínimo; $a-\alpha$, $\varepsilon(0)$ y en el inferior el valor máximo; $a+\beta$, $\varepsilon(0)$.

b) *Rejilla binomial proyección (E') , (D') , (F') no condicionados (RBB 2.4)*: como segundo paso se debe proyectar la RBB para estimar el capital propio (E'); deuda (D') y valor total de los activos operativos (F') no condicionados por la probabilidad de liquidación de la firma en los nodos intermedios ($t < T$), (ecuaciones 21 a 23).

Solamente los nodos finales borrosos ($T=3$) condicionan el valor a los estados de continuidad-liquidación, los nodos intermedios e inicial son calculados recursivamente por lo tanto no se condicionan con los posibles estados contingentes que pueda acontecer en $T < 3$.

c) *Rejilla binomial proyección (E'') , (D'') , (F'') condicionados (RBB 2.5)*: Obtenidos las RBB expuestas en las Tablas 6 y 7, a continuación son proyectados los valores intermedios ($T < t; t > 0$) e inicial ($t=1 \rightarrow 0$) condicionados a estados de continuidad (solvencia)-liquidación (insolvencia). El conjunto de ecuaciones a utilizar es el siguiente: (a) nodos finales ($t=T$) (ecuaciones 24 a 29); (b) nodos intermedios ($T < t; t > 0$) (ecuaciones 30 a 35); (c) nodo inicial valor actual ($t=1 \rightarrow 0$) (ecuaciones 36 a 38);

Como resultado se obtiene el valor teórico de la firma condicionado por los posibles estados. En efecto para $t=0$ se expone los valores teóricos borroso de la empresa (F') deuda (D') y capital propio (E'). El valor actual medio esperado borroso (ecuaciones 14, 15 y 16) correspondiente a los valores precedentes se presenta en la última columna de la Tabla 9.

Con el fin de comparar las diferencias entre el método de valor actual ajustado (ecuación 39), binomial tradicional y binomial borroso, la Tabla 10 expone los valores obtenidos.

Tabla 6. Rejilla binomial borrosa valores V' (valor de la firma sin deuda); δ' (flujos de fondos libres después de impuestos); C' (flujo de la deuda antes de impuestos)

0	1	2	3	
\$ 254,38	\$ 328,26	\$ 423,61	\$ 546,65	V
	\$ 343,37	\$ 463,51	\$ 625,67	V
	\$ 359,18	\$ 507,16	\$ 716,10	V
	\$ 16,83	\$ 21,72	\$ 28,03	δ
	\$ 17,61	\$ 23,76	\$ 32,08	δ
	\$ 18,42	\$ 26,00	\$ 36,72	δ
	\$ 11,57	\$ 11,57	\$ 11,57	C
	\$ 8,90	\$ 8,90	\$ 8,90	C
	\$ 6,23	\$ 6,23	\$ 6,23	C
	\$ 197,12	\$ 254,38	\$ 328,26	V
	\$ 188,45	\$ 254,38	\$ 343,37	V
	\$ 180,15	\$ 254,38	\$ 359,18	V
	\$ 10,11	\$ 13,04	\$ 16,83	δ
	\$ 9,66	\$ 13,04	\$ 17,61	δ
	\$ 9,24	\$ 13,04	\$ 18,42	δ
	\$ 11,57	\$ 11,57	\$ 11,57	C
	\$ 8,90	\$ 8,90	\$ 8,90	C
	\$ 6,23	\$ 6,23	\$ 6,23	C
		\$ 152,75	\$ 197,12	V
		\$ 139,61	\$ 188,45	V
		\$ 127,59	\$ 180,15	V
		\$ 7,83	\$ 10,11	δ
		\$ 7,16	\$ 9,66	δ
		\$ 6,54	\$ 9,24	δ
		\$ 11,57	\$ 11,57	C
		\$ 8,90	\$ 8,90	C
		\$ 6,23	\$ 6,23	C
			\$ 118,37	V
			\$ 103,42	V
			\$ 90,36	V
			\$ 6,07	δ
			\$ 5,30	δ
			\$ 4,63	δ
			\$ 11,57	C
			\$ 8,90	C
			\$ 6,23	C

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Rejilla binomial sin condicionar valores en nodos intermedios E' (valor patrimonio neto); D' (valor de la deuda); F' (valor de la firma apalancada)

0	1	2	3	
\$ 72,51	\$ 135,16	\$ 238,86	\$ 389,10	
\$ 87,50	\$ 163,57	\$ 290,36	\$ 473,89	<i>E</i>
\$ 106,13	\$ 197,72	\$ 350,27	\$ 570,70	
\$ 136,89	\$ 159,16	\$ 173,73	\$ 189,64	
\$ 144,66	\$ 165,82	\$ 176,08	\$ 186,97	<i>D</i>
\$ 152,81	\$ 172,47	\$ 178,29	\$ 184,30	
\$ 209,39	\$ 294,32	\$ 412,60	\$ 578,73	
\$ 232,16	\$ 329,39	\$ 466,44	\$ 660,86	<i>F</i>
\$ 258,94	\$ 370,19	\$ 528,56	\$ 754,99	
	\$ 34,98	\$ 75,51	\$ 159,51	
	\$ 36,94	\$ 81,23	\$ 177,13	<i>E</i>
	\$ 39,43	\$ 87,88	\$ 195,48	
	\$ 141,73	\$ 173,73	\$ 189,64	
	\$ 143,92	\$ 176,08	\$ 186,97	<i>D</i>
	\$ 146,36	\$ 178,29	\$ 184,30	
	\$ 176,71	\$ 249,24	\$ 349,15	
	\$ 180,86	\$ 257,31	\$ 364,09	<i>F</i>
	\$ 185,79	\$ 266,16	\$ 379,77	
		\$ 8,74	\$ 21,64	
		\$ 5,94	\$ 14,26	<i>E</i>
		\$ 3,13	\$ 7,28	
		\$ 139,70	\$ 189,64	
		\$ 134,40	\$ 186,97	<i>D</i>
		\$ 129,74	\$ 184,30	
		\$ 148,44	\$ 211,28	
		\$ 140,33	\$ 201,23	<i>F</i>
		\$ 132,87	\$ 191,57	
			\$ -	
			\$ -	<i>E</i>
			\$ -	
			\$ 123,19	
			\$ 107,64	<i>D</i>
			\$ 94,04	
			\$ 123,19	
			\$ 107,64	<i>F</i>
			\$ 94,04	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Rejilla binomial borrosa condicionando valores en nodos intermedios E' (valor patrimonio neto); D' (valor de la deuda); F' (valor de la firma apalancada)

$t=0$	$1 \leq t < T$			T	
0	1	2	3		
E	\$ 82,67	\$ 144,46	\$ 253,06	\$ 389,10	
	\$ 101,42	\$ 175,38	\$ 308,34	\$ 473,89	E
	\$ 124,05	\$ 212,08	\$ 372,22	\$ 570,70	
D	\$ 154,04	\$ 170,74	\$ 185,31	\$ 189,64	
	\$ 158,31	\$ 174,73	\$ 184,98	\$ 186,97	D
	\$ 162,68	\$ 178,71	\$ 184,52	\$ 184,30	
F	\$ 237,05	\$ 315,20	\$ 438,37	\$ 578,73	
	\$ 259,91	\$ 350,11	\$ 493,32	\$ 660,86	F
	\$ 307,60	\$ 390,79	\$ 556,74	\$ 754,99	
		\$ 37,56	\$ 81,03	\$ 159,51	
		\$ 40,81	\$ 88,49	\$ 177,13	E
		\$ 44,61	\$ 96,87	\$ 195,48	
		\$ 153,31	\$ 185,31	\$ 189,64	
		\$ 152,83	\$ 184,98	\$ 186,97	D
		\$ 152,60	\$ 184,52	\$ 184,30	
		\$ 190,86	\$ 266,34	\$ 349,15	
		\$ 193,64	\$ 273,47	\$ 364,09	F
		\$ 197,21	\$ 281,39	\$ 379,77	
		\$ 9,05	\$ 21,64		
		\$ 7,31	\$ 14,26		E
		\$ 5,62	\$ 7,28		
		\$ 151,27	\$ 189,64		
		\$ 143,30	\$ 186,97		D
		\$ 135,98	\$ 184,30		
		\$ 160,32	\$ 211,28		
		\$ 150,60	\$ 201,23		F
		\$ 141,59	\$ 191,57		
			\$ -		
			\$ -		E
			\$ -		
			\$ 123,19		
			\$ 107,64		D
			\$ 94,04		
			\$ 123,19		
			\$ 107,64		F
			\$ 94,04		

Fuente: Elaboración propia.

El método del Valor Actual Ajustado (VAA) (ecuación 39) arroja un valor de U\$316,70 millones. Este surge de la suma entre el valor de la firma sin deuda y no condicionado a escenarios de solvencia-liquidación (V_u); US\$254,38 millones más el valor del ahorro fiscal (ED), US\$62,31 millones. La diferencia de US\$56,79 millones entre VAA -binomial y de US\$44,37 con el binomial borroso se explica debido a que los modelos binomiales capturan el impacto negativo en el valor de la firma, producto de la probabilidad de liquidación frente a un estado de insuficiencia de los flujos de fondos libres para atender los pagos de la deuda, situación no contemplada por el valor actual ajustado. La diferencia entre el modelo binomial borroso y el tradicional de US\$12,42 millones a favor del primero surge del sesgo positivo correspondiente al NBT del valor. Esta asimetría positiva se pone de manifiesto mediante el coeficiente λ de 0,6759, conforme fue calculado en la Tabla 9.

Tabla 9. Valor actual esperado borroso E' (valor patrimonio neto); D' (valor de la deuda); F' (valor de la firma apalancada)

Valores	$C1$	$C2$	$C3$	$VAEB$
E'	\$ 82,67	\$ 101,42	\$ 124,05	\$ 106,03
D'	\$ 154,04	\$ 158,31	\$ 162,68	\$ 159,10
F'	\$ 237,05	\$ 259,91	\$ 307,60	\$ 272,33
$\lambda/1-\lambda$	0,32401		0,67599	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Valor de la empresa (V) Valor Presenta Ajustado, Binomial, Binomial Borroso

Modelo	V	VPA	Binomial	Binomial F
V Binomial	\$ 259,91	\$ 56,79	-	\$ 12,42
V Fuzzy	\$ 272,33	\$ 44,37	\$ -12,42	\$ -44,37
V MM APV	\$ 316,70	-	\$ -56,79	-

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

El modelo propuesto en el presente trabajo conjuga las características del binomial borroso y el modelo numérico para determinar un valor que contemple los estados de continuidad-liquidación de la firma apalancada (Broadie y Kaya, 2007); (Milanesi, 2014 (a)). Como resultado, arroja un valor de la empresa en marcha condicionado por los posibles estados de solvencia-insolvencia producto de su grado de endeudamiento y generación de flujos de fondos. Básicamente se apoya en el clásico concepto de asimilar el capital propio de la empresa a una opción de compra, en donde el pasivo de la firma el precio de ejercicio y el valor total de la firma el subyacente de la opción. El aporte del modelo reside en que el concepto se instrumenta a través de un modelo numérico dinámico, en tiempo discreto, utilizando rejillas binomiales y tratando la incertidumbre (ambigüedad) mediante lógica borrosa.

Conforme a los resultados obtenidos el modelo propuesto supera al clásico VAA y binomial. El VAA, en su clásica concepción, estima un valor de la empresa en marcha sin tener en cuenta los posibles estados donde los flujos de fondos operativos no son suficientes para atender los servicios de la deuda. Estas situaciones activan la “*opción de compra*” a favor de los propietarios. Con relación al modelo binomial, el presente método presenta los siguientes atributos: a) introduce el comportamiento *fuzzy* a variables como valor de la empresa, flujos de fondos y posibles valores de la tasa de interés de la deuda, brindando mayor granularidad en la descripción de los posibles valores; b) captura el sesgo positivo del NBT arrojando un mayor valor al obtenido mediante un modelo binomial, al estimar el VAEB, c) El resultado correspondiente al nodo intermedio del modelo binomial borroso es coincidente con el modelo tradicional. Conforme fue explicado no debe confundirse esta propuesta con las rejillas trinomiales. Éstas son una derivación del modelo binomial donde, al coeficiente de ascenso y descenso se le incorpora un coeficiente intermedio dando mayor granularidad al proceso estocástico pero colapsando al binomial cuando el coeficiente $\lambda=1$.

Bibliografía

- Berger, A y Udell, G. (1998). "The economics of small business finance: the roles of private equity and debt market in financial growth cycles". *Journal of Banking and Finance*, 22, 613-673.
- Black, F y Scholes, M. (1972). "The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency". *Journal of Finance*, 399-418.
- _____. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Booth, L. (2007). "Capital Cash Flow, APV and Valuation". *European Financial Management*, 13(1), 29-48.
- Boyle, P. (1988). "A lattice framework for option pricing with two state variables". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 23, 1-12.
- Brander, J y Lewis T. (1986). "Oligopoly and financial structure: The limited liability effect". *American Economics Review*, 76, 956-970.
- Broadie, M y Kaya, O. (2007). "A Binomial Lattice Method for Pricing Corporate Debt and Modelling Chapter 11 Proceedings". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 42(2), 279-312.
- Calle Fernández, A. y Tamayo Bustamante, V. (2011). *Decisiones de Inversión a través de Opciones Reales*. Estudios Gerenciales (25), 107-126.
- Carlsson, C y Fuller, R. (2001). "On Possibilistic Mean Value and Variance Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*(122), 772-777.
- _____. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*(139), 315-326.
- Copeland, T y Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.), New York: Texere LLC.
- Copeland, T y Tufano, P. (2004). "A Real World to Manage Real Options". *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- _____, Weston, F y Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos, Pearson Addison Wesley.
- Cox, J, Ross, S y Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Cox, J y Ross, S. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*(3), 145-166.
- Derman, E, Kani, I y Chriss, N. (1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". (Goldman-Sachs, Ed.) *Quantitative strategies research notes*,.
- Dixit, A y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.

- Dubois, D y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. New York: Academic Press.
- Duran, D. (1957). "Growth Stock and The San Petesburgo Paradox". *Journal of Finance*, 12, 348-363.
- Fernández, P. (27 de junio de 2012). *Valoración de empresas por descuento de flujos de fondos: lo fundamental y las complicaciones innecesarias*. Obtenido de Social Science Research Network (SSRN): <http://ssrn.com/abstract=2089397>
- Fornero, R. (2011). "Las prácticas en las decisiones de inversión: sus características según los estudios empíricos". *XXX Jornadas Nacionales de Docentes en Administración Financiera SADAF*, 30, 83-165.
- Gordon, M. J. (1962). *The Investment, Financing and Valuation of the Corporation*. Illinois, Irwin Homewood.
- Hurley, W. (2013). "Calculating First Moments and Confidence Intervals for Generalized Stochastic Dividend Discount Models". *Journal of Mathematical Finance*, 3, 275-279.
- _____, y Fabozzi, F. (1998). Dividend Discount Models. En F. Fabozzi (Ed.), *Selected Topics in Equity Portfolio Management* (1 ed., págs. 107,124). Pennsylvania: New Hope.
- _____, y Johnson, L. (1998). "Generalized Markov Dividend Discount Models". *Journal of Portfolio Management*, 25(1), 27-31.
- Jarrow, R y Rudd, A. (1982). "Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes". *Journal of Financial Economics*, 10, 347-369.
- Jensen, M. (1986). "Agency Costs of the Free Cash Flow, Corporate Finance and Takeover". *American Economic Review Paper and Proceedings*, 76(2), 323-329.
- _____, y Meckilng, W. (1976). "Theory of teh Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure". *Journal of Financial Economics*, 305-360.
- Kamrad, B y Ritchken, P. (1991). "Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables". *Management Science*, 37(12), 1640-1653.
- Leland, H y Pyle D. (1977). "Informational Asymmetries, Financial Structure and Financial Intermediation". *Journal of Finance*, 371-388.
- Liao, S y Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Bionomial Approach". *Information Sciences* (180), 2124-2133.
- Milanesi, G. (2013) (a). "El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de conseción para la explotación petrolera". *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, 3(2), 95-118.
- _____. (b). "Opciones Reales: Variantes del modelo binomial y trinomial incorporando volatilidad cambiante". *XXXIII Jornadas Nacionales de Docentes*

- en Administración Financiera*, http://www.sadaf.com.ar/espanol/publicaciones/publicacion_individual.php?id=34, 200-217.
- _____. (2014) (a). "Modelo Binomial para la Valoración de Empresas y los efectos de la Deuda: Escudo Fiscal y Liquidación de la Firma". *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 19(36), 2-10.
- _____. (b). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*(30), 211-219.
- Miller, D. (1977). "Debt and Taxes". *Journal of Finance*, 261-275.
- Modigliani, F y Miller M. (1963). "Corporate Taxes and Cost of Capital". *American Economic Review*, 433-443.
- _____. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review*, 261-297.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions* (1 ed.), New York, Wiley.
- Muzzioli, S y Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*(28), 861-867.
- Myers, S. (1984). "The Capital Structure Puzzle". *Journal of Finance*, 575-592.
- _____. y Majluf, N. (1984). "Corporate Financing and Investment Decisions when Firms have Information that Investors do not Have". *Journal of Financial Economics*, 187-221.
- Pratt; S y Grabowski; R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples*. (3 ed.), New Jersey, John Wiley & Sons.
- Rendleman, R y Bartter, B. (1979). "Two-state Option Pricing". *Journal of Finance*(34), 1092-1110.
- Ross, S. (1977). "The Determination of Financial Structure: The Incentive of Signalling Approach". *Bell Journal of Economics*, 8, 23-40.
- Rubinstein, M. (1973). "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory". *Journal of Finance*, 167-181.
- Shing-Yun, W y Cheng-Few, L (2010). "A Fuzzy Real Option Valuation approach to Capital Budgeting under Uncertainty Environment". *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 5 (9), 695-713
- Smith, J. (2005). "Alternative Approach for Solving Real Options Problems". *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Stiglitz, J y Weiss, A. (1981). "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information". *American Economics Review*, 71(3), 393-409.

- Titman, S. (1984). "The Effects of Capital Structure on a Firm's Liquidation Decisions". *Journal of Financial Economics*, 137-151.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.), Cambridge, MIT Press.
- Wang, A y Halal, W. (2010). "Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review". *International Journal of Business and Management*(5), 14-24.
- Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Williams, J. B. (1938). *Theory of Investment*. New York, Fraser Publishing Company (reprint).
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.), United Kingdom, John Wiley & Sons.
- Yoshida, Y, Yasuda, M, Nakagami, J y Kurano, M. (2006). "A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty". *Fuzzy Sets and Systems*(157), 2614-2626.
- Zadeh, L. (1965). "Fuzzy Sets". *Information Control*, 3(8), 338-353.
- Zdnek, Z. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*(207), 1096-1103.