

Métodos numéricos para cálculo de la prima de opciones asiáticas

Numerical Methods for Calculation of Asian Options Premium

Nora Gavira Durón*

Julio Irving Aguilar Galindo**

Fecha de recepción: 29 de abril de 2016, Fecha de aceptación: 30 de noviembre de 2016

RESUMEN

La forma más común de valorar opciones, es mediante fórmulas cerradas; sin embargo, debido a que no necesariamente existen para todos los tipos de opciones asiáticas, se hace necesario aplicar métodos numéricos y comparar sus resultados para determinar la eficiencia de los mismos. En este trabajo se presentan las características y aplicaciones de métodos numéricos para la valuación de las opciones asiáticas; se incluye el cálculo con la fórmula cerrada para hacer un comparativo de resultados, en los casos en que se puede calcular el costo de la prima mediante fórmula. Se describen ventajas y desventajas de los métodos; los métodos suponen una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal. En este contexto se concluyó que el método Monte Carlo es el que presenta resultados más confiables para evaluar opciones asiáticas.

Clasificación JEL: C02, C13, C63, G13

Palabras clave: opciones asiáticas, precio de la opción, métodos numéricos.

ABSTRACT

The most common way to value options is by closed formulas; however, because this formulas do not necessarily exist for all types of Asian options, it is necessary to apply numerical methods and compare their results to determine their efficiency. This paper describes the characteristics and applications of numerical methods for the valuation of Asian Options. The calculation with closed formulas is included to compare results, in those cases where the formula can be used. Advantages and disadvantages of the methods are described; they assumed a constant risk free rate, constant volatility and a lognormal distribution of prices. Within the context of this article, it can be concluded that the Montecarlo Method achieves the most reliable results when valuing Asian options.

JEL Classification: C02, C13, C63, G13

Keywords: Asian Options, Option Price, Numerical Methods.

* Universidad de Las Américas, Puebla, Cholula Puebla, nora.gavira@udlap.mx

** Fideicomiso de Fomento Minero, Ciudad de México, México, jaguilar@fifomi.gob.mx

Introducción

Las opciones exóticas son aquellas no tradicionales, donde el precio de ejercicio no es fijo (Fernández y Ariño, 1996); se operan en los principales mercados financieros del mundo desde finales de los sesenta en mercados Over The Counter (OTC); sin embargo, hasta los noventa, su negociación comienza a ser relevante. Nacen por la necesidad de menores costos en las primas de las opciones tradicionales, también se conocen como opciones de segunda generación (García *et al.*, 2000).

Una opción asiática es una modalidad de opción exótica (Arregui y Vallejo, 2001), su precio depende del promedio del precio del subyacente a lo largo de la vida de la opción, o de parte de ella, también se conocen como opciones promedio (Clewlow y Chris, 1997). Se emplean para hacer frente a cambios bruscos en los precios del activo subyacente y en diversas situaciones caracterizadas por su regularidad en el tiempo. El costo de la prima es menor al de las opciones tradicionales debido a que en la valuación de las opciones tradicionales se considera la volatilidad del activo subyacente sobre el que esté hecha la opción, mientras que en las opciones asiáticas se considera la volatilidad como la media de los precios que alcanza el activo subyacente a lo largo de la vida de la opción; esta volatilidad de la media siempre será menor a la volatilidad del subyacente.

El estudio y manejo de las opciones asiáticas, puede generar un gran impacto en los diversos mercados internacionales de capitales, ya que son instrumentos útiles tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación. No obstante, hasta el momento su uso no se ha extendido en nuestro país; entre otras causas, debido al desconocimiento sobre su existencia, la dificultad de establecer el precio de sus primas y a la poca o nula difusión que los investigadores han hecho de las ventajas que representan este tipo de opciones.

Turnbully y Wakeman, (1991) crean un algoritmo eficiente, que describe los precios promedio de las opciones europeas y al compararlo con las estimaciones de Monte Carlo; éstas demostraron ser bastante precisas, la velocidad de cálculo del algoritmo es comparable al algoritmo Black-Scholes. Levy, (1992) desarrolla una metodología sencilla que produce de forma cerrada aproximaciones analíticas para la valoración de las reclamaciones de opciones europeas, que conectan a la media aritmética de los tipos de cambio futuros. La principal ventaja, es que evita la necesidad de adoptar procedimientos numéricos que consumen mucho tiempo. La precisión de

la fórmula resultante, y el supuesto de distribución que subyace en ella, se examina por medio de simulaciones de Monte Carlo.

Hull y White, (1993) muestran cómo los métodos de árboles binomiales y trinomiales se pueden extender para valorar opciones como son las *lookback*; las opciones asiáticas con media aritmética del precio de las acciones, presentan el problema de las iteraciones, debido a que el número de precios promedio de las acciones que podría presentarse entre el tiempo cero y un nodo puede ser muy grande. Neave y Turbull, (1993) desarrollan un método de distribución de frecuencias para la valoración de opciones europeas y americanas, con media aritmética en tiempo discreto, asumiendo que la trayectoria del precio de las acciones se comporta como una binomial multiplicativa; el método conduce a aproximaciones rápidas que están teóricamente más cerca al valor real que los desarrollados por Hull y White, (1993).

Dempster y Hutton, (1997) presentan métodos numéricos para la valuación de opciones vainilla y opciones exóticas americanas; métodos de programación lineal para opciones vainilla americana y métodos explícitos para las opciones exóticas *look-back*; obteniendo resultados eficientes en poco tiempo. Debido a la complejidad de la valoración de las opciones asiáticas se han utilizado técnicas computacionales como MATHEMATICA (Cruz y Rodríguez, 2007), con lo que se obtiene alto grado de precisión en la valuación de las opciones asiáticas aritméticas. Fusai y Meucci, (2008) presentan metodologías para el precio de opciones asiáticas con *payoff* aritmético, suponiendo que los subyacentes evolucionan de acuerdo con un proceso de Lévy genérico. Ortiz y Martínez, (2016) valúan opciones asiáticas con subyacente promedio con simulación Monte Carlo y comparan los resultados con opciones europeas; siendo las primeras de menor precio, la diferencia aumenta cuando se incrementa el plazo de vencimiento de la opción.

Uno de los principales problemas de los métodos numéricos es la simulación de números aleatorios ya que se generan mediante algoritmos, con lo que se pueden reproducir de forma rápida; sin embargo, las secuencias de números obtenidas no son realmente aleatorias, debido a que se obtienen mediante operaciones deterministas y sólo se obtienen secuencias pseudo-aleatorias, para que sean válidos éstos números deben satisfacer criterios de aleatoriedad adecuados. Para la programación de los métodos numéricos para la valuación de opciones asiáticas en el presente trabajo, se utiliza el software Matlab® (The MathWorks, 2016), sus algoritmos¹ hacen

que sus resultados sean pseudo-aleatorios y pseudo-independientes, los cuales pasan varias pruebas estadísticas de aleatoriedad e independencia, con lo que se resuelve el problema de la validez estadística.

Un problema importante que en el mercado mexicano de derivados (MexDer, 2016) existen contratos de opciones sobre índices, acciones, ETF's y divisas; por lo general de tipo europeo y alguno de tipo americano pero actualmente no operan opciones asiáticas, la hipótesis del presente artículo es que el Método Montecarlo es el más eficiente para valorar opciones asiáticas comparado con otros métodos analizados en este trabajo. El objetivo del presente estudio es dar a conocer las metodologías de valuación; así como sus ventajas para motivar su uso. Se realiza un análisis comparativo entre algunos de los diversos métodos numéricos que existen para valorar opciones asiáticas, aritméticas y geométricas, de tipo europeo; se describen y aplican los métodos para realizar una comparación entre sus resultados y así determinar el más eficiente; con lo que podemos contribuir al análisis y difusión de este tipo de opciones, para incrementar su adecuado uso en el sistema financiero mexicano.

En la Sección 1 se muestra la descripción y características de las opciones asiáticas; en la Sección 2 se describen los métodos numéricos, a comparar (Binomial, binomial recursivo, binomial con matrices, binomial alternativo, simulación Montecarlo y método explícito diferencial finito); en la Sección 3 se presenta la aplicación de los métodos y resultados, denotando los métodos más eficientes; en la Sección 4 se presentan las conclusiones, futuras líneas de investigación y consideraciones finales.

1. Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas poseen la característica de que su valor al vencimiento depende de la trayectoria del subyacente en el periodo de vigencia, es decir, depende también de su evolución. Las opciones de promedio son particularmente eficaces para negocios en los mercados en los cuales se lleven a cabo intercambios comerciales de productos primarios recién cotizados, y su uso puede evitar la manipulación del precio cuando se acerca el fin del periodo de vigencia de una opción ordinaria; así mismo cuando las entidades financieras realizan negociaciones en las que reciben pagos en otras divisas;

¹ Uniformes, semillas del generador basadas en la hora actual, multiplicativo de Fibonacci, normales, combinación recursiva múltiple, etcétera.

la media de los valores de la cotización de esas divisas es una forma de protegerse de grandes variaciones del tipo de cambio.

Cox, Ross y Rubinstein, (1979) desarrollaron el método binomial para la valoración de opciones europeas para varios periodos; que tiene la ventaja de que, además de ser muy intuitivo, utiliza una matemática muy sencilla. Supone que la distribución de los precios de las acciones es una binomial multiplicativa, las varianzas de los rendimientos son los mismos en todos los periodos, los tipos de interés sin riesgo se suponen constantes. El modelo supone una neutralidad ante el riesgo, porque se puede construir una cartera de arbitraje que elimina totalmente el riesgo de la inversión. Si el valor de la opción no coincide con el calculado a través del modelo, entonces se puede conseguir un beneficio sin riesgo.

La mayoría de las opciones asiáticas que actualmente se negocian en los mercados financieros son de tipo europeo, ya que una opción de tipo americano se puede ejercer de manera tan adelantada como desde el comienzo del periodo y perder la posibilidad de protegerse el tiempo restante. Las más negociadas son aquellas que al vencimiento, ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio medio del activo subyacente durante el periodo predeterminado y el precio de ejercicio. Su utilización tiene numerosas ventajas en situaciones caracterizadas por la regularidad en el tiempo; como son: las situaciones de aprovisionamientos periódicos de materias primas y otros suministros, y las operaciones de importación y exportación que tengan la misma característica de regularidad temporal (Crespo, 2001). Las opciones asiáticas también reducen la exposición a movimientos repentinos en el subyacente justo antes de expirar; algunos esquemas de pensiones tienen tal característica.

1. 1 Tipos de payoff

El promedio del subyacente puede reducir significativamente el precio de una opción asiática, comparada con una opción ordinaria similar o vainilla, debido a que la diferencia que se encuentra en el precio de ejercicio (ya sea $|S_A - K|$ o $|S_A - S_T|$) es menor que $|S_T - K|$ (vainilla), la volatilidad será la media de los valores que alcance el activo subyacente de la opción a lo largo de la vida de la misma. Esta volatilidad de la media siempre será inferior a la volatilidad del activo porque depende del promedio acumulado del precio; así, el costo de las opciones asiáticas será menor que el de las tradicionales. Así como existen opciones *put* y *call*, americanas y europeas, el *Payoff* se clasifi-

ca en *strike* y *rate*, también llamado este último *price*. Si tomamos el precio de ejercicio de una opción vainilla (Hull J. C., 2012),

$$\max(S - K, 0) \quad (1)$$

al reemplazar el precio *strike* K con un promedio, se tendrá una opción *average strike call*, con el siguiente *payoff*:

$$\max(S - S_{ave}, 0) \quad (2)$$

De igual forma, el *payoff* de una *average strike put* es:

$$\max(S_{ave} - S, 0) \quad (3)$$

Si tomamos el *payoff* de una opción *vanilla* y en vez de reemplazar el precio *strike*, sustituimos el precio del subyacente al momento de ejercerla por el promedio, lo que obtenemos es una *rate option*. Una *average rate put* tendría un *payoff* igual a:

$$\max(S_{ave} - K, 0) \quad (4)$$

y una *average rate put* un *payoff*:

$$\max(K - S_{ave}, 0) \quad (5)$$

La diferencia en el grado de dificultad del cálculo de los precios de opciones *call* y *put* no es relevante debido a que sólo se cambia un signo, pero la distinción entre *strike* y *rate* puede hacer una gran diferencia. Las opciones *strike* se pueden valorar numéricamente. Los tipos más comunes de opciones asiáticas son aquellas cuyo valor depende del promedio de los valores que ha tomado el subyacente, durante la vida (o parte de ella) de la opción.

También se negocian, aunque en menor volumen, opciones que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción y

la media de los precios que el activo subyacente ha alcanzado durante el periodo de tiempo especificado. A este tipo de opciones se les conoce como opciones de precio de ejercicio promedio (OEP) (*average strike options*) o pseudo-asiáticas (Fernández y Ariño, 1996). Estas opciones pueden garantizar que la media de los precios pagados por un activo sobre un periodo de tiempo no es mayor que el precio final o para el caso del *Put*, garantiza que la media recibida no es menor que el precio final. Considerando el tipo de media que podemos utilizar, se pueden tener opciones de media aritmética y opciones de media geométrica.

Otra clasificación separa las opciones asiáticas en función del periodo de tiempo en que se calcula la media (Alziary, Décamps, y Koehl, 1997):

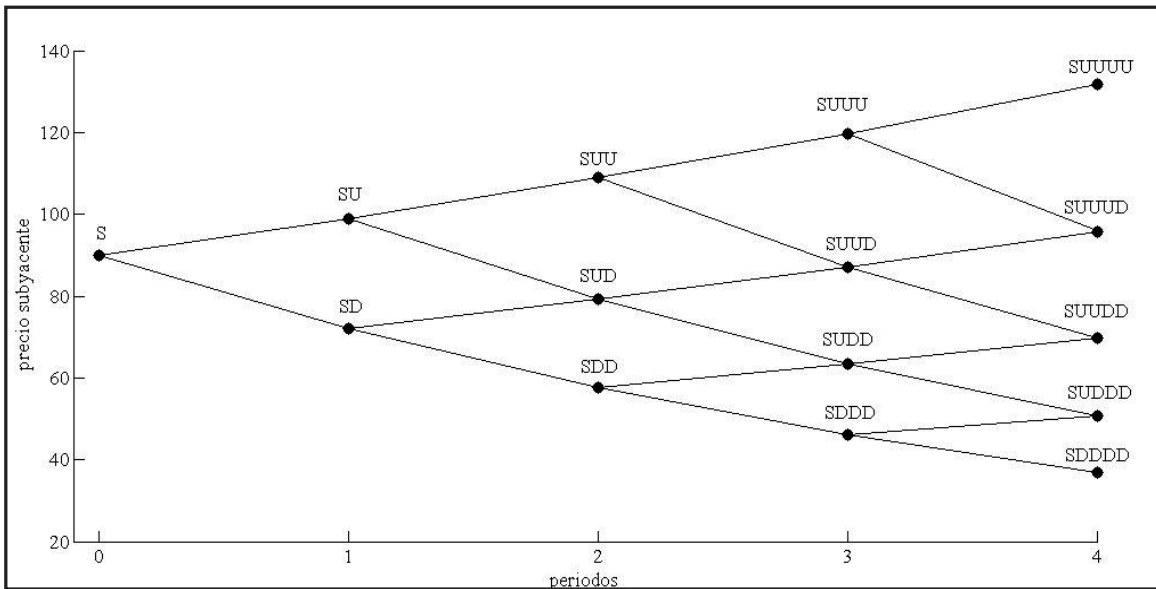
- *Forward-starting options* si el periodo de tiempo entre el que se calcula el precio de opción la media se encuentra en el futuro.
- *Backward-starting o plain vanilla* cuando el tiempo que resta para el vencimiento de la opción es menor o igual que el intervalo de tiempo en el que se calcula la media.

2. Aproximación por métodos numéricos

2.1 Método binomial

A partir de las opciones vainilla, se utiliza el método binomial y se realizan modificaciones para poder valorar opciones asiáticas (Haug, 2006). El modelo binomial simula que la serie de precios se mueve hacia arriba o abajo. Si el precio *stock* comienza con valor S entonces éste podría tomar cualquier valor entre US o DS ($U > 1$ y $D < 1$) en el siguiente periodo de tiempo, esto es, como una caminata aleatoria. Si suponemos una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal, podemos extender la caminata aleatoria para otro periodo de tiempo. Después de dos periodos de tiempo el valor del subyacente podría ser U^2S , si hacen dos movimientos hacia arriba, UDS , si hace un movimiento hacia arriba seguido de uno hacia abajo o viceversa, o D^2S , si hace dos movimientos consecutivos hacia abajo. Después de tres periodos el precio del subyacente puede ir al U^3S , U^2DS , etcétera. El resultado de la estructura de la caminata aleatoria, se puede ver en la Figura 1, donde los nodos representan el valor tomado por el subyacente.

Figura 1. Simulación del movimiento de los precios con $S = 90$, $U = 1.1$, $D = 0.8$ y 4 periodos.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

El nodo superior e inferior del árbol, en el momento de expiración, pueden ser alcanzados por un sólo camino (todos los movimientos hacia arriba o hacia abajo). Por lo tanto, los valores intermedios son más probables de ser alcanzados que el valor final si se está haciendo una simulación. En la Figura 2 se muestra el número de caminos de cada nodo después de cuatro periodos de tiempo y la probabilidad de obtener cada uno.

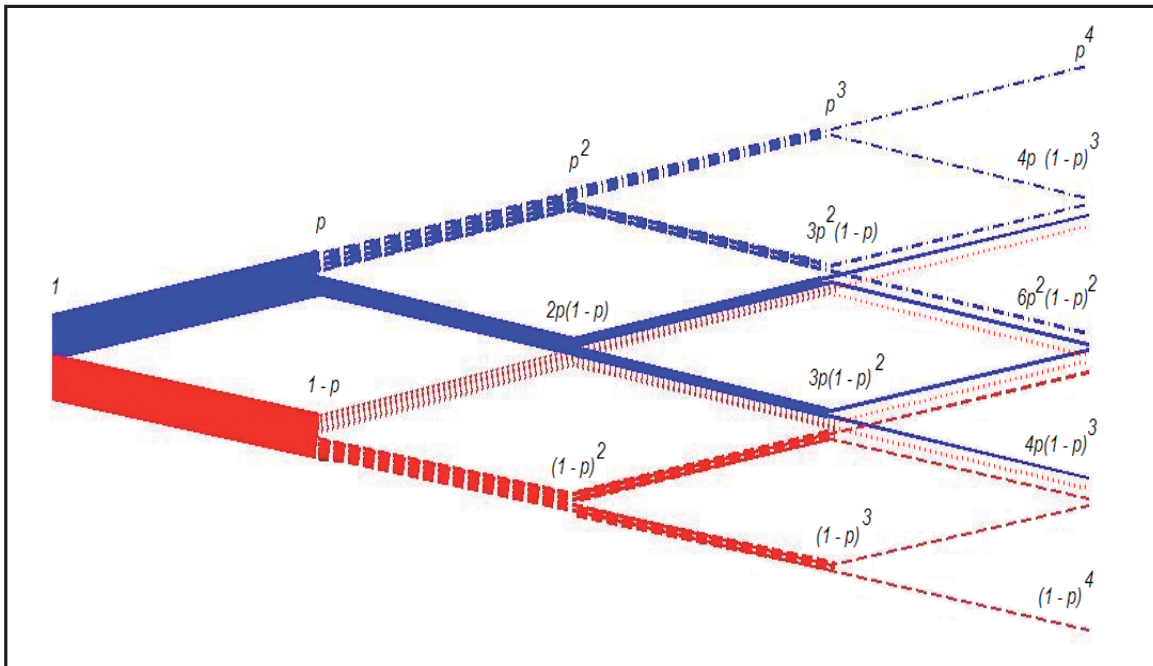
Este método tiene como desventaja, la lentitud de ejecución dada una partición del tiempo relativamente pequeña como lo son 15 periodos.

Ecuación para el valor de una opción: Suponiendo que se conoce el valor de una opción en el tiempo $t + \delta t$ (por ejemplo, este tiempo puede ser el momento de expiración de la opción), se construye un portafolio en el tiempo t consistente en una opción y una posición corta en una cantidad Δ del subyacente. En el tiempo t este portafolio vale:

$$\Pi = V - \Delta S, \tag{6}$$

donde el valor V ya está determinado.

Figura 2. Árbol con las diferentes probabilidades de riesgo neutral de cada nodo.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

En el tiempo $t + \delta t$ el portafolio toma uno de dos valores, ya sea que aumente o disminuya el precio del subyacente. Estos dos valores son:

$$V^+ - \Delta US \text{ y } V^- - \Delta DS. \quad (7)$$

Debido a que suponemos que conocemos V^+ , V^- , U , D , S y Δ , los valores de ambas expresiones son conocidos y, en particular, dependen de Δ . Teniendo la libertad de elegir Δ , podemos tener el mismo valor de este portafolio, ya sea que el precio del activo suba o baje. Esto se asegura si hacemos:

$$V^+ - \Delta US = V^- - \Delta DS \quad (8)$$

Esto nos da a elegir:

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{(U - D)S}, \quad (9)$$

cuando el valor del nuevo portafolio es:

$$\Pi + \delta\Pi = V^+ - \frac{U(V^+ - V^-)}{U - D} = V^- - \frac{D(V^+ - V^-)}{U - D}. \quad (10)$$

Debido a que el valor del portafolio ha sido garantizado, podemos decir que este valor debe coincidir con el valor del portafolio original más un interés cobrado con la tasa libre de riesgo; éste es el argumento del no arbitraje. Por lo tanto:

$$\delta\Pi = r\Pi\delta t. \quad (11)$$

Desarrollando la expresión anterior, se llega a:

$$V = \frac{V^+ - V^-}{U - D} + \frac{UV^- - DV^+}{(1 + r\delta t)(U - D)}. \quad (12)$$

Dado la ecuación (12), considerando V^+ y V^- , el valor de la opción en el siguiente periodo de tiempo, y los parámetros U y D describen la caminata aleatoria del activo. Podemos escribir la anterior ecuación como:

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-, \quad (13)$$

donde:

$$p' = \frac{e^{r\delta t} - D}{U - D} \quad (14)$$

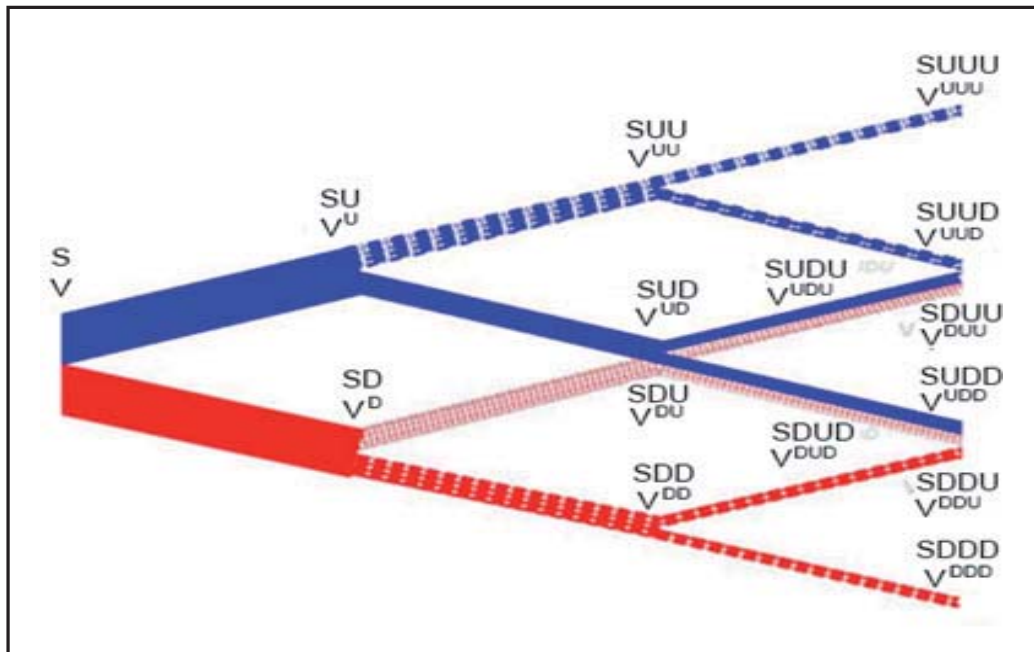
Se interpreta p' como una probabilidad de riesgo neutral y la expresión $e^{r\delta t}V$ es el valor esperado de la opción en el tiempo t calculado con las probabilidades neutrales al riesgo y los valores posibles de la opción como variable aleatoria. Suponiendo que conocemos V^+ y V^- entonces podemos encontrar V. Si conocemos el valor de la opción en el momento de expiración, se puede usar la ecuación para encontrar el valor de la opción en el tiempo $T - \delta t$ para todos los valores de S en el árbol, lo que implica que podemos

encontrar el valor de la opción un periodo atrás en el tiempo. Podemos trabajar el camino hacia atrás en el árbol, usando la ecuación:

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1-p')V^- \quad (15)$$

dados V^+ y V^- deben regresar por el camino por el cual sus subyacentes asociados llegaron un paso antes, como lo indica la Figura 3 y así hasta llegar a la raíz que es el tiempo cero, y de ese modo encontramos el valor de la opción al día de hoy.

Figura 3. Árbol binomial. Para “regresar” al precio V o tronco es necesario seguir el camino por el cual se llegó a los nodos o ramas finales.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Opción americana: El procedimiento para analizar las opciones americanas usando el árbol binomial es trabajar de regreso a través del árbol desde el final hasta el comienzo, evaluando en cada nodo para ver si adelantar el ejercicio de la opción es adecuado. El valor de la opción en el nodo final es el mismo de la opción Europea. En nodos anteriores el valor de la opción es el mayor de:

1. El valor traído a valor presente, V , a partir V^+ y V^- en la ecuación

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^- \quad (16)$$

2. El *payoff* de ejercer temprano tomando en cuenta la trayectoria que siguió el subyacente para llegar a ese nodo es:
 $\max(e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-, \textit{payoff})$.

2.2 Método binomial recursivo

Para el algoritmo Binomial Recursivo (Haug, 2006), sean:

S_0 = precio inicial del activo subyacente.

X = precio de ejercicio.

S_{ave} = precio promedio del subyacente.

r = tasa de interés libre de riesgo.

q = tasa de dividendos.

T = tiempo faltante para la finalización del contrato.

periodos = número de fracciones de tiempo en que fue dividido el periodo total.

U = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo superior.

D = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo inferior.

contador = cuenta en número de periodos transcurridos.

El algoritmo de una función recursiva para el método binomial, está dado por:

1. Se crea una función f con los siguientes parámetros: $S_0, X, S_{ave}, r, q, T, periodos, U, D$ y *contador*.
2. Se obtiene el *payoff* del respectivo tipo de opción y se asigna a V_{T,S_0} .
3. Si *periodos* > 0 pasamos al paso 4, si no pasamos al paso 6.
4. Obtenemos:

$$p = \frac{e^{(r-q)\frac{T}{\text{periodos}}} - D}{U - D} \quad (17)$$

5. Se obtiene el valor de la opción V_{T,S_0} de ese periodo:

$$V_{T,S_0} = \max\left(e^{-r\frac{T}{\text{periodos}}}\left(pV_{T-1,U} + (1-p)V_{T-1,D}\right), V_{T,S_0} \text{ * americana}\right) \quad (18)$$

donde $V_{T-1,U}$ es la misma función declarada en el paso 1 pero con los siguientes cambios en los parámetros:

$$S_0 \rightarrow S_0 U$$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio $S_0 U$, por ejemplo:

$$S_{ave} = \frac{(t-1)S_{ave} + S_0 U}{t} \quad (19)$$

$$T \rightarrow T - \frac{T}{\text{periodos}}$$

$$\text{periodos} \rightarrow \text{periodos} - 1$$

$$\text{contador} \rightarrow \text{contador} + 1$$

y $V_{t-1,D}$ también es la misma función declarada en el paso 1 con los siguientes cambios en los parámetros:

$$S_0 \rightarrow S_0 D$$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio $S_0 D$.

$$T \rightarrow T - \frac{T}{\text{periodos}}$$

$$\text{periodos} \rightarrow \text{periodos} - 1$$

$$\text{contador} \rightarrow \text{contador} + 1$$

y la variable *americana* es cero si queremos una opción europea y 1 si queremos una opción americana.

6. Por último, con la función f se calcula el valor de V_{t,S_0} .

Una ventaja de este método es que se pueden valorar todos los tipos de opciones asiáticas, ya sean opciones de tipo europeo o americano, *average strike* o *average price*, *put* o *call* y con promedio geométrico o aritmético. Otra ventaja es que el código del programa es el más corto y más sencillo comparado con los que se verán más adelante. La gran desventaja de este método es que al elegir particiones o ciclos de recursividad más finos, el programa tiende a hacerse rápidamente más lento.

2.3. Método binomial con matrices

Para el Método binomial con matrices (Haug, 2006):

1. Se crea una función con los siguientes parámetros: S_0 , X , S_{ave} , r , q , T , *periodos*, U , D y *contador*.
2. Se declaran dos matrices de tamaño $(2^{periodos}) \times (periodos + 1)$ cada una, que representan $periodos + 1$ el número de periodos y $2^{periodos}$ el número de trayectorias, una matriz se utilizará para llenar los valores del subyacente y la otra para el precio de la opción de cada trayectoria en el tiempo, sean S y F respectivamente.
3. Se igualan todas las entradas de la matriz S a S_0 .

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. Se hace un ciclo desde que $i = 2$ hasta que $i = periodos + 1$ como se indica a continuación:
 - a) Sea el caso $i=2$, se dividen los renglones de esa columna en dos partes, notando que $2^{periodos}$ es un número par, se toman desde el ren-

glón 1 hasta el renglón $2^{\text{periodos}-1}$, que son la primera mitad de los renglones y se multiplican por U y desde $2^{\text{periodos}-1} + 1$ hasta 2^{periodos} , que son la segunda mitad de renglones, se multiplican por D.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}-1} \\ 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\ 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}} \end{matrix} \quad (21)$$

b) Para el caso $i = 3$ se iguala la columna 3 con la anterior

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}-1} \\ 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\ 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}} \end{matrix} \quad (22)$$

c) Se divide la columna 3 entre cuatro partes y al primer cuarto se le multiplica por U al segundo por D al tercero por U y al cuarto por D.

$$\begin{bmatrix}
 S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\
 S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_0 & S_0U & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\
 S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\
 S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 2^{\text{periodos}-1} \\
 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\
 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\
 \vdots \\
 2^{\text{periodos}}
 \end{matrix}
 \quad (23)$$

- d) A la cuarta columna se iguala a la anterior y se divide en 8 partes. Cada parte se multiplica por U y después por D y así sucesivamente.
- e) Se ubica la n -ésima columna, se iguala con la anterior, y se divide entre 2^{n-1} partes. La primera parte se multiplica por U , la segunda por D , la tercera por U y la cuarta por D y así intercalando U y D hasta completar la columna.
- f) Se completa el llenado de columnas hasta llegar a la columna $i = \text{periodos} + 1$.

5. Una vez llena la matriz S se igualan las entradas de la matriz F

$$V_{i, \text{periodos}+1} = \text{payoff}(S_{i, \text{periodos}+1}), i = 1, \dots, 2^{\text{periodos}}$$

- 6. Dados los valores del nodo final se procede a regresar a través del árbol tomando de la última las entradas 1 y 2 que son V^+ y V^- respectivamente, para obtener V y colocarla en la columna periodos en las entradas 1 y 2. A continuación se toman los pares 3 y 4 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V colocándola en la columna periodos en las entradas 3 y 4, y así sucesivamente hasta llenar la columna periodos .
- 7. Para la columna $\text{periodos} - 1$ se toman los pares 1 y 3 que son V^+ y V^- , respectivamente, para obtener V y colocarla en la columna $\text{periodos} - 1$ en las entradas 1 hasta 4. A continuación se consideran los pares 5 y 7 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V para co-

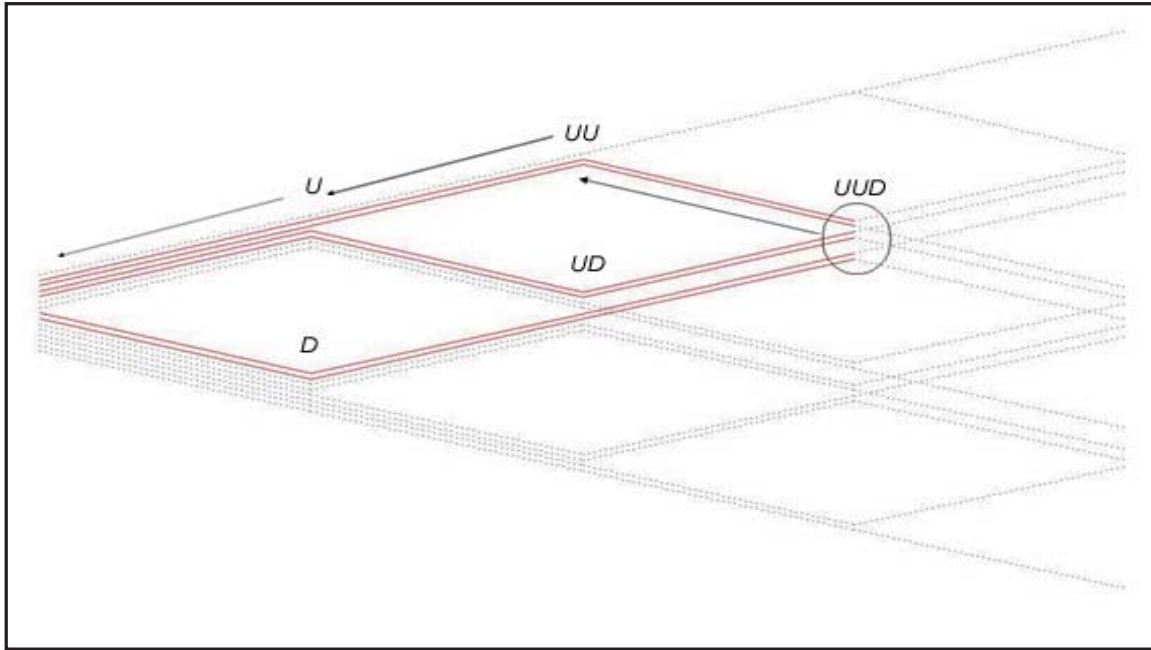
2.4 Método binomial alternativo

En este método al considerar un mayor número de particiones, el valor de la opción tiende a alejarse del valor que arrojan los otros modelos. El enfoque es computacionalmente factible cuando el número de valores alternativos de la función del camino F , en cada nodo no alcanza a crecer tan rápido como el incremento de número de pasos en el tiempo. La primera etapa es hacia delante a través del árbol estableciendo los valores máximos y mínimos del camino en cada nodo, suponiendo que el valor de trayectoria en el tiempo $\tau + \Delta t$ depende sólo del valor de la función de la trayectoria al tiempo τ y el valor de la variable del subyacente al tiempo $\tau + \Delta t$, los valores máximos y mínimos de la función de la trayectoria para los nodos al tiempo $\tau + \Delta t$ pueden ser calculados en un sencillo camino de esos para los nodos al tiempo τ . La segunda etapa consiste en escoger valores representativos de la función de la trayectoria en cada nodo, se eligen los valores representativos como el valor máximo, valor mínimo y un grupo de otros valores que son igualmente espaciados entre el máximo y el mínimo. Como se tiene que regresar a través del árbol, valuamos el derivado para cada valor representativo de la función de la trayectoria.

Fórmula para el promedio más grande y más pequeño que alcanza un nodo: Los promedios que llegan a un nodo deben estar contenidos en una zona como lo indica la Figura 5, si para llegar a ese nodo se utilizó el camino UUD , entonces los demás caminos son las combinaciones que se pueden hacer con UUD , que son UDU y DUU . La trayectoria que representa el promedio máximo será aquella que tenga en cada nodo que lo compone un valor de nodo más grande que los demás nodos que componen a los otros promedios de las trayectorias. Para determinar la trayectoria que representa el promedio mayor se debe comenzar en el nodo e ir hacia atrás y arriba hasta llegar a la orilla del árbol y después ir hacia atrás y hacia abajo, asegurando así encontrar el valor más grande para cada nodo y el promedio más grande.

Análogamente con el mínimo, en este caso hay que recorrer el camino hacia atrás y hacia abajo hasta llegar a la orilla y después atrás y arriba hasta llegar a la raíz, obteniendo los nodos más pequeños posibles para encontrar la trayectoria con el promedio más pequeño. Dado el nodo $U^i D^j$ el promedio aritmético más grande alcanzado por alguna trayectoria (Haug, 2006), es:

Figura 5. Trayectoria de promedio más grande.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

$$\frac{1+U+U^2+\dots+U^i+U^iD+U^iD^2+U^iD^3+\dots+U^iD^j}{i+j+1}$$

$$= \left[\frac{1-U^i}{1-U} + \frac{1-D^{j+1}}{U^i(1-D)} \right] \frac{1}{i+j+1} \quad (24)$$

y para el mínimo:

$$\frac{1+D+D^2+\dots+D^j+D^jU+U^2D^j+\dots+U^iD^j}{i+j+1}$$

$$= \left[\frac{1-D^j}{1-D} + \frac{1-U^{i+1}}{D^j(1-U)} \right] \frac{1}{i+j+1} \quad (25)$$

y para el promedio máximo del promedio geométrico:

$$\begin{aligned} & [(U)(U^2) \cdot \dots \cdot (U^i)(U^i D)(U^i D^2)(U^i D^3) \cdot \dots \cdot (U^i D^j)]^{\frac{1}{i+j}} \\ & = U^{\frac{i(i+1)+2j}{2(i+j)}} D^{\frac{j(j+1)}{2(i+j)}} \end{aligned} \quad (26)$$

por último el promedio mínimo:

$$\begin{aligned} & [(D)(D^2) \cdot \dots \cdot (D^j)(D^j)(U^2 D^j)(U^3 D^j) \cdot \dots \cdot (U^i D^j)]^{\frac{1}{i+j}} \\ & = U^{\frac{i(i+1)}{2(i+j)}} D^{\frac{j(j+1)+2j}{2(i+j)}} \end{aligned} \quad (27)$$

y así tenemos las fórmulas para el promedio más grande de cada nodo.

Algoritmo para el método binomial alternativo:

1. Se obtienen los valores más grandes y más pequeños del promedio que alcanzan los nodos, y después se obtiene una cantidad $n - 2$ con $n \geq 2$ entre el máximo y el mínimo espaciados entre sí con igual magnitud, estos $n - 2$ números más el máximo y el mínimo forman n números representativos de los promedios que puede llegar a tener un nodo.
2. Se calcula el *payoff* de los n números representativos del periodo de maduración.
3. Para un nodo cualquiera de un periodo antes al de maduración, se toma uno de los n valores representativos del promedio de ese nodo, sea S_{ave}^i nuestro número y sea S el subyacente asociado a ese nodo. Con ese valor y con SU formamos un nuevo promedio, del cual, se interpolará el precio de la opción, en este caso el *payoff*, con ayuda de los valores representativos de ese periodo, sea V_+^i , de igual manera obtenemos el valor de la opción del nuevo promedio formado por nuestro valor S_{ave}^i y SD , sea V_-^i este valor.
4. Con estos dos valores obtenemos la aproximación del precio de la opción correspondiente a S_{ave}^i , sea V^i . Entonces:

$$V^i = e^{-r\Delta t} (pV_+^i + (1-p)V_-^i) \quad (28)$$

5. Se desarrolla el mismo procedimiento para $i = 1, \dots, n$, es decir, toda la n valores representativos.
6. Se realizan los pasos 3 al 5 para los demás nodos del periodo.
7. Se realizan los pasos 3 al 6 para dos periodos antes de la maduración, utilizando los precios de la opción ya obtenidos del siguiente periodo.
8. Se repite el paso 7 para los periodos restantes siguiendo el orden de atrás hacia adelante.

2.5. Método de simulación Montecarlo

Este método se aplica al caso de las opciones de tipo europeo, ya sea *average strike* o *average price, put call*, con promedio geométrico o aritmético. Éste método es fácil de implementar, pero es necesario un buen generador de números aleatorios ya que de no ser así se tendrían problemas de precisión de cálculo; al crear números aleatorios utilizando el software Matlab® (The MathWorks, 2016), sus algoritmos² hacen que los resultados sean pseudo-aleatorios y pseudo-independientes, los cuales pasan varias pruebas estadísticas de aleatoriedad e independencia.

Se simulan trayectorias múltiples, en cada una, se obtiene el promedio final y se emplea según sea el tipo de opción (*average price* o *average strike*), se trae a valor presente con la tasa libre de riesgo, esto se repite para todas las trayectorias y al final se obtiene el promedio de los valores presentes de las trayectorias. Se considera la muestra de trayectorias para obtener el valor esperado del *payoff* y se descuenta con la tasa libre de riesgo. Suponiendo un derivado dependiente de una sola variable de mercado S que proporciona un *payoff* al tiempo T .

Asumiendo que la tasa de interés es constante, se puede valorar el derivado (Haug, 2006), como sigue:

1. Modelar un camino aleatorio para S con una formulación de riesgo neutral.
2. Calcular el *payoff* del derivado.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para obtener varias muestras del valor del *payoff* del derivado con la formulación de riesgo neutral (la cantidad

² Uniformes, semillas del generador basadas en la hora actual, multiplicativo de Fibonacci, normales, combinación recursiva múltiple, etcétera.

depende de la capacidad de la computadora donde se ejecute el programa).

4. Calcular el promedio de la muestra de *payoff*'s obteniendo un estimado del valor esperado del *payoff* con la formulación de riesgo neutral.
5. Descontar al valor esperado del *payoff* a la tasa de riesgo neutral para obtener un estimado del valor del derivado.

Supongamos que el proceso seguido por el subyacente con la formulación de riesgo neutral es:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz \quad (29)$$

donde dz es un proceso de Wiener (Rubio, 1989), r es el valor esperado de retorno en riesgo neutral, y σ es la volatilidad. Para simular el camino seguido por S , se divide la vida del derivado en N intervalos de longitud Δt y se aproxima la ecuación anterior a:

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) - S(t) &= \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Rightarrow S(t + \Delta t) &= \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + S(t) \\ \Rightarrow S(t + \Delta t) &= (r - q)S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + S(t) \end{aligned} \quad (30)$$

donde $S(t)$ denota el valor de S al tiempo t , ε es una muestra aleatoria con una distribución normal con media cero y desviación estándar 1. Esto permite al valor de S en un tiempo Δt al ser calculado desde el valor inicial de S , el valor al tiempo $2\Delta t$ desde el valor al tiempo Δt , y así sucesivamente. Una prueba involucra construir una trayectoria completa para S usando N muestras aleatorias de una distribución normal.

Del lema de Itô el proceso seguido por $\ln S$ es:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dt \quad (31)$$

y así tenemos que:

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (32)$$

que equivale a:

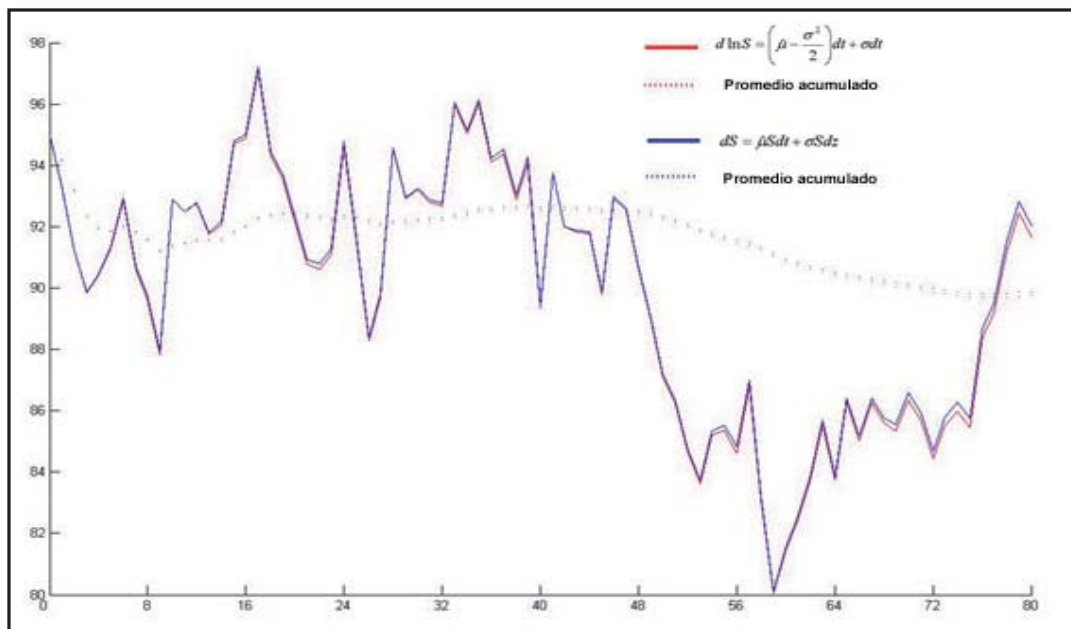
$$S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

$$\Rightarrow S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left((r - q) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (33)$$

Esta ecuación es usada para construir una trayectoria para S .

La ventaja de usar $\ln S$ es que esto sigue una generalización del proceso de Wiener. Esto se refiere a que la ecuación:

Figura 6. Comparación de las dos formas de modelar la trayectoria del subyacente.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T} \quad (34)$$

es cierta para todo T , a diferencia de la primera ecuación que sólo es cierta si Δt tiende a cero. Esto significa que:

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) e^{\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \\ \Rightarrow S(T) &= S(0) e^{\left((r-q) - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \end{aligned} \quad (35)$$

Se necesita conocer la trayectoria desde $S(0)$ hasta $S(T)$, en particular en las opciones de tipo asiático debido a que es necesario conocer el camino seguido por el activo subyacente. Cualquier proceso estocástico para S puede ser acomodado. La desventaja de la simulación Monte Carlo es que consume desde algunos segundos hasta horas en la computadora porque entre más simulaciones se lleven a cabo es más precisa la valuación y no es tan operable en situaciones donde hay oportunidades de ejercer tempranamente, es decir, no contempla las opciones de tipo americano.

Algoritmo simulación Monte Carlo (Haug, 2006)

1. Se crea la función con los siguientes parámetros: S_0 , X , T , *periodos*, *trayectorias*, r , q , σ .
2. Se inicializa un contador $cont = 0$ que va a sumar los *payoffs*.
3. Del paso 4 al 8 se hace un ciclo desde 1 hasta n *trayectorias*.
4. Se inicializa la variable $s=S_0$ y $S_{ave}=S_0$.
5. Del paso 6 al paso 7 se hace un ciclo desde 1 hasta m *periodos*
6. Se iguala

$$s = s(r - q) \left(\frac{T}{\text{periodos}} \right) + s \left(\sigma \sqrt{\frac{T}{\text{periodos}}} \right) (\text{aleatorioNormal}(0,1)) \quad (36)$$

donde la función *aleatorioNormal* (0,1) es un generador de números aleatorios normales con media 0 y varianza 1.

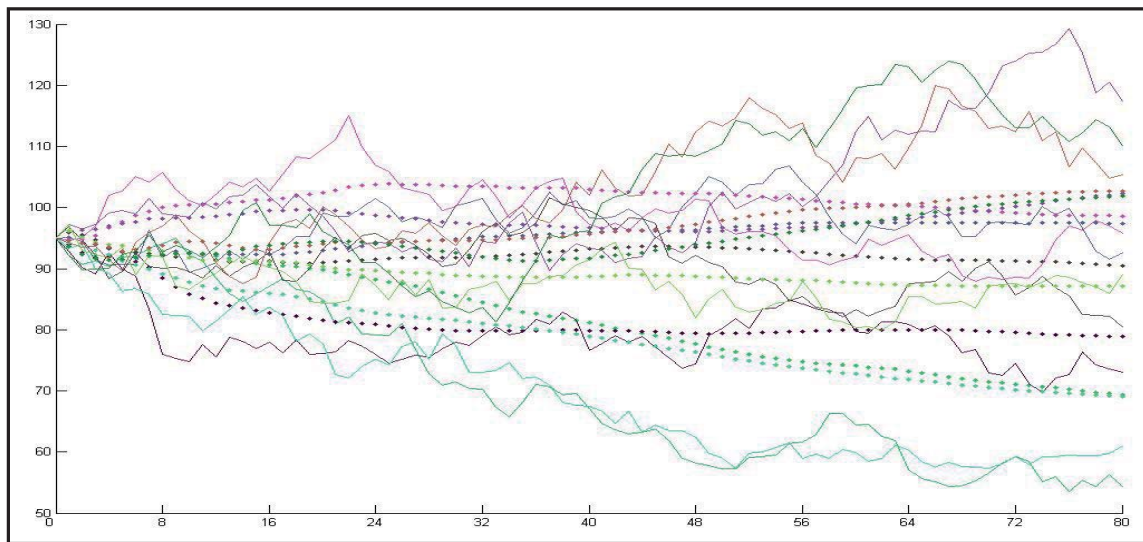
- Obtenemos el nuevo promedio S_{ave} obteniéndolo con el promedio anterior y el nuevo precio de s . Por ejemplo

$$S_{ave} = \frac{S_{ave} * (\text{periodo} - 1) + s}{\text{periodo}} \quad (37)$$

para el promedio aritmético, siendo *periodo* el número que indica en qué periodo va del ciclo que se inició en el paso 5.

- Se obtiene el *payoff* y se acumula en la variable *contador*. Entonces $\text{contador} = \text{contador} + \text{payoff}$.
- Por último hacemos que la función regrese el valor $\frac{\text{contador}}{\text{trayectorias}} e^{-rT}$.

Figura 7. Simulación de diez trayectorias (líneas), con su promedio acumulado (líneas punteadas).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

2.6 Método explícito diferencial finito

Se aproxima la ecuación diferencial parcial, por medio de aproximaciones de las letras griegas (Haug, 2006).

Aproximación de θ : Se define como la derivada de V respecto a t cuando $t = T - k\Delta t$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(S, t+h) - V(S, t)}{h}, \quad (38)$$

se puede aproximar la derivada para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) \approx \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\Delta t} \quad (39)$$

Aproximación de Δ : Se define como la derivada de V respecto a S , y se puede aproximar para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta S} \quad (40)$$

Aproximación de Γ : Se define como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\Delta S^2} \quad (41)$$

Entonces, se puede aproximar la ecuación de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (42)$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\Delta S^2} + rS \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta S} - rV_i^k \\ = O(\Delta t, \Delta S^2) \end{aligned} \quad (43)$$

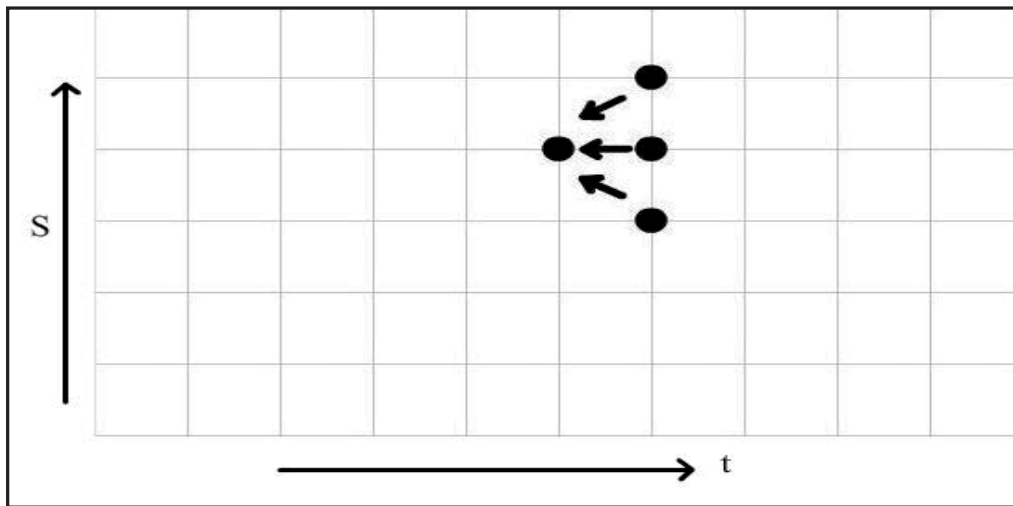
donde $O(\Delta t, \Delta S^2)$ es el error de la ecuación.

Al despejar el valor requerido se obtiene:

$$V_i^{k+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\partial S^2} + rS \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\partial S} - rV_i^k \right) \partial t + V_i^k \quad (44)$$

y así se puede obtener el valor de la opción de un periodo anterior:

Figura 8. Obtención de V_i^{k+1} a partir de V_{i-1}^k , V_i^k y V_{i+1}^k .



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Condición de salto: El primer paso en la derivación es la observación de que la ecuación diferencial estocástica para I es degenerada $\partial I = 0$. Esto se debe a que la variable I puede sólo cambiar en el sistema discreto de datos t_i . Esto es cierto si $t \neq t_i$ para toda i . La ecuación del precio es la ecuación de Black-Scholes básica:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (45)$$

Ahora V es una función de tres variables, donde I es un parámetro. La muestra de datos del precio del subyacente no muestra fuertes cambios. Mientras el resultado de la muestra de datos es conocido y el dinero no cam-

bie de manos no se puede realizar ningún salto en el valor de la opción. Sea t_i^- el tiempo infinitesimal antes de la muestra de datos en t_i y t_i^+ el tiempo infinitesimal después de la muestra de datos, la continuidad del valor de la opción es representada matemáticamente por:

$$V(S, I_{i-1}, t_i^-) = V(S, I_i, t_i^+) \quad (46)$$

en otras palabras, tenemos:

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, F(S, I, i), t_i^+) \quad (47)$$

la cual es llamada condición de salto.

Cuando el dinero cambia de manos, en un momento dado, ocurrirá un cambio repentino en el valor de la opción en ese tiempo. Si se sigue el camino de S en el tiempo, se apreciará que es continuo. Sin embargo, el camino para I es discontinuo. Allí el salto es determinista en I a través de la muestra de datos. Si se gráfica V como una función de S e I justo antes la muestra de datos se puede observar que para mezclar a S e I el precio de la opción será discontinuo. Pero esta grafica tendrá que ser interpretada correctamente; $V(S, I, t)$ puede ser discontinuo como una función de S e I ; así como V es continuo a lo largo de cada camino realizado de S e I . En particular, en el caso de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el tiempo t_i se soluciona la ecuación de Black-Scholes para $V(S, A, t)$ con:

$$V(S, A, t_i^-) = V\left(S, \frac{i-1}{i}A + \frac{1}{i}S, t_i^+\right) \quad (48)$$

y una conveniente condición final representando el *payoff*.

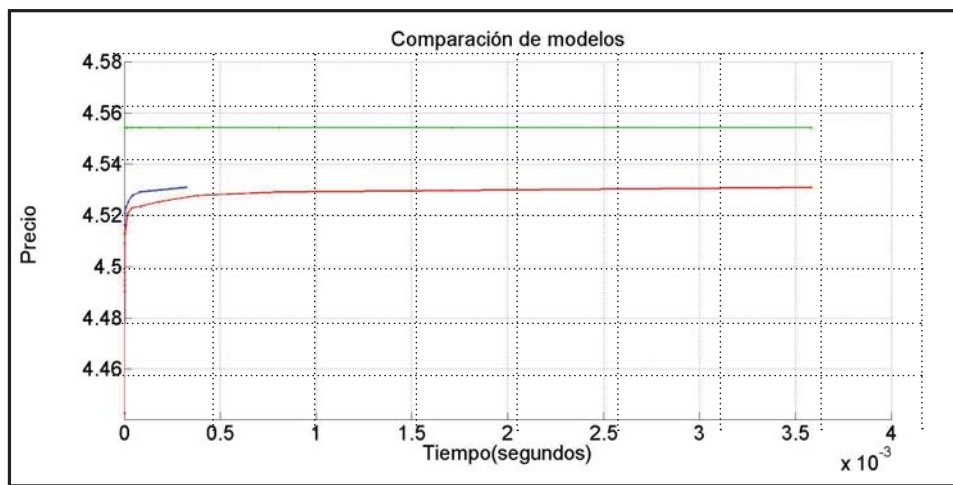
3. Resultados

Para completar el análisis se realizaron 17 simulaciones para valuar opciones europeas, con promedio aritmético y/o geométrico, precio del subyacente 100, tiempo del periodo un año, precio strike 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

3.1 Aplicaciones de los métodos binomiales

Considerando una opción europea con precio del subyacente de 100, un precio de ejercicio de 100, periodo de 1 año *call* promedio geométrico y volatilidad $\sigma = 15\%$, se compararán; el método binomial recursivo, binomial alternativo y binomial con matrices.

Figura 9. Gráfica de tiempo contra precio del método binomial con matrices (gráfica intermedia), binomial con recursividad (gráfica inferior) y el precio obtenido con fórmula (gráfica superior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

Tabla 1. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando los métodos binomial matricial y binomial recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

Binomial matricial		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.015	4.4428	00:00.004	4.4428
00:00.003	4.4948	00:00.001	4.4948
00:00.006	4.4929	00:00.001	4.4929
00:00.015	4.4902	00:00.004	4.4902
00:00.033	4.4978	00:00.007	4.4978
00:00.072	4.509	00:00.014	4.509

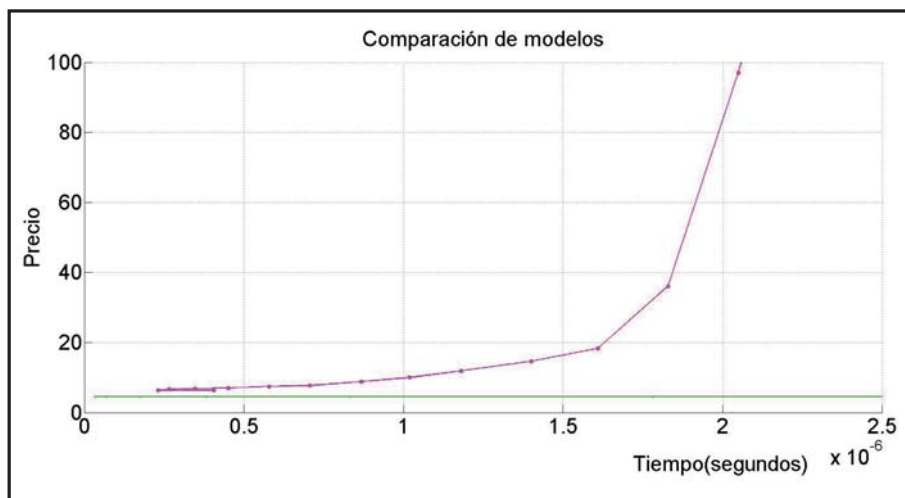
(Continuación)

Binomial matricial		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.154	4.5127	00:00.029	4.5127
00:00.354	4.5129	00:00.056	4.5129
00:00.752	4.5161	00:00.114	4.5161
00:01.627	4.5208	00:00.223	4.5208
00:03.400	4.5229	00:00.471	4.5229
00:07.298	4.5234	00:00.910	4.5234
00:15.754	4.5253	00:01.768	4.5253
00:33.051	4.5278	00:03.543	4.5278
01:09.576	4.5291	00:06.976	4.5291
02:27.344	4.5297	00:13.969	4.5297
05:09.466	4.5308	00:27.692	4.5308

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Los precios de la opción obtenidos por el método binomial con matrices y con recursividad son los mismos pero el resultado por el método binomial con recursividad tardó menos tiempo en calcularse. La línea que representa el precio por fórmula, se usa con fines de comparación, y el valor obtenido es casi instantáneo para esta última y las demás gráficas.

Figura 10. Precios contra tiempo del método alternativo (gráfica superior) y el precio con fórmula (gráfica inferior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

Tabla 2. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método Binomial Alternativo (tiempo de corrida y precio obtenido).

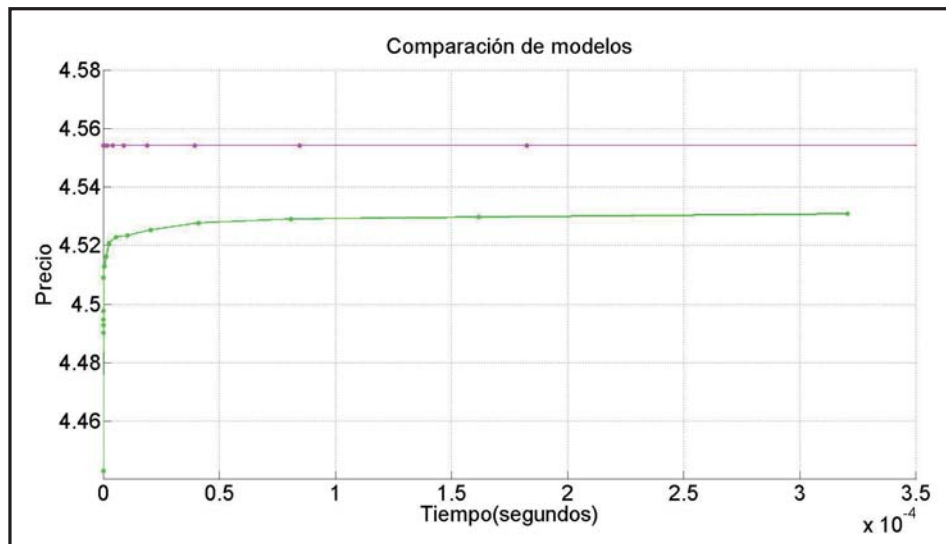
Binomial alternativo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.035	6.4257
00:00.020	6.2967
00:00.023	6.5994
00:00.030	6.8262
00:00.039	6.9921
00:00.050	7.4539
00:00.061	7.6931
00:00.075	8.8353
00:00.088	10.0111
00:00.102	11.9177
00:00.121	14.6274
00:00.139	18.3280
00:00.158	36.0901
00:00.177	97.0361
00:00.197	173.1141
00:00.218	483.2885
00:00.241	3,821.8671

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Se puede apreciar que se sobrevalúa el precio de la opción, conforme aumenta el número de periodos, se emplearon de 4 a 45 periodos; el precio diverge pero parte de valores cercanos a los obtenidos con la fórmula.

Se consideraron de 4 a 24 particiones de tiempo (izquierda a derecha) conforme se van refinando las particiones el precio del binomial recursivo tiende al valor del precio de la fórmula, pero en cada nuevo valor se tarda el doble y se acerca con mayor lentitud. Por lo tanto para futuras comparaciones se empleará al método binomial recursivo.

Figura 11. Precio contra tiempo del modelo binomial recursivo (gráfica inferior) y el precio con fórmula (gráfica superior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 3. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método Binomial Recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

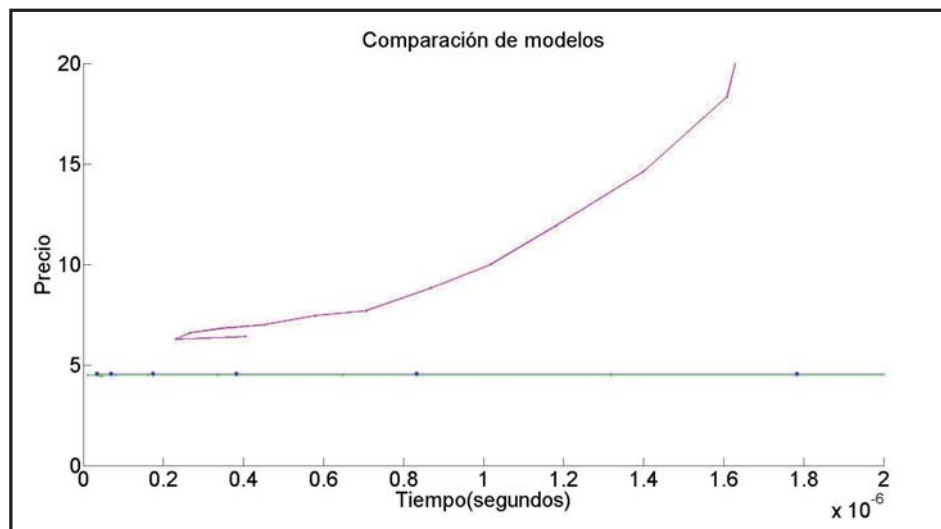
Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.004	4.4428
00:00.001	4.4948
00:00.001	4.4929
00:00.004	4.4902
00:00.007	4.4978
00:00.014	4.5090
00:00.029	4.5127
00:00.056	4.5129
00:00.114	4.5161
00:00.223	4.5208
00:00.471	4.5229
00:00.910	4.5234

(Continuación)

Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio
00:01.768	4.5253
00:03.543	4.5278
00:06.976	4.5291
00:13.969	4.5297

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Figura 12. Precio contra tiempo del método binomial alternativo (gráfica superior), el método binomial recursivo (gráfica inferior) y el precio con fórmula (obscura).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 4. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método binomial alternativo y el binomial recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

Binomial alternativo		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.035	6.4257	00:00.004	4.4428
00:00.020	6.2967	00:00.001	4.4948
00:00.023	6.5994	00:00.001	4.4929
00:00.030	6.8262	00:00.004	4.4902

(Continuación)

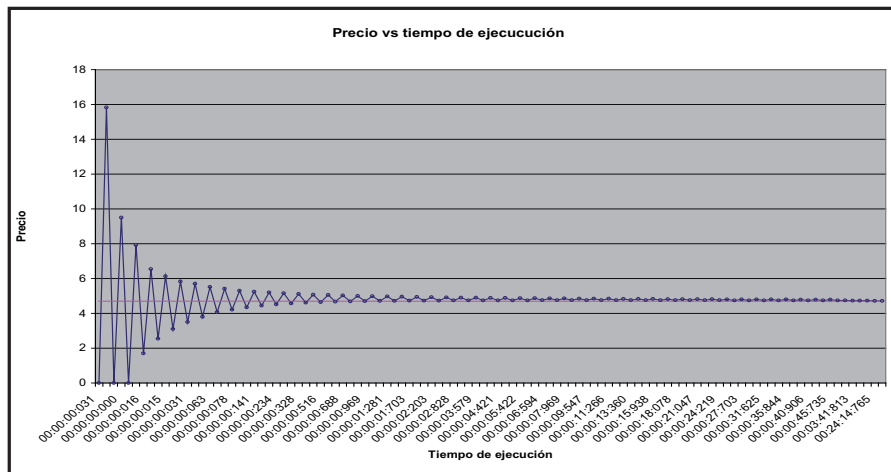
Binomial alternativo		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.039	6.9921	00:00.007	4.4978
00:00.050	7.4539	00:00.014	4.5090
00:00.061	7.6931	00:00.029	4.5127
00:00.075	8.8353	00:00.056	4.5129
00:00.088	10.0111	00:00.114	4.5161
00:00.102	11.9177	00:00.223	4.5208
00:00.121	14.6274	00:00.471	4.5229
00:00.139	18.3280	00:00.910	4.5234
00:00.158	36.0901	00:01.768	4.5253
00:00.177	97.0361	00:03.543	4.5278
00:00.197	173.1141	00:06.976	4.5291
00:00.218	483.2885	00:13.969	4.5297
00:00.241	3,821.8671	00:27.692	4.5308

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

3.2 Aplicaciones del método simulación Montecarlo

A continuación se presentan los resultados de las simulaciones de un *call*, europeo, con promedio aritmético, precio del subyacente de 100, tiempo del periodo: un año, precio *strike* 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

Figura 13. Simulación de precio promedio, *call*, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio *strike*: 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 5. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio aritmético del subyacente, utilizando el método Montecarlo, precio strike 100 (tiempo de corrida y precio obtenido).

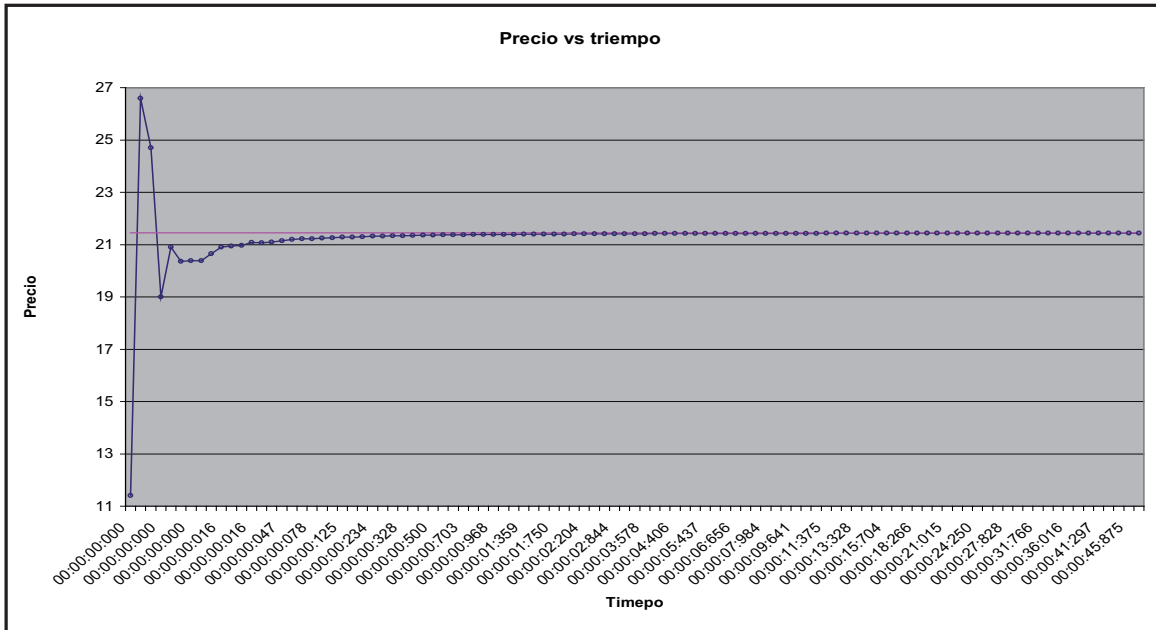
Montecarlo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.668	4.3199
00:01.033	4.1312
00:01.540	4.6767
00:02.037	4.1985
00:02.672	3.9788
00:03.362	4.4914
00:04.121	4.3607
00:04.931	4.5700
00:06.022	4.5703
00:06.908	4.4657
00:08.114	4.6981
00:09.187	4.7171
00:10.513	4.9847
00:11.781	5.2795
00:13.234	4.1241
00:14.790	4.8107
00:16.373	4.7233

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Considerando los datos anteriores pero un precio *strike* de 80, (ver Figura 14).

Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio geométrico, ya sean *put* o *call* tienen una fórmula cerrada la cual no consume recursos significativos, por lo que resulta más eficiente calcular mediante la fórmula. Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio aritmético, ya sean *put* o *call*, tienen dos fórmulas cerradas que suponen lognormalidad, lo que puede resultar que sean menos precisas; sin embargo, con los mismos parámetros arrojan resultados similares, como se puede apreciar en la Tabla 6:

Figura 14. Simulación de precio promedio, call, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 80, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 6. Comparación de modelos de la estimación del valor de una opción call europea, con promedio aritmético, precio del subyacente 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 80, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

Aproximación <i>Turnbull y Wakeman</i>	Levy's	Binomial
21.447643114349148	21.447688799406635	21.445250161954878

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Conclusiones

La eficiencia de los modelos depende de las metodologías y los recursos computacionales con los que se cuenta, esto se expresa en tiempo de ejecución y uso de la memoria de la computadora. El modelo binomial y el modelo diferencial, calculan todos los tipos de opciones, pero la forma en la que están

implementados ocasiona que el modelo binomial, en un mismo tiempo de ejecución, soporte menos particiones que el modelo diferencial, lo que genera que el precio de la opción binomial de tipo americano esté subvaluado debido a que se toma menos veces la decisión de ejercer o no, la cual aumenta el precio de la opción debido a que esa decisión da a elegir el máximo entre dos valores. Los métodos binomiales dieron como resultado un valor más próximo al cálculo de la prima por medio de la fórmula cerrada y el tiempo de ejecución fue relativamente insignificante. El modelo alternativo es rápido y arroja una buena aproximación en poco tiempo de ejecución, pero con más particiones del tiempo, el precio tiende a ser impreciso y divergente.

Los modelos binomiales son valuados con métodos recursivos, donde a cada paso en el tiempo se representa la valuación de nuevos nodos a una escala de crecimiento de 2^n donde n es el número de pasos desde el inicio, lo que ocasiona que en magnitudes de por ejemplo, $n=25$, el programa comience a mostrar cierta lentitud. En el caso de los modelos matriciales, el diferencial finito es modelado con “rejillas” o matrices, donde contiene un número limitado de trayectorias. La ventaja del método binomial recursivo es la facilidad de programación pero consume un prolongado tiempo de ejecución, debido a que entre un periodo y otro requiere el doble de cálculos. Mientras que con el método binomial con matrices el resultado numérico es el mismo que el binomial recursivo, la diferencia es el algoritmo de construcción, el primero requiere memoria de almacenaje en dos matrices, una para las trayectorias y otra para los precios, con lo que se prolonga el tiempo de ejecución del programa y resulta aún más lento que el método binomial recursivo. En el método binomial alternativo se sustituyen las numerosas matrices, debido a que se simplifica el número de trayectorias al considerar sólo la máxima y la mínima; el tiempo de ejecución disminuye pero llega a divergir.

El método explícito diferencial finito consiste en resolver la ecuación Black-Scholes considerando una muestra del precio del subyacente que se almacena en matrices, las cuales usarán el cálculo del precio de la opción despejándolo de la ecuación. La programación del algoritmo es similar al del binomial con matrices, requiere de un espacio previo para el precio del subyacente y otro para el precio de la opción; al ejecutar el modelo se aprecia que converge más lentamente que el método binomial con matrices.

Entre las desventajas del método Montecarlo se puede mencionar que depende completamente del número de trayectorias y del número de subdivisiones en el período analizado. Otra desventaja es que no se obtienen

resultados idénticos en diferentes corridas, por lo que la velocidad de convergencia no se puede apreciar claramente. Asimismo, para aumentar la precisión de la valuación se requiere incrementar el número de trayectorias y el número de subintervalos de tiempo, lo cual trae como consecuencia que se incremente el tiempo de cómputo. Quizá su mayor desventaja es que no se puede aplicar a opciones americanas. No obstante lo anterior, el método Montecarlo es el que brinda resultados más confiables y por tanto se puede aceptar la hipótesis, que éste es el más eficiente para valorar opciones asiáticas, con respecto a los demás métodos analizados en este trabajo. Futuras líneas de investigación apuntan a utilizar métodos de reducción de varianza para disminuir el tiempo de cálculo; así como repetir la aplicación de los métodos, considerando volatilidad y tasa de interés estocástica; además de utilizar datos de subyacentes que se utilizan comúnmente en el mercado de derivados.

Referencias bibliográficas

- Alziary, B., Décamps, J.P., y Koehl, P.F. (1997). A P.D.E. "Approach to Asian Options: Analytical and Numerical Evidence". *Journal of Banking y Finance*, vol. 21, Issue 5, pp. 613-640.
- Arregui, A., y Vallejo, A. (2001). "Análisis de la valoración de las opciones asiáticas utilizadas por fondos de inversión garantizados de renta variable". *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 7, núm. 1, pp. 57-70.
- Clewlow, L., y Chris, S. (1997). "Exotic Options: the State of the Art". *IB Tauris*, pp. 11-15.
- Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*. núm. 7, pp. 229-263.
- Crespo, J. L. (2001). "Utilización práctica de las opciones exóticas. Opciones asiáticas y opciones barrera", *Boletín Económico de ICE*, núm. 2686, pp. I-VIII.
- Cruz, B. D., y Rodríguez, J. M. (2007). "Valoración de opciones asiáticas con Mathematica". *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, núm. 8, pp. 139-150.
- Dempster, M. A., y Hutton, J. P. (1997). "Fast Numerical Valuation of American, Exotic and Complex Options". *Applied Mathematical finance*. vol. 4, núm. 1, pp 1-20.
- Fernández, P., y Ariño, M. (1996). "Derivados exóticos". *IESE Business School*, núm. D/308, p. 4.

- Fusai, G., y Meucci, A. (2008). "Pricing Discretely Monitored Asian Options under Lévy processes". *Journal of Banking y Finance*, vol. 32, núm. 10, pp. 2076-2088.
- García, M. J., Sancha, D. M., Tejero, R. C., y Toscano, P. D. (2000). Opciones "exóticas". *Boletín económico de ICE, Información Comercial Española*, núm. 2673, pp. 1001-1008.
- Haug, E. G. (2006). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. New York: McGraw-Hill.
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Eighth Edition, Boston USA, Prentice Hall.
- Hull, J. C., y White, A. D. (1993). "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options". *The Journal of Derivatives*, vol. 1, núm. 1, pp. 21-31.
- Levy, E. (1992). "Pricing European Average Rate Currency Options". *Journal of International Money and Finance*, vol. 11, núm. 5, pp. 474-491.
- MexDer (2016). *Mercado Mexicano de Derivados*. Obtenido de Contratos listados en MexDer: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_opcion#.
- Neave, E. H., y Turnbull, S. M. (1993). "Quick Solutions for Arithmetic Average Quick Solutions for Arithmetic Average". In *Proc. of 4th Actuarial Approach for Financial Risks International Colloquium*, pp. 718-739.
- Ortíz, R. A., y Martínez, P. M. (2016). "Valuación de opciones asiáticas versus opciones europeas con tasa de interés". *Contaduría y Administración*, vol. 61, Issue 4, pp. 629-648.
- Rubio, I. G. (1989). "Una introducción a los Procesos de ITO: el Modelo de valoración de activos de capital como condición suficiente para la valoración de opciones". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 18, núm. 60, pp. 701-717.
- The MathWorks, I. (2016). *Documentation*. Obtenido de Random Numbers in MATLAB: <https://es.mathworks.com/help/matlab/math/random-numbers-in-matlab.html>.
- Turnbull, S. M., y Wakeman, L. M. (1991). "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 26, núm. 3, pp. 377-389.

