Estocástica
FINANZAS Y RIESGO

Estimación restringida de la distribución hiperbólica generalizada de los tipos de cambio del Euro, Yen, Libra esterlina y Dólar canadiense (2000-2014)

Restricted estimation of the hyperbolic generalized distribution for the exchange rates of the Euro, Yen, Sterling Pound and Canadian dollar (2000-2014)

Martha Beatriz Mota Aragón*

José Antonio Núñez Mora**

Fecha de recepción: 27 de noviembre de 2014
Fecha de aceptación: 10 de febrero de 2015

* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, Departamento de Economía
beatrizmota4@gmail.com

** Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México, EGADE Business School
janm@itesm.mx

Resumen

En este artículo se estima la distribución de probabilidad hiperbólica generalizada con restricción del parámetro que caracteriza a la función de Bessel de tercer orden, $i.e. \lambda = -1/2$. Dicho valor corresponde a la distribución univariada Gaussiana Inversa Normal (NIG), que se estima para las variaciones de los tipos de cambio del euro, yen japonés, libra esterlina y el dólar canadiense con respecto al dólar americano. La estimación se realiza sobre las variaciones del tipo de cambio para el periodo 2000-2014. Los resultados se complementan con la implementación de dos pruebas que permiten valorar la bondad de ajuste y confirmar que el ajuste es razonable.

Clasificación JEL: F31, G11, G15

Palabras clave: algoritmo EM, distribución hiperbólica generalizada, tipo de cambio.

Abstract

In this paper we estimate the generalized hyperbolic probability distribution with a constrained parameter of the Bessel function of third kind, $i.e. \lambda = -1/2$. This value corresponds to the univariate Normal Inverse Gaussian distribution (NIG), which is estimated for variations of the euro, Japanese yen, British pound and Canadian dollar exchange rates with respect to the American dollar. The estimation is respect to the changes of the exchange rates for the period 2000-2014. The goodness of fit is checked with two tests to confirm that the adjustment is reasonable.

Keywords: *EM algorithm, generalized hyperbolic distribution, exchange rate*

Introducción

En los últimos años se ha encontrado evidencia de que una gran parte de los rendimientos de activos financieros no se comportan de acuerdo a una variable aleatoria normal, entre ellos los rendimientos de la bolsa de valores mexicana, (Trejo, 2006). Esta situación ha llevado a la búsqueda de nuevas distribuciones de probabilidad, donde sus parámetros permitan capturar los hechos estilizados empíricos de los rendimientos financieros (Cont, 2001). No obstante, las dificultades numéricas que aparecen en las distribuciones no normales han frenado la aplicación de nuevas funciones de densidad de probabilidad en los modelos financieros, (Hu, 2005). (Barndorff-Nielsen, 1977) introdujo la familia hiperbólica generalizada (GH) de distribuciones de probabilidad, las cuales dependen de una gran variedad de parámetros y por tanto la familia consta de funciones de densidad altamente versátiles. La implementación de este tipo de funciones de densidad en economía y finanzas sucedió hasta muchos años después para analizar series de rendimientos de activos, (Prause, 1999) y (Rydberg, 1999).

Mediante algoritmos numéricos (Blæsild,1992) desarrollaron el programa HYP, que permitía ajustar la familia GH mediante máxima verosimilitud, pero hasta una dimensión menor o igual a tres. En este punto la familia GH había encontrado pocas aplicaciones, dadas las complicaciones para calibrar adecuadamente la distribución de probabilidad, (Prause, 1999).

Concretamente, el ajuste de la distribución hiperbólica univariada en un contexto financiero se llevó a cabo por primera vez por (Eberlein, 1995), quienes estimaron esta distribución de probabilidad a diferentes rendimientos de acciones alemanas, aunque con dificultades de calibración.

Posteriormente, (Protassov, 2004) desarrolló una modificación del algoritmo EM, (Prause, 1999), para estimar la distribución hiperbólica generalizada multivariada para una dimensión menor o igual a cinco. Este autor es el primero en reportar la estimación de un miembro de la familia GH para una dimensión mayor a tres. Específicamente, (Protassov, 2004) calibra la distribución de probabilidad multivariada Gaussiana Inversa Normal para los rendimientos de cinco diferentes tipos de cambio de la OCDE. No obstante, no presenta una prueba formal para valorar la bondad de ajuste, lo cual es señalado en (Hu, 2005).

En este artículo se presentan dos pruebas de bondad de ajuste: la clásica prueba de Kolmogorov-Smirnov y la de (McAssey, 2013), para subsanar la observación realizada por (Hu, 2005). Además es importante señalar que para diversas aplicaciones como el impacto de la volatilidad del tipo de cambio sobre los flujos comerciales, análisis de la media-varianza, o eficiencia del mercado de tipo de cambio, la incertidumbre asociada a las variaciones del tipo de cambio debe medirse de una mejor manera, de ahí que necesitemos una propuesta de distribución de probabilidad —como la que en este trabajo se expone— que se aproxime mejor a la naturaleza de los datos.

El artículo está dividido en tres secciones, en la primera revisamos algunos de los principales trabajos previos alrededor de la estimación de la distribución de las variaciones del tipo de cambio, en la segunda se muestra el análisis de datos, y en la tercera las conclusiones.

1. Tipo de cambio, revisión bibliográfica

El tipo de cambio es una posible fuente de riesgo en diversos portafolios de inversión, así que la valoración de diferentes estrategias de inversión es una actividad apremiante. De la misma manera, es importante profundizar en el entendimiento de la dinámica de los mercados especulativos. En este sentido, el análisis de la distribución de probabilidad de las variaciones de diferentes tipos de cambio, constituye un complemento para concretar medidas para la administración del riesgo de distintos portafolios.

Al día de hoy es aceptado que la distribución de probabilidad de las variaciones en el tipo de cambio no es normal. Diversos estudios proponen distribuciones leptocúrticas como en (Friedman, 1982), quienes centran su trabajo primero en el estudio de la medida de la leptocurtosis reflejada en los datos, con una técnica basada en (Cleveland, 1975), y segundo en la justificación de la hipótesis de variación de parámetros con distribuciones normales sosteniendo el argumento de simetría, (aunque el sesgo calculado por los autores indica asimetría, se atribuye a eventos importantes como una intervención de Fed en un día de *trading*, y no como una característica intrínseca de la datos).

Por otro lado, en (Boothe, 1987) se indica que la distribución t-Student y la mezcla de dos normales son las mejores candidatas para modelar las variaciones diarias del tipo de cambio, calculando los parámetros a través de máxima verosimilitud. La distribución de Pareto estable simétrica es eliminada en dicho estudio usando las pruebas del radio de verosimilitud y la prueba ji-cuadrada de bondad de ajuste. Además,un inconveniente importante de tomar ésta distribución se encuentra en la parte empírica, pues en aplicaciones como el enfoque media-varianza se requiere de la existencia del segundo momento.Ésta distribución no tiene momentos de orden mayor o igual a dos. También, si la distribución de los errores en regresiones involucrando el tipo de cambio es una mezcla de normales, es conocido que se puede trabajar con la heteroscedasticidad y si la distribución de esos errores es t de Student, entonces se puede seguir considerando las pruebas t y F como válidas.

Otros estudios como el de (McFarland, 1982) confirman el rechazo de que una distribución estable normal o no normal describa las variaciones del tipo de cambio diarias, aunque para el análisis de datos por día de la semana sí pueden concluir la anterior. Para datos semanales, concluyen que un ajuste razonable es dado por una distribución estable no normal.

Más recientemente, como ya se mencionó, (Protassov, 2004) implementó una modificación del algoritmo EM y ajustó la distribución multivariada NIG para cinco tipos de cambio, con una parametrización especial pero sin una prueba de bondad de ajuste.

La diversificación de los portafolios de inversión es un punto relevante para alcanzar altos rendimientos. Sin embargo, no es menos importante la distribución de probabilidad, ya que permite la medición y control de riesgo, (Prause, 1999). En este punto, resulta conveniente comentar que los eventos extremos con alta probabilidad de ocurrencia no son capturados por las colas de la distribución normal, así que se justifica el estudio de los rendimientos mediante una distribución de probabilidad distinta.

2. *Análisis de datos*

2.1 Rendimiento

En este documento se presenta evidencia estadística sobre la distribución de probabilidad univariada de las variaciones diarias de cuatro distintas series de tipo de cambio para el periodo 2000-2014. La periodicidad de los datos es diaria y la fuente de información son las cifras reportadas por Bloomberg. En cada caso y para cada tipo de cambio se realiza el procedimiento de estimación sin restricción en el parámetro de la función de Bessel de tercer orden, pues cada uno de los rendimientos de los tipos de cambio pueden mostrar diferentes características según el sesgo y la curtosis existente, (Protassov, 2004).

Los rendimientos diarios de las distintas series de variaciones del tipo de cambio se han calculado bajo un enfoque continuo:

$$r_{it} = \ln(p_{i,t}) - \ln(p_{i,t-1}) \tag{2.1}$$

donde $i = 1, \dots, 4$ son los tipos de cambio del euro, la libra esterlina, el dólar canadiense y el yen japonés con respecto al dólar americano. La variable de tiempo abarca los días durante los años 2000-2014. Bajo esta notación se tiene que;

$p_{i,t}$ precio diario reportado por Bloomberg de la serie de tiempo i en el tiempo t,

$r_{i,t} =$ variación diaria (rendimiento) de la serie de tiempo i en el tiempo t.

La media μ, la desviación estándar σ, el sesgo y la curtosis son parámetros descriptivos del comportamiento de la serie de rendimientos. El sesgo caracteriza la asimetría de una distribución de probabilidad mientras que la curtosis mide la picudez relativa, ambos parámetros son relevantes para evaluar la normalidad de una serie de datos, (Cont, 2001). Si los rendimientos están muy concentrados alrededor de la media, la distribución de probabilidad se dice leptocúrtica y si los rendimientos presentan una alta dispersión, se dice platicúrtica. En cualquiera de ambos casos las colas de probabilidad son diferentes al caso normal y dan cuenta de eventos poco comunes con altos valores de probabilidad.

2.2 Distribución hiperbólica generalizada

Para estimar la distribución de probabilidad empírica de los rendimientos diarios de los tipos de cambio se emplea una función de densidad versátil, (Paolella, 2007), la cual ha sido útil en diferentes campos de las finanzas. La distribución de probabilidad utilizada es la hiperbólica generalizada (GH) cuyos parámetros permiten una especificación altamente flexible, (Eberlein, 1995).

El rango de variación de los parámetros de GH es sumamente amplio, aunque sobresalen el caso Hiperbólico (λ=1) y el caso Gaussiano Inverso Normal (λ=-1/2), (Paolella, 2007). Esta familia de funciones resuelve teóricamente diferentes problemas en el área de administración de riesgos, aunque se requieren procedimientos numéricos más complicados para el caso multivariado, (Mata, 2013).

En el Cuadro 1 se presentan algunos de los miembros de la familia GH, donde sobresale la función de densidad Gaussiana Inversa Normal, pues se ha empleado en diferentes contextos financieros exitósamente.

Cuadro 1. Familia hiperbólica generalizada

Nombre	Rango de parámetros			
Varianza Gamma	$\lambda>0$	$\alpha>0$	$\lvert\beta\rvert<\alpha$	$\delta=0$
Laplace asimétrica	$\lambda=1$	$\alpha>0$	$\lvert\beta\rvert<\alpha$	$\delta=0$
t asimétrica hiperbólica	$\lambda<0$	$\alpha=\beta$	$\beta\geq 0$	$\delta>0$
Gaussiana inversa normal	$\lambda=-1/2$	$\alpha>0$	$\lvert\beta\rvert<\alpha$	$\delta>0$

Fuente: Elaboración propia.

El parámetro más representativo y que determina la forma de la distribución es λ, de ahí que la función de Bessel modificada de tercer orden sea altamente relevante, ya que determina a los elementos de la familia de densidad hiperbólica generalizada.

En este documento se propone la familia GH para analizar algunos de los rendimientos diarios de los tipos de cambio, pues existe evidencia de no-normalidad en diferentes países y contextos, (Prause, 1999). En el caso del mercado accionario mexicano, (Trejo, 2006) muestra que la función Gaussiana Inversa Normal ajusta exitósamente para rendimientos en precios de acciones.

La distribución de probabilidad univariada GH, (Paolella, 2007), presenta la especificación usual:

$$f_{GH}(x;\mu,\alpha,\delta,\beta,\lambda)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-\frac{1}{2}}\delta^{\lambda}K_{\lambda}(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})} \quad (2.2)$$

$$K_{\lambda-\frac{1}{2}}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})\exp(\beta(x-\mu))$$

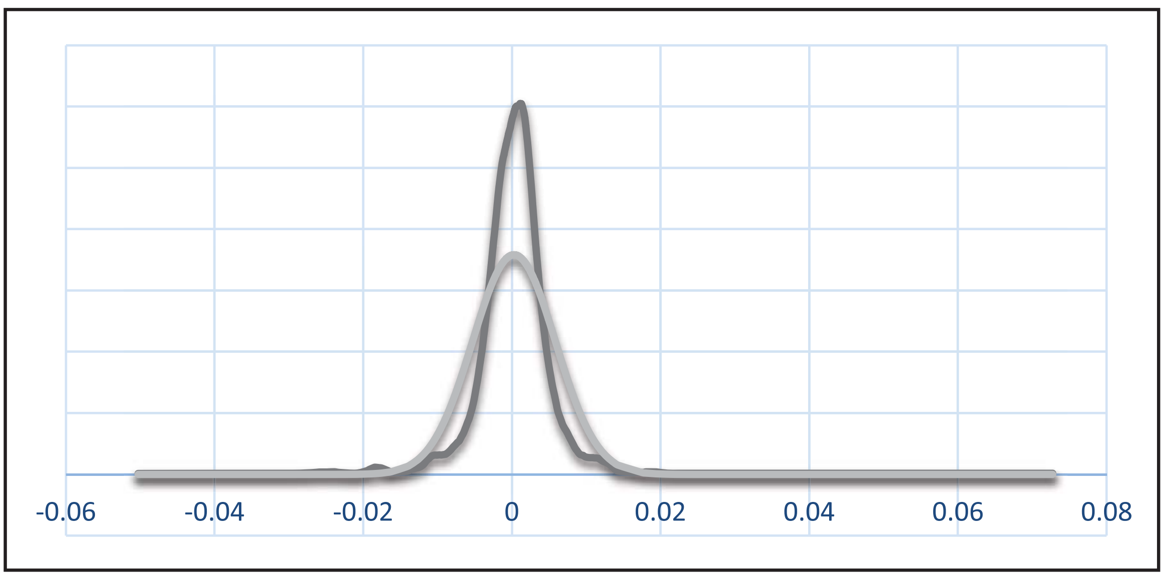
donde K_v es la función modificada de Bessel de tercer orden,

$$K_v(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty w^{v-1}\exp(\left[-\frac{1}{2}x(w+w^{-1})\right] dw \qquad (2.3)$$

para valores positivos de la variable x, (Abramowitz, 1972).

El procedimiento de estimación trata directamente con máxima verosimilitud para hallar el conjunto de parámetros $\Theta = (\lambda, \alpha, \delta, \beta, \mu)$. Este procedimiento se repite para cada una de las series de tipo de cambio. Posteriormente se realizan tanto la prueba de Kolmogorov como la prueba de (McAssey, 2013) para valorar la bondad de ajuste. En la Figura 1, se presenta una curva representativa de la familia GH, la curva más elevada es Gaussiana Inversa Normal y la curva inferior consta de la distribución normal. El contraste entre estas dos funciones de densidad de probabilidad permite establecer afirmaciones robustas en relación a la existencia o ausencia de sesgo, colas pesadas y alta curtosis.

Figura 1. Distribución Hiperbólica Generalizada para $\lambda = -1/2$ y normal



Fuente: Elaboración propia.

2.3 Bondad de ajuste

La prueba de Kolmogorov, (Johnson, 2007), es una prueba de hipótesis que permite verificar si una distribución de probabilidad específica se ajusta a los datos observados. La hipótesis base afirma que la distribución de probabilidad propuesta es adecuada, de esa forma, el rechazo de la hipótesis base constituye evidencia a favor de la distribución de probabilidad que se haya propuesto para el conjunto de observaciones.

El estadístico de prueba de cola derecha se define como:

$$D_n^+ = máx\{F_n(x) - F(x)\} \tag{2.4}$$

mientras que el estadístico de prueba de cola izquierda está dado por

$$D_n^- = máx\{F(x) - F_n(x)\} \tag{2.5}$$

Bajo este contexto la distribución empírica, $F_n(x)$, según la muestra es

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i) \tag{2.6}$$

donde $I(x_i)$ es una función indicadora sobre los valores menores o iguales que x_i.

En este trabajo, $F(x)$ es la distribución de probabilidad hiperbólica generalizada, así que la prueba de Kolmogorov permite encontrar evidencia a favor o en contra de las estimaciones realizadas. A modo de contraste se realiza también la prueba de (McAssey, 2013) bajo un contexto univariado. El punto es mostrar evidencia para la bondad de ajuste mediante dos pruebas diferentes.

Análogamente, para verificar la presencia de normalidad en las series de tiempo de los rendimientos se emplea la prueba de normalidad de Jarque-Bera, donde el estadístico de prueba es,

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right) \tag{2.7}$$

donde n es el número de variables, S es el sesgo y K la curtosis muestral. El estadístico JB tiene una distribución ji-cuadrado asintótica con dos grados de libertad. Concretamente, la hipótesis base asume que la asimetría y el exceso de curtosis son cero, pues una variable aleatoria normal presenta esas características, (Enders, 2009).

En este sentido, también se presenta la prueba Anderson-Darling, (Jhonson, 2007). Esta prueba de hipótesis no paramétrica permite verificar si los datos de una muestra provienen de una población específica, en este caso la normal. El estadístico de prueba es,

$$A^2 = -N - S \tag{2.8}$$

donde:

$$S = \sum_{j=1}^{N} \frac{2k-1}{N} [\ln(F(X_k) + \ln(1 - F(X_{N+1-k}))] \tag{2.9}$$

sobre las observaciones ordenadas $\{X_1 < X_2 < \cdots < X_N\}$ y bajo la distribución de probabilidad acumulada que se haya propuesto. En este trabajo la prueba Anderson-Darling nos permite hallar, como veremos, evidencia de no normalidad.

Para realizar la prueba de (McAssey, 2013) se simula una muestra aleatoria $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iN}$ bajo los parámetros encontrados por máxima verosimilitud para cada una de las variaciones del tipo de cambio $i = 1,2,..,5$ Las respectivas muestras aleatorias se generan mediante los algoritmos descritos en (Kinderman, 1977) y (Dagpunar, 1989). Ambos procedimientos consideran que si se tiene una variable aleatoria X de la familia GH, se cumple que

$$X|W \sim N(\mu + w\beta\delta, w\delta) \tag{2.10}$$

siendo $W \sim GIG(\lambda, \chi, \varphi)$. Posteriormente se calcula la distancia de Mahalanobis definida, (Mahalanobis, 1936) como

$$\widehat{d_\iota} = \sqrt{(\widehat{u_\iota} - \hat{\mu})^2 \hat{\sigma}^{-2}} \tag{2.11}$$

Luego para cada $t \in (0{,}2 m\acute{a}x\{\widehat{d_\iota}\})$ se calcula

$$\widehat{g_N}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(\widehat{d_\iota} \leq t) \qquad (2.12)$$

Después se elige una partición $\{p_j\}$ en el intervalo cero-uno tal que el punto inicial sea cero y el punto final sea igual a uno. De esta forma se calcula $q_j = m\acute{\imath}n\{t \in \mathbb{R} | \widehat{g_N}(t) \geq p_j\}$ para cada elemento de la partición $\{p_j\}$, (McAssey, 2013).

Finalmente se estima el estadístico de prueba,

$$a = \sum_j \left| \frac{N(p_j - p_{j-1})}{O_j} - 1 \right| \qquad (2.13)$$

donde O_j es el número de observaciones $\widehat{d_\iota}$ en el intervalo $(q_{j-1}, q_j]$. Repitiendo el procedimiento m veces se obtiene una muestra $a_1, a_2, \dots, a_m$ que permite estimar un valor de probabilidad para rechazar o no rechazar la hipótesis nula bajo algún nivel de significancia, (McAssey, 2013).

2.4 Estacionariedad

Un aspecto relevante que debe cuidarse también para estimar la distribución de probabilidad empírica sobre los rendimientos diarios de los tipos de cambio es el concepto de estacionariedad. Si una serie de tiempo es estacionaria estrictamente se puede garantizar directamente la existencia de una distribución de probabilidad estable a lo largo del tiempo para el conjunto de datos, (Hamilton, 1994). En el caso de estacionariedad en el sentido débil, se tendría evidencia de parámetros en media, varianza y covarianza estables, lo cual da cuenta de una distribución de probabilidad empírica subyacente y estable, (Enders, 2009).

En este documento se aplica la prueba de Dickey-Fuller aumentada para verificar la estacionariedad de cada una de las series de tiempo. La hipótesis nula es que existe raíz unitaria (no estacionariedad), así que el rechazo de la hipótesis nula bajo diferentes especificaciones, (Hamilton, 1994), arroja evidencia sobre no estacionariedad del conjunto de datos.

En términos generales, la especificación que se sigue para realizar la prueba aumentada de Dickey-Fuller sobre y_t consta de la expresión:

$$\Delta y_{t-1} = \mu + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \delta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \qquad (2.14)$$

siendo que la hipótesis nula es $H_0: \gamma = 0$.

2.5 Estimaciones y resultados

En esta sección se presenta la estimación de los parámetros que caracterizan a la distribución hiperbólica generalizada para las diferentes series de rendimientos de los tipos de cambio. En el Cuadro 2 se reportan los estadísticos descriptivos para los distintos conjuntos de información entre enero de 2000 y septiembre de 2014. En este conjunto de estimaciones sobresalen las prueba de normalidad Jarque-Bera, Kolmogorov y Anderson-Darling, (Enders, 2009) donde la hipótesis nula afirma que la serie de tiempo sigue una distribución normal.

En cada caso, se rechaza la hipótesis base y existe evidencia para afirmar que las series de tiempo de los rendimientos de los diferentes tipos de cambio no se comportan según una distribución normal.

Cuadro 2. Estadísticos descriptivos de los tipos de cambio

	GBP	EUR	CAD	JPY
Media	-0.000005	0.000047	0.000067	-0.000022
Mediana	0.000068	0.000077	0.000099	0.000000
Máximo	0.029252	0.034654	0.039981	0.035038
Mínimo	-0.034715	-0.025218	-0.032540	-0.055042
Desviación estándar	0.005612	0.006344	0.005731	0.006404
Sesgo	-0.281615	0.043330	-0.155133	-0.027521
Curtosis	5.414564	4.371458	6.224015	6.809034
Jarque-Bera	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Anderson-Darling	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Kolmogorov	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fuente: Elaboración propia.

Si se aplica la prueba de hipótesis de raíz unitaria a cada una de las series de rendimientos, Cuadro 3, se puede observar que bajo un nivel de significancia menor a 5%, las series de datos de los rendimientos diarios provienen de poblaciones estacionarias. En este caso el Cuadro 3 presenta tres pruebas de hipótesis factibles: Dickey-Fuller, Phillips-Perron y Kwiatkowski, (Enders, 2009).

En el caso de las dos primeras pruebas, la hipótesis nula es que la serie de tiempo tiene raíz unitaria, y en el último caso que la serie de tiempo es estacionaria. Estos resultados señalan que la media, la varianza y las covarianzas respectivas son estables a lo largo del periodo 2000-2014.

Cuadro 3. Prueba de raíz unitaria para los tipos de cambio 2000-2014

Tipo de cambio	**DickeyFuller Aumentada**	**Phillips-Perron**	**Kwiatkowski-Phillips -Schmidt-Shin**
GBP	0.0001	0.0001	0.1090
EUR	0.0001	0.0001	0.1336
CAD	0.0001	0.0001	0.1635
JPY	0.0001	0.0001	0.2043

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro 4 se presentan los parámetros estimados para la distribución de probabilidad Normal Inversa Gaussiana (NIG), se puede apreciar que existe evidencia estadística para afirmar que las variaciones del tipo de cambio diarios no siguen una distribución normal, ya que el valor de probabilidad es menor a un nivel de significancia de 1% para los cinco tipos de cambio.

Más aún, el ajuste de la función de densidad de probabilidad NIG resulta significativo a un nivel superior a 10% para cada uno de los rendimientos diarios. La distribución de probabilidad NIG se ajusta razonablemente, con al menos un nivel de confianza del 90%. Esta afirmación es correcta tanto por la prueba de Kolmogorov como para la prueba de (McAssey, 2013), de tal manera que la distribución de las variaciones del tipo de cambio no son normales, ver las últimas dos columnas del cuadro 4.

En relación a los parámetros estimados, es una medida de la dispersión que tiene el rendimiento diario alrededor de su media. En tanto que el parámetro captura la asimetría existente en la distribución de probabilidad. En un caso extremo, si alcanza el valor de cero, entonces la media coincide con la mediana y la función de densidad de probabilidad es simétrica alrededor de su valor esperado. En particular para el caso de los rendimientos diarios de los tipos de cambio, la simetría de la distribución es relevante, ya que el peso de la cola izquierda de la función de densidad de probabilidad, indicaría la pérdida potencial atribuible a eventos poco comunes pero con peso sustancial en la distribución de probabilidad.

En el Cuadro 4 se puede observar que el coeficiente de sesgo es negativo para algunos casos, así que existe evidencia de asimetría en la distribución poblacional de los rendimientos. Asimismo, los valores elevados del parámetro α, constituyen una señal de alta curtosis en los cinco tipos de cambio (variaciones).

Cuadro 4. Estimación de la distribución de probabilidad NIG

Tipo de cambio	Parámetros estimados según la familia GH				Probabilidad	
	μ	δ	α	β	Kolmogorov	McAssey
GBP	0.00036	0.00667	213.24500	-11.69874	0.97310	0.21250
EUR	0.00018	0.00788	193.95870	-3.31690	0.53770	0.78971
CAD	0.00025	0.00555	169.91600	-5.49733	0.85970	0.78971
JPY	-0.00013	0.00669	164.66340	2.66094	0.73420	0.22521

Fuente: Elaboración propia.

Los cuatro rendimientos de los tipos de cambio muestran en promedio un rendimiento diario cercano a cero con una dispersión del orden de 0.007 unidades. Se puede ver también que existe sesgo hacia la izquierda y elevada curtosis.

En este trabajo se ha encontrado evidencia de la ausencia de normalidad en los rendimientos de los diferentes tipos de cambio. Este hallazgo implica que la probabilidad de pérdidas potenciales es superior a la probabilidad asumida bajo la normal, lo cual apunta a que se subestime el riesgo de estas pérdidas. En resumen, el punto es emplear en las sugerencias de administración del riesgo de los portafolios, la distribución de probabilidad que mejor se adapte al comportamiento observado en los datos, es decir, a los rendimientos diarios calculados de cada una de las series de tipo de cambio.

Conclusiones

En este trabajo se estima la distribución hiperbólica generalizada univariada para ajustar los rendimientos diarios de las variaciones de cuatro tipos de cambio de la OCDE. Se encuentra evidencia de un ajuste razonable por parte de la distribución univariada Normal Inversa Gaussiana, mediante la prueba clásica de Kolmogorov y una prueba reciente para distribuciones continuas. En cada caso el nivel de significancia es menor a 10%, lo cual nos habla de un ajuste razonable con respecto a la distribución empírica de los rendimientos diarios.

La función de densidad de probabilidad que se ha encontrado captura en cada caso, distintos hechos estilizados de las series financieras. El valor esperado, la varianza, el sesgo y la curtosis que se caracterizan mediante los parámetros estimados de la distribución hiperbólica generalizada señalan claramente colas pesadas y la alta curtosis en los rendimientos diarios de los tipos de cambio.

Este hallazgo nos dice que los rendimientos de los tipos de cambio no siguen una distribución normal, lo cual nos proporciona herramientas para trabajar en diversas aplicaciones como las ya mencionadas de mejor manera. En otras palabras, la no incorporación de la distribución de probabilidad adecuada puede subestimar el riesgo existente, lo cual en momentos de crisis puede resultar en catástrofes en el mundo financiero internacional. El conocimiento de una distribución paramétrica permite por un lado conocer mejor la naturaleza intrínseca de los datos lo cual se puede aplicar empíricamente e incluso puede tener consecuencias teóricas, pues diversas discusiones incluyen supuestos sobre la naturaleza estadística de los datos. Por otro lado, se tiene la oportunidad generar simulaciones que nos permitan valuar instrumentos derivados que dependan de un subyacente con esta distribución, así como escenarios para diversas aplicaciones.

Bibliografía

Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions.* (1a. Ed.), New York, USA: Dover.

Barndorff-Nielsen, O.E. (1977). "Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of the Particle Size". *Proceedings of the Royal Society, Mathematical and Physical Sciences.* London, serie A, 353, pp. 401-419.

Blæsild, P. and Sørensen, M. (1992). *Hyp-a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution.* (*Research Report* 248, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus).

Boothe P. and Glassman D. (1987). "The Statistical Distribution of Exchange Rates". *Journal of International Economics* 2 (1), pp. 297-319.

Cleveland, W. and Kleiner B. (1975). "A Graphical Technique for Enhancing Scatterplots with Moving Statistics". *Technometrics* 17 (1), pp. 447-454.

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 1 (1), pp. 223–236.

Dagpunar, J. S. (1989). "An Easily Implemented Generalized Inverse Gaussian Generator". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 18 (2), pp. 703-710.

Eberlein E. and Keller U. (1995). "Hyperbolic distributions in finance". *Bernoulli*, 12 (1), pp. 281-299.

Enders, W. (2009*). Applied Econometric Time Series.* (1a. Ed.). New York, USA: Wiley.

Friedman D. and Vanderstel S. (1982). "Short-Run Fluctuations in Foreign Exchange Rates". *Journal of International Economics* 13, pp. 171-186.

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis.* (1a. Ed.). New York, USA: Princeton University Press.

Hu, W. (2005). *Calibration of multivariate generalized hyperbolic distributions using the EM algoritm, with applications in risk management, portfolio optimization and portfolio credit risk.* (Phd Theses, The Florida State University).

Johnson, R. y Wichern, D. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis.* (1a. Ed.). New York, USA: Pearson.

Kinderman, A. J. (1977). Computer Generation of Random Variables Using the Ratio of Uniform Deviates. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 38 (2), pp. 257-260.

Mahalanobis, P.C. (1936). "On the Generalized Distance in Statistics". *Proceedings of the National Institute of Science of India*, 12, pp. 49-55.

Mata, L. (2013). *Estudio de la distribución hiperbólica generalizada multivariada: aspectos teóricos y numéricos para aplicaciones financieras.* (Tesis de doctorado, EGADE Business School, México).

McAssey, M. P. (2013). "An Empirical Goodness-of-fit Test for Multivariate Distributions". *Journal of Applied Statistics* 40 (5), pp. 1120-1131.

McFarland J., Richardson Pettit R and Sung K.S. (1982). "The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement". *The Journal of Finance* 37 (3), pp. 693-715.

Paolella, M. S. (2007). *Intermediate Probability.* (1a. Ed.). West Sussex, England: John Wiley & Sons.

Prause, K. (1999). *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures.* (PhD thesis, University of Freiburg).

Protassov, R. (2004). "EM-based maximum likelihood parameter estimation for multivariate generalized hyperbolic distributions with λ fixed". *Statistics and Computing* 14 (1), pp. 67-77.

Rydberg T. (1999). "Generalized Hyperbolic Diffusion Processes with Applications in Finance". *Mathematical Finance* 9 (2), pp. 183–201.

Trejo B., Núñez José A. y Lorenzo A. (2006). "Distribución de los rendimientos del mercado mexicano accionario". *Estudios Económicos* 21 (1), pp. 85-118.