

# Análisis, aplicación y comparación de tres métodos estadísticos en la estimación del VaR y el EVaR

Analysis, application and comparison of three statistical methods for the estimation of VaR and EVaR

---

Jaime Iván Urbina Rugeiro\*  
Gabriel Núñez Antonio\*  
Patricia Saavedra Barrera\*

Fecha de recepción: 24 de mayo de 2015  
Fecha de aceptación: 5 de octubre de 2015

---

\* Departamento de Matemáticas,  
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,  
Cd. de México, México,  
jaimivan@yahoo.com,  
gabnunez@xanum.uam.mx,  
psb@xanum.uam.mx

## RESUMEN

En el área de análisis financiero, medidas como el Valor en riesgo, el VaR, y el Valor en riesgo extremo, el EVaR, son medidas comúnmente aceptadas para evaluar el riesgo en portafolios de inversión. En este trabajo se analizan los métodos de varianza-covarianza, el método histórico y el método de picos sobre el umbral en términos de su pertinencia en la estimación del VaR y EVaR. Se propone una forma de estimar puntualmente y por intervalos el VaR y EVaR usando cada uno de los métodos señalados, en el contexto particular de portafolios de inversión. Los procedimientos propuestos son desarrollados poniendo énfasis en su correcta aplicación, en términos de los supuestos técnicos que los validan. El desempeño de las metodologías propuestas se ilustran con datos simulados de un portafolio de inversión, así como en portafolios de acciones del sector de la construcción.

Clasificación JEL: C1, G11.

**Palabras clave:** Estimación por intervalos, intervalos Bootstrap, método de picos sobre el umbral, método de corridas.

## ABSTRACT

*In Finance, indicators such as Value at Risk, called VaR, and Value at Extreme Risk, EVaR, are commonly accepted to assess risk in investment portfolios. In this paper variance-covariance, historical and the peak on the threshold methods are analyzed in terms of their applicability to estimate VaR and EVaR. In addition, punctual and interval estimations under those methods are carried out. The procedures are reviewed under the specific context of investment portfolios. Special care was taken on the correct application of the proposed procedures in terms of their underlying technical assumptions. Their performance is illustrated using a simulated investment portfolio, and a real stock portfolio related to the construction sector in Mexico.*

*JEL Classification: C1, G11.*

**Keywords:** *Interval estimation, Bootstrap methods for interval estimation, threshold exceedances, runs method.*

## Introducción

**A** lo largo del tiempo los inversionistas han colocado su capital en diferentes instrumentos de inversión, con el fin de obtener mayores ganancias en una fecha futura. En algunos casos en el momento en que determinan en cuáles activos invertir, desconocen cuál será su valor futuro, y por ende, la ganancia correspondiente. Algunos ejemplos de instrumentos de inversión son las acciones, los bonos, los bienes y los derivados, entre otros. En la mayoría de los casos, los valores de los instrumentos cambian a través del tiempo y siguen un comportamiento aleatorio debido a que sus variaciones son inciertas. Todo instrumento cuyo comportamiento es aleatorio tiene un riesgo asociado. El riesgo, desde el punto de vista financiero, se define como la exposición ante posibles eventos que impactan de manera adversa en la inversión de un individuo. Existen varios tipos de riesgo tales como el de mercado, el de crédito y el de liquidez, entre otros. En este trabajo se analiza el riesgo de mercado, el cual consiste en el riesgo que conllevan las variaciones de los precios de los activos financieros.

Algunas propuestas, existentes en la literatura, para medir el riesgo son la volatilidad de un portafolio, introducida por primera vez por Harry Markowitz en 1952, (Markowitz, 1952), el coeficiente *beta*, el cual se utiliza en el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM) desarrollado por Sharpe, Lintner y Mossin, ver (Sharpe, 1964), (Mossin, 1966) y (Lintner, 1965), respectivamente. Otras medidas de riesgo, las cuales utilizan la distribución de las pérdidas del portafolio, son el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Extremo o Condicionado (EVaR). El VaR nació a finales del siglo pasado y es una medida de riesgo que por su sencillez es muy popular en el sistema financiero. El VaR tiene varias propiedades atractivas, entre ellas: se puede aplicar a cualquier portafolio sin importar su composición; toma en cuenta las correlaciones en los cambios de los precios de los activos del portafolio, el riesgo se representa mediante un sólo número y es fácil de calcular. Sin embargo, tiene sus inconvenientes, entre los que se encuentra no tener la propiedad de subaditividad, que viola el principio de diversificación en finanzas, por lo que no es una medida de riesgo coherente. Debido a esta limitación, se propone usar al EVaR que es una medida coherente y por ende, más confiable desde el punto de vista financiero. Cabe mencionar que

la volatilidad de un portafolio y el coeficiente *beta* tampoco son medidas coherentes, (McNeil *et al.*, 2005).

En el presente trabajo se aplican a varios portafolios de inversión distintos métodos para estimar el VaR y el EVaR. El de varianza-covarianza que supone rendimientos que siguen una distribución Normal. Otros, que trabajan directamente con las pérdidas del portafolio sin suponer distribución alguna, como son el método histórico y el de picos sobre el umbral (POT). Este último usa la teoría de valores extremos que permite estimar de mejor manera la probabilidad de ocurrencia de pérdidas excesivamente grandes.

El objetivo general del presente trabajo es analizar, comparar y aplicar los métodos de varianza-covarianza, histórico y de picos sobre el umbral, en la estimación del VaR y EVaR asociados a datos financieros. Lo anterior poniendo especial atención al cumplimiento de los supuestos teóricos asociados a cada método. Particularmente, se muestra cómo obtener estimaciones puntuales y por intervalos de confianza.

El contenido del presente artículo es el siguiente. En la Sección 1 se presentan el cálculo de la pérdida en el valor de un portafolio de inversión, se introducen las definiciones del VaR y el EVaR, se explican las metodologías utilizadas en este trabajo para estimar puntualmente estas medidas de riesgo y los procedimientos para generar los correspondientes intervalos de confianza. En la Sección 2 se muestran los resultados obtenidos cuando se estiman el VaR y EVaR de un portafolio de acciones con distintas estrategias de inversión. Por último, en la Sección 3 se ofrecen las conclusiones correspondientes.

## 1. Definiciones y métodos para estimar el VaR y EVaR

### 1.1. La función de pérdida

A continuación se explica cómo calcular la pérdida en el valor de un portafolio de inversión. Se asume que en el tiempo  $t$  se conoce el valor del instrumento financiero  $i$ , denotado por  $P_i^t$ , desde  $i = 1, \dots, n$ . Además, sea  $m_i P_i^t$  el monto que se invierte en el instrumento  $i$ . Se asume que la composición del portafolio permanece fija en el tiempo. En el tiempo  $t$  se desconocen los precios de los instrumentos financieros correspondientes al tiempo  $t + 1$ . Así el valor del portafolio al tiempo  $t$ ,  $V_t$ , y su pérdida al tiempo  $t + 1$ ,  $L_{t+1}$ , se calculan respectivamente como:

$$V_t = \sum_{i=1}^n m_i P_i^t. \quad (1)$$

$$L_{t+1} = - (V_{t+1} - V_t). \quad (2)$$

Cabe resaltar que si los precios de los instrumentos financieros  $P_i^{t+1}$  son aleatorios, entonces  $V_{t+1}$  y  $L_{t+1}$  también son variables aleatorias. Por lo general, la distribución de probabilidad de estas variables se desconoce.

## 1.2. Valor en Riesgo y Valor en Riesgo Extremo

El Valor en Riesgo es la pérdida más grande que se obtiene de un portafolio de inversión para un nivel de confianza  $1 - \alpha$  y en un horizonte de tiempo dado. Es decir, el VaR es un cuantil asociado a la distribución de la pérdida. Su expresión matemática está dada por

$$VaR_\alpha = \inf \{k_\alpha \mid P(L \leq k_\alpha) \geq 1 - \alpha\}. \quad (3)$$

Por otro lado, el Valor en Riesgo Extremo o Condicionado se define como la pérdida esperada que se puede obtener del portafolio de inversión dado que ésta excedió el VaR. Su expresión matemática está dada por

$$EVaR_\alpha = E [L \mid L > VaR_\alpha]. \quad (4)$$

Existen modelos, tanto paramétricos como no paramétricos, para estimar el VaR y el EVaR. En los primeros, se asume que la pérdida se modela mediante una distribución de probabilidad específica. En los modelos no paramétricos sólo se considera que la distribución de probabilidad que describe el comportamiento de la pérdida es alguna dentro de una familia  $F$  de distribuciones.

## 1.3. Métodos para estimar puntualmente el VaR y el EVaR

### Aproximación varianza-covarianza

El procedimiento de varianza-covarianza asume que la distribución de las pérdidas  $L$ , en el valor del portafolio, es normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .

En la práctica, los parámetros se desconocen por lo que se estiman con datos históricos. Con base en este supuesto, el VaR se define como el cuantil de orden  $1 - \alpha$  de una distribución Normal, y se estima por

$$\widehat{VaR}_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\hat{\sigma} + \hat{\mu}, \quad (5)$$

y el EVaR como

$$\widehat{EVaR}_\alpha = \frac{\hat{E}[L \ I_{[L > VaR_\alpha]}]}{\alpha}, \quad (6)$$

donde  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución acumulada de una Normal estándar. El supuesto de normalidad no se cumple en general puesto que las pérdidas exhiben colas pesadas, ver las gráficas que se presentan en la Sección 2. De hecho, el procedimiento de varianza-covarianza subestima el VaR y el EVaR, (McNeil *et al.*, 2005).

### Método histórico

En el método histórico se selecciona una muestra de los cambios en los factores de riesgo sobre un periodo de tiempo dado y se evalúa el operador de pérdida para cada elemento de la muestra. Después, con la distribución empírica de la pérdida del portafolio se calculan el VaR y el EVaR. Así, si  $L_1, \dots, L_n$  es una muestra de datos históricos de las pérdidas en el valor del portafolio, el VaR y el EVaR al nivel  $1 - \alpha$  se estiman, respectivamente, como

$$\widehat{VaR}_\alpha = \hat{F}^{-1}(1 - \alpha), \quad (7)$$

$$\widehat{EVaR}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n L_i \ I_{[L_i > VaR_\alpha]}}{\sum_{j=1}^n I_{[L_j > VaR_\alpha]}}$$

donde  $\hat{F}$  es la función de distribución empírica de las pérdidas. El mayor atractivo de este método es que es completamente no paramétrico, es decir, no se asume ninguna distribución específica de la pérdida. Sin embargo, la variabilidad de los estimadores depende de la muestra que se obtenga. Es por ello que una estimación puntual no es suficiente. Este procedimiento se puede complementar mediante métodos de remuestreo como los de Bootstrap con los cuales se pueden calcular intervalos de confianza para el VaR y el EVaR a partir de la muestra de datos. El inconveniente de este método reside en su dependencia muestral. En consecuencia, genera únicamente escenarios que ocurrieron en el pasado, lo que es un problema en el área de finanzas donde lo importante es prever las expectativas futuras del mercado, (McNeil, *et al.*, 2005) y (Crouhy, *et al.*, 2001).

#### Método de picos sobre el umbral (POT)

En contraste con la aproximación varianza-covarianza y el método histórico, el método POT modela únicamente la distribución de la pérdida a partir de un valor  $u$  definido como umbral, es decir, se enfoca en la cola derecha de la distribución. El método asume una distribución de los excedentes o excesos. Los excedentes son aquellos valores de la pérdida que exceden el umbral  $u$  y el exceso es la diferencia entre el excedente y el umbral. Este método se fundamenta en el Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan, (Pickands, 1971) y (Balkema y de Haan, 1974).

#### Teorema (Pickands-Balkema-de-Haan)

Para una función de distribución  $F$  y un umbral  $u$  se puede encontrar una función positiva medible  $\beta(u)$  tal que:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup |F_u(y) - G_{\varepsilon, \beta(u)}(y)| = 0, \quad (8)$$

si y sólo si  $F$  está en el máximo dominio de atracción de una función de distribución del valor extremo generalizado  $H_\varepsilon$ , ver McNeil *et al.*, (2005).

Es decir, conforme el umbral se aproxime al punto final derecho  $x_F$ , los excesos convergen, en distribución, a una Distribución Pareto Generalizada (GPD)  $G_{\varepsilon, \beta(u)}(y)$  definida por:

$$G_{\varepsilon, \beta(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \varepsilon \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \varepsilon \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (9)$$

donde  $y \geq 0$  si  $\varepsilon \geq 0$  y si  $\varepsilon < 0$  y  $0 \leq y \leq -\frac{\beta}{\varepsilon}$  en ambos casos  $\beta > 0$ .

Con frecuencia los parámetros se desconocen y deben estimarse por algún procedimiento, por ejemplo, por máxima verosimilitud. Por lo general, se asume que los parámetros se estiman a través de una muestra de observaciones independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, en finanzas los excedentes no son independientes por lo que debe recurrirse a métodos como el de corridas para obtener una muestra de elementos, al menos poco correlacionados, ver (Campa, 2001). A continuación se explica brevemente el método de corridas.

#### Método de corridas

El método de corridas se basa en agrupar la muestra de pérdidas, ordenadas cronológicamente, en grupos disjuntos y de cada grupo seleccionar el valor máximo. La muestra de excedentes se escoge por medio de este método: se ordenan las pérdidas cronológicamente, se agrupan en corridas, tomando en cuenta su tamaño. Cada corrida debe tener un número de elementos mayor o igual a  $r$ , donde  $r > 0$  se elige de antemano, y se selecciona de cada grupo el valor más grande. La nueva muestra de excedentes se forma con aquellos valores seleccionados que excedan el valor del umbral  $u$ . Con esta muestra de excedentes se aplica el Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan. Para estimar los parámetros de la distribución de Pareto Generalizada se asume que los excedentes se modelan mediante una distribución de este tipo. Este supuesto debe verificar mediante alguna prueba de bondad de ajuste. Por ejemplo, la prueba de Anderson-Darling, (Razali, *et al.*, 2011).

Una vez que se valida la aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan se puede estimar el VaR y el EVaR mediante la relación entre la distribución de los excedentes y la distribución de las pérdidas  $F$  como se muestra a continuación.

$$F(x) = P(X > x) = P(X > u)P(X > x | X > u) = F(u)\left(1 + \varepsilon \frac{x-u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (10)$$

donde  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  es la función de supervivencia. Para conocer el VaR de orden  $1 - \alpha$  simplemente se despeja  $x$  de la ecuación (10). Es decir, se igualan  $\bar{F}(x) = \alpha$  y  $VaR_\alpha = x$  y se obtiene:

$$VaR_\alpha = u + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\varepsilon} - 1 \right]. \quad (11)$$

El EVaR al mismo nivel  $1 - \alpha$  se calcula obteniendo la esperanza de la GPD, la cual está dada por

$$EVaR_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \varepsilon} + \frac{\beta - \varepsilon u}{1 - \varepsilon}, \quad (12)$$

siempre que  $\varepsilon < 1$ . Para  $\varepsilon \geq 1$  no existe ningún momento central. En la práctica  $\varepsilon$ ,  $\beta$  y  $\bar{F}(u)$  se reemplazan por sus respectivos valores estimados.

#### 2.4. Estimación por intervalos

En la aproximación de varianza-covarianza se asume que la pérdida en el valor del portafolio  $L$  sigue una distribución Normal con media  $\mu$  y varianza. Sin embargo, aun bajo este supuesto la variabilidad de algún cuantil, como el VaR, es difícil de estimar. Para tratar de estimar la variabilidad de los correspondientes estimadores del VaR y EVaR, en el presente trabajo se propone usar el método de remuestreo que consiste en generar varios modelos de variables aleatorias normales con media y varianza estimadas a través de una muestra. Esto es, bajo el supuesto de normalidad de la aproximación varianza-covarianza, sea  $\{L_1^{(j)}, \dots, L_m^{(j)}\}$ ,  $j = 1, \dots, R$  la  $j$ -ésima modelo aleatorio donde  $R$  es el número de muestras generales y  $m$  es el tamaño de cada muestra. Para cada una de éstas se estima el VaR y el EVaR por lo que se tiene una muestra de distintos valores del VaR,  $\widehat{VaR}_1, \dots, \widehat{VaR}_R$  y otra de distintos valores de EVaR,

$\widehat{EVaR}_1, \dots, \widehat{EVaR}_R$ . A partir de la distribución de la muestra de valores del VaR estimado se obtiene un intervalo de confianza al  $(1-\alpha)$ . Análogamente se obtiene un intervalo de confianza para el EVaR.

En el caso del método histórico se sugiere usar el del percentil básico que es un método Bootstrap no paramétrico para estimar intervalos de confianza. Los métodos Bootstrap son de remuestreo, empleados para estimar el sesgo de un estimador y el intervalo de confianza de un parámetro, ver, por ejemplo, (Davidson y Hinkley, 1997).

Cuando se emplea la estimación por Máxima Verosimilitud (MV) se puede derivar un intervalo de confianza asintótico para algún parámetro desconocido  $\theta$ . Los intervalos de confianza se calculan a partir de la tasa de log-verosimilitud, la cual es un estadístico de prueba utilizada para probar si el parámetro  $\theta$  tiene cierto valor  $\theta_0$  (hipótesis nula). Este procedimiento conocido con el nombre de método de la razón de verosimilitud, genera un intervalo de confianza asimétrico. Dado que se usa el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de la distribución de los excedentes, también se usa este procedimiento para generar intervalos de confianza para la estimación del VaR y EVaR en el método POT (Urbina, 2015).

### 3. Aplicación a portafolios de inversión

Como se ha dejado ver en las secciones anteriores, la aplicación correcta de métodos formales para estimar adecuadamente cantidades como VaR y el EVaR dependen fuertemente de los supuestos bajo los que trabaja cada uno de los métodos. A continuación se ilustran las metodologías analizadas anteriormente empleando datos reales del sector de la construcción en México y datos simulados de pérdidas de portafolios de inversión. Se pone énfasis en la adecuada aplicación de cada una de las metodologías.

#### Portafolios con datos reales

Para este caso, se seleccionaron acciones de las siguientes cinco empresas: Grupo ICA, Grupo Mexicano de Desarrollo (GMD), Cementos Mexicanos (CEMEX), Desarrolladora HOMEX y Grupo CARSO (GCARSO). Se tomaron los precios diarios de cada una de sus acciones en el periodo 2009-2013 y se estimaron el vector de rendimientos promedio y la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos diarios. Se empleó el método de Markowitz,

(Davison, 1998), para encontrar el vector de pesos óptimo, es decir, los porcentajes del monto total que se invierten en cada una de las acciones para minimizar la varianza del portafolio. La solución del problema de optimización de la varianza del portafolio se muestra en la Tabla 1. Los pesos dados en la Tabla 1 están en el intervalo abierto  $(0, 1)$ , lo que significa que no se requiere pedir prestado capital para lograr tener la menor volatilidad con el rendimiento esperado dado, el cual se propuso del 5% anual.

Adicionalmente, se realizaron pruebas de bondad de ajuste de Shapiro-Wilk (Razali y Wah, 2011), para validar el supuesto de normalidad de la distribución de las pérdidas del portafolio correspondiente.

Tabla 1: Vector de pesos óptimo de Markowitz para el portafolio de acciones

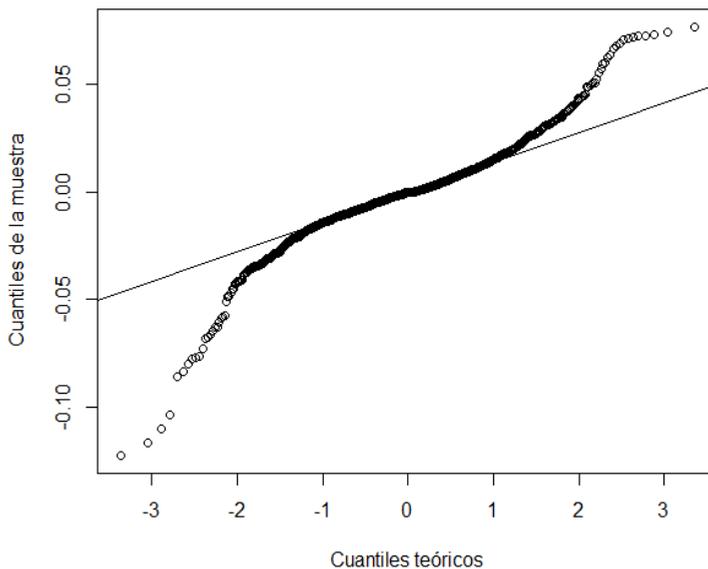
Acción	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO
$w_i$	0.4057	0.0948	0.0379	0.0997	0.3616

Fuente: elaboración propia.

En el presente trabajo se analizaron dos portafolios compuestos por las mismas acciones. Los dos portafolios difieren en los pesos de inversión. El portafolio A es aquel donde se invierte la misma proporción del monto de capital en cada una de las acciones y el portafolio B es aquel donde se invierte de acuerdo a la solución del problema de Markowitz mostrada en la Tabla 1. Se construyeron los gráficos QQ-plot para las pérdidas de cada portafolio como se muestran en las Figuras 1 y 2. Se puede apreciar una discrepancia en las colas de la distribución en ambas gráficas. Por otro lado, los valores  $p$  de las respectivas pruebas de Shapiro-Wilk son del orden de  $10^{-16}$ . Por lo tanto, se puede concluir que la distribución Normal no modela adecuadamente las pérdidas en el valor de ninguno de los dos portafolios, lo que invalida el uso del método de varianza-covarianza para estimar el VaR y EVaR. Cabe mencionar que también se analizó si las pérdidas de ambos portafolios podrían seguir una distribución *t-student*. Se aplicó una prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling para distintos grados de libertad. En todos los casos el valor  $p$  de las pruebas correspondientes resultó muy pequeño por lo que también se rechaza el supuesto que los datos se pueden modelar mediante una distribución *t-Student*.

En la Tabla 2 y en la Tabla 3 se muestran los resultados numéricos de las estimaciones del VaR y el EVaR empleando los métodos de varianza-covarianza, el histórico y el método POT. Asociadas al método de varianza-covarianza se presentan las estimaciones por intervalos de confianza del método de remuestreo, empleando el método del percentil básico las correspondientes estimaciones por el método histórico y finalmente, por el método de verosimilitud de perfiles o de razón de verosimilitud se exhiben los intervalos asociados al método POT. Para este último se estableció el cuantil empírico de 85% como umbral. Se aplicó el método de corridas para generar una muestra independiente de excedentes. El tamaño de la muestra antes de usar el método de corridas fue de 195 excedentes. Al aplicar el método de corridas, con tamaño de corrida igual a 2, se obtuvieron 133 excedentes para el portafolio *A* y 128 para el portafolio *B*. Con el fin de validar la correcta aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan a los datos de los excedentes de los dos portafolios se les aplicó la prueba de Anderson-Darling. En ambos portafolios los correspondientes valores resultaron ma-

Figura 1: QQ plot de las pérdidas en el valor del portafolio A.



Fuente: elaboración propia.

Tabla 2: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio A. Monto = \$ 1.00,  
Tiempo = 1 día. IC=Intervalo de confianza

Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	0.0329	0.0313	0.0331
IC VaR	(0.0314, 0.0344)	(0.0278, 0.0345 )	(0.0295, 0.0374)
EVaR	0.0414	0.0463	0.0481
IC EVaR	(0.0396, 0.0431)	(0.0407, 0.0523 )	(0.0427, 0.0579)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio B. Monto=\$ 1.00,  
Tiempo = 1 día.

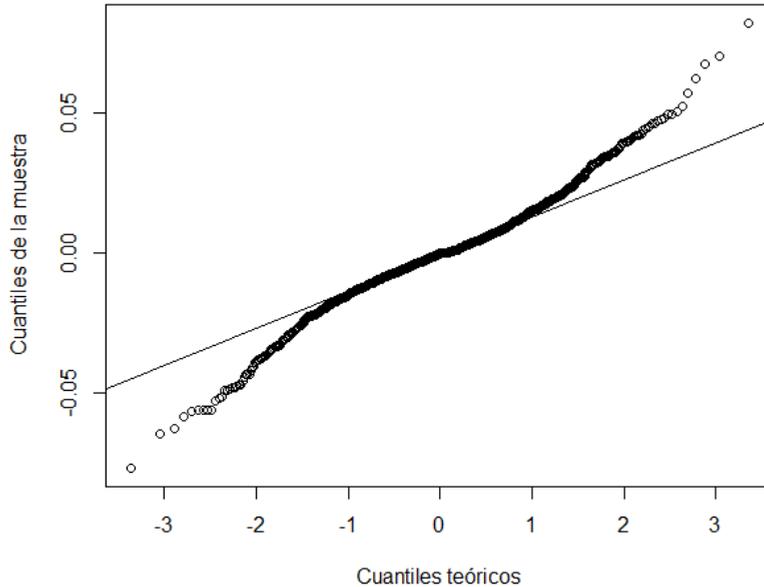
Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	0.0284	0.0305	0.0309
IC VaR	(0.0272, 0.0297 )	(0.026, 0.0339 )	(0.0279, 0.0344)
EVaR	0.0358	0.0405	0.0427
IC EVaR	(0.0343, 0.0372)	(0.0366, 0.0447)	(0.0384, 0.0489)

Fuente: elaboración propia.

iores a 0.8. Por lo anterior, se puede concluir que la aplicación del teorema es adecuado para ambos portafolios.

De los resultados presentados en las tablas 2 y 3 se puede observar que el método POT es el que ofrece las estimaciones más altas tanto para el VaR como el EVaR en ambos portafolios. A excepción de la estimación del VaR para el portafolio *A*, la aproximación de varianza-covarianza es la que da las estimaciones más bajas. Como se discutió previamente, los resultados anteriores están acordes a lo que se esperaría desde el punto de vista teórico. Es decir, dado que las correspondientes pruebas de bondad de ajuste (Anderson-Darling) validaron la aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de Haan y dado que las correspondientes pruebas de bondad de ajuste para la normalidad y para una distribución *t-Student* se rechazaron, se pue-

Figura 2: QQ plot de las pérdidas en el valor del portafolio B.



Fuente: elaboración propia.

de concluir que a excepción del método POT los otros métodos subestiman el riesgo. Particularmente, en este caso se observa que el método de varianza-covarianza subestima en demasía el riesgo, al asumir una distribución Normal para las pérdidas. Aunque los intervalos de confianza obtenidos por el método histórico (remuestreo y del percentil básico) y por el método de POT (verosimilitud de perfiles) se intersectan en todos los casos, es claro que los intervalos asociados al método POT ofrecen valores mayores, comparados con el método histórico.

Por otro lado, se puede observar que las estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio *B* son generalmente menores que las correspondientes al portafolio *A*. Específicamente, lo anterior siempre ocurre en el caso del método de varianza-covarianza. Esto último se puede explicar dado que el VaR y EVaR están en función de la desviación estándar del portafolio, y el portafolio *B* es aquel donde ésta alcanza su valor mínimo. Sin embargo, no hay ningún resultado teórico que nos permita asegurar que lo anterior se cumple para el método histórico o para el método POT.

## Portafolios con datos simulados

En este caso se presentan ejemplos con datos simulados donde se analiza el desempeño de los diferentes métodos de estimación. Se generó una muestra de pérdidas que siguen una distribución Normal con media  $-0.00076475$  y varianza  $0.0002942$ . Se aplicaron los tres métodos antes vistos. Los resultados se muestran en la Tabla 4. Como se puede observar, el POT estima bien el VaR dado que es el más cercano al de varianza-covarianza que en este caso es el valor correcto. Los intervalos obtenidos para cada uno de los métodos contienen al valor verdadero. Esto muestra la ventaja de contar con intervalos de confianza porque permiten asegurar que la estimación es razonable a pesar de que puntualmente las estimaciones son distintas. Para el EVaR, como era de esperarse, el POT lo sobreestima cuando se comparan las estimaciones puntuales. Aunque todos los intervalos estimados contienen al valor correcto se puede notar un sesgo respecto a los valores obtenidos por el método de varianza-covarianza. Por otro lado, se simuló un portafolio donde las pérdidas se generaron de una distribución *t-Student* con cinco grados de libertad. El VaR bajo esta distribución es  $2.015$  y una aproximación numérica del EVaR resultó ser  $2.925$ . En la Tabla 5 se muestran los resultados correspondientes. En este caso se puede observar que el método de varianza-covarianza es el que peor se desempeña cuando la distribución que genera las pérdidas tiene colas relativamente más pesadas que la distribución Normal. Particularmente, el valor exacto no se encuentra dentro del intervalo de confianza asociado.

Tabla 4: Estimaciones del VaR y el EVaR para un portafolio con las mismas características del portafolio B en el que se asume que las pérdidas son normales. Monto=\$ 1.00, Tiempo = 1 día.

Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	.027439	.026364	.027483
IC VaR	(0.0263, .0286)	(.0242, .0296)	(.0248, .0306)
EVaR	.03452	.03347	.03805
IC EVaR	(.0331, .0359)	(.0308, .0362)	(.0342, .044)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 5: Estimaciones del VaR y el EVaR para un portafolio cuyas pérdidas tienen distribución t-Student con 5 grados de libertad.

<b>Método</b>	<b>Var-Covarianza</b>	<b>Histórico</b>	<b>POT</b>
VaR	2.229789	2.133007	2.208766
IC VaR	(2.1350, 2.3238)	(1.9577, 2.3095)	(2.0032, 2.4579)
EVaR	2.7871	3.0640	3.1567
IC EVaR	(2.6790, 2.8910)	(2.6730, 3.5404)	(2.8150, 3.6992)

Fuente: elaboración propia.

## 4. Conclusiones

Derivado del análisis de este trabajo se puede observar que las pérdidas excesivas tienen probabilidades más grandes que si se asumiera un modelo con una distribución Normal. Por lo anterior, la aproximación de varianza-covarianza subestima el riesgo. Por otro lado, el método histórico no proporciona suficiente información sobre la cola de la distribución de las pérdidas y difícilmente permite considerar escenarios futuros. Esto implica que las estimaciones del VaR y el EVaR son poco útiles. Por otro lado, una opción que resulta atractiva es la aplicación de métodos basados en la Teoría de Valores Extremos, como el método POT. A pesar de que se debe tener cuidado en la aplicación de métodos de remuestreo como el Bootstrap, estos ofrecen una manera fácil de construir intervalos de confianza para el VaR y el EVaR en situaciones donde teóricamente resultaría retador. Los métodos que trabajan con los valores extremos dan una mejor estimación del riesgo ya que al garantizar que los supuestos se cumplen, se asegura que las estimaciones sean consistentes. El método POT, a diferencia del método histórico, tiene la posibilidad de generar nuevos escenarios que permiten al inversionista estimar de antemano el riesgo que conllevan. Aunque el método POT es el que da las mejores estimaciones, tiene la limitación de requerir de un tamaño suficientemente grande de excedentes para estimar los parámetros y así poder estimar el VaR y el EVaR adecuadamente. Por último, es importante hacer notar que la información que se usó en las aplicaciones es histórica por lo que no refleja las expectativas futuras del mercado. Como una futura

línea de investigación se explora la posibilidad de incorporar información del mercado de futuros o de volatilidades implícitas del mercado de derivados para estimar la función de pérdidas y emplear métodos de estimación bayesiana.

## Referencias bibliográficas

- Balkema, A. A. y L. de Haan (1974). "Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability*, 2, pp. 792–804.
- Campa Rojas M. A. (2001). *Teoría de valores extremos con aplicaciones a medidas de riesgo*. Tesis de Licenciatura, México, UNAM.
- Crouhy M., Galai D. y Mark R. (2001). *Risk Management*. New York, EUA, Ed. McGraw-Hill.
- Davison, A. C. y Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. New York, EUA, Cambridge University Press.
- Luenberger D. (1998). *Investment Science*. EUA, Ed. Oxford University Press.
- Lintner, John (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), pp. 13–37.
- Markowitz H. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, EUA.
- McNeil A., Frey R. y Embrechts P. (2005). *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*. EUA, Ed. Princeton University Press.
- Mossin, Jan (1966). "Equilibrium in a Capital Asset Market". *Econometrica*, vol. 34 (4), pp. 768–783.
- Pickands, J. (1971). "The Two-Dimensional Poisson Process and Extremal Processes". *Journal of Applied Probability* 8, pp. 745–756.
- Razali N. M. y Wah Y. B. (2011). "Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests". *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, 2 (1), pp. 21-33.
- Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance* 19, pp. 425-442.
- Urbina Rugeiro J. I. (2015). *Estimación del riesgo en portafolios de inversión*. Tesis de Maestría. México, Universidad Autónoma Metropolitana.

