Decisiones óptimas de consumo y portafolio con una restricción probabilista sobre la riqueza final: difusiones con saltos y horizonte finito

Francisco Venegas-Martínez*

Abigail Rodríguez-Nava**

Ambrosio Ortiz-Ramírez***

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2012
Fecha de aprobación: 7 de diciembre de 2012

* Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
fvenegas1111@yahoo.com.mx

** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco,
Departamento de Producción Económica.
arnava@correo.xoc.uam.mx

*** Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
a7ortiz@yahoo.com.mx

Resumen

La presente investigación desarrolla un modelo para una economía estocástica con mercados incompletos, la cual está poblada por agentes racionales adversos al riesgo. El modelo es útil para analizar el proceso de toma de decisiones, en un ambiente de incertidumbre, de un consumidor-inversionista que desea integrar un portafolio en un horizonte de planeación finito, sujeto a dos restricciones: una de tipo presupuestal que considera saltos de Poisson en la dinámica del precio de un activo riesgoso y otra probabilista sobre la riqueza final. Asimismo, el trabajo determina la regla de consumo óptimo y las proporciones óptimas de la riqueza que el individuo debe asignar a cada uno de los activos disponibles en la economía.

Clasificación JEL: C02, D11, D91 y D81.

Palabras clave: Modelos estocásticos, comportamiento del consumidor, decisiones intertemporales, y riesgo de mercado.

Optimal Consumption and Portfolio Decisions with a Probabilistic Restiction over Final Wealth: Diffusion-jump Process within a Finite Horizon.

Abstract

This paper is aimed at developing a stochastic model for an economy with incomplete markets, which is populated by rational and risk-averse agents. The model is useful to analyze the process of decision making in an uncertain environment, of a consumer-investor who wishes to integrate a portfolio within in a finite planning horizon, subject to two constraints: a budget constraint that considers Poisson type jumps in the price dynamics of a risky asset, and a probabilistic constraint on final wealth. This research also determines the optimal consumption rule and the optimal proportions of wealth the individual must assign to each of the available assets in the economy.

JEL Classification: C02, D11, D91, and D81.

Keywords: *Stochastic modeling, consumer behavior, intertemporal choice, and market risk.*

1. Introducción

Una de las características notables en la dinámica de los mercados accionarios es que éstos, ocasionalmente presentan saltos bruscos e inesperados, ya sea hacia arriba o hacia abajo, en los precios de los títulos y, por ende, en los índices bursátiles que conforman. De hecho, cualquier inversionista espera estar en un auge de magnitud excepcional y no estar en una caída abrupta. Esta investigación reconoce explícitamente en el proceso de toma de decisiones de consumo y portafolio de un consumidor-inversionista racional la existencia de saltos en los precios de los activos (títulos de capital) y una restricción probabilista sobre el nivel de la riqueza final.

En vista de los saltos observados en los índices bursátiles a finales de 2008 y a principios de 2009 en los mercados financieros de casi todo el mundo, y su secuela, que desencadenó una burbuja especulativa, es imprescindible modelar el comportamiento de los precios de los activos utilizando procesos estocásticos con saltos, así como incorporar en el proceso de toma de decisiones una restricción probabilista sobre la riqueza final de los agentes. Existe una extensa literatura sobre el modelado de saltos en los precios de los activos; véanse, por ejemplo: Cox y Ross (1976), Merton (1976), Ball y Torous (1985), Page y Sanders (1986), Cao (2001), Chandrasekhar Reddy Gukhal (2004) y Venegas-Martínez (2001), (2006a) y (2008b), entre otros.

Aunque el problema de asignar proporciones de la riqueza a la tenencia de los diferentes activos disponibles en los mercados financieros ha sido estudiado ampliamente, poca atención se ha puesto en este problema cuando ocurren saltos repentinos y extremos en los precios de los activos y cuando los inversionistas desean al final de su horizonte de planeación (finito en este caso) que su riqueza exceda un determinado umbral (nivel de subsistencia) con cierta probabilidad; usualmente alta.

Esta investigación extiende el trabajo de Gavira-Durón y Venegas-Martínez (2011) y Venegas-Martínez y López-Herrera (2013) al desarrollar un modelo estocástico que analiza el proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista racional que desea integrar un portafolio en un ambiente de riesgo de mercado, en un horizonte de planeación finito, sujeto a dos restricciones: una de tipo presupuestal que incorpora saltos de Poisson en los precios de los activos y otra probabilista sobre la riqueza final. La inclusión de saltos en el comportamiento de los activos riesgosos y la consideración de un horizonte de planeación finito, introducen en el modelado del proceso de toma de decisiones de agentes racionales algunas dificultades: una de carácter técnico en la determinación de las condiciones necesarias del problema de optimización correspondiente y otras sobre la unicidad de las soluciones por la presencia de mercados incompletos (ya que los saltos no son activos que negocien).

Esta investigación está organizada de la siguiente forma: en la sección 2 se establecen las características de la economía bajo estudio; en la sección 3 se plantea el problema de optimización del agente racional; en la sección 4 se resuelve el problema de optimización del agente bajo el supuesto de utilidad logarítmica; en la sección 5 se presentan las conclusiones. Por último, dos apéndices presentan los detalles de diversos resultados analíticos del presente trabajo.

2. Características de la economía bajo estudio

Considere una economía que produce y consume un solo bien (el numerario) y que está poblada por un número finito de individuos idénticos en gustos y dotaciones que toman decisiones en un horizonte finito, $[0,T]$. La incertidumbre está representada por dos espacios de probabilidad: el primero, asociado con difusiones (pequeños movimientos que se observan todos los días en los precios de los activos), equipado con una filtración, $(\Omega, F_W, (F_{tW})_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}_W)$ sobre el cual está definido un movimiento browniano estándar, $\mathrm{d}W_t \sim N(0, \mathrm{d}t)$, de tal forma que

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$$

y

$$\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{d}t,$$

y en el segundo espacio de probabilidad, asociado con los saltos, $(\Omega, F_N, (F_{tN})_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}_N)$, en el que está definido un proceso de Poisson $\mathrm{d}N_t$ con parámetro de intensidad ϕ, de tal forma que:

$$\mathbb{P}_N\{\text{un salto de longitud uno durante d}t\} = \mathbb{P}_N\{\mathrm{d}N_t = 1\} = \phi\,\mathrm{d}t$$

y

$$\mathbb{P}_N\{\text{más de un salto durante d}t\} = \mathbb{P}_N\{\mathrm{d}N_t > 1\} = o(\mathrm{d}t),$$

así

$$\mathbb{P}_N\{\text{ningún salto durante dt}\} = 1 - \phi\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t),$$

donde $o(\mathrm{d}t)$ es tal que $o(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$. Observe que el tiempo medio esperado entre dos saltos está dado por $1/\phi$. Se puede también mostrar fácilmente que $\mathrm{E}_N[\mathrm{d}N_t] = \mathrm{Var}_N[\mathrm{d}N_t] = \phi\,\mathrm{d}t$.

Todos los procesos estocásticos que se introduzcan en el análisis subsecuente se suponen adaptados a la filtración producto, $F_t \equiv F_{tW} \times F_{tN}$, en el espacio de probabilidad generado por $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}_W \otimes \mathbb{P}_N$ Asimismo, se supone que todas las igualdades que involucran procesos estocásticos se cumplen $\mathbb{P}$ - casi seguramente (es decir, con probabilidad uno). En todo lo que sigue, se supone que todos los procesos están bien definidos, sin establecer explícitamente las condiciones de regularidad que así lo garanticen.

Las posibilidades de inversión, en los mercados financieros de la economía en cuestión, están representadas por un bono de vencimiento instantáneo (el cual en automático es cupón cero), libre de riesgo de incumplimiento (emitido por agentes que siempre cumplen las obligaciones de pago adquiridas), y que paga una tasa de interés (anualizada) constante a todos los plazos y r continuamente capitalizable . La tasa r es real, es decir, los bonos pagan intereses en términos de bienes. Se supone que el precio del bono, B_t, y el precio del activo riesgoso, S_t, tienen las siguientes dinámicas:

$$\mathrm{d}B_t = B_t r\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

y

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t + \nu\mathrm{d}N_t), \tag{2}$$

donde μ es el rendimiento medio anualizado de la acción, σ es la desviación estándar de los rendimientos anualizados alrededor de μ y ν es el tamaño medio esperado del salto. Se supone además que los procesos $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}N_t$ son independientes entre sí, lo cual implica que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}N_t) = 0$.

La dinámica de los mercados completos (bajo condiciones de no arbitraje) implica la existencia de una densidad (no necesariamente única) de precios de estado, ξ_t, que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}\xi_t = -\xi_t \left[r\mathrm{d}t + \lambda \,\mathrm{d}W_t - \nu\lambda'(\mathrm{d}N_t - \phi \mathrm{d}t) \right], \qquad (3)$$

donde

$$\lambda \equiv \sigma^{-1}(\mu + \delta - r) \text{ y } \lambda' \equiv \sigma^{-2}(\mu + \delta - r)$$

son, respectivamente, el premio al riesgo y el premio al riesgo estandarizado de mercado. La razón de restar la media al proceso de Poisson en (3) es asegurar que (ecuacion) Xt

$$X_t = \mathrm{d}N_t - \mathrm{E}_N[\mathrm{d}N_t],$$

esto asegura que X_t tenga media cero, en efecto $X_t = \mathrm{d}N_t - \mathrm{E}_N[\mathrm{d}N_t] = \phi \mathrm{d}t - \phi \mathrm{d}t = 0,$ y en consecuencia X_t es una martingala. El proceso ξ_t puede ser interpretado como el precio Arrow-Debreu por unidad de probabilidad $\mathbb{P}$ de una unidad de un bien de consumo en el tiempo t. En este caso la solución de (3) está dada por:

$$\xi_T = \xi_t \exp\left\{ \left(-r - \frac{1}{2}\lambda^2 \right) \int_t^T \mathrm{d}s - \lambda \int_t^T \mathrm{d}W_s + \ln(1+\nu) \int_t^T \mathrm{d}N_s + \nu\,\phi \int_t^T \mathrm{d}s \right\}$$

Se puede mostrar que ξ_t es una martingala (ver Apéndice 1).

Cada agente en la economía está dotado, al tiempo $t = 0$, con una riqueza inicial a_0 y elige en cada instante la proporción de su riqueza, θ_t, que destinará a la tenencia de la acción; la proporción complementaria $1 - \theta_t$ será asignada al bono. En este caso, la dinámica del proceso de riqueza real del agente a_t está dada por (ver apéndice 2)

$$\begin{aligned}\frac{B_0 a_t}{B_t} &= a_0 + B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u \left(\mu - r\right) \mathrm{d}u + B_0 \sigma \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u \, \mathrm{d}W_u \\ &\quad + B_0 o \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u \, \mathrm{d}N_u - B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} c_u \mathrm{d}u, \quad 0 \leq t \leq T,\end{aligned} \tag{4}$$

esta restricción, en términos de la densidad de precios de estado, es equivalente a

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \xi_t c_t \mathrm{d}t + \xi_T a_T \mid F_t\right] = \xi_0 a_0. \tag{5}$$

Se supone que el consumidor representativo obtiene satisfacción por el consumo del bien numerario. La utilidad esperada del tipo Von Neumann-Morgenstern, V_t, al tiempo t de un individuo representativo, adverso al riesgo y competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma:

$$V_t \equiv \mathrm{E}\left[\int_t^T u(c_s) e^{-\rho s} \mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right], \tag{6}$$

donde c_t es el consumo al tiempo t y ρ es la tasa subjetiva de descuento. Así pues, el consumidor toma decisiones de consumo y portafolio de tal manera que se maximice su satisfacción total descontada. Es decir, el consumidor desea determinar la regla de consumo y las proporciones de su riqueza que va a asignar, en cada instante, a los diferentes activos disponibles en la economía de tal forma que su satisfacción por el bien de consumo sea la máxima posible. Se supone que la función de utilidad $u(\cdot)$ es dos veces continuamente diferenciable, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y con $\lim_{x\to 0} u'\left(x\right) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} u'\left(x\right) = 0$. Se impone la restricción de que la riqueza del individuo representativo exceda un determinado umbral, $\underline{a}$, de tal manera que

$$\mathbb{P}\left(a_T \geq \underline{a}\right) = 1 - \beta. \qquad (7)$$

3. Solución del problema del agente racional

A continuación se plantea el problema de un consumidor representativo que maximiza utilidad, expresada en (6), por el bien de consumo en donde en lugar de utilizar la restricción (4) se utiliza su equivalente en función de la densidad de precios de estado ξ_t, dada en (5). Asimismo se impondrá la condición (7) de que su riqueza exceda un determinado umbral, $\underline{a}$, con cierta probabilidad. Así pues, considere el problema:

$$\underset{c_t}{\text{Maximizar}} \qquad \mathrm{E}\left[\int_0^T u\left(c_t\right) e^{-\rho t} \mathrm{d}t \mid F_0\right]$$

$$\text{sujeto a.} \qquad \mathrm{E}\left[\int_0^T \xi_t c_t \mathrm{d}t + \xi_T a_T \mid F_0\right] = a_0, \;\; a_0 \text{ dado,}$$

$$\mathbb{P}\left\{a_T \geq \underline{a} \mid F_0\right\} = 1 - \beta.$$

Observe que la última restricción se puede reescribir como:

$$\mathbb{P}\left\{a_T \geq \underline{a} \mid F_0\right\} = \mathrm{E}\left[\xi_T (a_T - \underline{a}) 1_{\{a_T \geq \underline{a}\}} \mid F_0\right] = 1 - \beta.$$

En este caso se ha empleado el hecho de que $\xi_0 = 1$. El Lagrangeano, $\mathcal{L}$, del problema de optimización está dado por:

$$\mathcal{L} \equiv u(c_t) e^{-\rho t} - \eta \xi_t c_t + \gamma [u(a_T) e^{-\rho T} - u(\underline{a}) e^{-\rho T} - \psi^{(\beta)} \xi_T (a_T - \underline{a})] 1_{\{a_T \geq \underline{a}\}}$$

donde η y γ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones y $\psi^{(\beta)}$ es tal que se asegure que $\mathbb{P}\left(a_T \geq \underline{a}\right) = 1 - \beta.$ Las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = u'(c_t)e^{-\rho t} - \eta\,\xi_t,$$

lo cual conduce a

$$c_t = I(\eta \xi_t e^{\rho t}) \tag{8}$$

donde $I \equiv (u')^{-1},$ y

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_T} = u'(a_T) - \psi^{(\beta)}\xi_T,$$

lo cual implica que

$$a_T = I(\eta \psi^{(\beta)} \xi_T e^{\rho T}). \tag{9}$$

4. Problema de optimización con utilidad logarítmica

A continuación se utiliza la siguiente forma funcional específica para la función de utilidad:

$$u(c_t) = \ln(c_t)$$

En este caso, la condición necesaria de optimalidad expresada en (8) conduce a:

$$c_t = \frac{e^{-\rho t}}{\eta \xi_t} \tag{10}$$

para toda $t \in [0,T]$ y

$$a_T = \frac{e^{-\rho T}}{\eta \psi^{(\beta)} \xi_T}. \tag{11}$$

En este caso, al sustituir (10) en (5), se sigue que

$$\begin{aligned} a_t &= \xi_t^{-1} \mathrm{E}\left[\int_t^T \xi_t c_t \mathrm{d}t + \xi_T a_T \mid F_t \right] = \xi_t^{-1} \mathrm{E}\left[\int_0^T \eta^{-1} e^{-\rho t} \mathrm{d}t + [\psi^{(\beta)} \eta]^{-1} e^{-\rho T} \mid F_0 \right] \\ &= \xi_t^{-1} \left[\eta^{-1}(1 - e^{-\rho T}) + [\psi^{(\beta)} \eta]^{-1} e^{-\rho T} \right] = A^{-1} (\eta \xi_t)^{-1} = A^{-1} c_t \end{aligned}$$

donde $A^{-1} = (1 - e^{-\rho T}) + (e^{-\rho T} / \psi^{(\beta)})$. Es decir,

$$c_t = A a_t.$$

En otras palabras, el consumo es proporcional a la riqueza, esto es, el consumidor siempre consume la proporción A de su riqueza real a_t, independientemente del nivel de esta última. Observe también que el multiplicador $\psi^{(\beta)}$ es tal que:

$$\mathbb{P}\left\{ a_T \geq \underline{a} \mid F_0 \right\} = \mathbb{P}\left\{ \underline{\xi} \geq \xi_T \mid F_0 \right\} = 1 - \beta$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left\{ a_T \leq \underline{a} \mid F_0 \right\} = \mathbb{P}\left\{ \xi_T \geq \underline{\xi} \mid F_0 \right\} = \beta,$$

donde

$$\underline{\xi} = \frac{e^{-\rho T}}{\psi^{(\beta)} \eta \underline{a}}.$$

Así pues $\psi^{(\beta)}$ satisface

$$\psi^{(\beta)} = \frac{e^{-\rho T}}{\underline{\xi}\eta \underline{a}}$$

donde $\underline{\xi}$ es tal que $\mathbb{P}\left\{\xi_T \geq \underline{\xi} \,|\, F_0\right\} = \alpha$. Observe también que a partir de (10)

$$c_t \xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{\eta}.$$

Por lo tanto,

$$a_t \xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{A\eta}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}\ln(a_t) + \mathrm{d}\ln(\xi_t) = -\rho \mathrm{d}t$$

Después de tomar esperanzas condicionales en la expresión anterior, se sigue que

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}\ln(a_t) \,|\, F_t] = -[\mathrm{E}[\mathrm{d}\ln(\xi_t) \,|\, F_t] + \rho \mathrm{d}t].$$

Ahora bien, en virtud de que $\mathrm{d}\xi_t = -\xi_t \left[r\mathrm{d}t + \lambda\, \mathrm{d}W_t - \nu\lambda'(\mathrm{d}N_t - \phi \mathrm{d}t) \right]$, se obtiene:

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}\ln(\xi_t) \,|\, F_t] = \left[-(r + \lambda\phi) + \frac{1}{2}\lambda^2 + r\lambda\phi \ln(\nu\lambda\xi_t) \right] \mathrm{d}t.$$

Si se iguala $\mathrm{E}[\mathrm{d}\ln(a_t) \,|\, F_t]$ con $-[\mathrm{E}[\mathrm{d}\ln(\xi_t) \,|\, F_t] + \rho \mathrm{d}t]$, se tiene que

$$r+\theta_t\left(\mu+\delta-r\right)-A-\frac{1}{2}\theta_t^2\sigma^2+\phi\ln(a_t\theta_t v)=-(r+\lambda\phi)+\frac{1}{2}\lambda^2+r\lambda\phi\ln(v\lambda\xi_t)$$
.

Al derivar la expresión anterior con respecto de θ_t, se sigue que

$$\left(\mu+\delta-r\right)-\theta_t\,\sigma^2+\frac{\phi}{\theta_t}=0,$$

lo cual implica que las componentes de difusión tienen que ser iguales, es decir,

$$\theta_t\sigma\,\mathrm{d}W_t=\lambda\,\mathrm{d}W_t$$

esto implica que

$$\theta_t\equiv\theta=\frac{\mu+\delta-r}{\sigma^2}\ . \qquad (12)$$

Por otro lado, al igualar las partes deterministas se tiene que

$$r+\theta_t\left(\mu+\delta-r\right)-\rho-A=r-v\lambda'\phi \qquad (13)$$

y si se sustituye (12) en (13), se obtiene el valor de A de manera endógena, el cual satisface

$$A\equiv\left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)^2+\lambda' v\phi-\rho.$$

Asimismo, las partes de saltos conducen a la identidad

$$\theta v=v\lambda',$$

es decir,

$$\theta = \lambda' = \sigma^{-2}(\mu + \delta - r),$$

Este resultado coincide plenamente con (12) y determina la proporción de la riqueza real del individuo que éste asigna a la tenencia del activo riesgoso en un horizonte de planeación finito, sujeto a una restricción presupuestal y otra probabilista sobre el excedente de su riqueza final con respecto de un umbral predeterminado.

5. Conclusiones

En el proceso de integración de portafolios tradicional se consideran bonos libres de riesgo de incumplimiento (emitidos por un gobierno) y activos riesgosos, títulos de capital (emitidos por corporativos que cotizan en bolsas), en los modelos teóricos utilizados en este proceso no contemplan las recurrentes alzas y bajas abruptas que se han observado en los mercados financieros en los últimos años. De esta manera son escasos los trabajos que propongan modelos de decisión, en el marco de maximización de utilidad en un horizonte finito, que consideren portafolios que incluyan difusiones con saltos en la dinámica estocástica de los precios de los activos además de incorporar restricciones probabilistas sobre el nivel de riqueza final del agente. El presente trabajo ha desarrollado un modelo estocástico que describe el proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista racional para integrar un portafolio en un ambiente de riesgo de mercado con saltos bruscos e inesperados en los precios de los activos estando sujeto a dos restricciones: una de tipo presupuestal y otra probabilista sobre la riqueza final.

La agenda de investigación futura, sin duda, debe tomar en cuenta la inclusión de productos derivados (en particular opciones) en la restricción presupuestal a fin de que el agente pueda cubrirse contra el riesgo de mercado. Por ejemplo, si el agente adquiere una opción de venta de tal manera que si el precio del activo riesgoso cae por debajo de un precio de ejercicio (establecido con anterioridad), entonces el agente puede vender el activo a dicho precio de ejercicio, reduciendo su margen de pérdida.

Bibliografía

Ball, C. A., and W. N. Torous (1985). "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing". *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, pp.155-173.

Cao, M. (2001). "Systematic Jump Risks in a Small Open Economy: Simultaneous Equilibrium Valuation of Options on the Market Portfolio and the Exchange Rate". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 20, No. 2, pp. 191-218.

Chandrasekhar Reddy Gukhal, C. R. (2004). "The Compound Option Approach to American Options on Jump-Diffusions". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 10, pp. 2055-2074.

Cox, J. C., and S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 145-166.

Gavira-Durón, N. y F. Venegas-Martínez (2011). "Decisiones óptimas de consumo y portafolio: un enfoque de precios de estado de Arrow-Debreu". *Revista Contaduría y Administración*, No. 234, pp. 151-172.

Merton, R. C., (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.

Naik, V. y Lee, M., (1990). "General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns". *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 493-521.

Page, F. H., and A. B. Sanders (1986). "A General Derivation of the Jump Process Option Pricing Formula". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 21, No. 4, pp. 437-446.

Venegas-Martínez, F. (2001a). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.

______________. (2001b). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.

______________. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

______________. (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk". *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.

______________. (2013, en proceso de publicación). "Decisiones de consumo y portafolio con un nivel de confianza sobre la riqueza final: horizonte de planeación finito *EconoQuantum*", *Revista de Economía y Negocios*.

Apéndice 1

Observe que

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}\left[\frac{\xi_T}{\xi_t}\;\middle|\, F_t\right]=e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_W\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)-\lambda(W_T-W_t)\right\}\right]\times$$

$$\mathrm{E}_N\left[\exp\left\{\ln(1+\nu\lambda')(N_T-N_t)-\nu\lambda'\phi(T-t)\right\}\right]$$

$$=e^{-r(T-t)}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)+\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)}e^{\phi(T-t)(e^{\ln(1+\nu\lambda')}-1)}e^{-\nu\lambda'\phi(T-t)}$$

$$=e^{-r(T-t)}e^{\nu\lambda'\phi(T-t)}e^{-\nu\lambda'\phi(T-t)}=e^{-r(T-t)}.$$

Lo que establece que ξ_t, definida en (3), es una martingala.

Apéndice 2

Note que

$$\mathrm{d}a_t=a_t\left[r+\theta_t\left(\mu+\delta-r\right)\right]\mathrm{d}t+a_t\theta_t\sigma\,\mathrm{d}W_t+a_t\theta_t\nu\,\mathrm{d}N_t-c_t\mathrm{d}t$$

implica

$$B_0\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_u}{B_u}=B_0\int_0^t\frac{1}{B_u}a_u\left[r+\theta_u\left(\mu-r\right)\right]\mathrm{d}u+B_0\sigma\int_0^t\frac{1}{B_u}a_u\theta_u\,\mathrm{d}W_u+$$

$$B_0\nu\int_0^t\frac{1}{B_u}a_u\theta_u\,\mathrm{d}N_u-B_0\int_0^t\frac{1}{B_u}c_u\mathrm{d}u.$$

Pero

$$B_0\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_u}{B_u}=\frac{B_0a_t}{B_t}-a_0+B_0r\int_0^t\frac{a_u}{B_u}\mathrm{d}u.$$

Al sustituir la última ecuación en la penúltima, se obtiene

$$\frac{B_0 a_t}{B_t} = a_0 + B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u \left(\mu - r \right) \mathrm{d}u + B_0 \sigma \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u \, \mathrm{d}W_u - B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} c_u \mathrm{d}u,$$

lo cual proporciona la ecuación (4).