Estocástica
FINANZAS Y RIESGO

Decisiones óptimas de portafolio cuando la tasa forward sigue el modelo Heath, Jarrow y Morton (HJM): un modelo de maximización de utilidad

Francisco Venegas-Martínez*
Abigail Rodríguez-Nava**

Fecha de recepción: 20 de enero de 2013
Fecha de aprobación: 28 de junio de 2013

* Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía. fvenegas1111@yahoo.com.mx

** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, Departamento de Producción Económica. arnava@correo.xoc.uam.mx

Resumen

En este trabajo, bajo el supuesto de que la tasa de interés es conducida por el modelo de Heath-Jarrow-Morton (1990 y 1992), se determinan las decisiones óptimas de portafolio de un agente que desea maximizar su utilidad total esperada del tipo von Neumann-Morgenstern en un horizonte de planeación infinito. Para ello se establecen los supuestos que determinan la dinámica de la tasa corta en un mundo neutral al riesgo y se obtienen las condiciones de primer orden del problema de optimización del consumidor a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) de la programación dinámica estocástica en tiempo continuo.

Clasificación JEL: G11, P36, C61.

Palabras clave: Decisiones de portafolio, consumidor racional, tasa forward y programación dinámica estocástica en tiempo continuo.

Optimum portfolio decisions when the forward rate follows the Heath, Jarrow and Morton Model (HJM): a utility maximization model.

Abstract

In this paper, under the assumption that the interest rate is driven by the model of Heath-Jarrow-Morton (1990 and 1992), the optimal portfolio decisions of an agent who wishes to maximize his total expected utility of the type von Neumann-Morgenstern in infinite planning horizon are determined. To do this, the assumptions that settle on the dynamics of the short rate on a risk-neutral world are established and the first order conditions of the optimization problem of the consumer are derived from the equation of Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) of the continuous time stochastic dynamic programming.

JEL Classification: G11, P36, C61.

Keywords: Portfolio decisions, rational consumer, forward rate continuous time stochastic dynamic programming.

1. Introducción

Una de las contribuciones de Richard Bellman (1957) a la teoría de optimización es el método de programación dinámica, el cual ha mostrado ser una herramienta útil en la solución de problemas de optimización cuando se toman decisiones en varias etapas; o en tiempo continuo en el caso límite. Dicho método se basa en el principio de optimalidad, el cual establece que dada una política óptima, cualquiera de sus subpolíticas es también óptima. Bellman y Dreyfus (1962) encontraron que el método era aplicable al cálculo de variaciones y a problemas de control óptimo. Por su parte, Kalman (1960 y 1961) encontró la relación entre la programación dinámica y la ecuación de Hamilton-Jacobi en problemas de control. Por último, Kushner (1971) propuso la versión estocástica en tiempo continuo de la programación dinámica. Para conjuntar las contribuciones de Hamilton, Jacobi y Bellman, con lo que se hace referencia a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En el caso estocástico ésta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Cuando el comportamiento de las variables económicas y financieras en el tiempo es aleatorio, se utiliza el concepto de proceso estocástico para modelar su dinámica. De manera muy frecuente, el movimiento browniano se encuentra de manera implícita o explícita en gran parte de la economía financiera, incluyendo las matemáticas financieras, cuando de ambientes estocásticos en tiempo continuo se trata; véanse por ejemplo, Venegas-Martínez (2001), (2006a y 2006b), (2008), (2009 y 2010), Hernández-Lerma (2005 y 1994), White (1980) y Björk, Myhrman y Persson (1987), entre muchos otros. Por otro lado, en los trabajos pioneros de Merton (1969 y 971) se estudiaron las decisiones de portafolio, bajo incertidumbre, en tiempo continuo en un horizonte infinito. Posteriormente, Harrison y Kreps (1979), y Harrison y Pliska (1981) relacionan el concepto de martingala con el problema de decisión de un consumidor-inversionista racional.

En este trabajo se examinan las decisiones óptimas de portafolio de un consumidor racional, es decir, de un individuo que maximiza su satisfacción por el consumo de un bien genérico. Las características distintivas de esta investigación con respecto de la literatura especializada en el tema son: 1) la tasa de interés sigue el modelo Heath, Jarrow y Morton (HJM); 2) proporciona fórmulas cerradas para las proporciones óptimas de la riqueza que el agente destina a la tenencia de activos; y 3) la propensión marginal al consumo no es constante y depende de la dinámica de la tasa *forward*.

La presente investigación está organizada como sigue: en la siguiente sección se establece la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea; en la sección 3 se plantea el problema de decisión del consumidor-inversionista racional; en la sección 4 se obtienen las decisiones óptimas de portafolio del agente; y, por último, en la sección 5 se presentan las conclusiones, destacando las limitaciones y proponiendo una agenda de investigación para enmendar las mismas.

2. Dinámica estocástica de la tasa corta

Considere un movimiento browniano estándar $\left(W_t\right)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathbb{F}, \left(\mathbb{F}_t\right)_{t\in[0,T]}, P)$. El modelo Heath-Jarrow-Morton (1990 y 1992)supone que la dinámica de la tasa *forward*, $f(t,T)$, se especifica exógenamente mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}f\left(t,T\right) = \alpha(t,T)\mathrm{d}t + \beta(t,T)\mathrm{d}W_t. \tag{1}$$

Las funciones $\alpha(t,T)$ y $\beta(t,T)$ satisfacen las siguientes propiedades

$$\int_0^T \left|\frac{\partial^k}{\partial T^k}\alpha(s,T)\right|\mathrm{d}s < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \left|\frac{\partial^k}{\partial T^k}\beta(s,T)\right|^2 \mathrm{d}s < \infty \tag{2}$$

con $k = 0,1,2.$ Por otro lado, el precio del bono cupón cero está dado por la siguiente expresión:

$$b_t = e^{-I_t}. \tag{2}$$

donde

$$I_t = -\int_t^T f(t,s)\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

En esta investigación se considera el caso particular:

$$\beta(t,T) = \tilde{\sigma}_r\,. \tag{4}$$

Para obtener la diferencial del bono, $\mathrm{d}b_t$, es necesario hacer uso de la regla de Leibnitz, esto es,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_t &= -\mathrm{d}\left(\int_t^T f\left(t,u\right)\mathrm{d}u\right)\\
&= -\frac{\partial\left(\int_t^T f\left(t,u\right)\mathrm{d}u\right)}{\partial t}\mathrm{d}t\\
&= -\left[\left(\int_t^T \frac{\partial f\left(t,u\right)}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u + f\left(t,T\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + f\left(t,t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\
&= -\left[\int_t^T \frac{\partial f\left(t,u\right)}{\partial t}\mathrm{d}u + f\left(t,t\right)\mathrm{d}t\right],\\
&= -\left[\int_t^T \mathrm{d}f\left(t,u\right)\mathrm{d}u + f\left(t,t\right)\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

Si se sustituye d*f* en la ecuación anterior se obtiene

$$\mathrm{d}I_t = -\left[\int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u + \left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}W_t - r_t\mathrm{d}t\right], \qquad (5)$$

En virtud de que $b_t(I_t) = e^{-I_t}$, es necesario utilizar el lema de Itô para obtener el cambio marginal en el precio del bono, db_t, lo cual conduce a

$$\mathrm{d}b_t = b_t\left(r_t - \int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \beta(t,u)\right)^2\right)\mathrm{d}t - \left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}W_t. \ (6)$$

A partir de la expresión (6), en un mundo neutral al riesgo, debe cumplirse que

$$\int_t^T \alpha(t,u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)^2. \qquad (7)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de *t*, se sigue que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\int_t^T \alpha(t,u)\,\mathrm{d}u\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)^2\right)}{\mathrm{d}t}.$$

Es decir,

$$\alpha(t,T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T} - \alpha(t,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T} = \left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\beta(t,T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T} - \beta(t,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T},$$

lo cual implica que

$$\alpha(t,T) = \left(\int_t^T \beta(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\beta(t,T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T}.$$

En este caso, en virtud de (4), la expresión anterior se reduce a

$$\alpha\left(t,T\right)=-\tilde{\sigma}_r^2\left(\int_t^T \mathrm{d}u\right)=-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right). \tag{8}$$

Lo anterior conduce a una expresión del cambio porcentual del precio del bono de la forma

$$\frac{\mathrm{d}b_t}{b_t}=r_t\,\mathrm{d}t-\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\mathrm{d}W_t, \tag{9}$$

Esta ecuación diferencial estocástica será añadida, en la siguiente sección, a la restricción presupuestal de la riqueza del consumidor.

3. Problema de decisión del consumidor racional

En esta sección se resuelve el problema de decisión de portafolio de un individuo que tiene vida infinita y busca maximizar su utilidad total esperada y descontada. Este agente tiene acceso a dos activos: un bono libre de riesgo de incumplimiento (emitido por el gobierno) y un título de capital (un activo riesgoso) emitido por una emisora de una bolsa de capitales. De esta manera el problema de control óptimo estocástico que el individuo desea resolver está dado por:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar}\quad \mathrm{E}\left[\int_t^T u\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+u\left(a_T\right)e^{-\delta t}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\
&\text{s. a}\\
&\mathrm{d}a_t=a_t\left(1-\theta_t\right)\frac{\mathrm{d}b_t}{b_t}+a_t\theta_t\frac{\mathrm{d}s_t}{s_t}-c_t\mathrm{d}t\\
&\mathrm{d}r_t=\left(\frac{\partial f\left(0,t\right)}{\partial t}+\tilde{\sigma}^2 t\right)\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_r\mathrm{d}W_t.
\end{aligned} \tag{10}$$

donde el parámetro δ representa la tasa subjetiva de descuento (la cual expresa qué tan ansioso está el individuo por consumir en el presente). El nivel de consumo va a depender de la riqueza real, a_t, y el cambio porcentual de ésta, $\mathrm{d}a_t$, la cual va a estar determinada por los rendimientos de la tenencia de bonos y de un activo riesgoso. Se supone que el activo riesgoso de precio (en términos de bienes), st, sigue un movimiento geométrico browniano, (cf. Black y Scholes, 1973) es decir,

$$\mathrm{d}s_t = (\mu_s \mathrm{d}t + \sigma_s \mathrm{d}U_t)s_t.$$

Los términos μ_s y σ_s son los parámetros de tendencia y volatilidad, respectivamente. El proceso que modela el riesgo de mercado es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, U_t presenta incrementos normales independientes (véase Karatzas, 1991) de tal manera que

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}U_t] = 0$$

y

$$\mathrm{Var}[\mathrm{d}U_t] = \mathrm{d}t\ .$$

Asimismo, se supone que los procesos $\mathrm{d}U_t$ y $\mathrm{d}W_t$ satisfacen

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_t, \mathrm{d}W_t) = \rho \mathrm{d}t.$$

A fin de encontrar soluciones cerradas, se propone una función de utilidad logarítmica de la forma $u(c_t) = \ln(c_t)$ (véase Karatzas, 1991). Este problema de decisión del consumidor racional puede ser resuelto mediante optimización dinámica estocástica en tiempo continuo (o control óptimo estocástico). El control es el consumo y la variable controlada es la riqueza. Para ello se plantea una función de valor de la forma:

$$J(a_t, r_t, t) = \mathrm{E}\left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta(T-t)} \mathrm{d}s + \ln(a_T) e^{-\delta(T-t)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \qquad (11)$$

la cual permite definir recursividad, es decir,

$$\begin{aligned}J\left(a_t,r_t,t\right)&=\mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t}\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta(T-t)}+\int_{t+\mathrm{d}t}^{T}\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta t}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\&=\mathrm{E}\left[\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+o\left(\mathrm{d}t\right)+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta(T-t)}+\int_{t+\mathrm{d}t}^{T}\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta t}\middle|\mathcal{F}_t\right],\\&=\mathrm{E}\left[\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+o\left(\mathrm{d}t\right)+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta(T-t)}+J\left(a_t+\mathrm{d}a_t,r_t+\mathrm{d}r_t,t+\mathrm{d}t\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\\&=\mathrm{E}\left[\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}s+o\left(\mathrm{d}t\right)+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta(T-t)}+J\left(a_t,r_t,t\right)+\mathrm{d}J\left(a_t,r_t,t\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

Al aplicar el lema de Itô, se sigue que

$$\begin{aligned}0=\mathrm{E}\Big[\;&\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)+\ln\left(a_T\right)e^{-\delta(T-t)}+J_t\mathrm{d}t+J_a\mathrm{d}a_t+J_r\mathrm{d}r_t\\&+\frac{1}{2}\left(J_{aa}\mathrm{d}a_t^2+J_{rr}\mathrm{d}r_t^2+2J_{ar}\mathrm{d}a_t\mathrm{d}r_t\right)\mid\mathcal{F}_t\;\Big]\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}0=\mathrm{E}\Big[\;&\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}+\ln\left(a_t\right)e^{-\delta(T-t)}+J_t\mathrm{d}t\\&+J_a a_t\left(\theta_t\left(\mu_s\mathrm{d}t+\sigma_s\mathrm{d}U_t\right)+\left(1-\theta_t\right)\left(r_t\mathrm{d}t-\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\mathrm{d}W_t\right)-\frac{c_t}{a_t}\mathrm{d}t\right)\\&+J_r\left(\left(\frac{\partial f\left(0,t\right)}{\partial t}+\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)\right)\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_r\mathrm{d}W_t\right)\\&+\frac{J_{aa}}{2}a_t^2\left(\theta_t^2\sigma_s^2+\left(1-\theta_t\right)^2\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\theta_t\left(1-\theta_t\right)\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)\mathrm{d}t\\&+\frac{J_{rr}}{2}\left(\tilde{\sigma}_r^2 dt\right)+J_{ra}a_t\left(\tilde{\sigma}_r^2\left(1-\theta\right)\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}_r\theta\rho\right)\mathrm{d}t\mid\mathcal{F}_t\;\Big]\end{aligned}$$

Al tomar la esperanza y dividir todo sobre dt y tomar el límite cuando dt tiende a cero, se tiene que:

$$0=\ln\left(c_s\right)e^{-\delta(T-t)}+\ln\left(a_t\right)e^{-\delta(T-t)}+J_t+J_a a_t\left(\theta_t\left(\mu_s\right)+\left(1-\theta_t\right)r-\frac{c_t}{a_t}\right)+$$

$$J_r\left(\frac{\partial f\left(0,t\right)}{\partial t}+\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)\right)+\frac{J_{aa}}{2}a_t^2\left(\theta_t^2\sigma_s^2+\left(1-\theta_t\right)^2\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\right.$$

$$\left.+\theta_t\left(1-\theta_t\right)\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)+$$

$$\frac{J_{rr}}{2}\left(\tilde{\sigma}_r^2dt\right)+J_{ra}a_t\left(\tilde{\sigma}^2\left(1-\theta\right)\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}\theta\rho\right) \qquad (12)$$

La expresión anterior se conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), la cual es una condición necesaria de máximo.

4. Decisiones óptimas de portafolio

A continuación se deriva la ecuación (12) con respecto a cada una de las variables de decisión, *i.e.*, con respecto del consumo, c_t, y la proporción de la riqueza que se asigna a la tenencia del activo riesgoso. De esta manera,

$$0=\frac{1}{c_t}e^{-\delta(T-t)}-J_a$$

y

$$0=J_a a_t\left(\mu_s-r\right)+\frac{J_{aa}}{2}a_t^2\left(2\theta_t\sigma_s^2-2\left(1-\theta_t\right)\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\left(1-2\theta_t\right)\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)$$
$$+J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}_r\rho\right),$$

lo cual conduce a

$$-\frac{2\left(J_a a_t\left(\mu_s-r_t\right)+J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}_r\rho\right)\right)}{J_{aa}a_t^2}$$
$$=2\theta_t\sigma_s^2-2\left(1-\theta_t\right)\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\left(1-2\theta_t\right)\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho$$

ó

$$\frac{J_a a_t\left(\mu_s-r_t\right)+J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}_r\rho\right)}{J_{aa}a_t^2}$$
$$=-\theta_t\sigma_s^2+\left(1-\theta_t\right)\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2-\frac{\left(1-2\theta_t\right)}{2}\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho$$

Por lo tanto,

$$\theta_t\left(-\sigma_s^2-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)$$
$$=\frac{J_a a_t\left(\mu_s-r_t\right)+J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}\rho\right)}{J_{aa}a_t^2}-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\frac{\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}{2}$$

Así,

$$\theta_t=\frac{J_a a_t\left(\mu_s-r_t\right)+J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}^2\left(T-t\right)+\tilde{\sigma}\rho\right)-J_{aa}a_t^2\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+J_{aa}a_t^2\,\frac{\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}{2}}{J_{aa}a_t^2\left(-\sigma_s^2-\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2+\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)}\tag{13}$$

Se propone ahora como candidato de solución de la función de valor a (véase Venegas-Martínez, 2006a)

$$J\left(a_t, r_t, t\right) = \left(\ln\left(a_t\right) + G\left(r_t\right)\right)e^{-\delta(T-t)},$$

donde $G\left(r_t\right)$ tiene segunda derivada continua y $1/G(r_t)$ representa la propensión marginal al consumo, se sigue que

$$J_t = -\delta\left(\ln\left(a_t\right) + G\left(r_t\right)\right)e^{-\delta(T-t)}; \quad J_a = \frac{1}{a_t}e^{-\delta(T-t)}; \quad J_{aa} = -\frac{1}{a_t^2}e^{-\delta(T-t)};$$

$$J_r = G'\left(r_t\right)e^{-\delta(T-t)}; \quad J_{rr} = G''\left(r_t\right)e^{-\delta(T-t)}; J_{ar} = 0.$$

La conveniencia de introducir $G\left(r_t\right)$ en la función de valor como un término que se añade $\ln\left(a_t\right)$ es que de esta manera $G\left(r_t\right)$ sólo intervendrá en la decisión de consumo y no en las de portafolio. Si se sustituyen las expresiones anteriores los óptimos para el consumo, c_t, y la proporción, θ_t, se tiene que

$$c_t = \frac{a_t}{G\left(r_t\right)},$$

y

$$\theta_t = \frac{J_a a_t\left(\mu_s - r_t\right) + J_{ra}a_t\left(-\tilde{\sigma}^2\left(T-t\right) + \tilde{\sigma}\rho\right) - J_{aa}a_t^2\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + J_{aa}a_t^2\dfrac{\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}{2}}{J_{aa}a_t^2\left(-\sigma_s^2 - \tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + \sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{-\delta(T-t)}}{a_t}a_t\left(\mu_s - r_t\right) + \dfrac{e^{-\delta(T-t)}}{a_t}a_t\left(-\tilde{\sigma}^2\left(T-t\right) + \tilde{\sigma}\rho\right) - \dfrac{e^{-\delta(T-t)}}{-a_t^2}a_t^2\tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + \dfrac{e^{-\delta(T-t)}}{-a_t^2}a_t^2\dfrac{\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}{2}}{\dfrac{e^{-\delta(T-t)}}{-a_t^2}a_t^2\left(-\sigma_s^2 - \tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + \sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho\right)}$$

$$= \frac{\left(\mu_s - r_t\right) - \tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + \dfrac{\sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}{2}}{-\sigma_s^2 - \tilde{\sigma}_r^2\left(T-t\right)^2 + \sigma_s\tilde{\sigma}_r\left(T-t\right)\rho}$$

La expresión anterior proporciona la proporción óptima de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia del activo riesgoso y es independiente de $G(r)$. Obviamente, la proporción complementaria $1-\theta_t$ es destinada a la tenencia de bonos. Como puede observarse, la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia del activo riesgoso depende del excedente que el rendimiento medio del activo riesgoso (una acción) tiene sobre la tasa de interés. Asimismo dicha proporción depende de las volatilidades de la tasa y de la acción y del coeficiente de correlación entre los factores de riesgo.

5. Conclusiones

En esta investigación, en un ambiente de riesgo de mercado y bajo el supuesto de que la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea es conducida por el modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM), se determinan las decisiones óptimas de portafolio de un agente que desea maximizar su utilidad esperada del tipo von Neumann-Morgenstern por un bien genérico de consumo en un horizonte de planeación infinito. Para ello se establecen los supuestos que determinan la dinámica de la tasa corta en un mundo neutral al riesgo y se establecen las condiciones de primer orden del problema de optimización del consumidor racional a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) de la programación dinámica estocástica en tiempo continuo.

Es importante destacar que modelo propuesto permite encontrar fórmulas cerradas para las proporciones óptimas de la riqueza que el agente destina tanto a la tenencia bonos como de títulos de capital. Otro resultado importante es la propensión marginal al consumo no se es constante y depende de la dinámica de la tasa forward, la cual es conducida por el modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM).

En la agenda de investigación futura se revisará el caso de difusiones combinadas con saltos tanto para la tasa de interés como para el activo riesgoso. Por último, es importante destacar que los resultados dependen de la forma funcional particular del índice de utilidad, el análisis podría extenderse hacia otras especificaciones alternativas.

Bibliografía

Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press. Princeton, N. J.

____________. and S. Dreyfus (1962). *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press. Princeton, N. J.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Björk, T., J. Myhrman, and M. Persson (1987). "Optimal Consumption with Stochastic Prices in Continuous Time". *Journal of Applied Probability*, Vol. 24, No. 1, pp. 35-47.

Harrison, J. M. and D. M. Kreps (1979). "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets", *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, No. 3, pp. 381-408.

____________. and S. R. Pliska (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, Vol. 11, No. 3, pp. 215-260.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 4, pp. 419-440.

____________. (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.

Hernández-Lerma, O. (2005). *Control óptimo y juegos estocásticos*. EMALCA, CIMAT, Guanajuato, México.

____________. (1994). *Lectures on Continuous-Time Markov Control Processe*s. Aportaciones Matemáticas 3, Sociedad Matemática Mexicana.

Kalman, R. E. (1960). "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 35-45.

____________. and R. S. Bucy (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Journal of Basic Engineering*, Vol. 83. pp. 95-107.

Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition, Springer-Verlag, New York.

Kushner, H. J. (1971). "Introduction to Stochastic Control". *Holt Publications*. New York.

Merton, R. C. (1969). *Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous Time Case*, Review of Economics and Statistics, Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.

______________. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 373-413.

Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.

______________. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

______________. (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: undiversifiable Devaluation Risk". *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.

______________. (2008). "Real Options on Consumption in a Small Open Monetary Economy". *Journal of World Economic Review*, Vol. 3, No. 2, pp. 105-115.

______________. (2009). "Temporary Stabilization in Developing Countries and Real Options on Consumption". *International Journal of Economic Research*, Vol. 6, No. 2, 237-257.

______________. (2010). "Fiscal Policy in a Stochastic Model of Endogenous Growth: the Mexican Case". *Indian Development Review*, Vol. 8, No.1-2, pp. 139-157.

White, D. J. (1980). *Recent Developments in Markov Decision Processes*. R. Hartley, L. C. Thomas, and D. J. White, Eds., Academic Press, New York.