

Modelación de Medidas y Norma en finanzas

Gauge Theory on Financial Modeling

Guillermo Sierra Juárez*

Fecha de recepción: 6 de enero de 2015

Fecha de aceptación: 26 de mayo de 2015

* Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas
gsierraj@cucea.udg.mx gsierraj@yahoo.com.mx

RESUMEN

El presente trabajo es principalmente una revisión y compilación de las principales ideas y estructura de la teoría de norma (Gauge Theory), que han tenido gran éxito en física, y que ahora se aplican al área de finanzas, en particular en los derivados financieros (teoría de Black-Scholes) con el objeto de determinar precios de opciones en presencia de arbitraje. Al final, se plantea un análisis y se contrastan los resultados de ambas valuaciones de opciones (tradicional y con arbitraje) obtenidos en términos de los parámetros de modelo y se proponen parámetros implícitos para la volatilidad y la velocidad de reacción del mercado.

Clasificación JEL: C6, G0, Y8

Palabras clave: teoría de norma, haz fibrado, arbitraje, volatilidad, velocidad de reacción del mercado.

ABSTRACT

This paper presents a revision and compilation of the main ideas and structure of Gauge Theory, which has had great success in physics and is now being applied in finance. Its application has been mainly on financial derivatives (Black-Scholes), trying to determine options' prices in the presence of arbitrage. At the end of this paper, an analysis is made of the results obtained with both options valuations (traditional and with arbitrage) obtained in terms of the model parameters, and implicit parameters for volatility and market reaction speed are proposed.

JEL Classification: C6, G0, Y8

Keyword: *Gauge theory, fiber bundle, arbitrage, volatility, market reaction speed.*

Introducción

Modelación de Medidas y Norma en finanzas¹

El trabajo presentado es principalmente una revisión resumida del trabajo de Ilinski (2001) y de sus otros trabajos, como sería Ilinski (1998). A este autor, se le reconoce como el creador de esta propuesta original en ideas y sobre todo en la parte técnica de las expresiones matemáticas. Los artículos y trabajos abarcan cientos de páginas y profundizan en cierta medida en la teoría de norma. La intención de esta propuesta es presentar de forma resumida, ordenada y con énfasis en las ideas y gráficas, los principales resultados de dichos trabajos reduciendo en lo posible la parte técnica y favoreciendo la parte geométrica. Al final se presenta una breve revisión propia de las convergencias de los valores de las opciones financieras con arbitraje a su valor de Black-Scholes y se introducen y se proponen los términos de volatilidad implícita (en términos de arbitraje) y parámetro de velocidad de mercado implícito que son los valores que hacen iguales a ambos valores de las opciones. El artículo está dirigido al público en general pero quienes tengan formación en finanzas cuantitativas y física o matemáticas podrían encontrarlo más interesante.

La ecuación y solución de Black-Scholes (Black and Scholes 1973) desde su deducción original y posteriores aproximaciones por otros métodos (p.e. binomial, simulaciones, ecuación de calor) siempre lleva implícitamente el supuesto de que el sistema se encuentra en un equilibrio. Sin embargo, los mercados en su dinámica del día a día no están permanentemente en equilibrio y las oportunidades de arbitraje son evidencia de ello. La propuesta de Ilinski (2001) es la presencia de arbitraje, es decir, un sistema fuera de equilibrio. Y aunque se suponga para mayor facilidad técnica como virtual, se llega a una ecuación y solución más general de opciones plain vanilla tipo europeas Call y Put. El arbitraje es un punto central de las finanzas moder-

¹ En lo subsecuente se mencionará también como Modelación de Teoría de Norma en Finanzas

nas y a pesar de su importancia, ya que es una forma real de generar rendimientos, se ha introducido con relativa modestia en los modelos. Por lo anteriormente expuesto, la idea de arbitraje y curvatura se estarán mencionando a lo largo de todo este trabajo.

La novedad del planteamiento es que hace uso de la teoría de norma y de los conceptos y definiciones formales como haces fibrados, curvatura, conexiones, transporte paralelo y estructura, entre otros, los cuales han obtenido resultados favorables desde hace años en ramas de la física como la gravitación y el electromagnetismo.

Se plantean las ideas geométricas análogas para el caso de finanzas, aplicándolas en conceptos de activos, divisas, acciones y valor del dinero en el tiempo. Además de la idea de circuitos en planos (plaquetas) o trayectorias locales cerradas y curvatura para intercambios financieros y su relación con el arbitraje. Este enfoque, además de por el autor en referencia, ha sido analizado por muy pocas personas en la literatura, a continuación se mencionan algunas de las que han contribuido:

En Sornette (1998) se hace una crítica a la teoría de normalización de finanzas. El autor comenta que aunque la idea en sí es interesante, ni la distribución log-normal, ni las ecuaciones de Black-Scholes demuestran la veracidad de la teoría. Reconoce que el elemento de la introducción del arbitraje aparece de forma correcta como parte de una teoría, pero uno de los problemas que enfrentan las teorías es que los mercados reales son incompletos y que su operador no es único.

En Zhou y Xiao (2010) se revisa el modelo de derivados financieros desde el punto de vista de la simetría de normalización y se muestra cómo la forma de la ecuación puede permanecer invariante bajo transformaciones de numerarias locales, además muestra la relación entre curvatura del haz fibrado y arbitraje. Los autores cambian de numeraria y se refieren a esta nueva simetría de ecuaciones de precios como un conjunto de transformaciones de norma. Esta simetría consiste en cambiar los valores de los activos o precios de los derivados por un factor como el tipo de cambio que tenga un amplio significado financiero. Todos los posibles precios del subyacente conforman el espacio de precios base y en el caso del precio de los derivados se construye un haz fibrado y su estructura de grupo consiste de transformaciones de norma. Se considera la función del precio de opciones sobre el vector de precios base con el objeto de introducir un sistema geométrico para modelar el precio de los derivados bajo transformaciones de norma y la geometría tiene un importante papel en esta aproximación.

En Ilinski y Kalini (1998) se propone un arbitraje virtual y una reacción de los especuladores, el modelo toma en cuenta la restricción al no arbitraje y las caminatas no brownianas. En el modelo se introduce el formalismo geométrico diferencial estocástico para introducir la teoría de finanzas estocásticas e introducir la teoría de arbitraje doméstico donde el mercado es modelado como un haz fibrado principal y el arbitraje corresponde a la curvatura y a la estrategia de arbitraje.

El trabajo se presenta en las siguientes secciones: en la primera se plantea la introducción de la teoría de norma dentro de las finanzas, en la segunda parte se consideran los procesos dinámicos dentro de la normalización y en la tercera sección, el caso particular de Black-Scholes y derivados. En la cuarta sección se revisa la consideración de arbitraje y las soluciones para un call y put, y se presenta un análisis gráfico en función a los parámetros. Al final se muestran las conclusiones, bibliografía y un apéndice.

1. Teoría de Norma y haz fibrado

1.1 Introducción

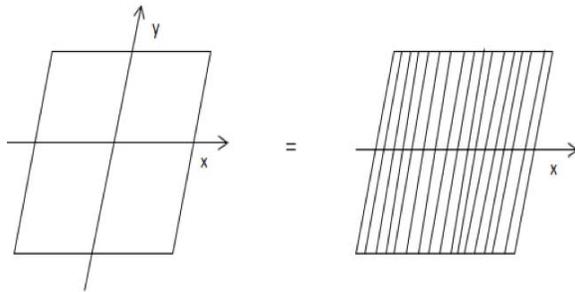
Un haz fibrado² consiste de subespacios idénticos unidos para conformar un espacio completo. Se puede mencionar, por ejemplo, un plano como una colección de líneas unidimensionales puestas sobre un eje, cada una de las líneas es idéntica a las otras desde el punto de vista geométrico. Estos subespacios se denominarán fibras y el espacio sobre el que se pegan es la base, entonces cualquier haz fibrado E consiste de una base B e idénticas fibras F que son colocadas en cada punto de la base B .

Otro ejemplo que puede considerarse es un cilindro, en donde se tiene como base un círculo y las líneas rectas pegadas a él son las fibras F , o bien la base puede ser una línea y las fibras serían los círculos pegados sobre esta base. Las dimensiones del haz fibrado (E) estarán dadas por la suma de la dimensión de la base más la dimensión de la fibra.

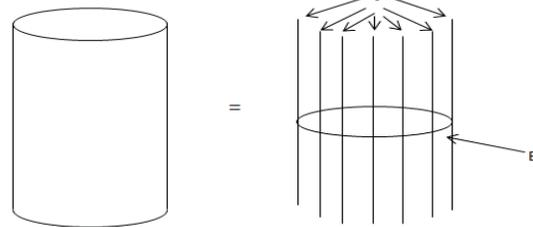
Se necesita además el concepto de comparación o de conexión en regiones locales. Si se piensa en términos de partículas se necesitan dos conjuntos de números: el primero se refiere al conjunto b que son las coordenadas de las partículas en la base B mientras que F denota las coordenadas de las partículas en la fibra $F(b)$ correspondiente al punto b . Si se continúa pensando

² La definición matemática formal de haz fibrado aparece en el Anexo 1.

Figura 1 Plano descompuesto B y F



Cilindro descompuesto B y F



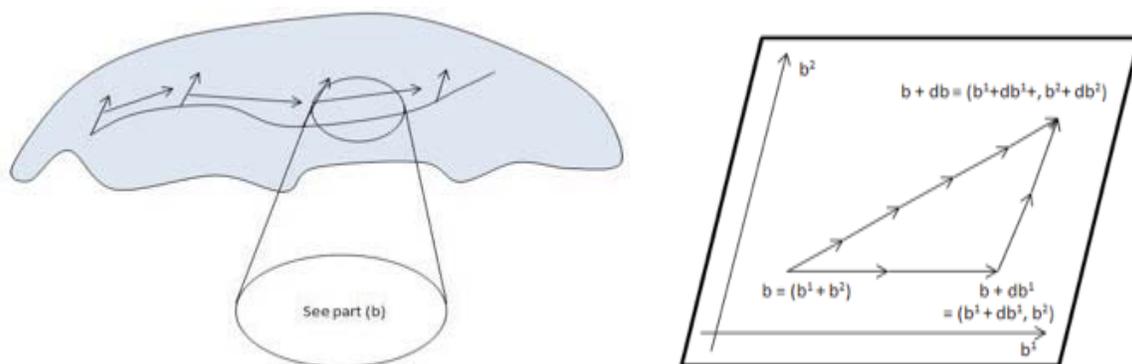
Fuente: Ilinski K. (2001).

en términos del movimiento de una partícula, ésta no puede saltar súbitamente de un punto a otro, sólo puede hacerlo a través de una serie de pasos infinitesimales por lo que será suficiente establecer una regla de comparación para puntos y sumar las diferencias.

El ajuste en términos diferenciales $\Delta F(b)$ entre sistemas coordenados de las fibras $F(b)$ y $F(b+db)$ se calcula como el producto escalar de las diferencias entre los puntos de la base db y el campo calibrado A (ver Fig. 2)

$$\Delta F(b) = db \cdot AF \equiv \sum_{i=1}^{dim B} A^i F(b) \cdot db^i$$

Figura 2. Ajuste de sistemas coordenados

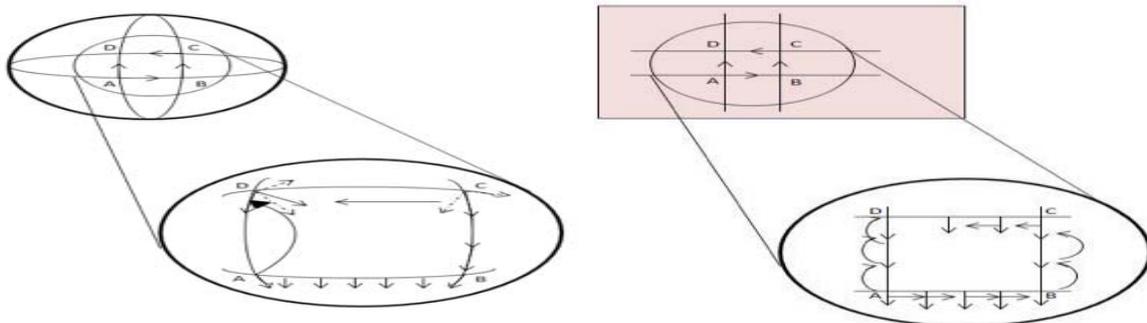


Fuente: Ilinski K. (2001).

La comparación de dos objetos distantes dependerá de la ruta tomada entre ellos en la base B, una curva y el campo de conexión a lo largo de la curva que produce un transporte paralelo a lo largo de la misma. Si se consideran las coordenadas de dos elementos de las fibras uniendo dos puntos distantes, usando para la comparación un campo de conexión y una curva y se encuentra que no hay diferencia, entonces se puede decir que el segundo elemento es el resultado del transporte paralelo del primer elemento a lo largo de la curva, en otras palabras, la diferencia en coordenadas es el resultado de un desajuste de sistemas coordenados y la diferencia covariante a lo largo de la curva es cero. Si los objetos no están conectados por transporte paralelo a lo largo de la curva hay una diferencia covariante distinta de cero a lo largo de la misma curva.

Considerando un transporte paralelo en un rectángulo de una esfera a lo largo de posibles caminos ABCD o AD, se puede ver que hay una diferencia en la orientación del vector que se transporta. El origen de esta diferencia tiene que ver con la curvatura de la esfera, es posible comparar con el caso de un rectángulo plano. La diferencia (covariante) en dicha orientación será menor conforme el radio de la esfera tiende a infinito (es decir, disminuirá conforme R^{-2} multiplicada por la superficie del triangulo esférico) y se parecerá más al caso plano. La diferencia Δ entre dos transportes paralelos a lo largo de dos curvas con el mismo fin sobre la base de algunos haz fibrados con una conexión es definido para ser igual al producto del área S encerrado por las curvas y la curvatura R del haz fibrado asociada con la conexión $\Delta=SR$, la curvatura de un haz fibrado caracteriza su geometría por tanto son objetos muy útiles para su estudio y aplicaciones . (Ver Figura 3)

Figura 3. Transporte paralelo

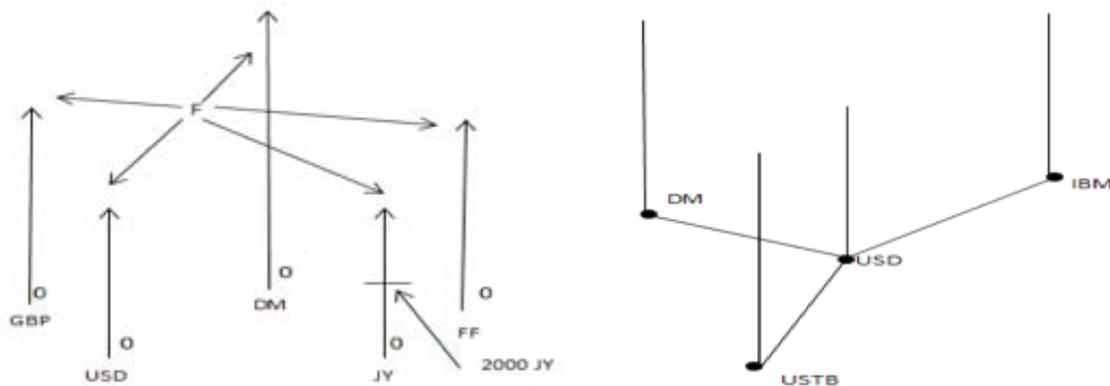


Fuente: Ilinski K.(2001

En el párrafo anterior se mostró la relación geométrica entre curvatura y arbitraje. De manera similar, un espacio de portafolios puede ser planteado como un haz fibrado donde la base está conformada por todas las posibles estructuras de portafolio que cuestan un dólar, las semi-líneas de fibras como los posibles valores de dinero de portafolio y la conexión como el valor del dinero en el tiempo.

Para el caso de divisas se puede definir la base por distintas monedas, por ejemplo, considerando las cinco siguientes: libra esterlina(GBP), dólar (USD), marco alemán (DM), franco francés (FF) y también yen japonés (JY), cada moneda correspondería a una fibra o semi-línea con coordenadas F de 0 a infinito. Un haz fibrado estará en el espacio de dinero y cualquier moneda puede ser intercambiada por otra y entonces la curva en la base consiste en todos los posibles saltos de una punto a otro de la base. El transporte paralelo asociado con cada curva es simplemente el tipo de cambio que constituye la conexión sobre esta base discreta. (ver figura 4)

Figura 4. Haz fibrado en divisas y acciones



Fuente: Ilinski K. (2001).

El procedimiento de descuento de valor en el tiempo, también tiene una interpretación geométrica y juega el papel de transporte paralelo en un haz fibrado que consiste del eje temporal como la base y las semi-lineas como las fibras. La multiplicación por el factor de descuento sirve de ajuste en sistemas coordenados en diferentes momentos del tiempo y las tasas de descuento coinciden con la conexión del campo vectorial. El valor presente neto (VPN) resume el principio básico del valor del dinero en el tiempo. Es importante recordar que la metodología de valor presente de un proyecto

establece que si el VPN es positivo conviene invertir en el proyecto y si es negativo no es recomendable la inversión.

Las ideas se pueden generalizar para construir haces fibrados para cualquier clase de activos y ajustar este espacio con el espacio del tiempo y crear otro haz fibrado que consiste de la descripción del ambiente dinámico. Para realizar esto se toma el producto de las bases que describen los movimientos del dinero a lo largo del mercado y los movimientos de los activos en el tiempo. El nuevo haz fibrado consiste: de precios en el tiempo, en el plano; en los puntos señalados por los nombres de los activos en el tiempo. Este haz permitiría comparar dinero en diferentes activos y en diferentes momentos del tiempo.

Las ganancias de rendimiento de arbitraje están siempre asociadas a flujo de intercambio de activos por dos rutas distintas teniendo puntos de inicio y finales comunes. Puede cambiarse a un problema equivalente donde en lugar de dos rutas puede estudiarse solamente una trayectoria cerrada de flujos de activos. Se utilizará el término de curvatura para representar exceso de rendimiento, asociado con la conexión definida por el tipo de cambio y la tasa de interés. La cantidad R es no negativa e igual a cero sólo si no hay arbitraje, por el contrario si una operación genera ganancias la dirección contraria genera pérdida. La cantidad R caracteriza la existencia de arbitraje sin especificar la operación particular y R será positiva.

2. Haz fibrado en finanzas y dinámica del campo de normalización

Para utilizar el concepto de haz fibrado³ dentro de la teoría de finanzas el primer paso es construir la base. Supóngase que se desea modelar un sistema financiero con $N+1$ tipos de activos que pueden ser divisas o acciones representadas en un plano dimensional por $N+1$ puntos. Para agregar el tiempo en la construcción se anexa una retícula Z para cada punto del activo, si se discretiza el tiempo hay un paso de tiempo natural, (todos los actos del trading suceden discretamente) esto da un conjunto de prebase $L_0 = (0, 1, 2, \dots, N)$. Cualquier punto de la pre-base está completamente caracterizado por la pareja de números (i, n) donde el primer número indica el número de activos y el segundo muestra el momento del tiempo.

³ Para una definición más formal de haz fibrado consultar Anexo 1.

EL siguiente paso es definir la forma de conectar los elementos de la pre-base, la conectividad es importante para definir todas las posibles trayectorias sobre la base y los correspondientes transportes paralelos, para hacer esto se introduce la matriz de vínculos $\Gamma: L_0 \times L_0 \rightarrow \{0, \pm 1\}$ definida por la siguiente regla: para cualesquiera dos elementos de la base $x \equiv (i, n) \in L_0$ y $y \equiv (k, m) \in L_0$ los elementos de la matriz de links $\Gamma(x, y)$ son cero

$$\Gamma(x, y) = 0 \quad (1)$$

Excepto en los siguientes casos.

a) $i=k$ y $n=m-1$ para la condición del i -ésimo título existe un momento que no es la fecha de vencimiento del título

$$\Gamma(x, y) = 1 \quad \Gamma(y, x) = -1 \quad (2)$$

b) $n = m, i \neq k$ y el n -ésimo momento del tiempo el i -ésimo activo puede ser cambiado por alguna cantidad del k -ésimo activo para alguna tasa, supóngase que la transacción es instantánea, en este caso

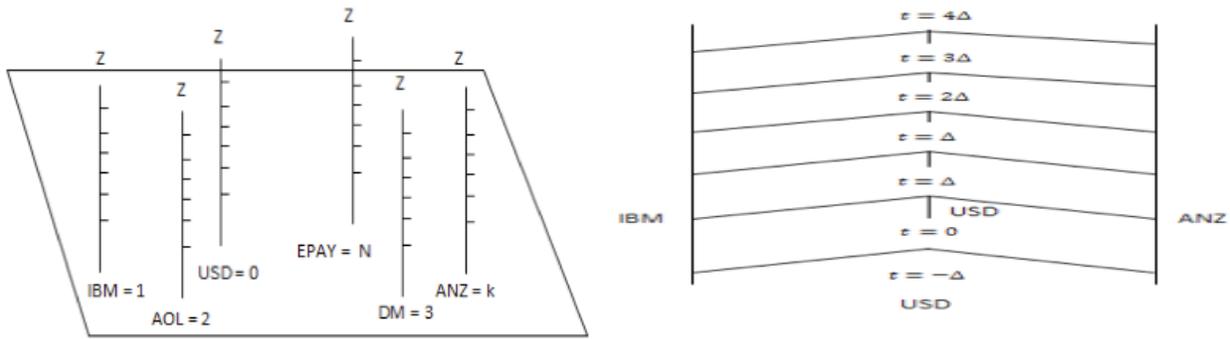
$$\Gamma(x, y) = 1 \quad (3)$$

Cuando las matrices de vínculos son distintas de cero se dice que los puntos correspondientes están conectados, la definición establece que los puntos de la base están conectados si ellos representan el mismo título y momentos consecutivos del tiempo o pertenecen al mismo instante de tiempo y pueden ser intercambiados. (Ver Figura 5)

Usando la matriz $\Gamma(\dots)$ es posible definir una curva en la base, una curva $\gamma(x, y)$ en L_0 que relaciona dos puntos $x, y \in L_0$ es un conjunto de puntos $\{x_j\}_{j=1}^p$ de la base tal que:

1. El primero y último puntos del conjunto coincide con el punto final de la curva $x_1 = x, x_p = y$
2. Para todos los segmentos $p-1$ (x_j, x_{j+1}) los elementos de la matriz de relaciones, son distintos de cero $\Gamma(x_j, x_{j+1}) = \pm 1$ para todo $j = 1, \dots, p-1$

Figura 5. Haz fibrado y conectividad en finanzas divisas y acciones



Fuente: Ilinski K.(2001).

La noción de la curva permite finalmente definir la base. L_0 puede ser dividido en un conjunto de componentes. Una componente conectada es un conjunto máximo de elementos de L_0 que puede ser relacionada a alguna curva para una pareja de elementos

En el planteamiento del sistema financiero se determina que se encuentra en el grupo de dilataciones, es decir, es un grupo de mapeos g de $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ a \mathbb{R} que actúa por multiplicación de alguna $x \in \mathbb{R}$ para alguna constante positiva $g(x) = \lambda(g)x$. Este grupo es de reescalamiento de unidades de activos con un factor de reescalamiento $\lambda(g)$. La función de transición de un haz fibrado con esta estructura de grupo corresponde a varios precios, tipos de cambio y factores de descuento. En esta estructura de grupo, la fibra que trabajará con \mathbb{R}_+

$$F = \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty) \tag{4}$$

Una sección cruzada describe la evolución en el tiempo de una asignación inicial de dinero $s(i, 0)$ donde $i=0, \dots, N$. En el $t=0$, se tienen $s(0, 0)$ unidades del activo 0, $s(1, 0)$ tiene 1 unidades del activo 1, mientras en el momento $t = m$, las correspondientes cantidades $s(0, m), s(1, m) \dots s(N, m)$ el espacio de las secciones cruzadas es el espacio de todos los posibles escenarios de movimientos de dinero o flujo de dinero. La principal función del integrando será la invariancia de normalización local, es decir, invariancia bajo la acción global de la estructura de grupo, esta sección cruzada activo cero $S(1, 0), i=0 \dots N$ en $t=0$ y se tiene $s(0, 0)$.

De lo comentado en secciones anteriores, una conexión es una regla para el transporte paralelo de un elemento de la fibra de un punto de una base x a otro punto y . Una operación $U(y)$ de transporte paralelo a lo largo de la curva γ pertenece a la estructura de grupo y actúa de la fibra F_x a la F_y

$$U(y): F_x \rightarrow F_y \quad (5)$$

El operador de transporte paralelo a lo largo de la curva γ , $U(\gamma)$ es definido como un producto de operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos que constituyen la curva γ

$$U(\gamma) = \prod_{i=1}^{p-1} U(x_i, x_{i+1}), \quad \gamma \equiv \{x_i\}_{i=1}^{p-1} \quad x_1 = x \quad x_p = y \quad (6)$$

significa que si se definen sólo los operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos elementales entonces $U(\gamma) = U^{-1}(\gamma^{-1})$ restringe a una definición de estos operadores a lo largo de los vínculos elementales con una conectividad positiva. Sumando las reglas para el transporte paralelo a lo largo de los vínculos elementales con conectividad positiva y operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos de asimetría. La definición de este conjunto es equivalente a la definición de transporte paralelo en el haz fibrado. La conectividad fue definida como la posibilidad de movimientos de los activos en el espacio y tiempo que permite dar una interpretación del transporte paralelo. Dos principios de conectividad positiva fueron definidos. El primero para conectar dos puntos (i, n) y $(i, n+1)$ representa la disposición del i -ésimo activo de una unidad de tiempo que resulta de la multiplicación de un número de activos por un factor de interés o tasa interna calculada como:

$$U((i, n), (i, n + 1)) = e^{r_i \Delta} \in G \quad (7)$$

donde Δ es una unidad de tiempo y r_i es la tasa apropiada de rendimiento para el i -ésimo activo, en el límite continuo r_i es la componente temporal del campo vectorial de conexión correspondiente al punto $(i, \Delta n)$, de forma similar el operador de transporte paralelo es definido como una segunda clase de links entre los puntos (i, n) y (k, n) si hay posibilidad de cambiar el n -ésimo momento una unidad del i -ésimo activo a $S_n^{i,k}$ unidades del k -ésimo activo.

$$U((i, n), (k, n)) = S_n^{i,k} \in G \quad (8)$$

En general, un operador de transporte paralelo a lo largo de una curva es un factor por el cual el número de unidades de activos es multiplicado como resultado de una operación de multiplicación de la curva. El resultado de transporte paralelo a lo largo de dos curvas diferentes con los mismos puntos de frontera no es igual para un conjunto genérico de operadores, una medida de diferencia es el tensor de curvatura R . Sus elementos son iguales a la multiplicación resultante después del transporte paralelo a lo largo de un círculo encerrando todas las plaquetas elementales⁴ con *links* distintos de cero en la base L

$$R_{\text{plaquetas} \rightarrow 0} = \prod_m U_m - 1 \quad (9)$$

m corre sobre todas las plaquetas $\{U_m\}$ son los transportes paralelos correspondientes a los operadores de transporte paralelos y acordando sobre la orientación.

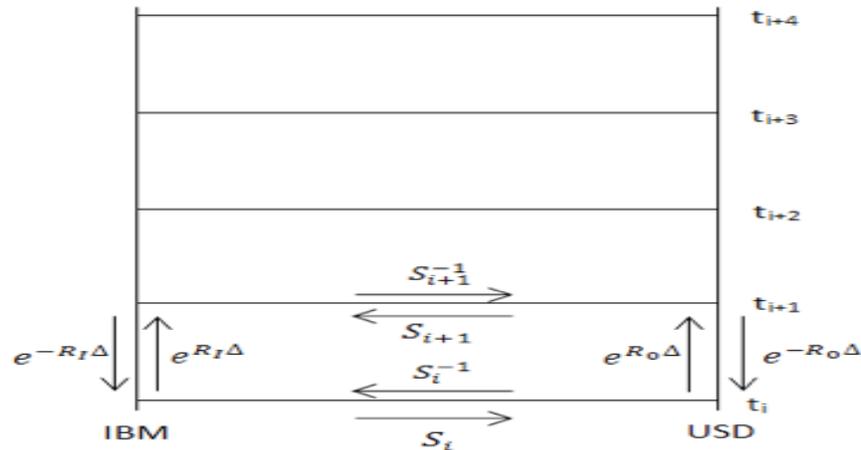
Los elementos del tensor de curvatura son el exceso de rendimientos sobre la operación, correspondientes a las plaquetas encerradas. Considere una plaqueta de elemento que involucra dos diferente activos: acciones y efectivo. Se supone que los activos puede intercambiarse con una tasa S_i , esto significa que una acción es intercambiada de S_i unidades de efectivo en algún momento t_i con la tasa inversa para las operaciones en efectivo, la operación es S_i^{-1} . El tipo de cambio S_i es considerado como un conjunto de tiempos equidistantes $\{t\}_{i=1}^N$ con saltos de tiempo $\Delta = t_{i+1} - t_i$. La tasa de interés para el efectivo es r_0 entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} , el volumen de efectivo se incrementa por un factor $e^{r_0 \Delta}$ las acciones están caracterizadas por una tasa r_1 . Como se mencionará la tasa r_1 está relacionada a la tasa promedio de las acciones.

Considere la posibilidad de hacer una operación de arbitraje entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} donde hay dos posibilidades para un inversionista que posee una unidad de efectivo en el momento t_i y quiere obtener acciones en el momento t_{i+1} . La primera posibilidad es poner efectivo en un

⁴ La curvatura relaciona al transporte paralelo alrededor de bucles cerrados que en espacios discretos son N -gons con x_1, x_2, \dots, x_N unidos consecutivamente por vínculos que se llamarán N -gons plaquetas. Se pueden asociar con transporte paralelo a lo largo de bucles, alrededor de cada plaqueta de la base.

depósito bancario con tasa de interés r_0 en el momento t_i regresando dinero en el momento t_{i+1} y comprar acciones del precio S_{i+1} cada uno. En el momento t_{i+1} los inversionistas tendrán acciones por unidad de efectivo en el momento t_i . Si esos dos números no son iguales $e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}$ y $S_i^{-1}e^{r_1\Delta}$ existirá oportunidad de arbitraje. (ver Figura 6)

Figura 6. Plaqueta acción-efectivo



Fuente: Ilinski K. (2001).

Suponga la siguiente cantidad obtenida en el circuito de la figura 6

$$R^{(2)} = S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} + S_i e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_1\Delta} - 2 \quad (10)$$

Esto es la suma del exceso de rendimientos sobre las operaciones de arbitraje de plaquetas en el límite continuo $R^{(2)}/2 \Delta$ converge al cuadrado del elemento del tensor de curvatura. En ausencia del arbitraje es equivalente a la igualdad

$$S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} = S_i e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_1\Delta} = 1 \quad (11)$$

Se pueden utilizar las cantidades para medir el arbitraje como un exceso de rendimiento. La expresión $S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} - 1$ presenta la regularización de látice (lattice) de un elemento del tensor de curvatura, esto permite escribir de una manera más formal

$$\begin{aligned}
 R^{(2)} &= U_1 U_2 U_3^{-1} U_4^{-1} + U_3 U_4 U_2^{-1} U_1^{-1} - 2 & (12) \\
 &= (R_{1234} + 1) + (R_{1234} + 1)^{-1} - 2
 \end{aligned}$$

Esta forma se puede generalizar a otras plaquetas, tales como plaquetas espacio-espacio, por ejemplo en un modelo de tipo de cambio para tres monedas, los elementos espacio-espacio del tensor de curvatura son iguales a

$$R_{123} = S_{12} S_{23} S_{31} - 1 \quad (13)$$

y el arbitraje cruzado puede ser caracterizado por la cantidad

$$R^{(2)} = S_{12} S_{23} S_{31} + S_{21} S_{13} S_{32} - 2 \quad (14)$$

2.1 Supuestos básicos

Anteriormente se ha planteado que los precios y factores de descuento tienen significado geométrico como elementos del grupo de estructura de un haz fibrado, éstos son los responsables del transporte paralelo en las direcciones de espacio y tiempo. A continuación se pueden mencionar los principales supuestos sobre la invariancia de renormalización:

Supuesto 1. Dinámica de invariancia de renormalización

Las propiedades observables y los procesos dinámicos del ambiente no dependen de la elección de unidades de los activos en cuestión.

Supuesto 2. Incertidumbre intrínseca

El ambiente financiero real es intrínsecamente incierto, dicho de otra forma, hay probabilidades distintas de cero de obtener excesos de tasas de rendimientos diferentes de las obtenidas en ambientes de certidumbre.

Supuesto 3. Principio de mínima acción

El exceso de la tasa de retorno, es decir, la desviación de la tasa de retorno sobre la tasa libre de riesgo, en cualquier operación toma el valor más pequeño posible que es permitido por el ambiente económico externo.

Suposición 4. Localidad

Significa que si una teoría es completa, la dinámica de un activo es directamente influenciada por sólo activos conectados Γ , por definición dos

puntos de la base L están Γ conectados si existiera la posibilidad de intercambiar activos.

Supuesto 5. Principio de correspondencia

Cuando el flujo de dinero no entra dentro de la teoría, ésta tiene que ser equivalente a las finanzas matemáticas estándar, en el límite de tiempo continuo se obtendrán caminatas cuasi brownianas correlacionadas con precios y factores de descuento y se reproducirán los resultados de la teoría de portafolios y derivados. Si se introducen flujos monetarios, se usarán algunos principios para desarrollar sus dinámicas, una forma de estudiar las propiedades estadísticas de movimiento de precios será con análisis de datos en tiempo real.

2.2 Construcción de la dinámica

De acuerdo a uno de los supuestos anteriores, los mercados financieros son esencialmente inciertos, sus variables son por ejemplo precios o tasas de interés o cambio que se caracterizan por funciones de probabilidad conjuntas que servirán para encontrar valores de los factores de transporte paralelo en cada relación de la base y que no servirán para dar una descripción del sistema. Se denomina a un conjunto particular de valores de los factores de transporte paralelo una configuración representada por $\{S, r\}$ y su distribución de probabilidad es la cantidad principal para construir. Se supone una distribución de probabilidad exponencial⁵

$$P(\{S, r\}) = Ne^{-A_g|S, r|} \quad (15)$$

donde N es un factor de normalización y $A_g|S, r|$ es la nueva funcional que corresponde a la acción respecto a la invariancia de normalización.

Además de acuerdo a los supuestos anteriores se debe tener una formulación invariante de norma, para asegurar lo anterior, la medida de integración tiene que ser invariante y los precios y tasas de la configuración entran en la acción en forma de producto a lo largo de las curvas cerradas en la base, es decir, esos productos son operadores de transporte paralelo a lo largo de curvas. Dichos operadores de transporte paralelo a lo largo de las

⁵ Pueden proponerse otros tipos de distribuciones, pero la exponencial representa muchas ventajas técnicas.

curvas pueden verificarse que sean resultado de una sola combinación $\{U_{ik}\}$ que se establece constante bajo la transformación general de normalización, son productos de $U_{12} U_{23}, \dots U_{n1}$ y en este caso se restringirá a la dependencia funcional de la acción de los productos. Sin pérdida de generalidad se restringirá a un conjunto de transporte paralelo cíclico al transporte paralelo a lo largo de la base, es decir, a curvas que no pueden ser reducidas.

Entonces se puede representar la acción como un expansión de series en términos de curvaturas de plaquetas elementales R

$$A_g|S, r| = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}} \alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N} (R_{\gamma_1} + 1)(R_{\gamma_2} + 1) \dots (R_{\gamma_N} + 1) \quad (16)$$

donde la suma es tomada sobre todos los posibles conjuntos de plaquetas elementales con algún coeficiente arbitrario $\alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N}$ la ecuación anterior da una forma general de una acción de normalización invariante, cualquier invariante de normalización dinámica tiene que ser descrita por una acción de este tipo.

Por otro lado, la forma general de una acción lineal en curvatura puede ser escrita como:

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}} \alpha_{\gamma} (R_{\gamma} + 1) \quad (17)$$

que es la suma sobre todas las plaquetas elementales γ_n , incluyendo diferentes orientaciones, si el coeficiente correspondiente a la plaqueta elemental no depende de la orientación, entonces se puede reescribir

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\text{plaquetas } p} \alpha_p [(R_p + 1) + (R_p + 1)^{-1} - 2] \quad (18)$$

Para ilustrar el significado de la acción, considérese un sistema de dos activos (acciones y efectivo) en una normalización fija. La acción es una invariante de normalización, por lo que es posible encontrar una transformación invariante que no cambie la dinámica pero simplifique los cálculos. Es posible elegir entre varias opciones de normalización, una de las cuales es una normalización axial en la que los elementos del grupo son tomados constantes o en la dirección del tiempo. A continuación se fija el precio de las acciones en el momento $t=0$ como S_0 , y significa que la situación de la base, la única variable dinámica es el tipo de cambio como función del

tiempo y la correspondiente medida de integración es la medida invariante dS_i/S_i . Definiendo $t_i = i\Delta, i = -\infty, \dots, \infty$ se llega a la siguiente acción como función de $\{S_i\}$

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (S_i^{-1} e^{r_1 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta} + S_i e^{-r_0 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta} - 2) \quad (19)$$

eligiendo $\alpha_i = 1/2\Delta\sigma_i^2$ en el límite $\Delta \rightarrow 0$ la expresión converge a la integral

$$A_g(S(.)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\sigma^2(\tau)} \left(\frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} - \mu \right)^2 \quad (20)$$

que corresponde a una caminata aleatoria con volatilidad $\sigma(\tau)$ dependiente del tiempo y tasa promedio del rendimiento de las acciones

$$\mu = r_0 - r_1 \quad (21)$$

se introduce $S(\tau_i)$ como $S(\tau_i) = S(t_i + \Delta/2)$ que permite representar el término $S_i^{-1} e^{r_1 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta}$ y después del desarrollo, simplificar y suponiendo $\alpha_i = 1/2\Delta\sigma_i^2$ se llega a

$$A_g(S(.)) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{S'_l(\tau_i)}{S_l} + r_l - r_0 \right) \left(\frac{S'_m(\tau_i)}{S_m} + r_m - r_0 \right) \quad (22)$$

el sistema como un todo no es conservativo, ambas tasas r_0 y r_1 son externas al sistema, además se supone certidumbre y que la capitalización de la compañía se ha incrementado, nuevas acciones por la misma cantidad han sido emitidas y dividendos han sido pagados pero no en efectivo. El número de acciones para cada acción es $e^{r_1 \Delta}$, significa que las acciones acumuladas tendrían un precio $S_1 e^{r_1 \Delta}$ mientras que el precio original fue S_0 , tomando en cuenta el descuento y la certidumbre se tiene la expresión

$$S_1 = e^{(r_0 - r_1) \Delta} S_0 \quad (23)$$

de lo anterior la tasa de rendimiento de la acción debería ser $r_0 - r_1$. La forma general de la acción con curvatura cuadrática R es representada por

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\{\gamma_n, \gamma_m\}} \alpha_{\gamma_n \gamma_m} R_{\gamma_n} R_{\gamma_m} \quad (24)$$

después la suma es tomada sobre todas las plaquetas elementales incluyendo distintas orientación $\gamma_n \gamma_m$, en el caso de un sistema de efectivo y acciones se genera un proceso estocástico que en el límite continuo con varianzas y coeficientes de correlación de una sección cruzada se puede demostrar

$$A_g(S(.)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{l,m=1}^N \frac{1}{2} (\sigma^2(\tau))_{lm}^{-1} \left(\frac{S'(\tau_i)}{S(\tau_i)} + r_1 - r_0 \right)^2 \quad (25)$$

el tipo de correlación de la descripción de activos con correlaciones que no son debidas a flujos monetarios. Es claro, que las acciones cuadráticas son casos particulares de acciones más generales y pueden ser consideradas en casos donde las fluctuaciones de arbitraje son suficientemente pequeñas y que se pueden limitar a la acción general.

3. Modelo de normalización para determinar precios de derivados

Se considerará un sólo tipo de acciones; perfecta movilidad de capitales y un portafolio con dos activos de riesgo, un parámetro para los derivados y las acciones subyacentes con el precio de la acción como un sólo factor. También se asumirá la existencia de activos libres de riesgo, depósitos bancarios con una tasa de interés r_b , acciones o derivados pueden ser intercambiados por efectivo y viceversa. Las tasas de cambio son S_i y C_i , es decir, una acción o un derivado es intercambiado por S_i o C_i unidades de efectivo en el momento t_i y las tasas inversas de cambio son S_i^{-1} y C_i^{-1} , considera el periodo que inicia en $t=0$ y vencimiento en $t=T$, es conveniente elegir el tiempo T como el vencimiento del contrato derivado, supóngase que existe el horizonte de tiempo más corto $\Delta = T/N$ y Δ es tomado como unidad de tiempo. Significa que los tipos de cambio S_i y C_i son el conjunto de tiempo equidistante $\{t_i\}_{i=0}^N, t_i = i\Delta$ que representa el transporte paralelo.

La tasa de interés es r_b entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} y el volumen de efectivo se incrementa por el factor $e^{r_b \Delta}$. Las acciones y los deriva-

dos están caracterizados por las tasas r_1 y r_2 , dichas tasas son responsables del transporte paralelo en la misma dirección.

Se propone una acción de campo de normalización que utiliza el tensor de curvatura asociada con las operaciones de plaquetas elementales. Por ejemplo, la operación de plaquetas efectivo-acciones tiene el siguiente procedimiento: un "trader" pide prestada una acción en el tiempo t_i y la vende por S_i unidades de efectivo y pone el efectivo en el banco hasta el tiempo t_{i+1} y cierra su posición corta en el tiempo t_{i+1} , pidiendo prestado $e^{r_1\Delta}S_{i+1}$ unidades de efectivo y comprando acciones, el resultado del "trader" será $e^{r_b\Delta}S_i - e^{r_1\Delta}S_{i+1}$ unidades de efectivo, el exceso de rendimiento de esta operación es:

$$Q_i^{(1)} = S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} - 1 \quad (26)$$

La ecuación tiene elementos de tensor de curvatura correspondientes a los activos de los ciclos. Si $Q_i^{(1)} \neq 0$ se puede tener un exceso de rendimiento, ésta es una operación inversa, la cantidad

$$R_i^{(1)} = (S_i^{-1} e^{r_1\Delta} S_{i+1} e^{-r_b\Delta} + S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} - 2) / \Delta \quad (27)$$

y para medir el precio equivocado (exceso de rendimiento) en operaciones en efectivo, en ausencia de precio equivocado se tiene a la igualdad

$$S_i^{-1} e^{r_1\Delta} S_{i+1} e^{-r_b\Delta} = S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} = 1 \quad (28)$$

lo mismo puede ser para otras operaciones de plaqueta, por ejemplo el elemento del tensor de curvatura para una plaqueta efectivo derivado está dada por

$$Q_i^{(2)} = C_i e^{r_b\Delta} C_{i+1}^{-1} e^{-r_2\Delta} - 1 \quad (29)$$

recuérdese que las plaquetas son invariantes de normalización, es decir, no cambian bajo una transformación de normalización reescalada. Se propone la acción de normalización más simple que depende de correlaciones de activos acción cuadrática local en tiempo

$$A_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\alpha_{11} \left(\frac{S'}{S} + r_1 - r_0 \right)^2 + \left(\frac{C'}{C} + r_2 - r_0 \right)^2 + 2\alpha_{12} \left(\frac{C'}{C} + r_2 - r_0 \right) \left(\frac{S'}{S} + r_1 - r_0 \right) \right] \quad (30)$$

aquí $\|\alpha\|$ es la inversa de la matriz de correlación de las cantidades plaquetas, la correlación es importante ya que el derivado depende del precio subyacente que causa la correlación. La acción directa del movimiento del precio subyacente, el precio sigue un movimiento geométrico browniano en ausencia del flujo de dinero, ese flujo de dinero puede cambiar significativamente la función de distribución y otras propiedades de la caminata aleatoria.

Si se selecciona una tasa libre de riesgo r_b y $r_b - r_1$ y $r_b - r_2$ tasas promedio de rendimiento sobre las acciones y derivados las variables son el precio $S(t)$ y $C(t)$ y la medida correspondiente de integración en la integral funcional para la probabilidad de transición es la medida invariante

$$\mathcal{D}C \mathcal{D}S = \prod_t \frac{dS(t)}{S(t)} \frac{dC(t)}{C(t)} \quad (31)$$

Si se fija el precio de las acciones en el tiempo $t=0$, $S_0=S(0)$, y el tipo de cambio del derivado de la acción al momento de ejercer el derivado, la ponderación de la probabilidad de las trayectorias de los precios en ausencia del flujo de dinero está dada por la acción anterior y la medida anterior. Se necesita calcular la matriz de correlación $\|C_{ij}\|$ y su inversa $\|\alpha_{ij}\|$ para sustituir en la ecuación anterior. Un instrumento derivado de una acción, el precio del derivado tiene que ser correlacionado con el precio de la acción. Es conveniente escribir la función $C(t)$, para algunas funciones desconocidas $S(t)$ se integrará $C(t)$ sobre todos las funciones sin perder generalidad.

El coeficiente de correlación C_{11} es por definición la volatilidad del precio del activo

$$C_{11} = \frac{\langle \left(\frac{1}{S} dS(t) + (r_1 - r_0) dt \right) \left(\frac{1}{S} dS(t) + (r_1 - r_0) dt \right) \rangle}{dt} = \frac{1}{\beta_1} \quad (32)$$

y se denota el segundo factor de correlación C_{12} por $\alpha(t)/2\beta_t$ se introduce

$$\alpha(t) = \frac{\langle \left(\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt\right) \left(\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt\right) \rangle}{\langle \left(\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt\right) \left(\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt\right) \rangle} \quad (33)$$

usando la expansión del lema de Ito y suponiendo que el primer término depende de dS , se encuentra una expresión para α igual a $\frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$, el coeficiente de correlación se puede escribir

$$C_{12} = \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} / 2\beta_1 \quad (34)$$

C_{22} se calcula de manera similar, la correlación en el cambio de derivados depende de la S mencionada y de la naturaleza estocástica de la función $C(S)$, la suma puede ser expresada como suma de la correlación $\frac{\alpha^2(t)}{2\beta_1}$ para S y algunas correlaciones residuales

$$C_{22} = \langle \left(\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt\right) \rangle \quad (35)$$

$$\langle \left(\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt\right) \rangle / dt = \frac{\alpha^2(t)}{2\beta_1} + \frac{(1-\alpha)^2(t)}{2\beta_2}$$

el último término desaparece si las derivadas son la acción de tal forma $\alpha = 1$ y $C_{11} = C_{12}$, la matriz es resultado

$$\|C_{ij}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\beta_1} & \frac{\alpha}{2\beta_1} \\ \frac{\alpha}{2\beta_1} & \frac{\alpha(t)^2}{2\beta_1} + \frac{(1-\alpha)^2}{2\beta_2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

y la inversa $\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2\beta_1 + \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 & \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\beta_2 \\ \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 & \frac{2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 \end{pmatrix}$

$$A_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 dt \left[\left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right)^2 \right] \quad (37)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2 dt}{(1-\alpha)^2} \left[\left(\frac{1}{C(t)} \frac{dC(t)}{dt} + (r_2 - r_b) \right) - \alpha(t) \left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right) \right]^2$$

se debe notar que

$$A_g = \sum_i \left(\beta_1 R_i^{(1)} + \frac{\beta_2}{(1-\alpha)^2} R_i^{(2,1)} \right) \quad (38)$$

donde

$$R^{(1)} = \frac{(Q^{(1)})^2}{\Delta} \quad R^{(2,1)} = \frac{(Q_i^{(2)} - \alpha_i Q_i^{(1)})^2}{\Delta} \quad (39)$$

esta acción está en un sistema de látice, el cual es considerado usando la acción en tiempo continuo.

3.1 Derivación de la ecuación de Black-Scholes

Toda la estructura matemática anterior de la teoría de normalización es el fundamento para deducir la ecuación de Black-Scholes en el límite clásico primero en ausencia de flujo monetario, el término de A_g en el lado derecho de la ecuación (37) para el precio de un activo subyacente permite usar el lema de Ito en la deducción.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{C(t)} \frac{dC(t)}{dt} + (r_2 - r_b) \right) - \alpha(t) \left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right) \right]^2 \right] \quad (40)$$

ya que $S(t)$ sigue un movimiento geométrico browniano es posible usar el lema de Ito para expandir dC y se puede reescribir el término de acción

$$\int \beta_2 dt \frac{C^2}{\left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S \right)^2} \left[\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{C} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] dt \quad (41)$$

$$- r_b \left(1 - \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} \right) + \left(r_2 - \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} r_1 \right)^2$$

la última expresión se puede simplificar si la componente de la conexión (en la que la normalización es axial) es fija de tal forma $r_2 = r_1 \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$. En el caso general los valores de S y C no serán los precios de mercado de un número fijo de acciones y derivados, en el caso de la tasa promedio del rendimiento de acciones obedece la acción $r_1 = r_b - \mu$. La normalización elegida de S corresponde a un número fijo de acciones, de la misma forma, la fijación de la normalización corresponde a C como el precio de un número fijo de contratos derivados que permitirán obtener la expresión para el término arbitrario de acción

$$\int \beta_2 dt \left(\frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - r_b \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right)^2 \quad (42)$$

En el caso clásico $\beta_2 \rightarrow \infty$, que corresponde a la ausencia de arbitraje, la acción reduce la integración funcional sobre funciones $C(t,S)$, la contribución de la trayectoria clásica es definida por la ecuación Black-Scholes para el precio de derivados financieros

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - r_b \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (43)$$

Como se observa, esta ecuación no depende de un tipo particular de derivados y sólo quedaría incluir las condiciones de frontera. Para la derivación de las cantidades de plaquetas de frontera para una opción call europea, en el vencimiento T la opción puede ser vendida o comprada por $C(T)$ unidades de efectivo pero puede ser intercambiada (junto con E unidades de efectivo) para una acción. Si el precio de la acción S es menor que el precio de ejercicio E , se descarta la opción call. El nuevo circuito crea nuevas oportunidades de arbitraje que se toman en cuenta para introducir el término βR_N , existe un nuevo arbitraje que es disponible al vencimiento en T ; se puede pedir prestado el portafolio consistente de la operación y E unidades de monedas intercambiándolo por acciones si $S(T) > E$ vendiendo acciones por $S(T)$ unidades de efectivo y comprando el portafolio otra vez, esto es, que las plaquetas exceden al rendimiento

$$Q_N = [[S(T)\theta(S(T) - E) + E\theta(E - S(T))]] [C(T) + E]^{-1} - 1 \quad (44)$$

y para la cantidad de plaqueta RN se obtiene

$$R_N' = \frac{E\theta(E-S(T))+S(T)\theta(S(T)-E)}{C(T)+E} + \frac{C(T)+E}{E\theta(E-S(T))+S(T)\theta(S(T)-E)} \quad (45)$$

en el límite clásico $\beta \rightarrow \infty$ que reproduce las condiciones de frontera para las opciones call europeas

$$C(T) = [S(T) - E]\theta(S(T) - E) \quad (46)$$

sin considerar la posibilidad de arbitraje en el tiempo T, es posible usar esta ecuación como una condición de normalización fija y no es necesario considerar adicionalmente plaquetas en la frontera.

4. Arbitraje de flujo de dinero

Para introducir el arbitraje de flujo de dinero es conveniente usar un haz fibrado de base continua. En el caso de derivado y acciones, las coordenadas en la base son (t, X_C, X_S) donde t es el tiempo, X_S es la fracción en acciones y X_C es la correspondiente fracción de derivados.

Los que realizan arbitraje, por definición explotan las oportunidades de obtener ventajas de las ineficiencias del mercado, en el espacio de configuración está restringido a un portafolio libre de riesgo, como en física o matemáticas se necesita introducir un potencial externo

$$-\lambda \int \left(x_C \frac{dC}{C} + x_S \frac{dS}{S} \right)^2 \quad (47)$$

dentro de acción de arbitraje. La acción por si misma puede ser construida usando los principios de invariancia de normalización, maximización de utilidades, perfecta movilidad de capitales, un horizonte de inversión de corto tiempo, no existencia de costos de transacción y la hipótesis de mercado

fractal. En el caso de aversión al riesgo absoluta ($\lambda \rightarrow \infty$), las trayectorias de flujo de dinero con probabilidades diferentes de cero están confinadas a reducir un sub-espacio definido por

$$X_S + X_C \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} = 0 \quad (48)$$

que elimina el término potencial que coordina el portafolio de arbitraje que está parametrizado por k:

$$X_C = k \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \quad X_S = -k \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \quad (49)$$

Por lo tanto, en la acción para el arbitraje se define un campo unidimensional con la línea como espacio de configuración. Si se supone una simplificación de que el arbitraje mantiene el portafolio con un valor máximo absoluto de k, entonces maximizando el precio, el valor máximo k_0 es dictado por la posición límite para un arbitrarista promedio, entonces el significado de los parámetros k es la fracción del portafolio completo en activos de riesgo. La suposición permite reducir el conjunto de portafolios con arbitraje a sólo dos puntos

$$\left(k_0 \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}}, -k_0 \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \quad (50 \text{ a})$$

$$\left(-k_0 \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}}, +k_0 \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \quad (50 \text{ b})$$

en esta forma el flujo de dinero de arbitraje está descrito por este modelo que permitirá usar los resultados de esos capítulos en el análisis de la reacción del mercado a fluctuaciones de arbitraje virtual.

En el caso de haz fibrado continuo es conveniente fijar la calibración, de tal forma que el precio de base de portafolios en cada punto de la base es igual a uno y las componentes correspondientes de la conexión del punto (t, X_C, X_S) son:

$$A_0 = (1 - x_S - x_C)r_b + x_S \left(r_l + \frac{dS(t)}{S(t)} \right) + x_C \left(r_2 + \frac{dC(t)}{C(t)} \right) \quad (51)$$

En el caso anterior, la matriz de transición no normalizada para el incremento del paso en la norma tiene la forma

$$P(t_i, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} e^{\beta \Delta A_0(-k_0)} & 1 \\ 1 & e^{\beta e^{\beta \Delta A_0(k_0)}} \end{pmatrix} \quad (52)$$

lo que sigue

$$A_0(\pm k_0) = r_b \pm k_0 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \right) / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (53)$$

y se puede reescribir la matriz de transición

$$P(t_i, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} \exp \left(\beta r_b \Delta - k_0 \beta \Delta \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) & 1 \\ 1 & \exp \left(r_b \Delta - k_0 \beta \Delta \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \end{pmatrix} \quad (54)$$

Normalizando e introduciendo la notación

$$\mathcal{L}_{BS} C = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \quad (55)$$

entonces se obtiene la matriz de transición

$$P(t_i, t_{i-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \left[\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta \mathcal{L}_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) X \right] \quad (56)$$

$$\left(\begin{array}{cc} e^{-\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta \mathcal{L}_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} & e^{-\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta \mathcal{L}_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} \\ e^{\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta \mathcal{L}_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} & e^{\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta \mathcal{L}_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} \end{array} \right)$$

$$\frac{dR}{dt} + \lambda R = v(t), \langle v(t) \rangle_v = 0, \langle v(t)v(t) \rangle_v = \sum \delta(t - t)^2 \quad (57)$$

Por tanto el modelo de normalización para derivados es complicado por lo que se buscan soluciones más bien por simulaciones que teóricas. Entonces se concentra en las correcciones al no arbitraje causadas por el flujo de dinero de arbitraje y posteriormente se pueden agregar los demás factores. Se propone un modelo fenomenológico para el precio de los derivados con arbitraje virtual y que sea consistente con el modelo de normalización y se generalizará la ecuación de Black-Scholes al caso de arbitraje virtual.

4.1 Modelo fenomenológico de precios con arbitraje virtual

Supóngase un momento del tiempo $\tau < t$ con una oportunidad de arbitraje en el mercado que sucede cuando el precio de la acción subyacente es $S' \equiv S(\tau)$. Se denota el rendimiento instantáneo de arbitraje por $v(\tau, S)$ donde el mercado reaccionaría y actuaría de tal forma que el arbitraje disminuiría gradualmente y los rendimientos de mercado tenderán a su estado de equilibrio en ausencia de arbitraje. El proceso de relajación puede ser descrito por la ecuación

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = F(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R}(\tau) = v(\tau, \Pi) \quad (58)$$

Se propone una función de reacción del mercado (manteniendo sólo un término) dependiente del tiempo y los coeficientes S y con el coeficiente $\{\lambda_i\}$ (que puede ser estimado de micro teoría de haces fibrados del mercado pero para ser más simple el análisis se considerará como constante) de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\lambda\mathcal{R}. \quad \mathcal{R}(\tau) = v(\tau, S') \quad (59)$$

La solución, después de sumar sobre todas las posibles fluctuaciones con frecuencias correspondientes, conduce a la siguiente expresión para el rendimiento de arbitraje al tiempo τ

$$\mathcal{R}(t, S) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty dS' e^{-\lambda(t-\tau)} P(t, S | \tau, S'), \quad t < T \quad (60)$$

donde T es el vencimiento del contrato derivado que inicia en el tiempo $t=0$. La función $P(t, S | \tau, S')$ es la frecuencia con fluctuaciones de arbitraje en el tiempo cuando el precio del subyacente era S' al tiempo τ con precio del subyacente es S. Esta función aparece en presencia de los especuladores en el mercado cuyas actividades sensibles al precio crean oportunidades de arbitraje, para especificar el proceso de arbitraje $v(t, S)$ asumiendo que las fluctuaciones en diferentes tiempos y precios subyacentes son independientes del ruido blanco con varianza $\Sigma^2 f(t)$

$$\langle v(t, S) \rangle = 0, \quad \langle v(t, S)v(t', S') \rangle = \quad (61)$$

$$\Sigma^2 \theta(T - t) f(t) \delta(t - t') \delta(S - S')$$

La función $f(t)$ es introducida al modelo como una dependencia del tiempo empírica de los rendimientos de arbitraje y suaviza la transición al arbitraje virtual cero en la fecha de expiración, la cantidad $\Sigma^2 f(t)$ puede ser estimada del mercado

$$\frac{\Sigma^2}{2\lambda} f(t) = \left\langle \left(\frac{\mathcal{L}_{BSC}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right)^2 (t) \right\rangle \quad (62)$$

Y tiene que anularse en la aproximación del vencimiento, tan pronto como se aproxima el rendimiento de arbitraje estocástico ha sido reemplazado por la ecuación

$$d\Pi = [r + \mathcal{R}(t, S)]\Pi dt \quad (63)$$

que puede ser reescrita

$$\mathcal{L}_{BS}C = \mathcal{R}(t, S) \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (64)$$

Usando el operador \mathcal{L}_{BS} queda completa la formulación del modelo fenomenológico. Un modelo de esta estructura fue derivado del modelo del sistema derivado-efectivo-acción, el modelo se reduce a Black-Scholes en el caso de que la reacción del mercado $\lambda \rightarrow \infty \Sigma = 0$

En presencia de fluctuaciones arbitrarias de arbitraje $\mathcal{R}(t, S)$, los únicos objetos que pueden ser calculados son el valor promedio y momentos de orden mayor en los derivados.

4.2 Ecuación efectiva para precios de derivados

Supóngase que la distribución de probabilidad $\mathcal{R}(t, S)$ se distribuye como una gaussiana pero puede ser mostrado que los pesos de la probabilidad pueden ser de la forma

$$P[\mathcal{R}(., .)] \sim \exp \quad (65)$$

$$\left(-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_0^\infty dt dt' dS dS' \mathcal{R}(t, S) K^{-1}(t, S | t', S') \mathcal{R}(t', S') \right)$$

donde el kernel del operador K está definido

$$K(t, S | t', S') = \theta(T-t)\theta(T-t') \int_0^\infty d\tau ds f(\tau)\theta(t-\tau)e^{-\lambda(t+t'-d\tau)} \times \quad (66)$$

$$P(t, S | \tau, s)P(t', S' | \tau, s)$$

el kernel es del orden $1/\lambda$ y se anula $\lambda \rightarrow \infty$, en particular los resultados en la siguiente ecuación por las funciones de correlación

$$\langle \mathcal{R}(t, S)\mathcal{R}(t', S') \rangle = \Sigma^2 K(t, S | t', S') \quad (67)$$

Se permitirá regresar a la ecuación dinámica para el precio del derivado

$$\mathcal{L}_{BS}C(t, S) = \mathcal{R}(t, S) \left(C(t, S) - S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} \right) \quad (68)$$

$\Sigma^2 f(t)$ juega el papel del pequeño parámetro del problema, el ruido \mathcal{R} puede ser considerado como débil y se encuentra una solución interactiva \mathcal{R} de la ecuación, al orden más bajo trivial, se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}C &= \mathcal{R} \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \mathcal{R} \left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \mathcal{L}_{BS}^{-1} \mathcal{R} \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

El cual promediando sobre todas las posibles realizaciones de la funciones \mathcal{R} da la ecuación para el precio del derivado promedio $C \equiv \langle C \rangle_{\mathcal{R}}$ incluyendo los términos proporcionales $\Sigma^2 f(t)$

$$\mathcal{L}_{BS}\bar{C}(t, S) = \Sigma^2 \int_0^\infty dt' dS' \left[\left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \mathcal{L}_{BS}^{-1} \right] \cdot (t, S | t', S') \times \quad (70)$$

$$K(t, S | t', S') \left[\left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \bar{C} \right] (t', S')$$

Con las condiciones de pago $\bar{C}(T, S) = C_{payoff}(S)$

La ecuación es un resultado central de esta sección, esta ecuación se reduce a Black-Scholes cuando $\lambda \rightarrow \infty$ o $\Sigma \rightarrow \infty$

4.3 Soluciones explícitas

Siguiendo en este orden de ideas, en esta sección se deriva la solución explícita para los precios de los derivados promedio

$$\bar{V}(t, S) = \langle V(t, S, x) \rangle \quad (71)$$

Con arbitraje virtual $X(\cdot)$ se buscarán las soluciones promedio de

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \quad (72)$$

Con condiciones de frontera

$$V(t, S)|_{t=T} = \text{Payoff}(S) \quad (73)$$

Con un proceso estocástico $r(t)$ se supone una función con la presencia de arbitraje, por ejemplo, costos de transacción u otras razones. Se supone que este proceso es independiente del proceso de los precios de las acciones, es conveniente descomponer como

$$r(t) = r_0 + x(t) \quad (74)$$

Donde $x(t)$ es la parte estocástica del retorno y r_0 es la tasa de interés libre de riesgo constante, su generalización es directa a una función no estocástica.

Lo más directo es seguir la solución de la ecuación Back Scholes con tasa de interés fija o si se cambia, también se tiene que promediar la configuración dependiente para una función arbitraria $r(t)$ para una opción call y put se tiene la fórmula

$$C(t, S) = SN(d_1(t, S)) - Ee^{-\int_t^T r(t)dt} N(d_2(t, S)) \quad (75)$$

$$P(t, S) = Ee^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} N(-d_2(t, S)) - SN(-d_1(t, S)) \quad (76)$$

Con la notación

$$d_{1(2)}(t, S) = \frac{\log(S/E) + \int_t^T r(\tau) d\tau \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (77)$$

promediando y sobre el proceso aleatorio $r(t)$ se usarán las relaciones

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (78a)$$

$$\theta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{\omega - i0} \frac{d\omega}{2\pi i}, \quad (78b)$$

Cuyos resultados en la representación integral para la función de error

$$N(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{\omega - i0} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\omega}{2\pi i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x - \omega^2/2}}{\omega - i0} \frac{d\omega}{2\pi i} \quad (79)$$

Después de reescalar la última ecuación se transforma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w - i0} e^{-\frac{yw^2}{2} + iw\beta} = N\left(\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right), \quad (80)$$

Sustituyendo la representación y promediando sobre todo el proceso aleatorio se obtienen expresiones para los precios call y put a través de la función generadora

$$\Phi(\alpha, T, t) = \left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \quad (81)$$

Cuyo valor esperado será el precio del call

$$\bar{C}(t, S) = S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{d}_1(t,S)}}{w - i0} \left\langle e^{iw \int_t^T x(\tau) d\tau} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right\rangle - \quad (82)$$

$$E e^{-r_0(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{d}_2(t,S)}}{w - i0} \left\langle e^{\int_t^T x(\tau) d\tau} \left[\frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1\right] \right\rangle$$

Donde son las expresiones de no arbitraje

$$\hat{d}_{1(2)}(t, S) = \frac{\log(S/E) + r_0(T-t) \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (83)$$

Una expresión similar puede ser derivada para la opción put europea

$$\hat{P}(t, S) = E e^{-r_0(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}} e^{iw\hat{a}_2(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{-\int_t^T x(\tau) d\tau \left[\frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1 \right]} \right\rangle - \quad (84)$$

$$S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{a}_1(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{-iw \int_t^T x(\tau) d\tau \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)} \right\rangle$$

De lo anterior se verá que las correcciones de arbitraje virtual están factorizadas y pueden ser encontradas como una función generadora $\Phi(\alpha, T, t)$ para un proceso aleatorio $r(t)$. Ésta puede ser calculada con la función generadora de un proceso Ornstein-Uhlenbeck que describe las fluctuaciones de arbitraje virtual en ausencia de costos de transacción. También se deduce la expresión aproximada explícita para un movimiento browniano la incertidumbre en el movimiento debido a los costos de transacción en ausencia de arbitraje virtual y procesos compuestos que toman en cuenta arbitraje virtual y costos de transacción.

4.4 Función generadora de movimiento browniano restringido

Se encuentra una aproximación para la función generadora cuando el proceso $x(t)$ es un movimiento browniano dentro de un cierto intervalo ($x \in [-a, a]$). Esto corresponde a la situación de costos de transacciones finitas en el intervalo donde hay rendimientos de arbitraje pero que no atrae arbitraristas y por lo tanto no es eliminado. Se promedia sobre $x(0)$ con la distribución estacionaria del movimiento browniano restringido el cual es una distribución homogénea dentro del intervalo $[-a, a]$. Tal función de probabilidad de transición obedece la ecuación de Fokker-Planck con condición de frontera

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\Sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (85)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (86)$$

que puede ser planteada como una serie

$$\psi(t, x', x) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\Sigma^2}{2}(kv)^2 t} \quad (87)$$

$$\cos[vk(x' + a)]\cos[vk(x + a)] \quad v \equiv \frac{\pi}{2a} \}$$

Que permite escribir la función generadora en forma de series de Taylor

$$\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \rangle = 1 + \alpha \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \right\rangle + \frac{\alpha^2}{2} \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \int_t^T x(s) ds \right\rangle + \dots \quad (88)$$

Evaluando los promedios, el segundo término es igual a cero debido a la simetría, se tienen las primeras contribuciones no lineales, que después de ser evaluadas y en el límite es posible aproximar el lado derecho

$$\frac{\alpha^2}{2} \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \int_t^T x(s) ds \right\rangle \approx \frac{1}{6} \alpha^2 a^2 (T - t)^2 \quad (89)$$

Interpolando se llega a una fórmula para funciones generadoras que describen ambos casos límites

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \approx \exp \left(\alpha^2 a^4 \frac{4(T-t)}{15\Sigma^2} \left(1 - e^{-\frac{5\Sigma^2(T-t)}{8a^2}} \right) \right) \quad (90)$$

En el modelo virtual y de costos de transacción se considera

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x \left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) + \Sigma \eta(t) \quad (91)$$

la cual es la versión suave con una función de reacción, la representación de la integral de trayectoria

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle = \frac{1}{norm} \int_{x(t)=x}^{x(T)=x'} Dx(\tau) \exp \left\{ - \int_t^T \frac{d\tau}{2\Sigma^2} (x^2 + \lambda^2 x^2) + \right. \quad (92)$$

$$\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau - \int_t^T \frac{\lambda^2 x^2}{2\Sigma^2} \left[\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)^2 - 1 \right] d\tau -$$

$$\frac{\lambda}{2\Sigma^2} (x^2 - 2a\sqrt{x^2+a^2}) \Big|_t^T$$

la cual tiene un promedio sobre x con la distribución estacionaria para el proceso

$$Ponderado(a, x) = norm \times \exp\left(-\frac{\lambda}{\Sigma^2}(x^2 - 2a\sqrt{x^2 + a^2})\right) \quad (93)$$

$$Ponderado(a, x) = norm \times \exp\left(-\frac{\lambda}{\Sigma^2}(x^2 - 2a\sqrt{x^2 + a^2})\right) \quad (94)$$

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \approx \exp\left(\frac{\alpha^2 \Sigma^2}{2\lambda^2} [(T-t)(1+a\xi) - B(T-t)]\right) \text{ con } \xi \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \Sigma^2}}$$

De lo anterior se llega a las fórmulas para el precio de una opción call y put plain vanilla generales que es el caso cuando en el valor de las opciones se tiene la presencia de arbitraje virtual

$$\bar{C}(t, S) = SN\left(\frac{\hat{d}_1(t, S)}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi - \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}}\right) - E e^{-r_0(T-t) + \frac{\Sigma^2}{2\lambda^2} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]} \times \quad (95)$$

$$N\left(\frac{\hat{d}_2(t, S) - \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma \sqrt{T-t}} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi - \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}}\right)$$

$$\bar{P}(t, S) = E e^{-r_0(T-t) + \frac{\Sigma^2}{2\lambda^2} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]} \times \quad (96)$$

$$N\left(\frac{-\hat{d}_2(t, S) + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma \sqrt{T-t}} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi - \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}}\right) - SN\left(\frac{-\hat{d}_1(t, S)}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi - \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}}\right)$$

donde

$$\hat{d}_{1,2}(t, s) = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + r_0(T-t) \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (97)$$

con

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \Sigma^2}} \text{ y } B(T-t) = (1 - e^{-\lambda(T-t)})/\lambda$$

4.5 Análisis de las expresiones con arbitraje

Utilizando las ecuaciones (95, 96 y 97) para la valuación de opciones call y put con arbitraje virtual, es posible a partir de un caso, sin pérdida de generalidad, deducir algunos resultados generales de comportamiento. Supóngase un call y put con precio de subyacente (S_t) de 15, un precio de ejercicio o “strike” (E) de 16, una tasa libre de riesgo de 3%, un plazo ($T-t$) de un año, una volatilidad de subyacente de 20% y diferentes propuestas de arbitraje virtual con una volatilidad (Σ) y distintos parámetros de velocidad de reacción del mercado (λ).

A partir de dichas ecuaciones se observa que los valores generales del call y del put van convergiendo a los valores del call y put tradicionales o Black-Scholes de forma más rápida conforme los valores de la velocidad de reacción del mercado (λ) se incrementa y el de la volatilidad Σ va disminuyendo. (ver Gráfica 7 y 8)

Figura 7

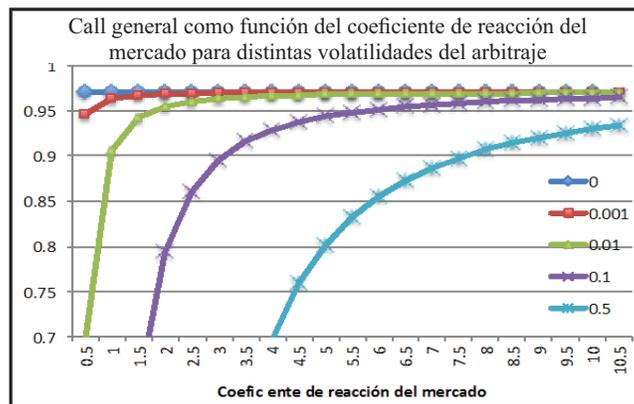
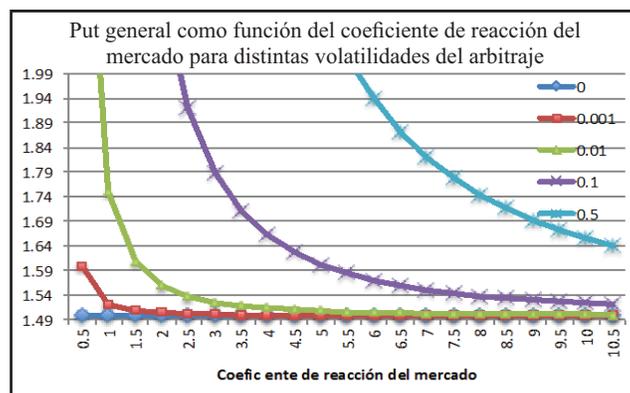


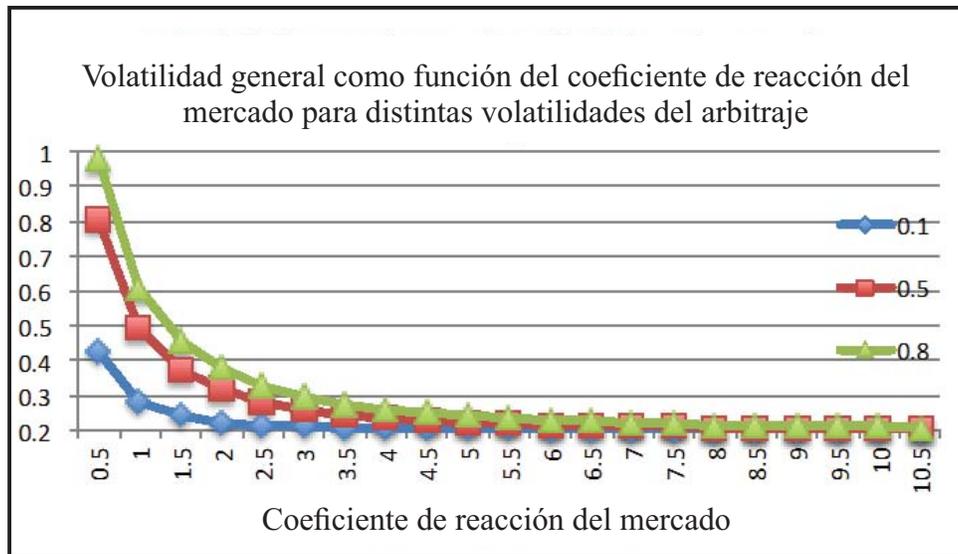
Figura 8



Fuente: Elaboración propia.

Se puede hacer también una estimación de la volatilidad implícita, que en este caso es la volatilidad que iguala el valor del call general al call Black-Scholes considerando distintos valores de reacción del mercado λ y de la volatilidad Σ . De la misma manera se puede observar cómo va acercándose a la volatilidad originalmente propuesta cuando va aumentando λ . (ver Figura 9)

Figura 9

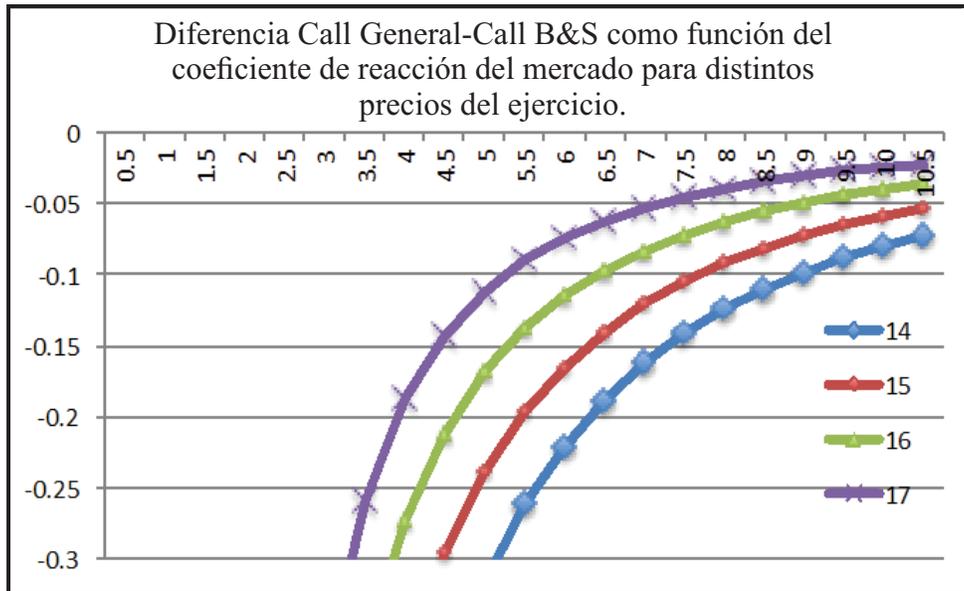


Fuente: Elaboración propia.

A partir de las mismas ecuaciones se consideran distintas velocidades de reacción del mercado y volatilidad de la función del arbitraje virtual, pero ahora cambiando los precios de ejercicio para las opciones call y put es posible observar los resultados en las Gráficas 10 y 11. Nuevamente la diferencia entre el precio general y Black-Scholes se va reduciendo.

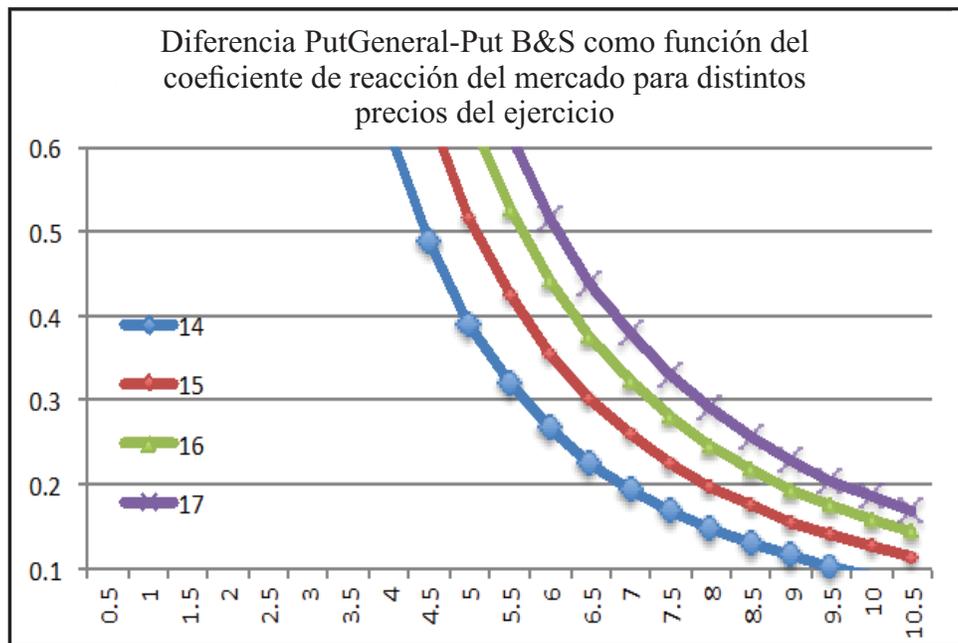
Como último ejercicio se puede hacer una estimación por medio de simulaciones del valor del parámetro de velocidad del mercado, la (implícita) que resulta cuando se iguala el precio de la opción general y la opción Black-Scholes. (ver Gráfica 12)

Figura 10



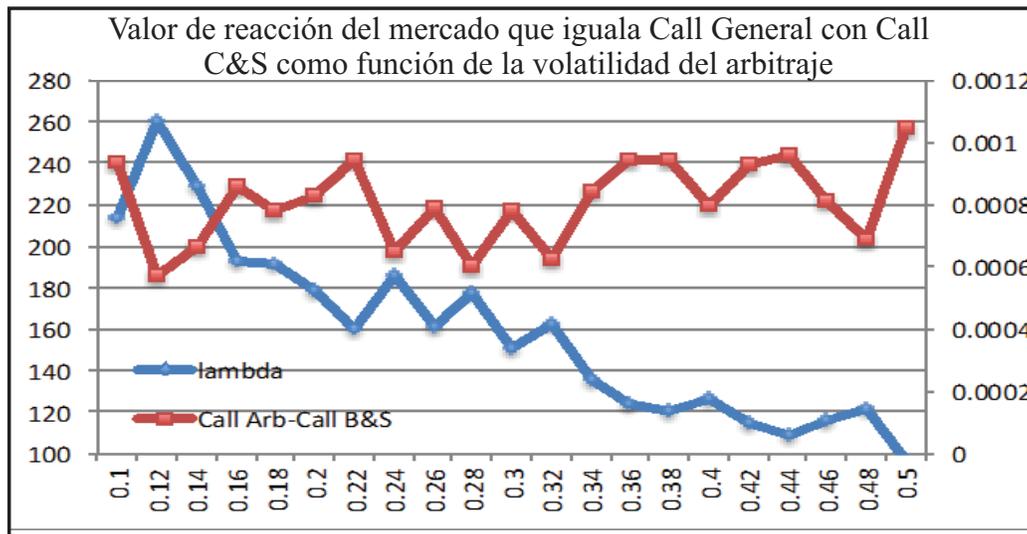
Fuente: Elaboración propia.

Figura 11



Fuente: Elaboración propia.

Figura 12



Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

Utilizando teoría de norma en finanzas, en especial aplicada en teoría de derivados y de portafolios, a través de los conceptos de haz fibrado, curvatura, transporte paralelo pueden deducirse las ecuaciones tradicionales de Black-Scholes y del modelo CAPM.

A partir del mismo formalismo de teoría de norma, se puede ampliar a la consideración fuera de equilibrio, considerando la posibilidad de arbitraje donde de la misma forma se puede deducir y proponer una solución equivalente de Black-Scholes y CAPM. El arbitraje puede considerarse como una fuerza en física y geoméricamente como una deformación de un espacio con curvatura.

Se deducen y grafican los precios de opciones call y put como función de ciertos parámetros. A medida que el coeficiente de la velocidad de reacción λ del mercado, cuando existe arbitraje virtual va creciendo el valor de call general igualmente se va aproximando al comportamiento del call tradicional de equilibrio. Contrariamente al efecto de la desviación estándar del ruido blanco y el parámetro del arbitraje virtual.

Un efecto similar se observa para la volatilidad implícita del call general, ésta va convergiendo a la volatilidad inicial del subyacente y del call Black-

Scholes conforme la velocidad de reacción del mercado aumenta y para volatilidades de arbitraje que vayan disminuyendo.

Por último la velocidad de reacción implícita (aquella que iguala los dos precios call general y B&S) se puede estimar por simulaciones y resulta que va disminuyendo conforme aumenta la volatilidad del arbitraje.

Referencias bibliográficas

- Black, F y Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81, 637-59.
- Farinelli S. (2014). "Geometric Arbitrage Theory and market Dynamics", PDF, Octubre, Disponible en <http://arxiv.org/pdf/0910.1671.pdf>.
- Ilinski K. (2001). "Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing". NY USA, John Wiley y Sons, PDF, octubre 2014, Disponible en <http://arxiv.org/abs/hep-th/9712034>.
- Ilinski K., Kalinin G. (1998). *Black-Scholes equation from gauge theory of arbitraje*, PDF.
- Sornette D. (1998). Gauge theory of Finance? PDF, octubre 2014, Disponible en <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9804045>.
- Zhou S., Xiao L. (2010). "An application of Simmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance". *Symmetry 2010*, 2, 1763-1775.

Anexo 1

1. Haz fibrado desde el punto de vista en Matemáticas

A continuación se establecerán una serie de definiciones matemáticas relacionadas con el haz fibrado (Ilinski 2001)

Definición 1. Un espacio M es un campo n -dimensional suave si se cumple lo siguiente:

1. Existe un conjunto de vecindades $U_i \in M$ tal que su unión genera el espacio completo $\cup U_i = M$.
2. Existe una función ϕ_i que mapea la vecindad en un dominio abierto de un espacio euclidiano n -dimensional y obedece a cualesquiera dos vecindades U_i e U_j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ el mapeo

$\phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$. es una función suave del espacio euclidiano, los dominios $\phi_i(U_i)$ son llamados gráficos y al conjunto completo de los gráficos se le llama Atlas.

Definición: Un haz fibrado suave es un objeto compuesto de la siguiente forma

1. Un campo suave E es llamado espacio total (haz).
2. Un campo suave B es llamado espacio base.
3. Un mapeo suave $E \rightarrow B$ llamada proyección, cuyo Jacobiano requiere tengan un rango máximo $n = \dim B$ para todo punto.
4. Un campo suave F es llamado la fibra.
5. Un grupo G de transformaciones suaves de la fibra F (esto implica que la acción $G \times F \rightarrow F$, este grupo es llamado estructura de grupo del haz fibrado).
6. Una estructura de haz fibrado vincula las entidades anteriores. La base B viene con un sistema de coordenadas vecinales o gráficos encima de cada una de las cuales del producto directo vía un difeomorfismo $\phi_i: F \times U_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ que satisface $p\phi(f, x) = x$ las transformaciones $\lambda_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i: F \times U_{ij} \rightarrow F \times U_{ij}$ donde $U_{ij} = U_i \cap U_j$ Son llamadas funciones de transición de los haces fibrados. Toda transformación λ_{ij} tiene la forma $\lambda_{ij}(f, x) = (T^{ij}f, x)$.

Donde para todas las i, j, x la transformación $T^{ij}(x)$ es un elemento de la estructura de grupo G . Un haz fibrado principal es definido como un haz cuyas fibras F coinciden con la estructura de grupo el cual actúa sobre la fibra $F = G$ como $g \cdot G \rightarrow G \quad g(x) = x$

Definición: En cualquier curva γ en la base, una conexión es un mapeo de la fibra $F_{\gamma(a)}$ asociada al punto $\gamma(a)$ de la base a la fibra $F_{\gamma(b)}$ por encima del punto $\gamma(b)$.

Y satisface los siguientes requerimientos

1. $\phi(\gamma)$ depende continuamente de la trayectoria $\gamma(t)$, un pequeño cambio en la trayectoria no puede conducir a un gran cambio como resultado del transporte paralelo.
2. $\phi(\gamma)$ es independiente de la parametrización de la trayectoria.
3. $\phi(\gamma)$ es un mapeo identidad si $\gamma(t) = \text{constante}$ si no hay trayectoria entonces no hay transporte.

Se mantienen las siguientes ecuaciones

$$\Phi(\gamma_1, \gamma_2) = \Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2), \Phi(\gamma^{-1}) = (\Phi(\gamma))^{-1}$$

la primera relación establece que el transporte paralelo a lo largo de dos curvas consecutivas es equivalente al transporte paralelo a lo largo de la curva resultante combinada. La segunda dice que el transporte paralelo a lo largo de la misma curva en direcciones opuestas genera el inverso de un transporte paralelo.

