

# Integración fraccionaria y valor en riesgo

---

Francisco López Herrera\*

Edgar Ortiz\*\*

Raúl de Jesús Gutiérrez\*\*\*

1. Memoria larga y mercados financieros	33
2. Metodologías ARFIMA Y BACKTESTING	39
3. Resultados empíricos	43
4. Conclusiones	47

Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de evaluadores anónimos y aceptan la responsabilidad por cualquier deficiencia del artículo.

\* Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Contaduría y Administración, División de Investigación.  
franciscolopezherrera@yahoo.com.mx

\*\* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias Políticas y Sociales.  
edgaro@servidor.unam.mx

\*\*\* Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Economía.  
rig2005mx@yahoo.com.mx

## RESUMEN

Investigaciones recientes sobre la volatilidad de los mercados de valores resaltan los problemas asociados con la correlación de precios dependiente en el tiempo, así como sus implicaciones en el comportamiento estocástico de los rendimientos. Numerosos enfoques y modelos empíricos han sido aplicados para examinar dicho comportamiento, pero concentrándose en el caso de los países desarrollados. Pocos estudios se han avocado a analizar la presencia de memoria larga en los mercados emergentes. Este trabajo intenta superar esas limitaciones mediante el examen de la memoria larga de los rendimientos diarios del índice de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) para el periodo enero de 1983 a diciembre de 2009. Se aplican modelos de la familia ARCH para analizar la volatilidad del mercado y para modelar los rendimientos se especifica un modelo ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average). Se realizan varias estimaciones suponiendo diferentes distribuciones para los errores (distribución normal,  $t$  de Student y  $t$  de Student asimétrica). Posteriormente, las volatilidades estimadas se utilizan para calcular el Valor en Riesgo (VaR) para las posiciones larga y corta. La evidencia empírica confirma la presencia de memoria larga manifiesta en la significancia del parámetro de integración fraccionaria para los rendimientos observados. Este resultado sugiere la posibilidad de predecir los precios futuros y obtener ganancias extraordinarias, contrario a lo que afirma la teoría de los mercados eficientes. Finalmente, es de destacar que el análisis efectuado sugiere que los modelos de volatilidad asimétrica podrían medir mejor el riesgo de mercado, especialmente cuando se considera que el proceso de los errores sigue una distribución  $t$  de Student sesgada.

Palabras clave: Valor en Riesgo, riesgo de mercado, memoria larga, modelos ARFIMA, modelos GARCH.

Clasificación *JEL*: C01, C13, C18, C22, C58, G11, G14, G32

## ABSTRACT

Recent studies on the volatility of stock markets stress problems associated with time varying correlations of prices and their implications to the stochastic behavior of returns. Numerous empirical approaches and models have been applied to examine that behavior, but emphasizing the case of the developed countries. Few studies have been devoted to identify the presence of long memory in emerging markets. This work is aimed to overcome such limitation through the examination of the long memory behavior of daily returns of the Mexican Stock Market Index for the period January 1983 to December 2009. ARCH family models are used to analyze the volatility of the market and an ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) model is specified to model the returns. Estimations are made assuming different distributions for the errors (normal, Student  $t$ , and asymmetric Student  $t$  distributions). Then, the estimated volatilities are used to compute the Value at Risk (VaR) for both long and short positions. The empirical evidence confirms the presence of long memory manifested in the significant level of the fractional differencing parameter for the observed returns. This finding suggests the possibility of predicting future prices and obtaining abnormal profits, contrary to the assertions from the efficient markets theory. The analysis also suggests that the asymmetric volatility models could be better fitted to measure market risk, especially when a Student  $t$  skewed distribution is assumed for the error process.

Keywords: Value at Risk, market risk, long memory, ARFIMA models, GARCH models.

*JEL* classification: C01, C13, C18, C22, C58, G11, G14, G32



## 1. Memoria larga y mercados financieros

Las series que se dice tienen memoria larga o dependencia de largo plazo se caracterizan porque observaciones muy distantes en el tiempo están correlacionadas de manera no trivial, por lo cual al estimar empíricamente las funciones de autocorrelación se puede observar un decaimiento lento en ellas debido a los efectos multiplicadores de largo plazo de *shocks* transitorios presentes en esas series. La posible presencia de memoria larga en los rendimientos y volatilidad de los mercados financieros ha recibido marcada atención en la literatura financiera de las últimas décadas. Su existencia indica que la información presente está altamente correlacionada con información pasada; esto es, las realizaciones de las series no son independientes en el tiempo de tal manera que rendimientos distantes influyen en realizaciones futuras. De esta forma, la presencia de memoria larga en una serie financiera facilita la predicción y abre la posibilidad de obtener utilidades especulativas, al contrario de lo que podría esperarse de acuerdo con las predicciones de la teoría de los mercados eficientes en cuanto a la aleatoriedad en los cambios observables en los precios. Otra implicación importante es la aplicación de los modelos para el análisis y la administración del riesgo que requieren de series de varianzas o volatilidades de los rendimientos, como es el caso del Valor en Riesgo (VaR) que es ampliamente utilizado como medida del riesgo de mercado. La identificación del comportamiento de memoria larga en los rendimientos de los activos financieros que son parte de un portafolio de inversión debe producir resultados más conservadores y confiables en comparación con los que se obtienen en la medición del VaR cuando no se toma en cuenta la presencia de memoria larga en la distribución de los rendimientos.

Un enfoque importante para detectar la presencia de memoria larga ha sido el de los modelos de series de tiempo ARMA con integración fraccionaria (ARFIMA), introducidos por Granger (1980) y Granger y Joyeux (1980). La evidencia presentada en cuanto a la existencia de memoria larga en los rendimientos accionarios es mixta; por ejemplo, Mills (1993) muestra evidencia de su presencia en el mercado estadounidense, en tanto que Lo (1991) ofrece

evidencia contraria. Por tanto, es posible afirmar que, en general, la existencia de memoria larga en los mercados desarrollados sigue siendo un debate abierto, porque hay evidencia significativa de memoria larga en las volatilidades de los rendimientos de esos mercados. La evidencia sobre los mercados emergentes confirma, aunque con algunas excepciones, la presencia de memoria larga tanto en los rendimientos como en las volatilidades. Baillie y Kapetanios (2005) identifican varios mercados en los cuales se observan efectos de memoria larga. Otros estudios sobre memoria larga, con énfasis en los rendimientos accionarios, incluyen Jacobsen (1996), Lobato y Savin (1998), Barkoulas, Baum y Travlos (1991), Tolvi (2003), Caporale y Gil-Alana (2004), Lux y Kaizoji (2007), Gil-Alana (2006). Lo (1991), Crato y de Lima (1994), Lobato y Savine (1998) y Caporale y Gil-Alana (2004) no encuentran evidencia de memoria larga.

Cabe destacar el estudio de Huang y Yang (1999) acerca de los índices NYSE y NASDAQ, en el que al utilizar datos intradía y aplicar una técnica modificada de rango re-escalado (R/S) comprueban la existencia de memoria larga en estos dos mercados. De manera similar, Conrad (2007), utiliza especificaciones FIGARCH y HYGARCH y también encuentra efectos significativos de memoria larga en la volatilidad del mercado de valores de Nueva York (NYSE). Finalmente, Cuñado, Gil-Alana, y Pérez de Gracia (2008) exploran el comportamiento del índice S&P 500 para el período de agosto de 1928 a diciembre de 2006. Sus resultados sugieren que los cuadrados de los rendimientos presentan un comportamiento de memoria de largo plazo. Su evidencia también indica que la volatilidad es más persistente en los mercados a la baja que en los mercados a la alza.

Lo (1991) y Cheung y Lai (1995), Yamasaki *et al*, (2005) y Wang *et al*. (2006) no encuentran evidencia de memoria larga en una muestra de acciones de Estados Unidos. Mills (1993) muestra evidencia de memoria larga para una muestra mensual de rendimientos del mercado de valores del Reino Unido. Igualmente, Andreano (2005), aplicando la metodología de Bollerslev y Jubinski (1999) encuentra evidencia de la presencia de memoria larga en los rendimientos del mercado de valores de Milán, para una muestra que va de enero de 1999 a septiembre de 2004. Igualmente, Tolvi (2003) reporta evidencia de memoria larga en el caso del mercado de valores de Finlandia. Lillo y Farmer (2004) demuestran que para el mercado de valores de Londres los signos y orden de las series obedecen a un proceso de memoria larga. Al contrario, Lobato y Savin (1998) no encuentran evidencia de memoria larga para el índice

S&P usando series diarias para una muestra de julio de 1962 a diciembre de 1994. No obstante, usando los cuadrados de los rendimientos diarios, Lobato y Savin (1998), Barkoulas, Baun y Travlos (2000) encuentran evidencia de memoria larga, lo que confirma las conclusiones de Ding *et al.* (1993), quienes afirman que los rendimientos y volatilidad de los mercados financieros pueden ser bien descritos por los procesos de memoria larga. Sin embargo, alimentando la controversia en resultados Sadique y Silvapulle (2001) presentan resultados mixtos al examinar una muestra de seis países: Japón, Corea, Malasia, Singapur, Australia, Nueva Zelanda y Estados Unidos. Sus resultados sugieren que los rendimientos de los mercados de Corea, Malasia, Singapur y Nueva Zelanda, básicamente mercados emergentes, muestran dependencia de largo plazo. Evidencia similar es presentada por Henry (2002) en su investigación de dependencia a largo plazo en los rendimientos de los índices de nueve mercados. Henry encontró evidencia de memoria larga en cuatro mercados, dos de ellos desarrollados, Alemania y Japón, y en los mercados de Corea del Sur y de Taiwan; pero no encontró memoria larga en los mercados de Estados Unidos, Reino Unido, Singapur, Hong Kong y Australia.

De hecho, en el caso de los mercados de capital emergentes, congruente con su menor nivel de eficiencia, la evidencia, en general, confirma la existencia de memoria larga en la mayoría de los mercados analizados. Assaf (2004, 2006), Assaf y Cavalcante (2005), Bellalah *et al.* (2005), Kilic (2004), y Wright (2002) aplican un modelo FIGARCH para determinar dependencia a largo plazo en la volatilidad de cinco mercados emergentes (Egipto, Brasil, Kuwait, Túnez, Turquía) y Estados Unidos. En todos los casos los FIGARCH estimados producen un parámetro de larga memoria muy significativo, con lo cual se confirman la presencia de memoria larga en la volatilidad de estos mercados. Jayasuriya (2009) encuentra memoria larga en la volatilidad de los rendimientos en una amplia muestra de 23 mercados emergentes y de frontera de varias regiones. Aplicando un modelo EGARCH con integración fraccionaria su evidencia revela memoria larga para la muestra completa que comprende de enero de 2000 a octubre de 2007. Sin embargo, no encuentra evidencia de memoria larga en un análisis por subperíodos, particularmente en el más reciente, para gran parte de los mercados analizados, lo que sugiere una tendencia hacia la eficiencia derivada de su desarrollo y de la competitividad bursátil mundial.

Los análisis de los mercados de valores emergentes a nivel individual arrojan similares resultados con algunas excepciones notables. Di Sario *et al.*

(2008) y Kasman y Torun (2007) evidencian la existencia de memoria larga en los rendimientos y volatilidad del mercado de Estambul. No obstante, aplicando métodos paramétricos FIGARCH y no paramétricos Kilic (2004) encuentra evidencia opuesta a la que generalmente se reporta de mercados emergentes, incluyendo el caso de Turquía. Su estudio revela que los rendimientos diarios no poseen características de memoria larga; sin embargo, como en el caso de mercados de capitales desarrollados, su estudio evidencia una dinámica de memoria larga en la varianza condicional, la que puede ser adecuadamente modelada con el modelo FIGARCH. Kurkmaz, Cevic y Özatac (2009) confirman estos resultados. Usando pruebas de ruptura estructural en la varianza y el modelo ARFIMA-FIGARCH no encuentran evidencia de memoria larga en los rendimientos, pero si en la volatilidad.

Con respecto a mercados emergentes asiáticos, Cajueiro y Tabak (2004) demuestran que los mercados de Hong Kong, Singapur y China presentan dependencia de largo plazo en sus rendimientos, hecho que ha sido confirmado para el caso de China. Analizando el índice del mercado Shenzhen de China, Lu, Ito y Voges (2008) encuentran evidencia significativa que señala la presencia de memoria larga y falta de eficiencia en este mercado. Aplicando modelos fraccionalmente integrados, Cheong (2007; 2008) recaba evidencia sobre memoria larga en los rendimientos absolutos, rendimientos al cuadrado y la volatilidad del mercado de valores de Malasia. También al investigar el mercado de Kuala Lumpur para el período 1992-2002, Cajueiro y Tabak (2004) encuentran memoria larga en su volatilidad, con un índice de Hurst con magnitud de 0.628. Cheong *et al.* (2007) comprueban con modelación GARCH la presencia de asimetría y memoria larga en la volatilidad también para el Kuala Lumpur Stock Exchange usando datos diarios para el período 1991-2005, con cuatro subperíodos. Tan, Cheong y Ye (2010) también reportan memoria larga en el mercado de Malasia. Aplicando la técnica de Geweke y Porter-Hudak (1983) los autores encuentran que durante 1985-2009 en que tuvieron lugar varios periodos a la alza y a la baja, el comportamiento de memoria larga fue persistente durante los primeros períodos anteriores a la crisis de 1997. Finalmente, en el caso de India, examinando series de volumen de operación, Kumar (2004) comprueba la presencia de memoria larga. Debido a la heterocedasticidad condicional en las series, Kumar aplica modelos ARFIMA-GARCH y obtiene resultados robustos sobre la presencia de memoria larga. Igualmente, Banerjee y Sahadeb (2006) encuentran evidencia de memoria larga en este mercado al analizar datos del índice SENSEX; en su estudio,

el modelo de integración fraccionaria GARCH es el que mejor se ajusta respecto a la volatilidad.

Confirmando estos resultados, Barkoulas, Baum y Travlos (2000) analizan el comportamiento de memoria larga en el mercado de valores de Atenas utilizando el análisis de regresión espectral. Los autores presentan evidencia estadísticamente significativa sobre la existencia de memoria larga en el mercado de valores griego. Sin embargo, Vougas (2004) encuentra evidencia débil sobre la presencia de memoria en el mercado de Atenas, usando un modelo ARFIMA-GARCH estimado vía máxima verosimilitud condicional.

En el caso de los mercados emergentes de América Latina la investigación sobre memoria larga en sus rendimientos y volatilidad ha sido exigua, Cavalcante y Assaf (2002) examinan el mercado de valores de Brasil y concluyen enfáticamente que la volatilidad del mercado se caracteriza por la presencia de memoria larga en tanto que encuentran poca evidencia en el caso de los rendimientos. Cajueiro y Tabak (2004) afirman que la presencia de dependencia a largo plazo en los rendimientos de los activos financieros es un hecho estilizado. Al examinar una muestra de acciones individuales en la lista del mercado de valores de Brasil, encuentran que variables específicas de las empresas explican, al menos parcialmente, la memoria larga en ese mercado.

Un par de estudios pioneros dan cuenta de la presencia de memoria larga en la BMV. Islas Camargo y Venegas Martínez (2003) al aplicar un modelo de volatilidad estocástica encuentran memoria larga en la volatilidad del índice del mercado mexicano de valores, y muestran además, los impactos negativos que puede tener este comportamiento para la cobertura con opciones europeas. Venegas Martínez e Islas Camargo (2005) presentan evidencia de memoria larga en los mercados de valores de Argentina, Brasil, Chile, México y Estados Unidos. Más recientemente López Herrera, Venegas Martínez y Sánchez Daza (2009) examinan la existencia de memoria larga tanto en los rendimientos del índice de la BMV como en la volatilidad de dichos rendimientos. La evidencia empírica que aportan con base en diversas pruebas no paramétricas y parametrizaciones de modelos de series de tiempo con integración fraccionaria en las ecuaciones de media y varianza, sugiere la presencia de dependencia de largo plazo tanto en los rendimientos como en la volatilidad de este mercado. Por otra parte, tanto López, Villagómez y Venegas (2009) como Villagómez (2010), encuentran evidencia mixta de memoria larga al estudiar los rendimientos de un conjunto de acciones mexicanas y el IPC, descubren,

también, que en el caso de las volatilidades es mayor la cantidad de evidencia que sugiere la presencia de memoria larga en los rendimientos de las acciones analizadas.

Otras investigaciones recientes también han estudiado los beneficios de la determinación de memoria larga en el análisis del riesgo. Giot y Laurent (2001) modelan el VaR para los rendimientos diarios de una muestra que incluye los índices CAC40 (Francia), DAX (Alemania), NASDAQ (Estados Unidos), Nikkei (Japón) y SMI (Suiza). También computan la falla esperada y el promedio múltiple para medir el VaR. Aplican el modelo APARCH el cual produce mejoras considerables en la predicción de VaR con horizontes de un día para las posiciones larga y corta. En un estudio similar So y Yu (2007) también examinan el desempeño de varios modelos GARCH incluyendo dos de integración fraccionaria. Incluyen los rendimientos de los índices NASDAQ de Estados Unidos y FTSE del Reino Unido y comprueban que las estimaciones de VaR con los modelos estacionarios y de integración fraccionaria son superiores a las obtenidas con el modelo de Riskmetrics con un nivel de confianza de 99 por ciento. Degiannakis (2004) compara el desempeño del VaR con modelos tipo GARCH tales como GARCH, IPARCH, APARCH y FIAPARCH. Su evidencia indica que en cuanto a los mercados de valores, el desempeño del VaR con FIAPARCH fue el mejor que los demás en los mercados de valores. El análisis del VaR que llevó a cabo Kang y Yoon (2008) aplicando Riskmetrics, confirma la relevancia de tomar en cuenta la asimetría y las colas pesadas en la distribución de los rendimientos de las acciones corporativas de tres importantes empresas en la lista del mercado de valores de Corea del Sur.

Al analizar la importancia de la curtosis y el sesgo para la determinación del VaR con mayor precisión, Brooks y Pesard (2003) comparan el VaR para el caso de cinco mercados de Asia y el índice S&P 500. Los modelos aplicados son Riskmetrics, semivarianza, GARCH, TGARCH, EGARCH y las extensiones multivariadas de los modelos tipo GARCH considerados. Sus resultados sugieren que la incorporación del efecto de asimetría genera mejores predicciones de la volatilidad, lo que a su vez mejora las estimaciones del VaR. Tu, Wong y Chang (2008) examinan el desempeño de modelos VaR que incorporan el sesgo en el proceso de innovaciones. Aplican el modelo APARCH basado en la distribución t-student sesgada y concluye que éste es el mejor modelo para la estimación del VaR, tanto para la posición corta, como para la larga, para los mercados de Hong Kong, Singapur, Australia, Corea, Malasia, Tailandia, Filipinas, Indonesia, China y Japón, aunque su desempeño no es satisfactorio en todos los casos.

En un estudio similar, McMillan y Speigh (2007) examinan series diarias de ocho mercados del área Asia-Pacífico, además de los de Estados Unidos y del Reino Unido para contar con un marco de referencia comparativo. Adoptando niveles de confianza muy restrictivos, los modelos que toman en cuenta los efectos de memoria larga mitigan subestimaciones sobre el VaR, comunes en los modelos que no consideran la asimetría y curtosis propia de la distribución de las series financieras.

## 2. Metodologías ARFIMA y BACKTESTING

### MODELOS ARFIMA

Mediante el trabajo de Granger (1980), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981) se desarrolló el concepto de integración (o diferenciación) fraccionaria para modelar procesos de series de tiempo con memoria larga. Los modelos resultantes se denominan ARFIMA (*autoregressive fractionally integrated moving average*) y se diferencian de los modelos ARMA estacionarios y ARIMA en que en la función de los rezagos  $(1 - L)^d$  el número  $d$  es diferente de cero (como en un ARMA estacionario) o de 1 como en el caso de un modelo ARMA integrado (ARIMA o proceso de raíz unitaria). Entonces, se dice que un proceso es ARFIMA  $(p, d, q)$  si los datos se generan por el proceso:

$$\phi(L)(1-L)^d = \psi(L)\varepsilon_t \quad (1)$$

donde  $d$  es un número no entero y

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j \quad (2)$$

donde  $b_0 = 1$  y el  $j$ -ésimo coeficiente autorregresivo,  $b_j$ , está dado por:

$$b_j = \frac{-d\Gamma(j-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(j+1)} = \frac{j-d-1}{j} b_{j-1}, \quad j \geq 1 \quad (3)$$

### MODELOS ARCH

Es un hecho conocido que los rendimientos accionarios diarios, al igual que otras series de rendimientos financieros, muestran varianza (volatilidad)

cambiante en el tiempo y la tendencia a que los cambios grandes en los precios sean seguidos por cambios también grandes y los cambios pequeños por cambios pequeños. La tendencia a que los cambios de precios se agrupen como racimos se origina como consecuencia de la dependencia temporal de los rendimientos de los activos. También se ha observado que la distribución de los rendimientos financieros diarios tiende a mostrar colas pesadas en comparación con la distribución normal. Por tal motivo se ha popularizado el uso del modelo ARCH propuesto inicialmente por Engle (1982) y generalizado posteriormente por Bollerslev (1986), siendo conocido a partir de entonces como el modelo GARCH; en su versión más general este modelo GARCH  $(p,q)$  se representa por:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$z_t = i.i.d.N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

(4)

De acuerdo con el GARCH  $(p, q)$ , la varianza condicionada se explica como una función lineal de los cuadrados de los errores pasados y las varianzas condicionadas pasadas. Para asegurar que las varianzas condicionadas positivas sean positivas en todo  $t$ , se requiere  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  para  $i = 0,1,2,\dots, q$  y  $\beta_j \geq 0$  para  $j = 0,1,2,\dots, p$ . Por otra parte, la condición para que el modelo sea estacionario de segundo orden es necesario  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ , si el valor de la suma es mayor o igual a 1 se tendrá un proceso con persistencia fuerte. El caso en el cual  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1$  da lugar al proceso conocido como GARCH integrado o, simplemente, IGARCH.

Aunque los modelos ARCH y GARCH pueden capturar de manera conveniente la volatilidad cambiante y los agrupamientos de volatilidad de los rendimientos, así como las colas pesadas de la distribución de los mismos, no capturan el efecto asimétrico consistente en que los rendimientos negativos son comparativamente más grandes que los rendimientos positivos aunque la magnitud del *shock* que los provoca pueda ser igual en ambos casos. Este hecho es lo que se ha dado en llamar *efecto apalancamiento* y para capturarlo se han desarrollado modelos asimétricos de la familia GARCH, uno de los cuales

es el modelo de Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), conocido popularmente como modelo GJR y que se puede expresar de manera general como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \left( \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2 \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

en el cual se tiene que  $S_{t-1}^-$  es una variable *dummy* con valor de 1 cuando el *shock* es negativo y de 0 en cualquier otro caso.

Un modelo más general es el APARCH presentado por Ding, Granger y Engle (1993), en el que se combina un exponente variante con el coeficiente de asimetría que se requiere para capturar el *efecto apalancamiento*. El modelo APARCH ( $p, q$ ) puede escribirse como:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left( |\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-1} \right)^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (6)$$

El APARCH tiene como ventaja adicional a su flexibilidad, que varios modelos pueden ser casos particulares de esa especificación.

#### VALOR EN RIESGO Y MEMORIA LARGA

En términos de la administración y análisis del riesgo, las pérdidas potenciales también están vinculadas al comportamiento de memoria larga de la volatilidad de los rendimientos de los activos de un mercado. Así, la predicción de pérdidas potenciales identificando el comportamiento de memorias larga y corta para los rendimientos y volatilidad de un activo debe producir resultados más precisos y confiables que los obtenidos con la aplicación de las metodologías tradicionales de VaR. Integrando los avances sobre el análisis de riesgo el presente trabajo examina el impacto de los modelos ARFIMA, en la estimación del VaR. Las estimaciones del VaR, para el caso de los rendimientos de la BMV, con el horizonte de un día hacia adelante se obtienen con el paquete G@ARH 4.2 (Laurent y Peters, 2006), corriéndolo sobre el programa Ox 5.0, desarrollado por Doornik (2001; 2007) y que se basa en C++. Las estimaciones obtenidas son validadas con la metodología de *backtesting*. La validación de la calidad y exactitud estadística de un modelo VaR requiere de un proceso de *backtesting*, con el fin de demostrar si la medida de riesgo cumple con ciertas propiedades teóricas requeridas por las autoridades reguladoras para estimar suficientes requerimientos de capital. Este proceso consiste en comparar las estimaciones del VaR con respecto a las pérdidas actuales del siguiente periodo.

Suponiendo que  $n = \sum_t^T I_{t+1}$  representa el número de días dentro de un periodo  $T$ , donde las pérdidas del portafolio excedieron el valor del VaR estimado, mientras que  $I_{t+1}$  es una serie de fallos del VaR que puede expresar de la siguiente forma para cada posición:

$$\text{Larga:} \quad I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_{t+1} < \text{VaR}_{t+1} \mid t \\ 0, & \text{si } R_{t+1} \geq \text{VaR}_{t+1} \mid t \end{cases}$$

$$\text{Corta:} \quad I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_{t+1} > \text{VaR}_{t+1} \mid t \\ 0, & \text{si } R_{t+1} \leq \text{VaR}_{t+1} \mid t \end{cases}$$

Aunque en la literatura existen diversas pruebas estadísticas para llevar a cabo la validación del modelo VaR, para fines de este estudio se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes propuesta por Kupiec (1995). El estadístico de la prueba Kupiec analiza estadísticamente cuando la tasa de fallo  $\alpha$  es igual a la tasa esperada, esto es,  $\alpha = 1 - p$ , en donde  $p$  es el nivel de confianza utilizado para estimar el VaR. Ahora, si  $T$  representa el número total de ensayos, entonces el número de fallos  $n$  sigue una distribución binomial con probabilidad  $\alpha$ .

De esta manera, el estadístico de la prueba de la razón de verosimilitudes propuesto por Kupiec está definido por

$$LR = 2 \ln \left[ \left( \frac{n}{T} \right)^n \left( 1 - \frac{n}{T} \right)^{T-n} \right] - 2 \ln \left[ (\alpha)^n (1 - \alpha)^{T-n} \right]$$

el cual se distribuye como una variable chi cuadrada con un grado de libertad bajo la hipótesis nula  $H_0 : \frac{n}{T} = \alpha$ . En otras palabras, la hipótesis nula implica que el modelo VaR es altamente confiable para estimar el riesgo y los requerimientos de capital mínimos, mientras que la hipótesis alternativa rechaza el modelo VaR cuando genera un número de fallos suficientemente grande o pequeño.

### 3. Resultados empíricos

Para el análisis se estimó el rendimiento del día  $t$  restándole al logaritmo del precio de ese día el logaritmo del precio del día previo y multiplicando esa diferencia por 100; es decir:  $100*(\ln P_t - \ln P_{t-1}) = r_t$ . La muestra de rendimientos va del primer día hábil de 1983 hasta el último día de operaciones de 2009, en total 6755 observaciones. Las volatilidades de los rendimientos se estimaron mediante los modelos de la familia ARCH descritos en una sección previa, estimando los parámetros correspondientes considerando para los errores tres distribuciones distintas (normal, Student y Student sesgada), en todos los casos se estimó la ecuación de la media mediante un modelo AR(2) integrado fraccionariamente.

En el Cuadro 1 se observan los resultados de la estimación de los modelos de la familia ARCH, estimados con un modelo ARFI(2) para la ecuación de la media. Casi todos los parámetros tienen valores estimados que son altamente significativos, incluso a 1%, aportando, por tanto, evidencia altamente significativa de la presencia de memoria larga en los rendimientos del mercado bursátil mexicano.

En este análisis, el potencial estadístico de cada modelo VaR para estimar apropiadamente el riesgo de mercado es determinado en términos de la tasa de fallo y los  $p$ -values de la prueba de Kupiec. De esta manera, la tasa de fallo se define como el porcentaje de rendimientos empíricos que exceden el VaR estimado para cualquier posición financiera. En este sentido, una tasa de fallo para el  $p$ -percentil más grande que el nivel  $\alpha$  % conlleva a subestimar el riesgo de los rendimientos, mientras que una tasa de fallo menor al nivel  $\alpha$ % sobreestima el riesgo por parte del modelo VaR implementado. Por otra parte, un  $p$ -value menor o igual a 0.05 es evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula del potencial estadístico de los modelos VaR para medir la exposición al riesgo.

El análisis de los resultados de los Cuadros 2 y 3 muestra que los modelos simétricos basados en la distribución normal condicional presentan un bajo potencial estadístico para estimar el VaR en ambas posiciones financieras. En este caso, la subestimación de la exposición al riesgo es claramente notable para niveles de confianza de 99% y 99.5%, mientras que los modelos GARCH, IGARCH y APARCH sobreestiman el VaR a un nivel de confianza del 95% para las posiciones corta y larga, respectivamente. Este hecho frecuentemente es esperado como consecuencia del exceso de curtosis y los diferentes niveles de asimetría que presentan los rendimientos de las series financieras. Aunque,

Cuadro 1. Modelo ARFI (2) con diferentes modelos ARCH.

		GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	GJR (1,1)	APARCH (1,1)
Errores con distribución gaussiana	$\mu$	0.210049	0.209365	0.138539	0.139045
	$d_{Arfima}$	0.058881	0.057954	0.085686	0.085162
	$\phi_1$	0.159626	0.159542	0.137237	0.137845
	$\phi_2$	-0.076916	-0.075585	-0.082367	-0.082235
	$w$	0.102092	0.066583	0.105078	0.107979
	$\alpha$	0.133607	0.15499	0.076207	0.123564
	$\beta$	0.835582	0.84501	0.837309	0.835758
	$\gamma$			0.109769	0.215185
	$\delta$				2.065445
Errores con distribución t	$\mu$	0.195432	0.19503	0.150934	0.150534
	$d_{Arfima}$	0.079041	0.077855	0.091588	0.091746
	$\phi_1$	0.140169	0.1408	0.128465	0.128322
	$\phi_2$	-0.093573	-0.09323	-0.094231	-0.094261
	$w$	0.092756	0.068614	0.096399	0.094195
	$\alpha$	0.136205	0.15591	0.086927	0.13529
	$\beta$	0.837757	0.84409	0.834155	0.835505
	$\gamma$			0.104839	0.19799
	$\delta$				1.949414
g.l.	5.874431	5.280416	6.132263	6.134289	
Errores con distribución student sesgada	$\mu$	0.19779	0.19824	0.152703	0.15230
	$d_{Arfima}$	0.07921	0.07808	0.091547	0.09171
	$\phi_1$	0.14021	0.14084	0.128559	0.12841
	$\phi_2$	-0.09346	-0.09310	-0.09415	-0.09418
	$w$	0.09278	0.06867	0.096365	0.09415
	$\alpha$	0.13615	0.15583	0.086865	0.13521
	$\beta$	0.83783	0.84417	0.834215	0.83557
	$\gamma$			0.104789	0.19804
	$\delta$	1.94910			
$\xi_{[asimetría]}$	0.00331 <sup>ns</sup>	0.00412 <sup>ns</sup>	0.0024	0.00239 <sup>ns</sup>	
Todos los coeficientes son significativos a 1%, con excepción de los que están marcados con ns = No significativo.					

los modelos simétricos basados en la distribución normal condicional no son rechazados a un nivel de confianza de 97.5%, puesto que presentan un alta tasa de éxito para medir adecuadamente el riesgo verdadero para cualquier posición financiera, excepto para el modelo IGARCH de la posición corta. De esta manera, el uso de estos modelos basados en el supuesto de normalidad puede generar catastróficas pérdidas a los inversionistas que participan en los mercados accionarios al subestimar el riesgo verdadero.

Por su parte, los modelos simétricos basados en la distribución condicional *student* proporcionan mejores estimaciones del riesgo para cualquier posición financiera y nivel de confianza a diferencia de los modelos simétricos basados en el supuesto de normalidad, excepto para el modelo IGARCH que sobreestima el riesgo para los niveles de confianza de 97.5%, 99% y 99.5% de la posición financiera corta. En términos generales, los valores de los *p*-values sustentan claramente que estos modelos alternativos capturan correctamente el efecto de las colas pesadas o anchas de la distribución de rendimientos ocasionada por los movimientos atípicos, en particular para la cola inferior don-

Cuadro 2. Tasa de fallo de los rendimientos que exceden al VaR.

$\alpha$ (%)	5%		2.5%		1%		0.5%	
Posiciones	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta
Panel A								
GARCH_n	4.77(4)	4.38(10)	2.86(8)	2.44(2)	1.70(8)	1.26(5)	1.14(8)	0.84(6)
GARCH_t	5.29(5)	4.94(1)	2.66(6)	2.30(5)	1.15(4)	0.86(2)	0.53(2)	0.37(2)
GARCH_st	5.30(6)	4.92(2)	2.66(6)	2.26(6)	1.17(5)	0.86(2)	0.55(3)	0.37(2)
Panel B								
IGARCH_n	4.50(7)	4.09(11)	2.69(7)	2.12(7)	1.51(6)	1.11(1)	1.01(6)	0.67(3)
IGARCH_t	4.99(2)	4.59(8)	2.52(1)	2.03(8)	0.93(2)	0.67(6)	0.38(4)	0.25(4)
IGARCH_st	4.99(2)	4.57(9)	2.52(1)	1.97(9)	0.95(1)	0.67(6)	0.38(4)	0.25(4)
Panel C								
GRJ_n	4.40(8)	4.77(6)	2.69(7)	2.64(3)	1.54(7)	1.39(8)	0.99(5)	0.86(7)
GRJ_t	4.93(3)	5.23(6)	2.56(2)	2.47(1)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
GRJ_st	4.99(2)	5.17(3)	2.59(4)	2.44(2)	1.08(3)	0.81(4)	0.49(1)	0.40(1)
Panel D								
APARCH_n	4.40(8)	4.75(7)	2.69(7)	2.67(4)	1.54(7)	1.38(7)	1.02(7)	0.83(5)
APARCH_t	4.93(3)	5.21(5)	2.58(3)	2.44(2)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
APARCH_st	5.00(1)	5.18(4)	2.61(5)	2.44(2)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
Los números en paréntesis indican al mejor modelo por la posición (larga/corta) y el valor de $\alpha$ (%).								

de alcanza una tasa de éxito de 100% para la familia de modelos ARCH como se puede observar en el Cuadro 3. Sin embargo, la literatura ha demostrado empíricamente la ineficiencia de estos modelos para modelar correctamente la volatilidad en aglomeraciones de los rendimientos de las series financieras entre los que se incluyen a Bollerslev (1986), Baillie y DeGenaro (1990) y de Jong, Kemma y Kloek (1992).

Cuadro 3. Resultados de los p-values de la prueba de Kupiec.

VaR	95%		97.5%		99%		99.5%	
	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta
Panel A								
GARCH_n	0.3757	0.0174	0.0659	0.7618	0	0.0402	0	0.0003
GARCH_s	0.2868	0.8339	0.3909	0.2730	0.2123	0.2314	0.7041	0.1125
GARCH_st	0.2627	0.7476	0.3909	0.2088	0.1727	0.2314	0.5838	0.1125
Panel B								
IGARCH_n	0.0555	0.0004	0.3123	0.0384	0.0001	0.3707	0.0000	0.0655
IGARCH_t	0.9666	0.1164	0.9302	0.0103	0.5736	0.0033	0.1621	0.0014
IGARCH_st	0.9666	0.1037	0.9302	0.0037	0.6614	0.0033	0.1621	0.0014
Panel C								
GRJ_g	0.0203	0.3757	0.3123	0.4808	0	0.0023	0	0.0002
GRJ_t	0.7904	0.3979	0.7488	0.8836	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258
GRJ_st	0.9666	0.5321	0.6351	0.7618	0.5106	0.1128	0.8932	0.2258
Panel D								
APARCH_n	0.0203	0.3459	0.3123	0.3909	0	0.0032	0	0.0005
APARCH_t	0.7904	0.4293	0.6910	0.7618	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258
APARCH_st	0.9889	0.4965	0.5813	0.7618	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258

El análisis de los resultados de las tasas de fallo y los  $p$ -values de la prueba de Kupieck, indican que casi todos los modelos asimétricos proporcionan estimaciones más confiables del VaR para cualquier posición financiera y nivel de confianza, en particular para los modelos GARCH, GRJ, APARCH basado en las distribuciones student tanto simétrica como sesgada. Aquí, un hallazgo importante por destacarse es que los modelos GRJ y APARCH con distribución student sesgada no sólo proporcionan estimaciones del VaR más confiables, sino también muy similares; este hecho es sustentado estadísticamente por la similitud entre las tasas de fallo y los  $p$ -values del estadístico de la prueba de Kupiec de cada modelo como se puede observar en las paneles A y B del Cuadro 3.

No obstante los resultados del análisis, el alto desempeño no es del todo satisfactorio en todos los modelos, por ejemplo, el modelo GJR con innova-

ciones normales subestima la cuantificación del riesgo de los rendimientos negativos y positivos para niveles de confianza de 99% y 99.5%, mientras que sobreestima el riesgo de los rendimientos negativos a un nivel de confianza de 95%. Por su parte, el modelo IGARCH con distribución student sesgada sobreestima el riesgo de la posición corta para los niveles de confianza de 97.5%, 99% y 99.5%, respectivamente.

#### 4. Conclusiones

En este trabajo de investigación se emplearon modelos de la familia ARCH basados en las distribuciones normal,  $t$  de Student y  $t$  de Student sesgada, con el fin de estimar la volatilidad y el valor en riesgo de las posiciones financieras larga y corta de los rendimientos de la BMV. Los resultados empíricos son muy variados para cada posición y nivel de confianza debido a que la diferencia entre los modelos estimados no es muy significativa en varios de los casos. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que los modelos asimétricos podrían tener un gran potencial para medir de manera más precisa el riesgo verdadero de los rendimientos positivos y negativos para cualquier nivel de confianza, especialmente cuando se aplica la distribución  $t$  de Student sesgada, muy posiblemente explicado porque los rendimientos de la BMV se han caracterizado por experimentar una alta volatilidad, exceso de curtosis y diferentes niveles de asimetría.

Afines con la evidencia proporcionada por otros estudios sobre anomalías del mercado y modelación de series financieras, los resultados del presente estudio tienen importantes implicaciones para la investigación sobre la fijación de precios de los activos financieros, así como para la optimización de portafolios y análisis de riesgos. Además de comprobar ineficiencia del mercado, la presencia de memoria larga invalida los tradicionales modelos de media-varianza para la optimización de portafolios de inversión, así como los modelos tradicionales de valuación de activos, el Capital Asset Pricing Model (CAPM) y el Arbitrage Pricing Model (APT) por que las formas tradicionales de inferencia estadística no son válidas ante la presencia de autocorrelaciones significativas de los precios en momentos distantes. La minimización de pérdidas potenciales mediante metodologías tradicionales como el VaR también debe ser considerada con mayor detenimiento; finalmente la valuación de productos derivados podría no ser adecuada si se aplican modelos tradicionales basados en procesos martingala.

Respuestas a estos problemas ya se encuentran en la literatura financiera con la aplicación de modelos que consideran momentos de orden superior de las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros, modelos ARCH en diversas variantes para tomar en cuenta el comportamiento heterocedástico de las distribuciones de los rendimientos, y la teoría de valores extremos y de cópulas para llevar a cabo medidas alternativas que pueden ser más precisas del riesgo de mercado. Como la aplicación de modelos tradicionales de valuación de los activos y análisis del riesgo aún prevalece en México, los resultados de este estudio sugieren que se debe dar paso no sólo a la aplicación de modelos ya probados en otras latitudes, sino sobre todo a la creación de modelos idóneos para la optimización de portafolios y análisis de riesgo fundamentados en distribuciones asimétricas como sugiere la evidencia empírica del presente estudio.

La presencia de memoria larga en la BMV también tiene importantes implicaciones para comprender y analizar el desempeño de la economía resaltando el comportamiento de su mercado de capitales. Como la dinámica de los rendimientos está estrechamente vinculada con las actitudes y expectativas, de los inversionistas, la predictibilidad de los rendimientos propicia la inversión especulativa la cual en manifestaciones extremas, con que una exhuberancia irracional y burbujas financieras y consiguientes *cracks* bursátiles y crisis financieras. Además, en congruencia con los resultados del presente estudio, puesto que los rendimientos bursátiles son dependientes en el tiempo, las decisiones de consumo, inversión y ahorro pueden volverse extremadamente sensibles a los horizontes de inversión prevalecientes en el mercado accionario, desvinculándose de los circuitos y ciclos de la economía real en la generación de crecimiento, pero profundizando las fases de alzas y caídas de la economía real, producto subyacente de la actividad especulativa, observable en particular, con la creación de complejos productos estructurados en las economías avanzadas.

Finalmente, los hallazgos del presente estudio son relevantes para los inversionistas institucionales que participan en mercados emergentes, debido a que se ha demostrado empíricamente que estos agentes económicos no sólo están expuestos a los *crashes* bursátiles, sino también a riesgos durante los auges económicos como se documenta en De Jesús y Ortiz (2009). Por extensión, este problema también afecta a los inversionistas individuales debido al efecto rebaño. La agenda de futuras investigaciones debe incluir el análisis de memoria larga de la volatilidad y su transmisión entre mercados regionales,

el análisis de la medición del riesgo de mercado con diferentes horizontes de inversión aplicando alternativas metodológicas y variantes más congruentes con el comportamiento de los mercados específicos.

## Bibliografía

- Andreano, M.S. (2005). "Common long memory in the Italian stock market". *Quaderni di statistica*, 7, pp. 107-119.
- Assaf, A. (2004). "A FIGARCH modeling of the emerging equity market of Egypt". *International Journal of Applied Business and Economic Research*, 2 (1), pp. 67-80.
- \_\_\_\_\_ (2006). "Persistence and long-range dependence in the emerging stock market of Kuwait". *Middle East Business and Economic Review*, 18, pp. 1-17.
- \_\_\_\_\_ y J. Cavalcante (2005). "Long range dependence in the returns and volatility of the Brazilian stock market". *European Review of Economics and Finance*, 4, pp. 5-20.
- Baillie, R.T. y De Genaro (1990). "Stock returns and volatility". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 203-214.
- \_\_\_\_\_ y G. Kapetanios (2005). "Testing for neglected nonlinearity in log memory models". *Queen Mary Working Paper*, 327, University of London.
- Barkoulas, J.T., C.F. Baum y N. Travlos (2000). "Long memory in the Greek stock market". *Applied Financial Economics*, 10, pp. 177-84.
- Bellalah, M., C. Aloui y E. Abaoub (2005). "Long-range dependence in daily volatility on Tunisian stock market". *International Journal of Business*, 10, pp. 191-216.
- Banerjee, A. y S. Sahadeb (2006). "Long memory property of stock returns: evidence from India". Working Paper, 589, Indian Institute of Management.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- \_\_\_\_\_ y D. Jubinski (1999). "Equity trading volume and volatility: latent information arrivals and common long-run dependencies". *Journal of Business and Economics Statistics*, 17, pp. 9-21.
- Brooks y Pesard (2003). "The effect of asymmetries in stock index return Value-at-risk estimates". *Journal of Risk Finance*, 4, pp. 29-42.

- Cajueiro, D.O., y B.M. Tabak (2004). "The Hurst's exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient". *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 336, 521-537.
- \_\_\_\_\_ y B.M. Tabak (2005). "Possible causes of long-range dependence in the Brazilian stock market". *Physica A...*, 345, pp. 635-645.
- Caporale, G.M. y L.A. Gil-Alana (2004). "Long-range dependence in daily stock returns". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 375-383.
- Cavalcante, J. y A. Assaf (2002). *Long Range Dependence in the Returns and Volatility of the Brazilian Stock Market, Working Paper*, Banco Nacional do Desenvolvimento, Río de Janeiro.
- Cheong, W.C. (2007). "A generalized discrete-time long memory volatility model for financial stock exchange". *American Journal of Applied Sciences*, 4, pp. 970-978.
- \_\_\_\_\_ (2008). "Volatility in Malaysian stock exchange: an empirical study using fractionally integrated approach". *American Journal of Applied Sciences*, 5, pp. 683-688.
- \_\_\_\_\_, A.H. Shaari Mohd Nor y Z. Isa (2007). "Asymmetry and long memory volatility: some empirical evidence using GARCH". *Physica A...*, 373, 351-364.
- Cheung, Y. y K. Lai (1995). "A Search for Long Memory in International Stock Market Returns". *Journal of International Money and Finance*, 14, 597-615.
- Conrad, C. (2007). "Non-negativity conditions for the Hyperbolic GARCH model". *KOF Working Paper*, 162, Swiss Federal Institute of Technology-KOF, Swiss Economic Institute, Zurich.
- Crato, N. y P.J.F. de Lima (1994). "Long-range dependency in the conditional variance of stock returns". *Economics Letters*, 45, pp. 281-285.
- Cuñado, J., L.A. Gil-Alana y F. Pérez de Gracia (2008). "Stock market volatility in U.S. bull and bear markets". *Journal of Investment and Banking*, 1 (1), pp. 24-33.
- Degiannakis, S. (2004). "Volatility forecasting: evidence from a fractional integrated asymmetric power ARCH Skewed-t model". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 1333-1342.
- Ding, Z., C.W.J. Granger y R.F. Engle (1993). "A long memory property of stock market returns and a new model". *Journal of Empirical Finance*, 1, pp. 83-106.
- Di Sario, R., H. Saraoglu, J. McCarthy y U.H. Li (2008). "Long memory in the volatility of an emerging equity market; the case of Turkey". *International Financial Markets, Institutions & Money*, 18, pp. 305-312.
- Doornik, J.A. (2001). *An object oriented matrix programming language*. Londres, Timberlake Consultant Press.

- Doornik, J.A. (2007). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*. 3ª. ed. Londres, Timberlake Consultants Press.
- Engle, R.F. (1982). "Autorregresive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". *Econometrica*, 50 (4), pp. 987-1007.
- Geweke, J. y S. Porter Hudak (1983). "The estimation and application of long memory time series models". *Journal of Time Series Analysis*, 4, pp. 221-238.
- Gil-Alana, L.A. (2006). "Fractional integration in daily stock market indexes". *Review of Financial Economics*, 15, pp. 28-38.
- Giot y Laurent (2001), "Value at Risk for long and short trading positions". *Journal of Applied Econometrics*, 18, pp. 641-664.
- Glosten, L.R.R., D.E. Jagannathan y D.E. Runkle (1993). "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks". *Journal of Finance*, 48, pp. 1779-1801.
- Granger, C.W.J. (1980). "Long memory relationships and the aggregation of dynamic models". *Journal of Econometrics*, 14 (2), pp. 227-238.
- \_\_\_\_\_ y R. Joyeux (1980). "An introduction to long memory time series models and fractional differencing". *Journal of Time Series Analysis*, 1, pp. 15-29.
- Hosking, J. (1981). "Fractional differencing". *Biometrika*, 68 (1), pp. 165-176.
- Henry, O.T. (2002). "Long memory in stock returns: some international evidence". *Applied Financial Economics*, 12, pp. 712-725.
- Huang, B.N. y C.H. Yang (1999). "An examination of long-term memory using intraday stock returns". *Technical Report*, 99-03, Clarion University of Pennsylvania, EUA.
- Islas Camargo, A. y F. Venegas Martínez (2003). "Pricing derivative securities with prior information on prior long memory volatility". *Economía Mexicana*, 12, pp. 103-134.
- Jacobsen, B. (1996). "Long-term dependence in stock returns". *Journal of Empirical Finance*, 3, pp. 393-417.
- Jayasuriya, S.A. (2009). "A Sub Period Analysis of Long Memory in Stock Return Volatility". *9th Global Conference on Business and Finance*.
- Kang, S y S.M. Yoon (2008). "Value-at-Risk analysis of the long memory volatility process: the case of individual stock returns". *The Korean Journal of Finance*, 21, pp. 4-18.
- Kasman, A. y D. Torun (2007). "Long memory in the Turkish stock market return and volatility". *Central Bank Review*. Central Bank of the Republic of Turkey, pp. 14-27.

- Kilic, R. (2004). "On the long memory properties of emerging capital markets: evidence from Istanbul stock exchange". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 915-922.
- Kumar, A. (2004). "Long Memory in Stock Trading Volume: Evidence from Indian Stock Market". *Working Paper*, Indira Gandhi Institute of Development Research (IGIDR)-Economics.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models". *The Journal of Derivatives*, 3, pp. 73-84.
- Kurtmaz, T., E.I. Cevic y N. Özatac (2009). "Testing for long memory in ISE using ARFIMA-FIGARCH Model and Structural Break Test". *International Research Journal of Finance and Economics*, 26, pp. 192-196.
- Laurent S. y J.P. Peters (2006). *GARCH 4.2, Estimating and Forecasting ARCH Models*. Londres, Timberlake Consultants Press.
- Lillo, F. y J.D. Farmer (2004). "The long memory of the efficient market". *Studies on nonlinear Dynamics and Econometrics*, 8, pp. 1-33.
- Lo, A.W. (1991). "Long-term memory in stock prices". *Econometrica*, 59, pp. 1279-1313.
- Lobato, I. y N.E. Savin (1998). "Real and spurious long-memory properties of stock market data". *Journal of Business and Economics Statistics*, 15, pp. 261-268.
- López Herrera F., J.I. Villagómez Bahena y F. Venegas Martínez (2009). "Dependencia de largo plazo en rendimientos y volatilidades de acciones mexicanas". *Tiempo Económico*, 4 (13), 5-17.
- , F. Venegas Martínez y A. Sánchez Daza (2009). "Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales". *Análisis Económico*, 56, pp. 129-146.
- Lu, S.Q., T. Ito y K. Voges (2008). "An analysis of long memory in the SSE's components index". *Journal of Economics Banking and Finance*, pp. 1-13.
- Lux, T. y T. Kaizoji (2007). "Forecasting volatility and volume in the Tokio stock market: long memory, fractality and regime switching". *Journal of Economic Dynamics & Control*, 31, pp. 1803-1843.
- McMillan, D.G. y A.E.H. Speigh (2007). "Value-at-Risk in emerging markets: comparative evidence for symmetric, asymmetric, and long memory GARCH models". *International Review of Finance*, 7, pp. 1-19.
- Mills, T.C. (1993). "Is there long-term memory in UK stock returns". *Applied Financial Economics*, 3, pp. 303-306.
- Sadique, S. y P.Silvapulle (2001). "Long-term memory in stock returns: international evidence". *International Journal of Economics and Finance*, 6, pp. 50-67.

- So, M.K.P. y P.I.H. Yu (2007). "Empirical analysis of GARCH models in Value at risk estimation". *Journal of International Markets, Institutions and Money*, 16, pp. 180-197.
- Tan, S.H., L. Chong y P.F. Ye (2010). "Long memory properties in stock prices. Evidence from the Malaysian stock market". *European Journal of Finance and Administrative Sciences*, 18, pp. 77-84.
- Tolvi, J. (2003). "Long memory in a small stock market". *Economics Bulletin*, 7, pp. 1-13.
- Tu, A.H., W.K. Wong y M.C. Chang (2008). "Value-at Risk for short and long positions of Asian stock markets". *International Research Journal of Finance and Economics*, 22, pp. 135-143.
- Vougas, D.V. (2004). "Analysis long memory and volatility of returns in the Athens stock exchange". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 457-460.
- Yamasaki, K., L. Munchnik, S. Havlin, A. Bunde y H.E. Stanley (1995). "Scaling and volatility in memory return intervals in financial markets". *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102, pp. 9424-9428.
- Venegas Martínez, F. y A. Islas Camargo (2005). "Volatilidad de los mercados bursátiles de América Latina: efectos de largo plazo". *Comercio Exterior*, 55, pp. 936-947.
- Villagómez Bahena, J.I. (2010). "Memoria a largo plazo en los rendimientos y volatilidades de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores", en M.R. Martínez Preece y F. López Herrera (coords.). *Administración de riesgos. Volumen 1. Banca, mercados, empresa y modelos financieros*. México, UAM-A (Biblioteca de Ciencias Sociales. Serie Estudios).
- Wang, F., K. Yamasaki, S. Havlin y H.E. Stanley (2006). "Scaling and memory intraday volatility return intervals in stock markets". *Physical Review*, 73 (2), pp. 026117-1-026117-8.
- Wright, J.H. (2002). "Log-periodogram estimation of long memory volatility dependences with conditionally heavy tailed returns". *Econometric Reviews*, 21, pp. 397-417.

