Cobertura dinámica de la reserva actuarial de una empresa con pasivos pensionales[1]

Dynamic hedging of the actuarial reserve of a firm with pension liabilities

Francisco Venegas-Martínez*
Gabriel Alberto Agudelo Torres**
Luis Ceferino Franco Arbeláez***
Luis Eduardo Franco Ceballos****

Fecha de recepción: 1 de agosto 2015
Fecha de aprobación: 21 de septiembre 2015

* Instituto Politécnico Nacional, México
fvenegas1111@yahoo.com.mx

** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
albertoagudelo@itm.edu.co

*** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
luisfranco@itm.edu.co

**** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
luisefranco@itm.edu.co

1 Los autores agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de los árbitros.

Resumen

Una cuestión determinante para las finanzas de una empresa con pasivos pensionales, corresponde a la estimación de las reservas actuariales. En este artículo se propone una estrategia para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia, a una vida, considerando una dinámica estocástica integrada con una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. El planteamiento teórico es relevante, en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implicaría, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro.

Clasificación JEL: C22, G22, H55.

Palabras clave: derivados financieros, reservas actuariales, sistemas pensionales.

Abstract

The estimation of the actuarial reserves is a pivotal point for the finances of a firm with pension liabilities.

In this article a strategy is proposed for the estimation of the actuarial reserve of a life annuity (for one life period), considering an stochastic dynamic integrated with a hedging strategy that guarantees a future value of the reserve greater or equal than the payment due. The theoretical approach is relevant in so far as it allows to diminish the cost of the life annuity, with the social and fiscal benefits that it would entail, by allowing the retirement systems to have greater coverage.

JEL Classification: C22, G22, H55.

Key words: *financial derivatives, actuarial reserves, pension systems.*

Introducción

Para las compañías de seguros, gobiernos y entidades públicas y privadas con pasivos pensionales, el cálculo de la reserva actuarial necesaria para cubrir la totalidad de los pagos de una renta vitalicia es un tema fundamental en la actualidad. La estimación del monto de dicha reserva afecta directamente la estabilidad y cobertura de los sistemas pensionales y, por ende, la calidad de vida de los involucrados. Un desequilibrio en el sistema pensional además de generar un efecto directo en la calidad de vida de los pensionados y sus familias, afecta la sostenibilidad de las entidades con obligaciones pensionales, con probables desequilibrios sistémicos en la economía (Grinols y Turnovsky, 1993; Schmedders,1998).

En la ciencia actuarial tradicional se plantea el cálculo de dichas reservas como la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles (Bowers *et al*., 1997). En este cálculo intervienen factores como la probabilidad de vivir de los individuos, la inflación, las edades, el monto del pago y la tasa de interés de descuento denominada "tasa de interés técnico". Sin embargo, hasta ahora no se incluye en el análisis una estructura estocástica del portafolio, en el cual está invertida dicha reserva, ya que supone, usualmente, un mundo determinista.

Las metodologías de administración de portafolios incluyendo derivados financieros para estructurar coberturas han sido ampliamente investigadas. Especialmente desde el surgimiento del modelo de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), tales estrategias son comunes en los mercados financieros, tanto de renta variable, Jarrow y Turnbull (1999), como de renta fija, Jarrow (2002). Estrategias de ese tipo también han sido aplicadas en el contexto de los mercados de "commodities"; por ejemplo para el caso de la energía eléctrica, Nässäkkälä y Keppo (2005).

Asimismo, diversas investigaciones han abordado el estudio de fenómenos financieros, considerando la dinámica estocástica para la modelación de variables y precios de derivados financieros. Algunos de los trabajos con este tipo de enfoque son Black y Scholes (1973), Merton (1973), Cox y Ross (1976), Cox *et al*. (1985a) y (1985b), Vasicek (1977), Hull y White (1990) y

(1993), Black *et al*. (1990) y Heath *et al*. (1992). Los avances en el campo de los derivados financieros han impulsado el desarrollo de los mercados de capitales y han mejorado la gestión de los riesgos financieros.

En esta investigación se desarrolla un modelo estocástico útil para estimar la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida, a partir de una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. La alternativa estructurada permite reducir el costo de la renta vitalicia a través de una gestión dinámica del portafolio en el cual está invertida la reserva. Después de esta introducción, en la Sección 1, se presenta el modelo; en la Sección 2 se muestra una aplicación, y finalmente se exponen algunas conclusiones.

1. El modelo

1.1 Pago de una renta como una combinación de opciones

Sea V_t el valor del fondo necesario para soportar el pago futuro D_T, que se realizará siempre y cuando la persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T-t$ años más. Por lo tanto el valor de dicho fondo corresponde al valor presente actuarial:

$$V_t = D_T({}_{(T-t)}p_\phi)e^{-r(T-t)}$$

donde r es la tasa de interés técnica utilizada para el cálculo actuarial y ${}_{(T-t)}p_\phi$ es la probabilidad de que una persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T-t$ años más. Se supone que V_t es conducido por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t.$$

Sea $S_T = V_T - D_T$. Si $V_T < D_T$, entonces se incumple con el pago, por lo menos parcialmente, y no hay ningún tipo de excedente en el portafolio que respalda la renta vitalicia, es decir, $S_T = 0$. Si $V_T \geq D_T$, entonces se cumple con el pago. En consecuencia se sigue que:

$$S_T = \max(V_T - D_T, 0)$$

Con base en las ecuaciones de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), y suponiendo que los agentes necesitan un incentivo para invertir en una reserva para una renta vitalicia (bajo el supuesto de neutralidad al riesgo),[2] se tiene que:

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v (T-t)} \Phi(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T-t}$$

y $\Phi(x)$ es la probabilidad de que una variable normalmente distribuida con media cero y desviación estándar uno sea menor que x. A partir de $V_t = D_T({}_{T-t}p_\phi)e^{-r(T-t)}$, se tiene que

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_\phi e^{-r(T-t)}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}$$

Si $V_T < D_T$, el faltante está dado por $F_T = D_T - V_T$. En caso contrario el faltante será cero $(F_T = 0)$. Por lo tanto, se tiene que

$$F_T = \max(D_T - V_T, 0)$$

y que

$$F_t = D_T e^{-\mu_v (T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1)$$

2 Véase al respecto Venegas-Martínez, F. (2008).

con

$$d_1 = \frac{Ln\left({}_{T-t}p_{\phi}e^{-r(T-t)}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v\sqrt{T-t}$$

Como el pagador de la obligación debe cubrir con sus propios recursos el posible faltante o bien quedarse con el posible excedente, entonces se tiene una opción *call* en posición larga y una opción put en posición corta, ambas con subyacente V_t y precio de ejercicio D_T. Por lo tanto, el valor del portafolio de opciones en el tiempo t satisface por la condición de paridad put-call:

$$S_t - F_t = V_t - D_T e^{-\mu_v * (T-t)}$$

La ganancia obtenida será la diferencia entre V_t y el pago D_T a realizar descontado a una tasa de rentabilidad igual al parámetro de tendencia de la EDE que describe el cambio en V_t.

1.2 Cálculo de probabilidad de incumplimiento del pago D_T

Siguiendo a Merton (1974), es posible calcular la probabilidad de incumplir total o parcialmente con el pago D_T, con base en lo siguiente

Se sabe que:

$$S_t = e^{-\mu_v(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} S_T f_{V_T|V_t}(V|V_t)dv$$

$$= e^{-\mu_v(T-t)} E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right] - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$$

donde $f_{V_T|V_t}(V|V_t)$ es la función de densidad de probabilidad de V_T, condicional al valor inicial V_t. Como $S_t = V_t\Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v * (T-t)}\Phi(d_2)$, entonces:

$$\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} = \Phi(d_2)$$

Por lo tanto la probabilidad de incumplimiento será:

$$\mathbb{P}\{V_T < D_T | V_t\} = 1 - \Phi(d_2)$$

donde

$$d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left({}_{T-t}p_{\phi} e^{-r(T-t)}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}} - \sigma_v \sqrt{T-t}$$

Si la probabilidad de incumplimiento es inaceptable para el administrador de la renta vitalicia, la opción put en posición corta que resulta de la descomposición realizada en la sección 1.1 puede ser anulada a través de una cobertura dinámica como se expone a continuación.

1.3 Cobertura dinámica de los déficits de reserva

Para determinar el monto de la reserva constituida debe verse a la obligación como la combinación de una opción *call* en posición larga con una put en posición corta. En ese sentido, una cobertura dinámica corresponderá a encontrar un portafolio óptimo en el cual el riesgo de mercado sea eliminado cuando $V_T < D_T$. Se considera el portafolio Π_t conformado por w_1 unidades de posiciones cortas en la reserva V_t y w_2 opciones put (F_t) en posición corta.

$$\Pi_t = -w_1 V_t - w_2 F_t$$

El cambio en el valor del portafolio está dado por

$$\mathrm{d}\Pi_t = -w_1 dV_t - w_2 dF_t$$

El Lema de Ito proporciona la EDE que describe el cambio en F_t.

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial V_t}\mu_v V_t + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right)dt + \frac{\partial F}{\partial V_t}\sigma_v V_t dW_t$$

Reemplazando dV_t y dF_t en $\mathrm{d}\Pi_t$ se obtiene:

$$\mathrm{d}\Pi_t = \left(-w_1 - w_2 \frac{\partial F}{\partial t}\right) \mu_v V_t dt + \left(-w_1 - w_2 * \frac{\partial F}{\partial V_t}\right) \sigma_v V_t dW_t$$

$$- w_2 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right) dt$$

Para eliminar el riesgo de mercado, si se hace $w_2 = 1$, es necesario que $-w_1 = \frac{\partial F}{\partial V_t}$, y como $F_t = D_T e^{-\mu_v (T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1)$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial V_t} = -1 + \Phi(d_1)$$

Por lo tanto,

$$w_1 = 1 - \Phi\left(\frac{Ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}\right)$$

Es decir, por cada opción put en posición corta contenida en el portafolio (o en forma equivalente, por cada obligación de pagar D_T en el tiempo T), en el instante t se debe tener en posición corta, un porcentaje sobre la reserva V_t igual a $1 - \Phi(d_1)$. De no ser posible tal posición, se utilizará un activo Z tal que $\mathrm{Corr}(V_t, Z_t) \approx 1$. La estrategia anterior constituye una cobertura delta para una opción put en posición corta.

El riesgo que se asume en una sucesión de pagos D_T, con $T = 1,2,3, \dots, n$, es equivalente a tener un portafolio conformado por opciones *call* en posición larga sin costo alguno, cuya valuación individual viene dada simultáneamente por las siguientes dos ecuaciones, ya expuestas en la sección anterior

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v (T-t)} \Phi(d_2)$$

y

$$S_t = e^{-\mu_v(T-t)} E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right] - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T | V_t\}$$

De lo anterior se deduce que

$$V_t \Phi(d_1) = e^{-\mu_v(T-t)} E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right].$$

Es decir, el valor esperado condicional de la reserva para el vencimiento T, viene dado por:

$$E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right] = V_t \Phi(d_1) e^{\mu_{v*}(T-t)}$$

Por lo que la reserva actuarial necesaria para soportar el pago D_{T+1} será:

$$V_t^{T+1} = D_{T+1}({}_{T+1-t}p_\phi) e^{-r*(T+1-t)} - E\left[V_{T\{v>D_T\}} \middle| V_t\right]$$

$$= D_{T+1}({}_{T+1-t}p_\phi) e^{-r*(T+1-t)} - V_t \Phi(d_1) e^{\mu_v(T-t)}$$

2. Aplicación del modelo

Se considera una población cuya tabla de mortalidad se muestra en el Anexo 1. Para esta aplicación se supone una tasa de interés técnico $r = 4.5\%$. Si la inflación anual proyectada es 3.5% y los pagos a realizar a una persona de 62 años de edad crecen anualmente en un porcentaje igual, siendo el primer pago correspondiente a $7,000 USD, entonces un cálculo actuarial tradicional arroja un valor de reserva actuarial de $123,043 USD. Si se supone que la EDE que conduce las reservas pensionales de dicha población es:

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t$$

donde $\mu_v = 4.5\%$ y $\sigma_v = 7\%$ y la parte de la obligación correspondiente a las opciones put en posición corta es gestionada mediante una cobertura delta, entonces el excedente esperado en cada período, $E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right] - D_T$ puede ser considerado parte de la reserva necesaria para el siguiente período V_{T+1} , tal como se expuso en la sección 1.3. Esta gestión dinámica del portafolio conduce a una reserva actuarial de $82,464 USD, lo que corresponde a una disminución de 33% con respecto al cálculo actuarial tradicional. Los cálculos detallados se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Detalle del cálculo de la reserva actuarial

T-t	DT	tPx	Trad. V	d1	d2	PUT (short)	Delta	Hedging	CALL (long)	E(VT|Vt)	New Vt
1	7,000	0.990803	6,630	-0.096995	-0.166995	218.373339	-0.538635	-3,571.384622	156.826310	3,200	6,630
2	7,245	0.980620	6,493	-0.148189	-0.247184	328.060640	-0.558903	-3,629.020629	199.738983	3,134	3,293
3	7,499	0.969385	6,351	-0.195830	-0.317074	422.328578	-0.577628	-3,668.546272	221.752329	3,070	3,217
4	7,76	0.957033	6,204	-0.243694	-0.383694	510.506904	-0.596266	-3,699.245932	231.972602	2,999	3,134
5	8,033	0.943496	6,052	-0.293327	-0.449852	596.507762	-0.615364	-3,724.048932	234.080391	2,915	3,053
6	8,314	0.928708	5,894	-0.345615	-0.517079	682.568934	-0.635184	-3,743.855275	230.109981	2,817	2,979
7	8,605	0.912604	5,731	-0.401201	-0.586403	770.226898	-0.655864	-3,758.662362	221.407265	2,702	2,914
8	8,906	0.895120	5,562	-0.460615	-0.658605	860.657307	-0.677462	-3,767.915550	208.990613	2,571	2,859
9	9,218	0.876200	5,387	-0.524338	-0.734338	954.826716	-0.699978	-3,770.677020	193.707994	2,423	2,816
10	9,540	0.855788	5,206	-0.592849	-0.814208	1,053.574191	-0.723359	-3,765.725305	176.310018	2,259	2,783
11	9,874	0.833840	5,019	-0.666616	-0.898780	1,157.620886	-0.747491	-3,751.582710	157.498395	2,079	2,760
12	10,220	0.810320	4,826	-0.746129	-0.988616	1,267.591178	-0.772205	-3,726.592481	137.936977	1,886	2,747
13	10,577	0.785203	4,627	-0.831904	-1.084292	1,384.006341	-0.797268	-3,688.981166	118.255574	1,684	2,741
14	10,948	0.758481	4,422	-0.924485	-1.186401	1,507.258091	-0.822383	-3,636.938582	99.045895	1,475	2,739
15	11,331	0.730163	4,212	-1.024451	-1.295559	1,637.585139	-0.847189	-3,568.733446	80.846114	1,264	2,738
16	11,727	0.700277	3,997	-1.132425	-1.412425	1,775.045771	-0.871272	-3,482.852375	64.120795	1,057	2,733
17	12,138	0.668875	3,778	-1.249084	-1.537701	1,919.489317	-0.894183	-3,378.157959	49.239071	859	2,721
18	12,563	0.636038	3,555	-1.375145	-1.672130	2,070.507031	-0.915457	-3,254.065058	36.456554	676	2,695
19	13,002	0.601874	3,328	-1.511384	-1.816507	2,227.422164	-0.934655	-3,110.706177	25.897285	511	2,653
20	13,458	0.566522	3,100	-1.658649	-1.971699	2,389.285592	-0.951407	-2,949.053600	17.547597	370	2,588
21	13,929	0.530158	2,870	-1.817848	-2.138628	2,554.861938	-0.965456	-2,770.989478	11.264494	255	2,500
22	14,416	0.492991	2,641	-1.989970	-2.318299	2,722.671265	-0.976703	-2,579.259365	6.796138	166	2,386
23	14,921	0.455265	2,413	-2.176076	-2.511784	2,891.015618	-0.985225	-2,377.334785	3.817790	100	2,247
24	15,443	0.417258	2,188	-2.377322	-2.720250	3,058.054715	-0.991281	-2,169.146561	1.975135	56	2,088
25	15,983	0.379277	1,968	-2.594964	-2.944964	3,221.869710	-0.995270	-1,958.767827	0.929023	29	1,912

26	16,543	0.341658	1,754	-2.830360	-3.187291	3,380.522839	-0.997675	-1,750.102232	0.391344	13	1,726
27	17,122	0.304755	1,548	-3.084967	-3.448698	3,532.116886	-0.998982	-1,546.635081	0.145057	5	1,535
28	17,721	0.268930	1,352	-3.360389	-3.730794	3,674.862451	-0.999611	-1,351.282240	0.046341	2	1,346
29	18,341	0.234545	1,167	-3.658356	-4.035317	3,807.104725	-0.999873	-1,166.390375	0.012454	1	1,165
30	18,983	0.201949	994	-3.980745	-4.364151	3,927.368358	-0.999966	-993.795913	0.002736	0	993
31	19,648	0.171466	835	-4.329570	-4.719314	4,034.393631	-0.999993	-834.914052	0.000475	0	835
32	20,335	0.143374	691	-4.707059	-5.103039	4,127.206533	-0.999999	-690.770851	0.000063	0	691
33	21,047	0.117899	562	-5.115579	-5.517699	4,205.136008	-1.000000	-562.048052	0.000006	0	562
34	21,784	0.095199	449	-5.557753	-5.965920	4,267.880637	-1.000000	-449.044954	0.000000	0	449
35	22,546	0.075312	351	-6.037710	-6.451836	4,315.702508	-1.000000	-351.494399	0.000000	0	351
36	23,335	0.058199	269	-6.561142	-6.981142	4,349.227929	-1.000000	-268.764559	0.000000	0	269
37	24,152	0.043795	200	-7.133940	-7.559733	4,369.193750	-1.000000	-200.113061	0.000000	0	200
38	24,997	0.031981	145	-7.762291	-8.193800	4,376.541814	-1.000000	-144.592594	0.000000	0	145
39	25,872	0.022580	101	-8.452766	-8.889916	4,372.457367	-1.000000	-101.012500	0.000000	0	101
40	26,778	0.015352	68	-9.212420	-9.655139	4,358.355335	-1.000000	-67.952502	0.000000	0	68
41	27,715	0.010005	44	-10.049077	-10.497296	4,335.823101	-1.000000	-43.819915	0.000000	0	44
42	28,685	0.006221	27	-10.970942	-11.424594	4,306.513361	-1.000000	-26.956802	0.000000	0	27
43	29,689	0.003668	16	-11.988216	-12.447237	4,272.057772	-1.000000	-15.726322	0.000000	0	16
44	30,728	0.002038	9	-13.111554	-13.575881	4,233.933886	-1.000000	-8.645787	0.000000	0	9
45	31,803	0.001059	4	-14.353683	-14.823257	4,193.406035	-1.000000	-4.445791	0.000000	0	4
46	32,917	0.000511	2	-15.728398	-16.203161	4,151.474785	-1.000000	-2.120743	0.000000	0	2
47	34,069	0.000225	1	-17.260860	-17.740756	4,108.880317	-1.000000	-0.925489	0.000000	0	1
48	35,261	0.000090	0	-18.959323	-19.444298	4,066.110541	-1.000000	-0.367199	0.000000	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

En este trabajo se propone un planteamiento teórico para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia, a una vida, considerando la dinámica estocástica del portafolio en el cual está invertida; además se estructura una estrategia de cobertura que impacta de manera directa dicha estimación. La estrategia es relevante en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implica, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro. Futuras investigaciones podrían estar orientadas al análisis de las condiciones regulatorias y de mercado, necesarias para implementar lo planteado en este artículo.

Anexo 1

Tabla de mortalidad

X	l(x)
15	1,000,000
16	999,515
17	999,019
18	998,510
19	997,988
20	997,451
21	996,898
22	996,327
23	995,736
24	995,124
25	994,488
26	993,826
27	993,136
28	992,415
29	991,660
30	990,868
31	990,036
32	989,159
33	988,233
34	987,254
35	986,216
36	985,114
37	983,942
38	982,693
39	981,360
40	979,936
41	978,411
42	976,776
43	975,021
44	973,135
45	971,105
46	968,919
47	966,561
48	964,017
49	961,269
50	958,298
51	955,085
52	951,608

x	l(x)
53	947,843
54	943,766
55	939,348
56	934,604
57	929,498
58	923,991
59	918,039
60	911,595
61	904,607
62	897,019
63	888,769
64	879,635
65	869,557
66	858,477
67	846,334
68	833,069
69	818,623
70	802,940
71	785,968
72	767,658
73	747,970
74	726,872
75	704,342
76	680,372
77	654,970
78	628,162
79	599,994
80	570,538
81	539,892
82	508,181
83	475,562
84	442,222
85	408,381
86	374,288
87	340,219
88	306,474
89	273,371
90	241,235

x	l(x)
91	210,391
92	181,152
93	153,808
94	128,609
95	105,758
96	85,395
97	67,556
98	52,206
99	39,285
100	28,688
101	20,255
102	13,771
103	8,975
104	5,580
105	3,290
106	1,828
107	950
108	458
109	202
110	81

Referencias bibliográficas

Black, E, E. Derman, y W. Toy (1990). “A One-factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options”, *Financial Analysts Journal,* (January-February), 33-39.

Black, F. y M. Scholes (1973). “The Pricing of Option and Corporative Liabilities”. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D.A. y Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*, 2nd edition. Itasca: Society of Actuaries.

Cox, J. C., Ross, S. A. (1976), “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1, pp. 145-166.

Cox, J. C., J. Ingersoll y S. Ross (1985a). “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices”, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Cox, J. C., J. Ingersoll y S. Ross (1985b). “A Theory of the Term Structure of Interest rates”, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky (1993). “Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 1-36.

Heath, D., R.A. Jarrow, y A. Morton (1992). “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation”, *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.

Hull, J. y A. White (1990). “Pricing Interest Rate Derivative Securities”. *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

Hull, J. y A. White (1993). “One-factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 2, pp. 235-254.

Jarrow, R. A. (2002). *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*. 2nd edition, Stanford University Press.

Jarrow, R. A., Turnbull, S. (1999). *Derivative Securities: The Complete Investor’s Guide*. 2nd edition, South-Western College Publishing.

Merton, R. (1973). “Theory of Rational Option Pricing”. *Bell Journal of Economics*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Merton, R. . (1974). “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”. *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449–70.

Nässäkkälä, E., & Keppo, J. (2005). “Electricity Load Pattern Hedging With Static Forward Strategies”. *Managerial Finance*, Vol. 31, No. 6, pp. 115-136.

Schmedders, K. (1998). "Computing Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Markets". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 22, No. 8-9, pp. 1375-1401.

Vasicek O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. 2da. Edición, Cengage Learning, México.