Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables

Cesar Emilio Contreras Piedragil*

Francisco Venegas-Martínez**

* Universidad Autónoma Benito Juaréz de Oaxaca, Escuela de Economía.
cecont@yahoo.com

** Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía.
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Estocástica: finanzas y riesgo.
Volumen 1, Numero 1, enero-junio 2011, pp. 55-71. ISSN:2007-5383

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta para valuar opciones con distribuciones α -estables en el dominio del espacio y del tiempo. La valuación toma como punto de partida la medida neutral al riesgo para distribuciones estables propuesta por McCulloch (2003). Posteriormente se recurre a diversos métodos numéricos que permiten aproximar las funciones de densidad y de distribución de variables aleatorias α -estables tal y como lo sugieren Nolan (2009) y Borak y Weron (2005).

Clasificación JEL: G11, G12, G13.
Palabras clave: Productos derivados, análisis de riesgos.

Abstract

This paper presents a proposal for valuing options with α -stable distributions in the domain of space and time. The valuation takes as its starting point the risk-neutral measure for stable distributions proposed by McCulloch (2003). Subsequently, various numerical methods useful to approximate the density and distribution functions of α -stable random variables, as suggested by Nolan (2009) and Borak and Weron (2005), are applied.

JEL Classification: G11, G12, G13.
Keywords: Derivatives, risk analysis.

1. Introducción

El modelo de Black-Scholes-Merton, (1973) tiene como punto de partida que el precio del activo subyacente del producto derivado es gobernado por un movimiento geométrico browniano (tendencia exponencial y fluctuaciones normales), lo cual conduce, al aplicar el lema de Itô [1], a rendimientos logarítmicos normalmente distribuidos. El modelo de Black-Scholes-Merton ha sido claramente un punto de referencia para muchas propuestas de valuación de opciones. Muchos de los modelos disponibles en la literatura especializada, generalmente, modifican alguno de los supuestos originales del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). Las nuevas propuestas se generan por el hecho de que el modelo no captura algunas de las características que se presentan en las series financieras. Dentro de las características no capturadas por el modelo de Black-Scholes-Merton se tienen las asimetrías que presentan las distribuciones empíricas de los rendimientos, así como el gran peso en sus colas véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008). Estas características son provocadas por la frecuencia y la magnitud con que se presentan movimientos extremos en los rendimientos, tanto positivos como negativos.

La ecuación diferencial parcial asociada al modelo de Black-Scholes-Merton es una ecuación que se transforma, bajo cambios de variables, en la ecuación clásica de difusión de calor, la cual al ser resuelta y después de invertir los cambios de variables conduce a la determinación del precio teórico de una opción europea de compra. Lo anterior establece la analogía entre el comportamiento de la difusión de calor y el comportamiento de los rendimientos de los subyacentes. Esta analogía permite intentar remediar carencias presentes en el modelo de Black-Scholes-Merton mediante la generalización de la ecuación de difusión clásica a una ecuación de difusión "anómala". La ecuación de difusión anómala se obtiene mediante caminatas aleatorias a tiempo continuo en donde los tiempos entre los pasos son aleatorios; véase, por ejemplo, Montroll y Weiss (1965). Los modelos de caminatas aleatorias a tiempo con-

---

[1] Véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008) para una discusión completa del lema de Itô.

tinuo con tiempos aleatorios en saltos de partículas son empleados en física estadística para modelar difusión anómala donde una nube de partículas se esparce a una tasa diferente a la del movimiento browniano clásico, lo cual puede conducir a distribuciones asimétricas con colas pesadas. El comportamiento de la difusión anómala se asocia a una distribución α -estable simétrica o a una distribución α - estable si la difusión es influenciada por campos de fuerzas externas, véanse al respecto Li (2003); Gorenflo y Mainardi (1998); y Meztler y Klafter (2000). La difusión anómala tiene características que se pueden aprovechar para modelar hechos estilizados en el comportamiento de los rendimientos, por lo que es factible suponer que los rendimientos son distribuidos de manera α -estable.

El presente trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera, en la próxima sección se presenta el planteamiento del modelo de valuación de opciones con distribuciones estables; en la sección 3 se emplea su ajuste exponencial en una función de densidad estable, neutral al riesgo, para caracterizar el precio de una opción europea de compra; en la sección 4 se revisan algunos casos particulares de los posibles valores que pueden tomar los parámetros en la prima de una opción de compra; en la sección 5 se analiza el caso de una opción de venta; en la sección 6 se discute sobre el caso de una opción con pago continuo de dividendos; en la sección 7 se discute acerca del impacto en el precio de la opción por colas pesadas y asimetría de las distribuciones estables y se lleva a cabo un análisis comparativo con el modelo clásico de Black-Scholes-Merton; por su parte, en la sección 8 se examina el impacto en el precio de la opción por parámetro de escala; por último, en la sección 9 se presentan las conclusiones en donde se destacan las ventajas y limitaciones de la valuación sobre activos subyacentes con distribuciones estables.

2. Planteamiento del modelo de valuación

Para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el enfoque probabilista con distribuciones estables, se supone inicialmente que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que los rendimientos logarítmicos en un mundo neutral al riesgo son conducidos por

$$\mathrm{d}\ln S_t = (r - \beta\gamma^{\alpha}\sec\theta)\tau + \mathrm{d}\tilde{Y}_t \tag{1}$$

donde $\tilde{Y}_t$ tiene función de densidad

$$f_{srn}\left(\tilde{Y}_t;\alpha,\beta,\gamma t^{1/\alpha}\right)$$

asociada a la función de cumulantes (el logaritmo de la función característica)

$$\psi_{srn}(k)=-\gamma_1^\alpha tSec\theta(ik)^\alpha+\gamma_2^\alpha t\sec\theta\left\{1-(1-ik)^\alpha\right\}$$

con

$$\gamma_{_1}^\alpha=\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\gamma^\alpha,\ \gamma_{_2}^\alpha=\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\gamma^\alpha \quad \text{y} \quad \theta=\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Si se escribe $\psi(\kappa)=\ln\phi(\kappa)$, en virtud de que $\phi(\kappa)$, satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\phi(\kappa)\right|\mathrm{d}\kappa<\infty$$

se tiene entonces que

$$f_{srn}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\kappa x}\phi(\kappa)\mathrm{d}\kappa$$

La expresión anterior es conocida como la transformada inversa de Fourier. En este caso, el precio o la prima, $C(S_t,t)$, de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento T, está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco, es decir,

$$C(S_t,t)=e^{-r\tau}E_t\left[\max(S_T-K,0)\middle|\mathrm{F}_t\right]=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\max(x-K,0)f_{srn}(x)\mathrm{d}x$$

donde F_t es la información disponible al tiempo t y $\tau=T-t$ es el periodo de maduración. Un resultado importante para el cálculo de la prima de la opción es que la función de densidad de la medida estable neutral al riesgo satisface.

$$f_{srn}(-x;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) = e^{-\beta\gamma^{\alpha}Sec\theta\tau} e^{x} f_{srn}(x;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \qquad (2)$$

La función $f_{srn}(-x;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})$ no se debe entender como la reflexión (aún cuando se exprese como tal) de la función $f_{srn}(x;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})$, puesto que la expresión (2) indica que la función es un ajuste exponencial de la función de densidad estable neutral al riesgo. El ajuste exponencial se presenta claramente en el caso de que se considere una distribución estable extrema negativa, es decir, $f_{srn}(-x;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})$, la cual resulta ser una distribución estable extrema positiva ajustada exponencialmente.

3. Precio de una opción europea de compra

Si se emplea el ajuste exponencial de la función de densidad estable neutral al riesgo obtenida en la sección anterior, fórmula (2), y la ecuación estocástica que conduce a los rendimientos logarítmicos en el universo neutral al riesgo expresados en la ecuación (1), se tiene que el precio o prima de la opción de compra europea está dado por

$$\begin{aligned}
C(S_t,t) &= e^{-r\tau} E_t\left[\max(S_t e^{(r-\beta\sec\theta)\tau+\tilde{Y}_t} - K, 0)\right] \\
&= e^{-r\tau} K E_t\left[\max\left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta\sec\theta)\tau+\tilde{Y}_\tau} - 1, 0\right)\right] \\
&= e^{-r\tau} K \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta\sec\theta)\tau+\tilde{Y}_\tau} - 1, 0\right) \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&= e^{-r\tau} K \int_{-d}^{\infty} \left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta\sec\theta)\tau+\tilde{Y}_\tau} - 1\right) \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&= e^{-r\tau} S_t \int_{-d}^{\infty} e^{(r-\beta\sec\theta)\tau+\tilde{Y}_\tau} \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&\quad - K e^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&= S_t \int_{-d}^{\infty} e^{-\beta\sec\theta\tau+\tilde{Y}_\tau} \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&\quad - K e^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} \mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= S_t \int_{-d}^{\infty} e^{-\beta \sec\theta\tau + \tilde{Y}_\tau} f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \mathrm{d}\tilde{Y}_\tau \\ &- Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \mathrm{d}\tilde{Y}_\tau \\ &= S_t \int_{-d}^{\infty} f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \mathrm{d}\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_{snr}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \mathrm{d}\tilde{Y}_\tau \end{aligned} \tag{3}$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$\mathrm{d}F_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = f_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \mathrm{d}\tilde{Y}_t$$

y donde el límite inferior de las integrales se obtiene a partir del valor d dado por

$$d = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \beta\gamma^\alpha sec\theta\right)\tau, \tag{4}$$

el cual depende del parámetro β y del parámetro α ($\theta = \frac{\alpha\pi}{2}$). Así, la prima de una opción europea de compra se puede expresar como:

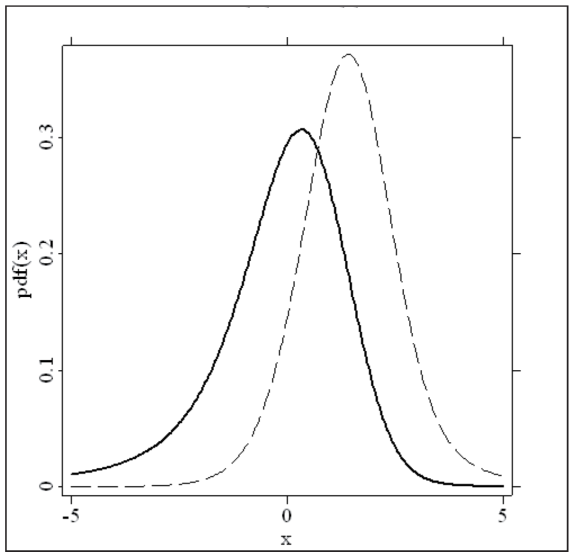
$$C(S_t, t) = S_t \Phi_{srn}\left(d; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}\right) - Ke^{-r\tau} \Phi_{srn}\left(-d; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}\right) \tag{5}$$

con

$$\Phi_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \left\{1 - F_{srn}\left(x; \alpha, \beta, \gamma\right)\right\} \tag{6}$$

La fórmula para obtener el precio de una opción europea de compra, dada en (5), a diferencia de la fórmula de Black-Scholes-Merton, depende de dos distribuciones distintas. Si se realiza la analogía con la fórmula de Black-Scholes-Merton, $\Phi_{srn}\left(-d; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}\right)$ proporciona la probabilidad de que la opción sea ejercida. Por otra parte, esta función también puede ser entendida como la función que proporciona el importe necesario a financiarse al tipo de interés libre de riesgo para replicar la opción, mientras que $\Phi_{srn}\left(d; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}\right)$ proporciona la cantidad de activo subyacente requerido para el portafolio replicante. La Gráfica 1 muestra las distribuciones del modelo estable $f_{srn}\left(x;\alpha,-\beta,\gamma,0\right)$ y $f_{srn}\left(x;\alpha,\beta,\gamma,0\right)$ donde se consideraron los valores $\alpha=1.5$, $\beta=-0.5$ y $\gamma=1$.

Gráfica 1. Modelo estable.



$f_{srn}\left(x;\alpha,\beta,\gamma,0\right)=f_{srn}\left(x;1.5,-0.5,1,0\right)$ (línea continua)

$f_{srn}\left(x;\alpha,-\beta,\gamma,0\right)=f_{srn}\left(x;1.5,0.5,1,0\right)$ (línea discontinua)

4. Posibles valores de parámetros en la opción de compra. Casos particulares

En esta sección se revisan algunos casos particulares de los valores de los parámetros en la prima de una opción:

a) Caso $\beta=-1$

En el modelo log-estable de momentos finitos de Carr y Wu (2003), se tiene que $f_{srn}(-\tilde{Y}_{\tau};\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})$ y $f_{srn}(\tilde{Y}_{\tau};\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha})$ corresponden a una distribución estable extrema positiva ajustada exponencialmente y extrema negativa, respectivamente, en consecuencia

$$
\begin{aligned}
f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) &= f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau;\alpha,1,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&= f_{ts}(-\tilde{Y}_\tau;\alpha,-1,\gamma\tau^{1/\alpha},0,1) \\
&= f_{ts}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,1,\gamma\tau^{1/\alpha},0,-1)
\end{aligned} \tag{7}
$$

y

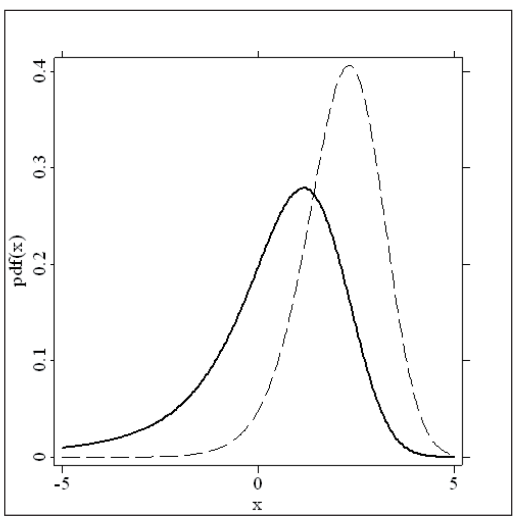
$$
\begin{aligned}
f_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}) &= f_{srn}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,-1,\gamma\tau^{1/\alpha}) \\
&= f_{s}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,-1,\gamma\tau^{1/\alpha})
\end{aligned} \tag{8}
$$

El valor d en (4) se calcula como $d = \ln\frac{S_t}{K} + (r - \gamma^\alpha \sec\theta)\tau$. Por tanto, a partir de (3) y (5), se tiene que

$$
\begin{aligned}
C(S_t,t) &= S_t \int_{-d}^{\infty} f_{ts}(\tilde{Y}_\tau;\alpha,1,\gamma\tau^{1/\alpha},-1)\mathrm{d}\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau}\int_{-d}^{\infty} f_s(\tilde{Y}_\tau;\alpha,-1,\gamma\tau^{1/\alpha})\mathrm{d}\tilde{Y}_\tau \\
&= S_t\Phi_{ts}\left(d;\alpha,1,\gamma\tau^{1/\alpha},-1\right) - Ke^{-r\tau}\Phi_s\left(-d;\alpha,-1,\gamma\tau^{1/\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Las funciones (7) y (8), involucradas en la valuación bajo este modelo, se presentan en la Gráfica 2.

Gráfica 2. Modelo log-estable momentos finitos.



$f_{srn}\left(x;\alpha,\beta,\gamma,0\right) = f_s\left(x;1.5,-1,1,0\right)$ (línea continua)

$f_{srn}\left(x;\alpha,-\beta,\gamma,0\right) = f_{ts}\left(x;1.5,1,1,0,-1\right)$ (línea discontinua)

b) Caso normal $\alpha = 2$ y $\beta = 0$

En el caso de que los rendimientos logarítmicos tengan una distribución normal, la función de densidad estable neutral al riesgo resulta ser una distribución normal de donde se obtiene que $d = \ln\frac{S_t}{K} + r\tau$ (con $\beta = 0$) y

$$f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; \frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) \tag{10}$$

y

$$f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; -\frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) \tag{11}$$

que al sustituirse en (3), proporciona la fórmula de Black-Scholes-Merton:

$$C(S_t, t) = S_t \int_{-d}^{\infty} f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; \frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau)\mathrm{d}\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau}\int_{-d}^{\infty} f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; -\frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau)\mathrm{d}\tilde{Y}_\tau$$

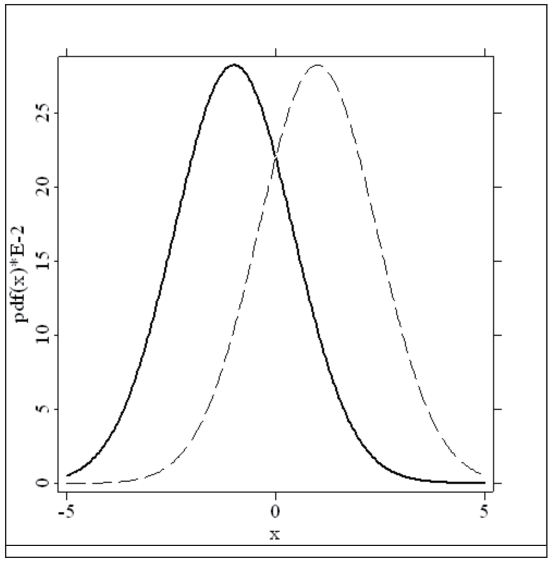
$$\begin{aligned} &= S_t \int_{-d_1}^{\infty} f_{normal}(\varepsilon; 0,1)\mathrm{d}\varepsilon - Ke^{-r\tau}\int_{-d_2}^{\infty} f_{normal}(\varepsilon; 0,1)\mathrm{d}\varepsilon \\ &= S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned} \tag{12}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Las funciones (10) y (11) involucradas en la valuación normal bajo el modelo estable se presentan en la Gráfica 3.

Gráfica 3. Modelo Black-Scholes-Merton.



$f_{srn}(x;\alpha,\beta,\gamma,0) = f_{normal}(x;-1/2,1)$ (línea continua)

$f_{srn}(x;\alpha,-\beta,\gamma,0) = f_{normal}(x;1/2,1)$ (línea discontinua)

5. Precio de una opción europea de venta

El análisis anterior también puede ser extendido a la valuación de opciones europeas de venta. En efecto, si $P(S_t,t)$ denota el precio de una opción europea de venta, empleando la condición de paridad *put-call*,

$$P(S_t,t) + S_t = C(S_t,t) + Ke^{-r\tau}$$

se obtiene

$$P(S_t,t) = Ke^{-r\tau}F_{srn}\left(-d;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}\right) - S_tF_{srn}\left(d;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}\right) \quad (13)$$

6. Pago continuo de dividendos

Si se supone que el activo subyacente es una acción que paga dividendos de manera continua a una tasa constante conocida q, entonces se tiene que

$$\mathrm{d}\ln S_t = (r - q - \beta\gamma^{\alpha}\sec\theta)\tau + \mathrm{d}\tilde{Y}_t \tag{14}$$

y el precio de la opción en (5) y el valor d en (4) se escriben ahora, respectivamente, como

$$C(S_t,t) = S_t e^{-q\tau}\Phi_{srn}\left(d;\alpha,-\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}\right) - Ke^{-r\tau}\Phi_{srn}\left(-d;\alpha,\beta,\gamma\tau^{1/\alpha}\right) \tag{15}$$

$$d = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \beta\gamma^{\alpha} sec\theta\right)\tau \tag{16}$$

7. Impacto en precios por colas pesadas y asimetría

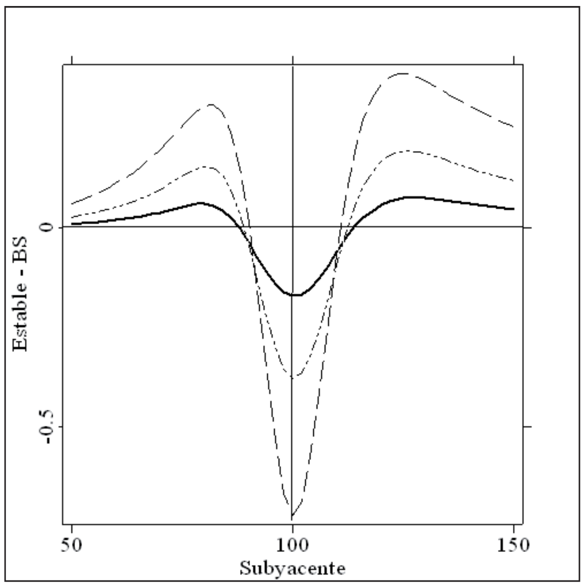
Se realiza un primer análisis del impacto en los precios de opciones por el uso de distribuciones estables considerando la diferencia de precios entre el modelo estable y el modelo de Black-Scholes-Merton. En el modelo estable se consideraron diferentes valores para el índice de estabilidad y el parámetro de asimetría, los cuales se presentan en el siguiente Cuadro.

Cuadro 1. Valores de los parámetros.

Parámetros		Valor
Precio del subyacente	(S_t)	50-150
Precio de ejercicio	(K)	100
Parámetro de escala	(γ)	0.26
Período de maduración	(τ)	1/12

El modelo BSM se obtiene con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0$ y resulta de ajustar el parámetro de escala por $\sqrt{2}$. Cuando se emplean distribuciones estables simétricas ($\beta = 0$, también conocidas como vuelos de Lévy), se observa que los precios obtenidos por el modelo BSM son inferiores a los correspondientes al modelo estable en una posición "dentro del dinero" y "fuera del dinero" y a medida que se alcanza una posición "en el dinero", la valuación de la opción bajo el modelo estable es inferior al modelo. El comportamiento es explicado por el hecho de que la función de densidad de la distribución normal tiene mayor masa de probabilidad en valores adyacentes al precio de ejercicio, y las funciones de densidad de las distribuciones estables tienen mayor masa en las colas. Obsérvese que a medida que el parámetro α se aproxima a 2, la diferencia desaparece, mientras que si el valor se aleja de 2, la diferencia es más acentuada. Este comportamiento se ilustra en la Gráfica 4.

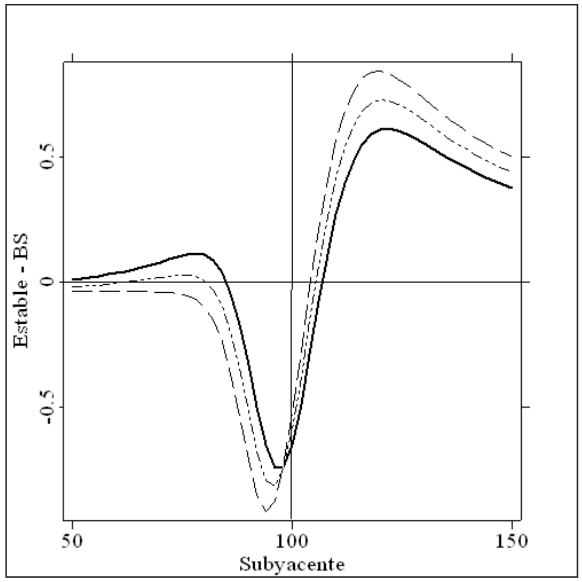
Gráfica 4. Estable simétrica.



$\alpha = 1.9$ (línea continua), $\alpha = 1.8$ (punteada) y $\alpha = 1.75$ (discontinua).

El efecto de la asimetría (considerando un índice de estabilidad de α = 1.5) en la valuación de la opción se aprecia en la Gráfica 5. Para este caso, las primas obtenidas por el modelo estable se incrementan considerablemente (con respecto al modelo de Black-Scholes-Merton) a medida que el parámetro β se aproxima a -1 (límite de asimetría) en una posición "dentro del dinero", consecuencia del traslado de la masa de probabilidad hacia la derecha por la asimetría negativa. Comportamientos similares son obtenidos por Cartea y Howison (2009) en su fórmula de valuación en el dominio de las frecuencias.

Gráfica 5. Estable asimétrica.

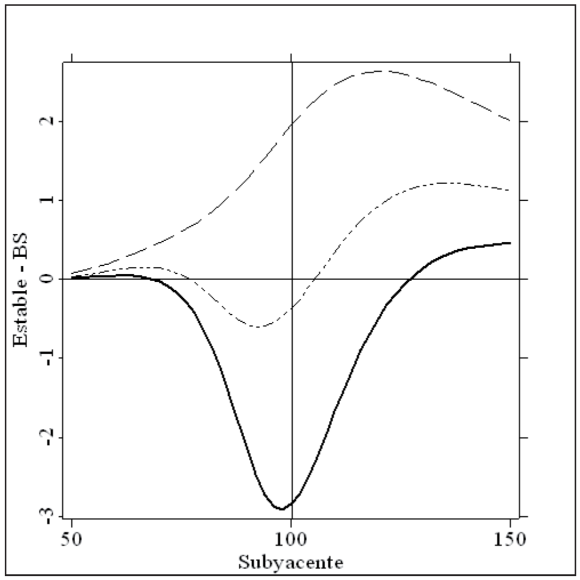


$\beta = -0.5$ (línea continua), $\beta = -0.75$ (punteada) y $\beta = -1$ (discontinua).

8. Impacto en precios por parámetro de escala

En finanzas la volatilidad es de primordial importancia en la valuación de opciones. En el análisis realizado hasta el momento sobre el comportamiento de los precios de opciones, en el modelo estable, se ha supuesto que el parámetro de escala está relacionado con la volatilidad mediante un ajuste por $\sqrt{2}$. En este punto se debe recordar que las distribuciones estables carecen de segundo momento. Sin embargo, en procesos como la normalización o estandarización en distribuciones estables, el parámetro γ toma el papel de "medida de dispersión", papel que se extiende al concepto de volatilidad en el ámbito financiero, con lo cual se asocia la volatilidad del subyacente con el parámetro de escala de la distribución estable. No obstante, esta volatilidad está directamente asociada al índice de estabilidad y al parámetro de asimetría. El impacto de la volatilidad en el modelo estable se ilustra en la Gráfica 6. En esta gráfica se aprecia que los precios del modelo estable en posiciones cercanas "en el dinero" aumentan a medida que la volatilidad crece llegando a superar los precios del modelo BSM.

Gráfica 6. Parámetro de escala.



$\gamma = 0.16$ (línea continua), $\gamma = 0.26$ (punteada) y $\gamma = 0.36$ (discontinua).

9. Conclusiones

A la fecha, los modelos estables de valuación de opciones han estado circunscritos al dominio de las frecuencias, lo que conlleva la necesidad de tener conocimiento de transformadas de Fourier y sus inversas, así como de contornos de integración con el fin de aplicar estos modelos de valuación. Lo anterior es consecuencia de que la única expresión analítica simple para el análisis de las distribuciones estables corresponde a la función característica. En este trabajo se ha presentado una propuesta para valuar opciones con distribuciones α -estables basada en la medida estable neutral al riesgo propuesta por McCulloch (2003). La propuesta, a diferencia de las hasta ahora presentadas en la literatura, desarrolla una fórmula de valuación al dominio del espacio y tiempo, permitiendo adaptarse más a la forma de valuar del modelo Black-Scholes-Merton. El empleo del modelo estable de valuación requiere, además, de los parámetros financieros relevantes (precio spot del subyacente, precio de ejercicio, tasa de interés, período de maduración y volatilidad) utilizados por el modelo de Black-Scholes-Merton, incorporar dos parámetros adicionales el índice de estabilidad y el correspondiente a la asimetría. Por lo tanto, la fórmula de valuación hace uso de una mínima cantidad de información para su aplicación capturando características como colas pesadas y asimetrías presentes en las series financieras, características que el modelo Black-Scholes-Merton no captura.

Aun cuando no se cuenta con una expresión simple de la función de densidad de una distribución estable, sí se tiene una representación numérica; la cual permite aproximar la prima de la opción en el espacio y el tiempo, y permite realizar los cálculos involucrados en la valuación como son: la aproximación de funciones de densidad y distribución.

Bibliografía

Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.

Borak, S., W. Hardle y R. Weron (2005). *Stable Distributions, SFB 649 Economic Risk*. Berlín.

Carr, P. y L. Wu (2003). "The finite moment log stable process and option pricing". *The Journal of Finance*, vol. 52, núm. 2, pp. 753-777.

Cartea, A. y S. Howinson (2009). "Option Pricing with Lévy-Stable Processes Generated by Lévy-Stable Integrated Variance". *Quantitative Finance*, vol. 9, núm. 4, pp 397-409.

Gorenflo, R. y F. Mainardi (1988). "Fractional Calculus and Stable probability Distributions". *Arch. Mechanincs*, vol. 50, pp. 377-388.

Li, X. (2003). *Fractional differential equations and stable distributions. Applied Probability Trust*.

McCulloch, J.H. (2003). *The Risk-Neutral Measure under Log-Stable Uncertainty*. Working Paper.

Merton, R.C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 1-2, pp. 125-144.

Metzler, R. y J. Klafter (2000). "The random walk guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach". *Phys. Reports*, vol. 339, núm. 1, pp. 1-77.

Montroll, E.W. y G.H. Weiss (1965). *J. Math. Phys*, vol. 6, pp. 167-178.

Nolan, J.P. (2009). *Stable distributions: Models for Heavy Tailed Data*. [Web en línea]. Disponioble desde Internet en: www.academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf [sin fecha de acceso].

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. 2ª. ed. Cengage Learning, México.