Estimación de la esperanza de la función de penalización descontada en procesos de riesgo con medida de intensidad continua: El caso de la probabilidad de ruina en tiempo finito

María Guadalupe Cordero Parra*

* Instituto Politécnico Nacional.
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Zacatenco.
lupitacdeh@hotmail.com

Estocástica: finanzas y riesgo.
Volumen 1, Numero 1, enero-junio 2011, pp. 73-85. ISSN: 2007-5383

Resumen

La esperanza de la función de castigo descontada se emplea en una amplia familia de problemas en el contexto de la teoría de riesgo actuarial, la valuación de opciones en finanzas y la reclamación contingente del tiempo de ejercicio óptimo. Modelar la tasa de reclamaciones como una función dependiente del tiempo es una extensión del proceso clásico de riesgo que desemboca en la probabilidad de ruina bajo procesos de Poisson no estacionarios.
En este trabajo la probabilidad de ruina como un caso especial de la esperanza de la función de castigo descontada es estimada empleando métodos de Monte Carlo y se muestran ejemplos con distribuciones de Pareto y Weibull, para las reclamaciones y medida de intensidad continua bajo horizonte finito.

Abstract

The expected discounted penalty function is useful in a wide family of problems related to insurance risk theory, finance valuation of options and the contingent claim of optimal exercise time. Modeling the arrival claim rate as a time dependent function is an extension of the classical risk process that yields to the probability of ruin under non stationary Poisson process. In this paper the probability of ruin within finite time horizon is estimated using Monte Carlo methods as a special case of the expected discounted penalty function and examples with Pareto and Weibull distributions for the claims and continuous intensity measure are provided.

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo primordial estimar la probabilidad de ruina bajo un horizonte de tiempo finito, en el cual se considera un proceso de riesgo donde el proceso de llegada de las reclamaciones sigue un proceso de Poisson no estacionario, es decir, la tasa de llegada no es constante en el tiempo. Se plantea la probabilidad de ruina como un caso especial de la esperanza de la función de castigo descontada, que abarca una amplia familia de problemas en el contexto de la teoría de riesgo actuarial (Sheldon Lin y Wang, 2009) y la valuación de opciones de catástrofe en finanzas (Jaimungal y Wang, 2006). En la segunda sección, se plantea el marco teórico de los procesos de Poisson no estacionarios; en la tercera, se definen los procesos de riesgo y la esperanza de la función de castigo descontada; en la cuarta sección se formula el algoritmo de simulación para la estimación de la probabilidad de ruina; en la quinta sección se muestran resultados de las estimaciones para los casos no-estacionario/Pareto y no-estacionario/Weibull. Finalmente se presentan las conclusiones y las referencias.

2. Procesos de Poisson no estacionarios

Definición 2.1 Un proceso estocástico $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de conteo (Ross, 1983) si:

(i) $N_t \geq 0$.

(ii) N_t toma valores enteros.

(iii) Si $s < t$, entonces $N_s \leq N_t$.

(iv) Para $s < t$, $N_t - N_s$ es el número de eventos que ocurrieron en el intervalo $(s, t]$.

Definición 2.2 El proceso de conteo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson no estacionario con función de intensidad $\lambda(t)>0, t \geq 0$ si:

(i) $N_0 = 0$.

(ii) $\{N_t\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes.

(iii) $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.

(iv) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

Sea

$$a(t) := \int_0^t \lambda(t)\, ds,$$

la medida de intensidad de $\{N_t\}_{t\geq 0}$.

Teorema 2.3 *Sea $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson no estacionario y sean $t, s \geq 0$, entonces $N_t - N_s$ se distribuye Poisson con esperanza $a(t+s) - a(t)$.*

Demostración: Sea

$$P_n(s) := P(N_{t+s} - N_t = n).$$

Entonces

$$P_0(s+h) = P(N_{t+s+h} - N_t = 0)$$

$$P_0(s+h) = P(N_{t+s} - N_t, N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0),$$

aplicando la definición 2.2 (*ii*) al lado derecho tenemos

$$P_0(s+h) = P(N_{t+s} - N_t = 0)P(N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0),$$

luego de la definición 2.2 (*iii*) y (*iv*)

$$P_0(s+h) = P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)],$$

de aquí que

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h},$$

tomamos el límite cuando $h \to 0$, luego

$$P_0^{'}(s) = -\lambda(t+s)P_0(s),$$

es decir,

$$\ln P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)du$$

y esto implica

$$P_0(s) = e^{-[a(t+s)-a(t)]}. \tag{2.1}$$

Análogamente para $n \geq 1$

$$P_n(s+h) = P(N_{t+s+h} - N_t = n)$$

$$P_n(s+h) = P_n(s)[1-\lambda(t+s)h] + P_{n-1}(s)[\lambda(t+s)h] + o(h).$$

Luego

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_n(s) + \lambda(t+s)P_{n-1}(s) + \frac{o(h)}{h},$$

tomando el límite cuando $h \to 0$ y multiplicando ambos lados por

$e^{a(t+s)-a(t)}$,

$$e^{a(t+s)-a(t)}[P_n'(s) + \lambda(t+s)P_n(s)] = \lambda(t+s)e^{a(t+s)-a(t)}P_{n-1}(s),$$

luego

$$\frac{d}{dt}\left(e^{a(t+s)-a(t)}P_n(s)\right) = \lambda(t+s)e^{a(t+s)-a(t)}P_{n-1}(s). \tag{2.2}$$

Cuando $n = 1$ y usando 2.1

$$\frac{d}{dt}\left(e^{a(t+s)-a(t)}P_1(s)\right) = \lambda(t+s),$$

de forma equivalente

$$P_1(s) = \left[\left(a(t+s)-a(t)\right)+c\right]e^{-\left(a(t+s)-a(t)\right)}. \tag{2.3}$$

Evaluamos en $s = 0$ para calcular la constante c

$$P_1(0) = P(N_{t+0} - N_t = 1) = 0,$$

sustituyendo en 2.3

$$(a(t+0) - a(t) + c)e^0 = 0,$$

es decir,

$$c = 0.$$

Luego

$$P_1(s) = \left(a(t+s)-a(t)\right)e^{-\left(a(t+s)-a(t)\right)}.$$

Para demostrar que $P_n(t) = e^{-\left(a(t+s)-a(t)\right)}\left(a(t+s)-a(t)\right)^n/n!$ se usó inducción matemática.

Asumimos que la fórmula de $P_1(s)$ vale para $n-1$, entonces al emplear (2.2)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{a(t+s)-a(t)}P_n(s)\right) = \frac{\lambda(t+s)\left(a(t+s)-a(t)\right)^{-1}}{(n-1)!},$$

que implica

$$e^{\left(a(t+s)-a(t)\right)}P_n(s) = \frac{\left(a(t+s)-a(t)\right)^n}{n!} + c,$$

pero $$P_n(0) = P(N_{t+0} - N_t = n) = 0$$

por tanto

$$P_n(t) = e^{-\left(a(t+s)-a(t)\right)}\left(a(t+s) - a(t)\right)^n/n!$$

Es importante resaltar que el teorema 2.3 implica que

$$E(N_t) = E(N_t - N_0) = a(t).$$

Proposición 2.4 $a(t)$ *es una función no decreciente y continua por la derecha.*

Demostración: Como $N_{t+s} \geq N_t$ entonces $EN_{t+s} \geq EN_t$, es decir,

$$a(t+s) \geq a(t)\ .$$

Sea t_n una sucesión tal que $t_n \downarrow t$, entonces $N_{t_n} \downarrow N_t$ porque N es continua por la derecha. Por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{t_n \downarrow t} a(t_n) = a(t).$$

Definición 2.5 La inversa de la medida de intensidad es

$$a^{-1}(t) := sup\{s|a(s) \leq t\}.$$

Observe que a^{-1} es continua por la derecha. Si además a es continua, a^{-1} es creciente y $\ a \circ a^{-1}(t) = t, \quad t < a(\infty).$

Proposición 2.6 *Sea* N *un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad* a *continua con* $a(\infty) = \infty$. *Entonces el proceso de conteo* $\underline{N} := N \circ a^{-1}$ *es un proceso de Poisson estacionario con* $\lambda = 1$.

Demostración: Como a^{-1} es creciente $\underline{N}$ tiene incrementos independientes. Por otra parte, el teorema 2.3 implica que $\underline{N}_t - \underline{N}_s = N_{a^{-1}(t)} - N_{a^{-1}(s)}$ se distribuye Poisson con esperanza.

$$a\left(a^{-1}(t)\right) - a\left(a^{-1}(s)\right) = t - s.$$

3. Procesos de riesgo y la esperanza de la función de castigo descontada

En la teoría clásica de riesgo (Beard, Pentikainen y Pesonen, 1984) se modela el comportamiento de una póliza mediante un proceso estocástico que depende del capital inicial x, la constante de ingreso c y los parámetros de la distribución de los montos de las reclamaciones Y_i y de la tasa de arribo λ de un proceso de Poisson estacionario.

Definición 3.1 El proceso de riesgo clásico que modela el capital en el momento t es

$$X_t = x + ct - \sum_{i=0}^{N_t} Y_i \ .$$

Una forma natural de calcular (Hoyos Reyes, 2001) la constante de ingreso es tomando el producto de un factor de recargo por el valor esperado de la pérdida

$$c = (1+\rho)E\left[\sum_{i=0}^{N_t} Y_i\right] \ ,$$

donde ρ es el factor de recargo que se interpreta como el sobreprecio que la aseguradora fija para evitar que el capital eventualmente sea negativo, es decir, para evitar la ruina.

Definición 3.2 Bajo la medida de probabilidad P^x la probabilidad de ruina es

$$\psi(x) := P^x(\tau < \infty),$$

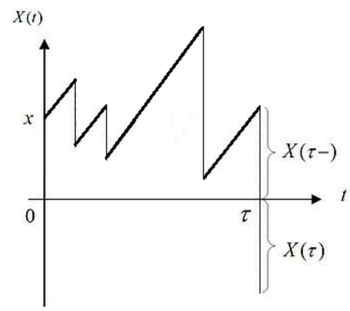
donde $\tau = inf\{t|X_t < 0\}$ es el momento en que la ruina ocurre.

Definición 3.3 La esperanza de la función de castigo descontada (Gerber y Shiu, 1998) es

$$m(x) := E^x\left[e^{-\delta\tau}\omega(x_{\tau-}, x_\tau)\mathbb{I}\{\tau < \infty\}\right]$$

Donde δ es una tasa de interés y $\omega(x_{\tau-}, x_\tau)$ es una función de penalización que representa los costos económicos del asegurador en el momento de la ruina asumiendo que dependen del superávit $X_{\tau-}$en el instante de la ruina y el déficit en la ruina X_τ (véase la Figura 1).

Figura 1. Superávit y déficit en el momento de la ruina.



Para calcular la probabilidad de ruina empleando $m(x)$ basta considerar $\delta = 0$ y $\omega(x_{\tau-}, x_\tau) = 1$.

Definición 3.4 La probabilidad de ruina en un horizonte de tiempo finito T es

$$\psi(x, T) = m(x),$$

con $\delta = 0$ y $\omega(x_{\tau-}, x_\tau) = \mathbb{I}\{\tau \leq T\}$.

4. Estimación de la probabilidad de ruina

Algoritmo 4.1 Estimación de la probabilidad de ruina con horizonte finito T, bajo un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad a continua.

Objetivo: Generar las n realizaciones del proceso de riesgo X_t, donde el proceso de llegada de las reclamaciones es Poisson no estacionario, para formular $\hat{\psi}(x, T)$ el estimador de Monte Carlo (EMC) de $\hat{\psi}(x, T)$.

Entrada: n, T, x, ρ, a, F_Y.

Salida: $\hat{\psi}(x, T)$.

Método:

$i \leftarrow 1$.

$R \leftarrow 0$.

Hasta que $i > n$ haz:

$X \leftarrow 0$.

$t \leftarrow 0$.

$Z \leftarrow 0$.

$W \leftarrow 0$.

Mientras $(X \leq x)$ y $(t < T)$ haz:

Generamos $S \sim exp(1)$.

Generamos $Y \sim F_Y$.

$W \leftarrow W + S$.

$t \leftarrow a^{-1}(W)$.

$Z \leftarrow Z + Y$.

$X \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EY \cdot a(t)$.

Si $X > x$ entonces $R \leftarrow R + 1$.

Fin Mientras.

$i \leftarrow i + 1$.

Fin Hasta.

$\hat{\psi}(x, T) \leftarrow R/n$.

Definición 4.2 Llamamos S_{EMC} a la desviación estándar del EMC es decir,

$$S_{EMC} = \sqrt{VAR(\psi(\theta, t))} .$$

Definición 4.3 La *Tolerancia* del EMC $\hat{\psi}(\theta,t)$ es el radio del intervalo de confianza del estimador con 99% de confianza,

$$Tol_{0.01}=2.575\,S_{EMC}.$$

Definición 4.4 El %*Tol* es el porcentaje de variación de la *Tolerancia* respecto al EMC $\hat{\psi}(\theta,t)$,

$$\%Tol=100\frac{Tolerancia}{\hat{\psi}(\theta,t)}.$$

5. Resultados

Ejemplo 5.1 Proceso de riesgo con llegadas de acuerdo a un proceso de Poisson no estacionario con reclamaciones distribuidas $Pareto(\alpha,\beta)$.
Se considera una medida de intensidad $a(t)=t^2$, por lo que $\lambda(t)=2t$, y se realizaron 10^4 simulaciones empleando el método de la transformada inversa para simular los montos de las reclamaciones.

Tabla 1. Estimación de la probabilidad de ruina caso no-estacionario/Pareto.

ρ	x	α	β	T	ψ̂(x,T)	S_{EMC}	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	3	0.5	10	0.2114	4.08×10^{-3}	1.05×10^{-2}	4.97
0.01	10	3	0.5	20	0.4872	4.99×10^{-3}	1.29×10^{-2}	2.64
0.05	10	3	0.5	20	0.2851	4.51×10^{-3}	1.16×10^{-2}	4.07
0.01	20	4	2	10	0.4251	4.94×10^{-3}	1.27×10^{-2}	2.99
0.05	20	4	2	10	0.3220	4.67×10^{-3}	1.20×10^{-2}	3.74
0.05	20	4	2	30	0.4865	4.99×10^{-3}	1.28×10^{-2}	2.64

Ejemplo 5.2 Caso no estacionario/distribución de Weibull.
La distribución de Weibull resulta particularmente interesante porque no existe la función generadora de momentos si $\alpha<1$. Para simular los montos

de las reclamaciones se emplea el método de la transformada inversa. Se realizaron 10^4 simulaciones en cada realización para la estimación del EMC, con una medida de intensidad igual al ejemplo 5.1.

Tabla 2. Estimación de la probabilidad de ruina caso no-estacionario/Weibull.

ρ	x	α	β	T	$\hat{\psi}(x,T)$	S_{EMC}	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	0.5	1	10	0.7082	4.55×10^{-3}	1.17×10^{-2}	1.65
0.01	10	0.5	1	50	0.9221	2.68×10^{-3}	6.90×10^{-3}	0.75
0.03	20	0.5	1	50	0.8325	3.73×10^{-3}	9.62×10^{-3}	1.15
0.01	50	2	3	20	0.1102	3.13×10^{-3}	8.06×10^{-3}	7.31
0.03	40	2	3	20	0.1223	3.27×10^{-3}	8.43×10^{-3}	6.89
0.03	40	2	3	30	0.2127	4.09×10^{-3}	1.05×10^{-2}	4.95

6. Conclusiones

Los procesos de Poisson no estacionarios nos permiten modelar problemas donde la tasa de llegada depende del tiempo, lo que se traduce en una mejor aproximación a la realidad. Los problemas de riesgo en el contexto de la esperanza de la función de castigo descontada son relevantes en aplicaciones actuariales y financieras, la extensión al problema de la probabilidad de ruina en tiempo finito bajo una medida de intensidad discontinua será materia de trabajos posteriores. Los resultados permiten, bajo necesidades particulares, realizar un análisis de escenarios considerando que el algoritmo descrito puede emplearse utilizando diferentes distribuciones para los montos de las reclamaciones y de diversas medidas de intensidad continuas.

Referencias

Beard, R.E., T. Pentikainen y E. Pesonen (1984). *Risk Theory*. Nueva York, Chapman and Hall.

Gerber, H.U. y E.S.W. Shiu (1998). "On the time value of ruin". *North American Actuarial Journal*. Society of Actuaries. Vol. 2, núm. 1. EU, pp. 48-78.

Hoyos Reyes, L.F. (2001). "Monte Carlo approach to insurance ruin problems using conjugate processes". *Morfismos*. IPN-Cinvestav-Depatamento de Matemáticas. Vol. 5, núm. 2. México, 2001, pp. 37-50.

Jaimungal, S. y T. Wang (2006). "Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses". *Insurance: Mathematics and Economics*. Elsevier. Vol. 38, núm. 3. Holanda, junio, pp. 469-483.

Sheldon Lin, X., y Wang, T. (2009). "Pricing perpetual American catastrophe put options: A penalty function approach". *Insurance: Mathematics and Economics*. Elsevier. Vol. 44, núm 2. Holanda, abril, pp. 287-295.

Ross, Sheldon M. (1983). *Stochastic Processes*. Nueva York, John Wiley & Sons.