

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés estocástica bajo una medida **forward** neutral al riesgo

Raúl de Jesús Gutiérrez*

Miguel A. Díaz Carreño**

Fecha de recepción: 5 de abril de 2011

Fecha de aceptación: 27 de mayo de 2011

* Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Economía.
rjg2005mx@yahoo.com.mx

** Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Economía.

RESUMEN

El impacto de la naturaleza no lineal y el comportamiento estocástico de la tasa de interés se reflejan directamente en la fijación de precios de los productos derivados, particularmente en los contratos con vencimientos largos. Este trabajo de investigación propone modelos analíticos para la valuación de opciones sobre acciones cuando la tasa de interés tiende a ser estocástica bajo una medida martingala equivalente o *forward* neutral al riesgo. El modelo de equilibrio toma en cuenta la interacción entre los movimientos de los precios del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de riesgo crédito, capturando las dos fuentes de incertidumbre en una sola a través del término de difusión de la dinámica del precio *forward*. Además, el modelo de solución cerrada es aplicado a los precios diarios de América Móvil. El periodo de los datos cubre del 2 de enero de 2004 al 9 de mayo de 2011. En general, los resultados numéricos indican que los valores de las opciones están sobreestimados o subestimados con respecto a los valores de mercado en la mayoría de los casos.

Palabras claves: Valuación de opciones, tasa de interés estocástica, procesos de difusión, medidas martingala.

ABSTRACT

The nonlinear dynamics and the stochastic behaviour of the interest rate have a stronger impact on the pricing of derivatives securities, particularly for long-maturity option contracts. This paper proposes closed-form solutions for the pricing of equity options when the interest rate is stochastic under the existence of an equivalent martingale measure or risk-neutral forward measure. The arbitrage-free pricing model allows for capturing the dependence structure between the rates of return of the underlying stock and the default-free zero coupon bond, i. e. the two uncertainty sources can be simplified as one uncertainty source by means of the diffusion term of the forward price dynamics. In addition, we apply the solutions of model to the daily data of America Movil over the period 2 January 2004 to 9 May 2011. Overall, the numerical results show that the values of the options are overestimated or underestimated with respect to the market values in most of the cases.

Keywords: Derivatives pricing formula, stochastic interest rate, diffusion processes, martingale measure.

1. Introducción

En el campo de las finanzas cuantitativas, el modelo de forma cerrada de Black-Scholes ha sido extensamente aplicado para los propósitos de valuación, administración y control de riesgos de portafolios de derivados por los participantes en los mercados organizados y OTC en las últimas décadas, incluso para la valuación de opciones reales (Trigeorgis, 1996). Por ello, la sólida teoría es considerada la base financiera para los métodos contemporáneos de valuación de opciones bajo la premisa de la ausencia de oportunidades de arbitraje. La esencia de la teoría de Black-Scholes (1973) consiste en construir un portafolio libre de riesgo formado por una posición larga en el mercado de opciones y una posición corta en el mercado de contado (acción o activo riesgoso), la cual debe ser replicada en intervalos de tiempo infinitesimales. El resultado principal de esta perfecta estrategia de cobertura libre de riesgo es la ecuación diferencial parcial parabólica lineal, cuya solución analítica es la fórmula para la valuación de opciones bajo los supuestos de que la dinámica del precio del activo subyacente está gobernada por un movimiento Browniano geométrico y la tasa de interés es conocida y constante a través del tiempo. Este último supuesto asumido en el marco de Black-Scholes se atribuye al hecho de que el comportamiento de las tasas de interés tiende a ser más estable a través del tiempo en relación al comportamiento observado en los mercados accionarios.

Sin embargo, literatura financiera-económica ha encontrado suficiente evidencia estadística acerca del claro comportamiento no-lineal y no-estacionario de las tasas de interés, es decir, que éstas evolucionan como un proceso estocástico bajo la hipótesis de reversión a la media (Nelson y Plosser, 1982; Choi y Wohar, 1991; Anderson, 1997; Chiang y Chiang, 1995 y 1999; Chapman y Pearson, 2000; Bandi, 2002; Shively, 2005). En consecuencia, varios modelos de equilibrio o libres de arbitraje han sido desarrollados y utilizados por académicos para entender y capturar el comportamiento dinámico de las tasas de interés durante las últimas décadas. En este sentido, la amplia literatura se divide en tres grupos: el primer grupo de modelos continuos utiliza un factor

o una simple fuente de incertidumbre para explicar la evolución dinámica de la tasa de interés de corto plazo, sugerido inicialmente por Merton (1973) y posteriormente extendido por Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985).¹

Por su parte, Brennan y Schwartz (1979), Schaefer y Schwartz (1987), Longstaff y Schwartz (1992) y Fong and Vasicek (1991), con base en modelos de dos factores, sostienen que la variabilidad en las tasas de interés a diferentes plazos se explica mejor cuando son incorporados más de dos variables explicativas o factores estocásticos. No obstante, el interés por relajar el débil ajuste en la actual estructura de plazos de las tasas de interés derivado por los modelos de un factor ha generado varias extensiones debido a las implicaciones que pueden tener en la valuación de productos derivados más complejos. Al respecto, Hull y White (1990) proponen un modelo exógeno de tres factores al introducir parámetros como función del tiempo en el modelo de Vasicek, el cual captura más apropiadamente la estructura de dependencia entre las tasas de interés de diferentes vencimientos y los patrones de volatilidad reales.² Por lo anterior, el tema de la propiedad estocástica de la tasa de interés de corto plazo ha recibido especial atención en la literatura financiera, dado que el supuesto de tasa de interés constante tiene consecuencias trascendentales en las estrategias de cobertura perfecta para reducir el riesgo e incluso invalidar la aplicación de modelos de valuación de opciones bajo una medida martingala equivalente única, particularmente en los contratos de opciones con vencimientos largos debido a los efectos de apalancamiento y la naturaleza no-lineal de los instrumentos derivados.

En esta investigación se propone un modelo de forma cerrada para la valuación de opciones en el marco de Black-Scholes y Merton cuando la dinámica del precio del activo riesgoso está gobernada por un movimiento Browniano geométrico y la tasa de interés libre de riesgo es estocástica. El modelado de la fuente de incertidumbre de la tasa de interés es directamente a través del comportamiento estocástico del precio de un bono cupón cero libre de riesgo crédito, el cual también sigue un movimiento Browniano geométrico con varianza determinística y con el mismo vencimiento al de la opción. El procedimiento de valuación consiste en determinar un proceso de difusión

¹ Otro modelo de un factor, pero con volatilidad creciente y distribución lognormal para el nivel de la tasa de interés, es propuesto por Dothan (1998).

² En este contexto es importante resaltar que Ho y Lee (1986) fueron los pioneros en proponer un modelo de tasas de interés exógeno. Sin embargo, la evolución de la estructura de plazos de las tasas de interés está gobernada por un modelo basado en el supuesto de un árbol binomial.

que capture las dos fuentes de incertidumbre del activo riesgoso y del bono cupón cero en una sola fuente de incertidumbre bajo una medida *forward* de probabilidad neutral al riesgo. Cabe resaltar que el modelo de forma cerrada derivado es muy similar al propuesto por Björk (2004) de acuerdo con la teoría de arbitraje en tiempo continuo. Otra de las contribuciones es que el modelo extendido es aplicado a datos diarios de la acción de América Móvil L (AMXL) que cotiza en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), utilizando la volatilidad correlacionada condicional estimada a través de los modelos GARCH multivariados.

Esta investigación está estructurada de la siguiente forma. En la segunda sección se establecen los supuestos básicos del modelo de Black-Scholes. En la sección 3 se deriva la dinámica del proceso de difusión que captura las dos fuentes de incertidumbre. En la cuarta sección se obtiene el modelo de valuación de opciones en el contexto tradicional de Black-Scholes asumiendo tasa de interés estocástica. La sección 5 describe brevemente los modelos GARCH multivariados utilizados para la estimación de la volatilidad correlacionada condicional. Los resultados numéricos de la aplicación del modelo de forma cerrada son proporcionados en la sección 6. En la última sección se presentan las conclusiones y comentarios.

2. Supuestos básicos y dinámicas de los activos

Con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada tratables, los supuestos tradicionales de la economía de Black-Scholes son empleados, pero con una extensión en la economía a fin de capturar la fuente de incertidumbre de la tasa de interés en un contexto neutral al riesgo. De esta manera, los principales supuestos del modelo son introducidos y discutidos a continuación.

Considerando una economía de operación continua, la incertidumbre en los mercados financieros se captura a través de la introducción de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y una filtración $F = \{\mathfrak{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$, en donde S_t representa el valor del activo riesgoso en el tiempo t . La dinámica estocástica de S_t en el espacio de probabilidad neutral al riesgo es conducida por un movimiento Browniano geométrico de la siguiente forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sigma_s dX_t \quad (1)$$

donde el parámetro que define a la tendencia instantánea μ_s representa el rendimiento esperado, σ_s es la desviación estándar del rendimiento esperado del activo riesgoso S_t , los cuales son constantes a través del tiempo. Este proceso se caracteriza por tener incrementos temporales independientes que se distribuyen como una variable aleatoria normal con media $E[dX_t]=0$ y varianza $Var[dX_t]=dt$ en el mismo espacio de probabilidad, y se define como una función del movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener, es decir, X_t .

Considerando un mercado en donde se emiten y negocian instrumentos financieros libres de riesgo crédito que cotizan a descuento, es decir, bonos cupón cero con precio de mercado $B_{t,T}$ en el tiempo t y vencimiento en el tiempo T , y que regresan el valor nominal de una unidad monetaria al vencimiento, $B_{T,T}=1$. De manera similar, la dinámica del valor del bono cupón cero libre de riesgo crédito está gobernada por un movimiento Browniano geométrico definido de la siguiente forma:

$$\frac{dB_{t,T}}{B_{t,T}} = \mu_B dt + \sigma_B dZ_t \quad (2)$$

donde los parámetros μ_B y σ_B representan el rendimiento esperado y la volatilidad de la tasa instantánea de rendimiento del bono cupón cero libre de incumplimiento $B_{t,T}$. La variable aleatoria Z_t es también un proceso de Wiener con incrementos temporales independientes que se distribuyen normal con $E[dZ_t]=0$ y $Var[dZ_t]=dt$.

De esta manera, este supuesto muestra que la fuente de incertidumbre del precio del bono cupón cero conducido por la ecuación diferencial estocástica (2), es equivalente a modelar la incertidumbre de la tasa de interés libre de riesgo bajo la misma medida de probabilidad neutral al riesgo (Liao y Huang, 2005). En este contexto no se especifica un modelo estocástico para la tasa de interés de corto plazo, aunque modelos como Vasicek (1997) y Cox *et. al.* (1985) pueden ser utilizados en este marco con sólo modificar el término de difusión en la ecuación diferencial estocástica anterior.

Por su parte, otros supuestos que delimitarán el marco y los alcances de este trabajo de investigación son que los mercados de los activos financieros tratables están libres de fricciones, es decir, la operación en el mercado es continua y se asume que no existen costos de transacción, impuestos o pago de dividendos y no hay limitaciones en las ventas en corto. Asimismo, los agentes económicos participantes pueden endeudarse y prestar a la misma tasa de

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

interés instantánea libre de riesgo. Finalmente, asumiendo que un conjunto de activos financieros se pueden negociar continuamente en el mercado, el activo financiero B_t representa la cantidad de dinero depositada en una cuenta bancaria o invertida en el mercado de dinero en el tiempo $t \geq 0$, cuya evolución es conducida por la ecuación diferencial

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt \quad (3)$$

con $B_0 = 1$ y donde $r = \{r_t, t \in [0, T]\}$ representa el proceso de la tasa de interés instantánea de corto plazo predecible para $t \in [0, \infty)$. En consecuencia, el monto del activo financiero B_t en el tiempo $t > 0$ es igual a

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (4)$$

donde r_t es una función positiva del tiempo lo que implica que el valor de la cuenta bancaria B_t también sea una función determinística del tiempo, continua y creciente.

3. Proceso de difusión bajo la medida forward

En esta sección, el principal objetivo es derivar la dinámica conjunta de las dos fuentes de incertidumbre, capturándolas en una sola fuente de incertidumbre bajo una medida de probabilidad *forward* neutral al riesgo. En este contexto, el término de difusión o volatilidad del nuevo proceso estocástico captura apropiadamente ambas fuentes de incertidumbre a través de la correlación entre los movimientos del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de incumplimiento.

Dado que las dinámicas de los procesos S_t y $B_{t,T}$ pueden ser expresadas en términos de dos procesos de Wiener X_t y Z_t correlacionados entre sí con $Cov[dX_t, dZ_t] = \rho dt$ y donde ρ es un número real, entonces se puede definir una función que depende de ambas fuentes de incertidumbre y el tiempo, es decir, $f(S_t, B_{t,T}, t)$.

Aplicando el Lema de Itô, las reglas del cálculo estocástico y sustituyendo las dinámicas de los precios del activo riesgoso y bono cupón cero libre de incumplimiento se tiene la siguiente ecuación:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu_s S_t + \frac{\partial f}{\partial B_{t,T}} \mu_B B_{t,T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial B_{t,T}^2} \sigma_B^2 B_{t,T}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial B_{t,T}} \rho \sigma_s \sigma_B S_t B_{t,T} \right) dt + \partial f$$

Asumiendo que los precios de S_t y $B_{t,T}$ se distribuyen lognormal, entonces la función que depende de ambos factores de riesgo se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(S_t, B_{t,T}, t) = \ln \left(\frac{S_t}{B_{t,T}} \right) \quad (6)$$

donde el argumento de la función logarítmica se puede definir como el precio *forward* sobre el activo riesgoso negociado en el tiempo t y con fecha de entrega en el tiempo T , es decir,

$$F_t = \frac{S_t}{B_{t,T}} \quad (7)$$

Tomando las derivadas parciales de la ecuación (6) y sustituyéndolas en la ecuación (5) se tiene que

$$d \ln(F_t) = \left(\mu_s - \mu_B - \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \sigma_B^2 \right) dt + \sigma_s dX_t - \sigma_B dZ_t \quad (8)$$

Para simplificar la dinámica del *forward* suponemos que los términos de difusión que corresponden a la parte aleatoria de la ecuación (8) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_s dX_t - \sigma_B dZ_t = \sigma_F dW_t$$

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

donde la varianza de la diferencia de los procesos de Wiener X_t y Z_t correlacionados se puede expresar en términos de la varianza del precio *forward*, la cual captura la correlación entre los precios del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de riesgo crédito, esto es,

$$\begin{aligned} \text{Var}[dX_t - dZ_t] &= \text{Var}[dX_t] + \text{Var}[dZ_t] - 2\text{Cov}[dX_t, dZ_t] \\ &= (\sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B) dt = \sigma_F^2 dt \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, la tendencia instantánea y la volatilidad de la dinámica del precio *forward* se pueden definir de la siguiente forma:

$$\sigma_F^2 = \sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B \quad 9)$$

y

$$\mu_F = \left(\mu_S - \mu_B - \frac{1}{2}\sigma_S^2 + \frac{1}{2}\sigma_B^2 \right) \quad (10)$$

En consecuencia, la dinámica del precio *forward* sobre el activo riesgoso en el tiempo t está conducida por la ecuación diferencial estocástica

$$d \ln(F_t) = \mu_F dt + \sigma_F dW_t \quad (11)$$

De acuerdo con el supuesto de que los precios *forward* siguen una distribución lognormal, entonces la ecuación diferencial estocástica (11) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dF_t}{F_t} = \mu_F dt + \sigma_F dW_t \quad (12)$$

donde σ_F es la volatilidad de la tasa de rendimiento instantánea del precio *forward*, la cual se define como una función creciente dependiente del tiempo. En este sentido, el comportamiento estocástico de la tasa de interés de corto plazo tiene un efecto importante en la naturaleza de los precios de las opcio-

nes, particularmente cuando aún falta bastante tiempo para la expiración de la opción o en la celebración del contrato.

De esta manera, el potencial de la medida *forward* coadyuva a capturar, de manera eficiente, las dos fuentes de incertidumbre definidas por el activo riesgoso y el bono cupón cero libre de incumplimiento en una sola fuente de riesgo.

4. Valuación de opciones bajo una medida *forward* neutral al riesgo

La extensa investigación en matemáticas financieras demuestra que el supuesto de mercado completo (libre de oportunidades de arbitraje) es un concepto estándar de restricción en los modelos de Black-Scholes y Merton. De hecho, el supuesto fundamental de esta teoría sustenta la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo o medida martingala equivalente. En otras palabras, los precios de las opciones financieras se comportan como martingalas, al existir suficientes contratos que ayudan a cubrir o replicar cualquier activo subyacente a través estrategias de inversión dinámicas autofinanciables (Harrison y Kreps, 1979; Harrison y Pliska, 1981, 1983; Duffie, 1996).³

Sin embargo, la relajación de este supuesto aunado a la introducción de nuevas fuentes de incertidumbre con respecto al movimiento Browniano puede conducir a modelos de valuación inapropiados en la cobertura completa o perfecta del riesgo intrínseco. En el caso de un modelo de difusión con tasa de interés estocástica, el mercado puede ser completo o incompleto. Si el mercado es incompleto, en ese momento la medida martingala equivalente deja de ser única. Asimismo, la cobertura perfecta en el marco de Black-Scholes y Merton es inalcanzable debido a que la medida martingala equivalente es fijada por el propio mercado a través de los precios de mercado de las opciones, subestimando así las primas dentro y fuera del dinero y sobreestimándolas en el dinero. Para solucionar este problema se establece la relación entre el concepto económico de ausencia de arbitraje y la propiedad matemática de la existencia de una medida neutral al riesgo o medida martingala equivalente demostrada por Harrison y Pliska (1981).

³ En este contexto, la definición de estrategia de inversión autofinanciable es alcanzada cuando sólo cambia de valor ante cambios en los precios del activo subyacente, es decir, no se obtienen flujos adicionales después del tiempo inicial

En la teoría financiera, la interpretación de que los cambios futuros en los precios de los activos financieros son totalmente impredecibles alimentado por el hecho de que en un tiempo determinado, la información más reciente manejada en los mercados financieros es considerada la más importante, por lo que el incremento esperado es cero. Sin embargo, la mayoría de los precios de los activos financieros no siempre tienden a comportarse como martingalas debido a que no son completamente impredecibles. Esto se atribuye, en cierta forma, a que los inversionistas que participan en los mercados financieros esperan que los precios de los bonos y las acciones aumenten con el tiempo, mientras que en el caso de los productos derivados (futuros y opciones) disminuyan (Neftci, 2000). Aunque, los activos financieros pueden ser transformados en martingalas al eliminar la tendencia instantánea, también conocida como la prima al riesgo que demandan los inversionistas cuando se encuentran correlacionados positivamente con el riesgo de mercado; sin embargo, esta tarea no es fácil en la práctica financiera, en particular en la valuación de productos derivados.

De acuerdo con el cálculo de Itô y el supuesto de que los precios de los activos financieros siguen una distribución lognormal, consideremos que la solución única de la ecuación diferencial estocástica (12) se puede expresar de la siguiente forma:⁴

$$F_t = F_0 \exp\left(\sigma_F W_t + \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right) \quad (13)$$

En este caso, la solución única representada por el precio *forward* no se comporta como martingala, puesto que todo proceso estocástico que aumenta en el promedio es una supermartingala (Neftci, 2000). Sin embargo, para transformar esta solución única a una martingala, es necesario eliminar la prima al riesgo o tendencia instantánea sin alterar la estructura de la volatilidad del activo subyacente mediante un cambio de medida de probabilidad, de tal manera que al descontar el precio *forward* por la tasa libre de riesgo se comporte como una medida martingala equivalente.

De esta manera, la existencia de una medida martingala equivalente única para la solución del precio *forward* es demostrada por el teorema de Girsanov a través de la siguiente proposición.

⁴ Para un estudio más profundo de los diferentes tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, véase Elliot (1982) y Karatzas y Shreve (1991).

Proposición 1.

Si consideramos que $F_t = F_0 \exp\left(\sigma_F W_t + \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right)$ es una solución única de la dinámica del precio *forward* $\forall t \in [0, T]$ y $\hat{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu_F}{\sigma_F}\right)t$ es una transformación lineal, entonces $F_T = F_t \exp\left(\sigma_F (\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right)$ es una martingala.⁵

En consecuencia, el estudio de la teoría de martingalas constituye una herramienta clave en la valuación de productos derivados, ya que en ellas va implícita el concepto de no arbitraje que permite el desarrollo de múltiples modelos financieros de equilibrio.

En el contexto de medida de probabilidad *forward* neutral al riesgo, la fijación de los precios en las opciones se puede tratar a través de soluciones de forma cerrada bajo supuestos básicos. Por ejemplo, el valor de una opción *call* o *put* en el tiempo t con precio de ejercicio K y fecha de expiración en el tiempo $T > t$, utilizando la dinámica del precio *forward* sobre el activo subyacente se obtiene a través del valor esperado condicional del precio *spot* con vencimiento en T dado un conjunto de información disponible hasta el tiempo t bajo una medida martingala Q equivalente, es decir,

$$V(t, T) = vE^Q \left[\exp\left(\int_t^T r_s ds\right) (F_T - K)_+ | \mathfrak{F}_t \right] \quad (14)$$

donde $(F_T - K)_+$ es la función máximo del perfil de pagos de la opción en el tiempo T , con $v = 1$ para un *call* y $v = -1$ para un *put*.

Un hecho que cabe resaltar es que la valuación de la opción bajo una medida *forward* es más conveniente en el presente contexto, estableciendo que el precio *forward* en el tiempo T se comporta como una martingala bajo esta misma medida de probabilidad. De esta forma, el valor de la opción se puede expresar de la siguiente manera:

⁵ Para una demostración matemática más detallada de la proposición 1, véase De Jesús (2001).

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

$$V(t) = vE^Q[B_{t,T}(F_T - K)_+ | \mathfrak{F}_t] \quad (15)$$

donde $B_{t,T}$ es un bono cupón cero libre de riesgo crédito.

Puesto que F_t es una variable aleatoria \mathfrak{F}_t -medible y $\hat{W}_T - \hat{W}_t$ es independiente de \mathfrak{F}_t bajo la medida de probabilidad Q , entonces es posible conocer el precio de la opción en el tiempo t como una función del precio *forward* y el tiempo.

$$\begin{aligned} V(t) &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)_+ | \mathfrak{F}_t\right] \\ &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F\hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)_+ | \mathfrak{F}_t\right] \\ &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F\hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)1_{F_T \geq K}\right] \end{aligned} \quad (16)$$

donde $1_{F_T \geq K}$ es una función indicadora con valor igual a 1 si $F_T \geq K$ y cero si sucede lo contrario, cuyo valor esperado es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra (Geman, Karaoui y Rochet, 1995).

Dado que la condición de la función indicadora⁶ se cumple y el movimiento Browniano estándar se distribuye normal $N(0, T-t)$ bajo la medida de probabilidad Q y $\hat{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ con $Z \sim N(0, 1)$ bajo la probabilidad Q se tiene que.

⁶ Para una demostración matemática detallada de la condición de la función indicadora, véase De Jesús (2001).

$$\begin{aligned}
 &= vB_{i,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(\sigma_F \hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega: Z+d_2 \geq 0\}} \right] \\
 &= vB_{i,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(\sigma_F \hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega: Z \geq -d_2\}} \right], Z \sim N(0,1) \\
 &= vB_{i,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega: -Z \geq -d_2\}} \right], -Z \sim N(0,1) \\
 &= vB_{i,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega: Z \leq d_2\}} \right] \\
 &= vB_{i,T} \int_{-\infty}^{d_2} \left(F_t \exp \left(-z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= vB_{i,T} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_t \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 - z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) dz \\
 &\quad - vB_{i,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz
 \end{aligned}$$

Factorizando el argumento de la función exponencial de tal manera que sea un binomio cuadrado perfecto se tiene que

$$\begin{aligned}
 V(t) &= vB_{i,T} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_t \exp \left[-\frac{1}{2} (z + \sigma_F \sqrt{T-t})^2 \right] dz - vB_{i,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= v \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t \exp \left[-\frac{1}{2} (z + \sigma_F \sqrt{T-t})^2 \right] dz - vB_{i,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= vS_t N(d_1) - vB_{i,T} KN(d_2) \tag{17}
 \end{aligned}$$

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

donde la segunda integral de la ecuación (17) representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal. De manera similar, la primera integral también se puede transformar a la distribución acumulada normal realizando el siguiente cambio de variable $w = z + \sigma_F \sqrt{T-t}$. Obviamente este cambio de variable genera un cambio de límites de integración.

En consecuencia, el precio de una opción *call* o *put* sobre un activo riesgoso con tasa de interés estocástica determinado por el método de valuación *forward* neutral al riesgo se puede expresar de la siguiente forma:

$$V(t) = vS_t N(vd_1) - vB_{t,T} KN(vd_2) \quad (18)$$

donde $N(d)$ es la distribución acumulada normal evaluada en los parámetros d_1 y d_2 , los cuales se expresan de la siguiente manera:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_{t,T}}\right) + \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_{t,T}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}$$

Aunque existen dos factores de riesgo para la valuación de opciones en este contexto, capturados por la varianza del precio *forward* sobre el activo riesgoso. Estos modelos de forma cerrada no requieren de distribuciones acumuladas normales estándar, en un marco multivariado, para demostrar que las probabilidades de las opciones se encontrarán dentro del dinero. De hecho, si la volatilidad σ_F es constante y la tasa de interés libre de riesgo es plana o constante, es decir, $B_{t,T} = \exp(-r(T-t))$. El modelo de forma cerrada definido por la ecuación (18) se reduce al tradicional modelo de valuación de opciones de Black-Scholes. Finalmente, la ecuación (18) tiene una gran similitud al resultado de Björk (2004), quien también deriva un modelo de forma cerrada para la valuación de opciones sobre acciones cuando la tasa de interés se comporta estocásticamente.

5. Modelos multivariados de varianza condicional

La estimación y predicción de la varianza condicional juega un papel fundamental en diversas aplicaciones financieras, particularmente en aquellas relacionadas con la administración de riesgos, el análisis de portafolios de inversión y la valuación de activos financieros y productos derivados. La extensión del análisis de la volatilidad condicional de series financieras univariadas a través de la familia de los modelos ARCH-GARCH (Engle, 1982 y Bollerslev, 1986) al contexto de la modelación de la covarianza condicional de series financieras multivariadas ha sido un natural avance en la teoría financiera. Por ejemplo, existe una familia de modelos GARCH multivariados que describen todos los elementos de la covarianza condicional o volatilidad correlacionada dinámica, entre ellos se incluyen el modelo VEC diagonal propuesto por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), el modelo de correlación condicional constante de Bollerslev (1990), el modelo BEKK desarrollado por Engle y Kroner (1995) y el modelo de correlación condicional dinámica propuesto por Engle (2002). En esta investigación se aplicaran los modelos VEC diagonal y BEKK para estimar la volatilidad correlacionada condicional.

5.1 Modelo VEC Diagonal

El modelo VEC diagonal de Bollerslev, Engle y Wooldridge (1998) se caracteriza por ser un una versión parsimoniosa del modelo GARCH multivariado general. Este modelo permite la modelación de covarianzas cambiantes en el tiempo a partir de una forma vectorial, expresada de la siguiente forma:

$$vech(H_t) = vech(C) + \sum_{i=1}^p A_i vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^q B_i vech(H_{t-i}) \quad (19)$$

donde H_t representa a la matriz de covarianza condicional en el tiempo t y $vech$ se define como el operador que agrupa las columnas de la parte triangular inferior de una matriz simétrica en un vector.

De esta manera, la especificación GARCH multivariada sugiere que H_t sea una función lineal de los residuales cuadrados y cruzados rezagados, así como de los valores rezagados de los elementos de H_t . Sin embargo, algunos problemas surgen al momento de la diagonalización del modelo, porque la

restricción de la dependencia dinámica propicia sesgos en la estimación de los parámetros ubicados en la parte superior de la diagonal de la matriz. Esto es, únicamente los choques en el activo i pueden afectar la varianza condicional del activo i y la correlación condicional entre los activos i y j , pero no la volatilidad del activo j . Este supuesto es muy limitado y, obviamente, una desventaja para el modelo VEC diagonal, pero necesario para garantizar que la matriz de covarianza condicional sea positiva definida.

5.2 Modelo BEKK

Para solucionar el problema de la restricción de los parámetros aunado a la restricción de la matriz positiva definida, Engle y Kroner (1995) proponen una nueva reparametrización para la matriz de covarianza condicional H_t , es decir, el modelo BEKK,

$$H_t = C'C + \sum_{i=1}^p A_i \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A'_i + \sum_{j=1}^q B_j H_{t-1} B'_j \quad (20)$$

donde C es una matriz triangular inferior de constantes, mientras que A_i y B_j son matrices de dimensión de $N \times N$. Los parámetros contenidos en la diagonal de las matrices A_i y B_j capturan los efectos de los choques pasados propios y la volatilidad pasada del activo i sobre su volatilidad condicional. Por su parte, los parámetros fuera de la diagonal de las matrices A_i y B_j recogen los efectos cruzados de mercado en la volatilidad, también conocida como volatilidad *spillover*.

Asimismo, esta especificación alternativa de la ecuación de la covarianza condicional permite capturar la dependencia dinámica entre las series de las volatilidades y garantizar que la matriz de covarianza condicional sea positiva definida; no obstante, dicho modelo presenta debilidades. En primer lugar, no existe una interpretación directa de los parámetros de las matrices A_i y B_j con respecto a los valores rezados de las volatilidades o choques. La segunda debilidad es que el número de parámetros a estimar en el modelo BEKK aumenta rápidamente con el incremento de p y q , limitando así el número de activos financieros. Finalmente, la modelación de la matriz de covarianza condicional presenta serias complicaciones, puesto que la evidencia empírica ha demostrado que la mayoría de los parámetros estimados no son significativos estadísticamente.

6 Aplicación para el mercado mexicano de derivados

En esta sección se aplica el modelo de valuación de opciones incorporando la naturaleza estocástica de la tasa de interés y la volatilidad correlacionada condicional estimada a través de los modelos GARCH multivariados.

6.1 Datos y estimación de los parámetros de los modelos GARCH multivariados

Para el análisis de la volatilidad correlacionada condicional se utilizan los precios diarios de cierre del título de capital de América Móvil L (AMXL) y los precios de los Cetes a 91 días del mercado secundario. El periodo muestral cubre del 2 de enero de 2004 al 9 de mayo de 2011, totalizando 1854 observaciones. La selección del periodo de estudio es consistente con la fecha del 22 de marzo de 2004, día en que iniciaron las operaciones de opciones sobre AMXL en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). La serie financiera de AMXL se obtuvo de la base de datos de Bloomberg, mientras que la serie de los precios de Cetes fue obtenida de la base de datos de Banco de México.

Las ecuaciones de la media y la covarianza condicional son estimadas simultáneamente a través del método de máxima verosimilitud usando los rendimientos diarios de las series financieras de AMXL y Cetes. Para facilitar el análisis de los resultados, las series financieras de los Cetes y AMXL son representadas por los índices 1 y 2, respectivamente. El Cuadro 1 proporciona los resultados de los parámetros estimados de los modelos seleccionados con innovaciones normales durante el periodo de estudio. Los modelos GARCH bivariados convergen después de 70 iteraciones para el modelo BEKK y 86 iteraciones para el modelo VEC diagonal. Las relaciones de los rendimientos son capturadas por los parámetros estimados c_1 y c_2 en los dos modelos. En ambos casos, el parámetro c_1 no es significativo estadísticamente, lo cual indica que la media no condicionada de los rendimientos de los precios de Cetes a 91 días es igual a cero en el largo plazo, es decir, no es positiva. Analizando los resultados de las ecuaciones de la covarianza condicional se puede observar que los parámetros estimados de la diagonal de la matriz C son todos significativos, excepto los parámetros ω_{11} para el modelo VEC diagonal y ω_{22} para el modelo BEKK. Por su parte, todos los elementos de la diagonal de las matrices A y B , que capturan los efectos ARCH y GARCH, son altamente significativos para los dos modelos GARCH bivariados. Este hecho sustenta que los efectos ARCH y GARCH son esenciales en ambas series financieras.

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

Cuadro 1. Parámetros estimados de los modelos GARCH multivariados.

Panel A. Modelos estimados						
Modelo BEKK			Modelo VEC diagonal			
Parámetros	Valor	Errores	Valor-p	Valor	Errores	Valor-p
c_1	-0.0023	0.0022	0.3129	-0.0006	0.0023	0.7937
c_2	0.0985**	0.0478	0.0396	0.1093***	0.0387	0.0048
ω_{11}	0.0039**	0.0019	0.0426	0.0000	0.0000	0.7611
ω_{12}	0.4673***	0.1636	0.0043	0.0018	0.0026	0.4897
ω_{22}	-0.0009	0.7997	0.8751	0.0392***	0.0096	0.0000
α_{11}	0.1294***	0.0228	0.0000	0.0174***	0.0062	0.0051
α_{21}	-0.0829	0.5715	0.5384	0.0271	0.0367	0.4604
α_{12}	0.0005	0.0006	0.4859	—	—	—
α_{22}	0.2887***	0.0224	0.0000	0.0658***	0.0070	0.0000
β_{11}	0.9897***	0.2442	0.0000	0.9820***	0.0067	0.0000
β_{21}	-0.4099*	0.2442	0.0934	0.4990	0.6731	0.4585
β_{12}	-0.0002	0.0003	0.4886	—	—	—
β_{22}	0.9347***	0.0096	0.0000	0.9254***	0.0063	0.0000

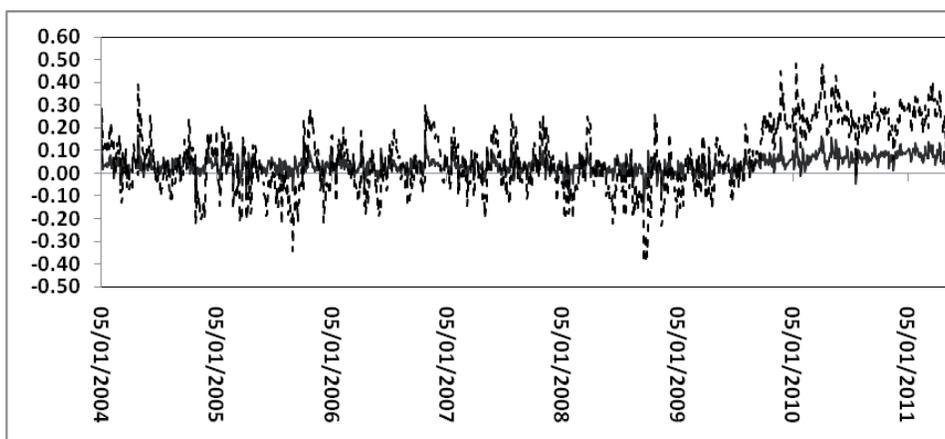
Panel B. Pruebas estadísticas				
Prueba	Modelo BEKK		Modelo VEC diagonal	
	Δ CETES	Δ AMXL	Δ CETES	Δ AMXL
Q(12)	3169(0.000)	11.71(0.469)	3160(0.000)	9.84(0.629)
Q ² (12)	2538(0.000)	9.99(0.616)	2534(0.000)	8.53(0.741)
Q*(12)	2561(0.000)		2554(0.000)	
AIC	2446		2377	
BIC	2518		2438	

Nota: Los términos ***, ** y * indican significancia estadística para los niveles de 1%, 5% y 10%, respectivamente. Los valores $Q(12)$, $Q^2(12)$, y $Q^*(12)$, y son los estadísticos de la prueba de Ljung-Box para las series de los residuales estandarizados, estandarizados cuadrados y la prueba multivariada de los residuales estandarizados cuadrados con 12 rezagos. Los valores en paréntesis son los valores-p. AIC y BIC representan el criterio de información de Akaike y criterio de Schwarz, respectivamente.

Los elementos fuera de la diagonal de las matrices A y B capturan los efectos cruzados de mercado, también conocidos como choques *spillover* y *volatilidad spillover* entre las dos series financieras. La carencia de significancia estadística en los parámetros estimados α_{12} , α_{21} , β_{12} y β_{21} muestra claramente que no existe transmisión de información bidireccional entre los mercados de renta variable y renta fija, es decir, las correlaciones condicionales entre las dos series financieras no están determinadas por los valores rezagados de

las volatilidades y residuales. Este hallazgo es sustentado por las correlaciones condicionales entre ambas series financieras como se puede apreciar en la Gráfica 1. Las correlaciones dinámicas presentan un comportamiento no estacionario y mixto, esto es, periodos de crecimiento significativos, pero con cambios de tendencia rápidos, incluso alcanzando valores negativos, particularmente para el caso del modelo BEKK.

Gráfica 1: Comportamiento de la correlaciones condicionales.



Para validar la robustez de los modelos BEKK y VEC diagonal en los aspectos de la correlación serial, la media y la covarianza condicional se aplican tres pruebas estadísticas, la de Ljung-Box para los residuales estandarizados simples y cuadrados y la extensión multivariada de la prueba de Ljung-Box univariada para los residuales estandarizados cuadrados. Los resultados de las pruebas estadísticas de los modelos estimados son reportados en el panel B del Cuadro 1. Los valores- p de las tres pruebas de Ljung-Box para los residuales estandarizados y estandarizados cuadrados menores al nivel de significancia convencional del 5% indican la existencia de fuerte correlación serial en la serie financiera de Cetes y, al mismo tiempo, confirmar que los modelos BEKK y VEC diagonal no son apropiados para capturar la dinámica en el primero y segundo momento de las series financieras. Otro hallazgo derivado de los resultados de los parámetros estimados es que los modelos BEKK y VEC diagonal son estacionarios. La estacionaridad en los modelos VEC diagonal y BEKK es alcanzada cuando las sumas $\alpha_{ii} + \beta_{ii}$ y $\alpha_{ii}^2 + \beta_{ii}^2$ son menores a 1, es decir, 0.999, 0.991, 0.996 y 0.957, respectivamente. Finalmente, una alternativa para la selección del modelo óptimo es comparar los valores de los criterios

de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC). En términos de ajuste, el modelo VEC diagonal supera al modelo BEKK debido a que presenta valores AIC y BIC más pequeños (2377 contra 2446 y 2438 contra 2518).

6.2 Fijación de precios de opciones sobre América Móvil

A fin de determinar el desempeño del modelo de valuación de opciones con tasa de interés estocástica en el Mercado de Derivados Mexicano. En este análisis numérico se usa la información del boletín diario de transacciones del mercado de opciones publicado por el MexDer del día 9 de mayo de 2011. Asimismo, las tasas de interés libres de riesgo son interpoladas a través de la estructura de plazos de Cetes del mercado secundario, las cuales son consistentes con los plazos al vencimiento de las opciones *call* y *put*, es decir, 39, 129, 221 y 312 días, respectivamente. La volatilidad correlacionada estimada con el modelo VEC diagonal es aproximadamente del 23.95% anual y el precio de cierre de AMXL equivale a 30.25 pesos mexicanos. Los precios de ejercicio reportados en el boletín diario van desde 30 hasta 40 pesos mexicanos, incluyendo opciones *call* o *put* tanto fuera como dentro del dinero ligeramente, profundamente y muy profundamente.

Los precios de las opciones de mercado y teóricas para los cuatro vencimientos de AMXL son reportados en los Cuadros 2 y 3. Analizando los resultados de ambos cuadros para los vencimientos del 17/06/2011, 15/09/2011 y 17/12/2011 se puede apreciar que la diferencia entre los precios de mercado y teóricos disminuyen a medida que el precio de ejercicio se incrementa. Este hecho se alcanza a reflejar más cuando la opción *call* se encuentra muy profundamente fuera del mercado, mientras que en las opciones *put* se incrementa a medida que se encuentran muy profundamente dentro del dinero.

En este sentido, el modelo de valuación extendido alcanza su mejor desempeño para las opciones *put* ligeramente fuera y dentro del mercado con precios de ejercicio de 30 a 34, excepto para el vencimiento del 17/06/2011 y precios de ejercicio de 30 y 31, y para el vencimiento del 15/09/2011 con precio de ejercicio de 32. Por su parte, los precios teóricos de las opciones *call* son muy similares a los precios de mercado cuando éstas se encuentran muy profundamente fuera del mercado, excepto para el precio de ejercicio de 40 del 16/12/2011. Este hecho se atribuye a que las diferencias entre los precios de mercado y teóricos son menores a 10 centavos y las volatilidades implícitas se encuentran alrededor de la volatilidad correlacionada condicional estimada por el modelo VEC diagonal (23.95%).

Cuadro 2. Precios de opciones de AMXL para los vencimientos del 17/06/11 y 15/09/11.

K	Precio Call		Precio Put		Diferencia		Volatilidad Implícita	
	MexDer	Modelo	MexDer	Modelo	Call	Put	Call	Put
17/06/2011								
30	0.890	1.152	0.610	0.764	-0.262	-0.154	16.97	20.11
31	0.440	0.688	1.170	1.295	-0.248	-0.125	17.58	20.49
32	0.200	0.377	1.930	1.980	-0.177	-0.050	18.15	21.64
33	0.080	0.190	2.820	2.788	-0.110	0.032	18.68	23.48
34	0.030	0.088	3.780	3.681	-0.058	0.099	19.17	25.95
35	0.010	0.037	4.760	4.626	-0.027	0.134	19.61	29.00
36	0.000	0.010	5.760	5.599	-0.010	0.161	20.01	32.58
37	0.000	0.005	6.760	6.585	-0.005	0.175	20.37	36.64
38	0.000	0.002	7.760	7.577	-0.002	0.183	20.69	41.13
39	0.000	0.001	8.770	8.571	-0.001	0.199	20.96	46.03
40	0.000	0.000	9.780	9.566	0.000	0.214	21.19	51.30
15/09/2011								
30	1.770	2.092	1.360	1.373	-0.322	-0.013	19.19	23.66
31	1.250	1.607	1.780	1.873	-0.357	-0.093	18.84	22.31
32	0.850	1.209	2.340	2.459	-0.359	-0.119	18.67	21.42
33	0.560	0.892	3.040	3.126	-0.332	0.086	18.68	20.97
34	0.370	0.645	3.870	3.864	-0.275	-0.006	18.88	20.97
35	0.240	0.458	4.780	4.661	-0.218	0.119	19.26	21.41
36	0.160	0.319	5.750	5.507	-0.159	0.243	19.82	22.31
37	0.120	0.219	6.750	6.390	-0.099	0.360	20.56	23.65
38	0.090	0.147	7.750	7.303	-0.057	0.447	21.49	25.43
39	0.070	0.098	8.750	8.238	-0.028	0.512	22.60	27.67
40	0.060	0.064	9.750	9.189	-0.004	0.561	23.89	30.35

Nota: El Cuadro 2 reporta los precios de mercado y teóricos de las opciones de AMXL, sus diferencias, las volatilidades implícitas derivadas de las expectativas de los participantes en el mercado de opciones para cada precio de ejercicio y vencimientos del 17/06/11 y 15/09/11.

Finalmente, el modelo extendido que captura el efecto estocástico de la tasa de interés muestra un bajo desempeño al sobrestimar o subestimar los precios de las opciones *call* y *put* con plazos largos de vencimiento (321 días), excepto para los precios de ejercicio de 30 a 32 de las opciones *call*. La desviación significativa entre los precios de mercado y teóricos no sólo está asociada directamente a la inapropiada estimación de la volatilidad correlacionada condicional, sino también al incremento de la tasa de interés porque la teoría sustenta que a medida que aumenta la tasa de interés disminuye el precio de la opción *put* y, al mismo tiempo, se incrementa el precio de la opción *call*. Aunque en este análisis existen algunas excepciones donde ocurre lo contra-

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

Cuadro 3. Precios de opciones de AMXL para los vencimientos del 16/12/11 y 15/03/12.

K	Precio Call		Precio Put		Diferencia		Volatilidad Implícita	
	MexDer	Modelo	MexDer	Modelo	Call	Put	Call	Put
16/12/2011								
30	2.680	2.798	1.640	1.727	-0.118	-0.087	22.31	22.62
31	2.100	2.308	2.130	2.209	-0.208	-0.079	21.53	22.50
32	1.630	1.884	2.710	2.757	-0.254	-0.047	21.02	22.35
33	1.250	1.522	3.360	3.369	-0.272	0.009	20.77	22.19
34	0.950	1.218	4.090	4.037	-0.268	-0.053	20.78	22.00
35	0.740	0.966	4.900	4.758	-0.226	0.142	21.05	21.80
36	0.590	0.760	5.790	5.524	-0.170	0.266	21.59	21.58
37	0.490	0.592	6.750	6.329	-0.102	0.421	22.38	21.33
38	0.430	0.458	7.750	7.167	-0.028	0.583	23.44	21.07
39	0.390	0.351	8.750	8.033	0.039	0.717	24.75	20.79
40	0.380	0.268	9.750	8.922	0.112	0.828	26.33	20.49
15/03/2012								
30	3.380	3.397	2.390	1.969	-0.017	0.421	23.27	27.44
31	2.850	2.905	2.870	2.438	-0.055	0.432	23.02	27.12
32	2.370	2.468	3.400	2.961	-0.098	0.439	22.77	26.80
33	1.960	2.083	3.980	3.538	-0.123	-0.442	22.52	26.47
34	1.590	1.749	4.630	4.164	-0.159	-0.466	22.27	26.15
35	1.280	1.459	5.340	4.835	-0.179	-0.505	22.02	25.82
36	1.211	1.020	5.548	6.100	0.191	-0.552	21.77	25.50
37	0.790	1.000	6.920	6.297	-0.210	0.623	21.52	25.17
38	0.822	0.610	7.810	7.080	0.212	0.730	21.27	24.85
39	0.470	0.672	8.750	7.891	-0.202	0.859	21.02	24.52
40	0.350	0.548	9.750	8.727	-0.198	1.023	20.77	24.20

Nota: El cuadro 3 reporta los precios de mercado y los teóricos de las opciones de AMXL, sus diferencias, las volatilidades implícitas derivadas de las expectativas de los participantes en el mercado de opciones para cada precio de ejercicio y vencimientos del 16/12/11 y 15/03/12.

rio, por ejemplo, para los precios de ejercicio de 33 a 36 en las opciones *call* y para el precio de ejercicio de 40 en las opciones *put*.

7. Conclusiones

Un gran número de estudios empíricos sustentan el insuficiente desempeño del modelo de Black-Scholes para proporcionar una cobertura perfecta del riesgo intrínseco debido a la relajación del supuesto de tasa de interés determinística. Este trabajo de investigación propone soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones sobre activos riesgosos introduciendo el

comportamiento estocástico de la tasa de interés bajo una medida martingala neutral al riesgo equivalente. La medida *forward* juega un papel fundamental en la determinación de distribuciones acumuladas normales univariadas para probar que las probabilidades de las opciones se encontrarán dentro del dinero. Asimismo, la técnica martingala como método alternativo a la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas lineales reduce los cálculos matemáticos significativamente, con sólo controlar las tendencias instantáneas de los movimientos Brownianos geométricos, es decir, la prima al riesgo de los activos riesgosos sin necesidad de alterar la estructura de la volatilidad bajo el concepto de no arbitraje. Por su parte, los resultados empíricos muestran el potencial del modelo de valuación propuesto al mejorar el desempeño de los modelos de valuación de opciones de un factor en el marco de Black-Scholes, cuando se aplica a opciones sobre América Móvil que se encuentran muy profundamente fuera del mercado *call* y ligeramente fuera y dentro del mercado *put* para vencimientos de corto y mediano plazos a pesar de que la volatilidad correlacionada condicional no es estimada apropiadamente por el modelo VEC diagonal. Sin embargo, el modelo de valuación es inconsistente para determinar los precios de las opciones *call* y *put* cuando se encuentran muy profundamente fuera del mercado y muy profundamente dentro del mercado, particularmente en las opciones con largos plazos al vencimiento. Los hallazgos del presente análisis son de suma importancia para los participantes en el mercado de opciones que buscan la cobertura perfecta del riesgo aplicando modelos convencionales para la valuación de derivados, pero que no son suficientes para recoger las diversas fuentes de incertidumbre que afectan a los precios de las opciones. Finalmente, futuros trabajos de investigación pueden incluir el desarrollo de modelos más sofisticados que permitan capturar apropiadamente la interacción intertemporal de la volatilidad correlacionada de los rendimientos de las acciones y bonos cupón cero para cada precio de ejercicio de las opciones *call* y *put*.

Bibliografía

- Anderson, H. M. (1997). "Transaction costs and non-linear adjustment towards equilibrium in the US Treasury bill market", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59, pp. 465-484.

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

- Bandi, F. M. (2002). "Short-term interest rate dynamics: a spatial approach", *Journal of Financial Economics*, 65, pp. 73-110.
- Björk, T. (2004). "Arbitrage Theory in Continuous Time", *Oxford University Press*.
- Black, F. y M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (3), pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1990). "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH approach", *Review of Economics and Statistics*, 72, pp. 498-505.
- _____, R. F. Engle y J. M. Wooldridge (1988). "A capital asset pricing model with time-varying covariances", *The Journal of Political Economy*, 96, pp. 116-131.
- _____. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Brennan, M. J. y E. S. Schwartz (1979). "A continuous time approach to the pricing of bonds", *Journal of Banking & Finance*, 3, pp. 133-155.
- Chapman, D. A. y N. D. Pearson (2000). "Is the short rate drift actually nonlinear?", *Journal of Finance*, 55, pp. 355-388.
- Chiang, T. C. y J. J. Chiang (1995). "Empirical analysis of short-term euro-currency rates: evidence from a transfer function error correction model", *Journal Economic and Business*, 47, pp. 335-351.
- _____. "On the nonlinear specification of short-term interest rates behavior evidence from euro-currency markets", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 12, pp. 351-370.
- Choi, S. y M. E. Wohar (1991). "New evidence concerning the expectations theory for the short end of the maturity spectrum", *Journal of Financial Research*, 14, pp. 83-92.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- De Jesús, R. (2001). "Modelación de productos derivados aplicando el método martingala", *Tesis de Maestría*, UNAM.
- Dothan L. U. (1978). "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 59-69.
- Duffie, D. (1996). "Dynamic Asset Pricing Theory", 2a. ed. *Princeton*: Princeton University Press.
- Elliot, R. J. (1982). "Stochastic Calculus and Applications", *Springer-Verlag New York, Inc.*

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés...

- Engle, R. F. (2002). "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, pp. 339-350.
- . y K. F. Kroner (1995). "Multivariate simultaneous GARCH", *Econometric Theory*, 11, pp. 122-150.
- . "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.
- Fong, H.G. y O.A. Vasicek (1991). "Fixed income volatility management", *Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 41-46.
- Geman, E., N. E. Karaoui y J. Rochet (1995). "Change of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing", *Journal of Applied Probability*, Vol. 32, pp. 443-458.
- Harrison, J. M. y D. M. Kreps (1979). "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.
- . y R. S. Pliska (1981). "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, pp. 215-260.
- . "A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets", *Stochastic Processes and their Applications*, 15, pp. 313-316.
- Ho, T. S. Y. y S. B. Lee (1986). "Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-29.
- Hull, J. y A. White (1990). "Pricing interest rate derivative securities", *The Review Financial Studies*, 3(4), pp. 327-343.
- Karatzas, I. y S. E. Shreve (1991). "Browniano motion and stochastic calculus", *Springer-Verlag*, London.
- Liao, S. L. y H. H. Huang (2005). "Pricing Black-Scholes options with correlated interest rate risk and credit risk: an extension", *Quantitative Finance*, 5(5), pp. 443-457.
- Longstaff, F. A. y E. S. Schwartz (1992). "Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model", *Journal of Finance*, 47, pp. 1259-1282.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-83.
- Neftci, S. (2000). "An introduction to the mathematics of financial derivatives", Second Edition, *Academic Press*, New York.

Análisis borroso del impacto del índice de inflación y de la cotización...

- Nelson, C. R. y C. I. Plosser (1982). "Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications", *Journal of Monetary Economics*, 10, pp. 139-162.
- Schaefer, S. y E. Schwartz (1987). "Time-dependent variance and the pricing of bond options", *Journal of Finance*, 42(5), pp. 11 13-28.
- Shively, P. A. (2005). "The nonlinear dynamics of interest rates", *Applied Financial Economics Letters*, 1, pp. 71-74.
- Trigeorgis, L. (1996). "Real options: managerial flexibility and strategy in Resource allocation". *The MIT Press*, Cambridge, MA.
- Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

