

# Modelación del clima bajo un proceso estocástico de reversión a la media estacional

---

Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán\*

María Eugenia Serrano Acevedo\*\*

Jaime Ángel Rico Arias\*\*

Fecha de recepción: 17 de octubre de 2013

Fecha de aceptación: 30 de diciembre de 2013

---

\* Universidad Autónoma del Carmen,  
Facultad de Ciencias Económico Administrativas  
jctellezg@gmail.com

\*\* Universidad Autónoma de Bucaramanga,  
Facultad de Ingenierías Administrativas  
mserran5@unab.edu.co  
jrico1@unab.edu.co

## RESUMEN

El presente documento modela la temperatura diaria para el estado de Campeche a través de un proceso estocástico de reversión a la media estacional; el cual es una extensión al proceso Ornstein-Uhlenbeck, comúnmente utilizado para modelar las tasas de interés. El componente determinista del proceso describe el comportamiento de la temperatura que revierte a una media dinámica tipo senoidal; en tanto que el componente estocástico es descrito por el movimiento browniano, en donde se considera que los cambios en la temperatura se comportan bajo una distribución gaussiana. El documento sigue las metodologías de Alaton *et al.* (2002) quienes modelan la temperatura promedio diaria de Estocolmo, y de Bhowan (2003) quien modela la temperatura de Pretoria para valorar una permuta financiera sobre clima. La investigación tiene su importancia en la valoración de derivados climáticos, la cual requiere primeramente de un modelo que describa la evolución de la temperatura, toda vez que éstos han registrado un creciente volumen de operación para la cobertura del riesgo volumétrico. Seguidamente, se busca contribuir a la intención de la Ley del Desarrollo Rural Sustentable de México y del Plan Nacional de Desarrollo 2012-2018, en materia de coberturas de riesgos de mercado y de eventos climáticos en las actividades productivas del sector rural.

**Clasificación JEL:** C15, G32, Q54.

**Palabras clave:** modelación estocástica, derivados financieros, riesgo de clima

## Modeling weather under a seasonal mean reversion stochastic process

### ABSTRACT

*This article aims to model Campeche's daily temperature under a seasonal mean reverting stochastic process, which is an extension of Ornstein-Uhlenbeck's process for modeling interest rates. The model's trend component describes the temperature behavior which reverts to a dynamic mean of a sinusoid type function. Meanwhile, the stochastic component evolves as a Brownian motion, in which daily temperature changes are distributed as a Gaussian process. The article follows Alaton et al. (2002) who model the daily average temperature of Stockholm, and Bhowan (2003) who models Pretoria's daily temperature to pricing a climate swap derivative purpose. The importance of this research is founded on the increasing use of weather derivatives to hedge volumetric risk, where pricing derivatives requires an appropriate description of climate evolution. Also, it is expected to contribute to the Mexican Law of Sustainable Rural Development and the National Development Plan, related to managing market and climate risks for agricultural activities in the rural sector.*

**JEL Classification:** C15, G32, Q54.

**Keywords:** stochastic modeling, financial derivatives, weather risk.

## Introducción

La investigación empírica ha evidenciado los *hechos estilizados* que caracterizan a los rendimientos de activos financieros, tales como: asimetría en ganancias/pérdidas, gaussianidad-agregativa, volatilidad cambiante y medidas granulosas-gruesas de la volatilidad (Cont, 2001). De modo similar, se han identificado patrones que caracterizan al comportamiento de la temperatura, como lo son: estacionalidad, reversión a la media y memoria de largo plazo (Torró *et al.*, 2003). Adicionalmente, algunos estudios han encontrado una tendencia positiva en la temperatura de algunas ciudades como París y Noruega, lo que evidenciaría al fenómeno del cambio climático (Benth y Salythe-Benth, 2005; Zapranis y Alexandridis, 2008).

Lo anterior, ha sido fundamental en la valoración de los derivados climáticos, en donde primeramente se requiere establecer un modelo que mejor describa la evolución del activo subyacente, en este caso el clima. Los derivados climáticos se refieren a contratos que permiten proteger a las entidades en contra de las pérdidas financieras ocasionadas por condiciones climáticas no favorables (Jewson y Caballero, 2006). De otra manera, son contratos sobre índices cuyos pagos dependen de la ocurrencia o no de eventos climáticos específicos (Vedenov y Barnett, 2004), mismos que proveen una cobertura de riesgo de producción más que de precio (Turvey, 1999). Algunos contratos, según aquellos negociados en la bolsa mercantil de Chicago (CME, por sus siglas en inglés), son los futuros sobre grados de calentamiento y enfriamiento por día, futuros y opciones sobre huracanes, y futuros sobre heladas, nevadas y lluvias torrenciales.<sup>1</sup>

Así mismo, la importancia de los derivados climáticos se ha reflejado en el crecimiento significativo en más de 1600% desde su primera negociación

---

<sup>1</sup> Grados de calentamiento por día, (HDD, por sus siglas en inglés) se refiere a una medida de temperatura requerida para calentar una edificación en temporadas de invierno. Por otro lado, los Grados de enfriamiento por día (CDD, por sus siglas en inglés) se refieren a la medida de temperatura requerida para enfriar un inmueble en temporadas cálidas. El CME establece los 65° F (18° C) en los contratos de futuros, como la temperatura de referencia para iniciar el calentamiento o enfriamiento de un inmueble.

en 1997 hasta hoy en día, según valor nominal de contratos negociados en el CME y en mercados extrabursátiles (Asociación de Administración de Riesgos Climáticos, 2012). Adicionalmente, en la perspectiva académica, numerosos estudios han examinado su efectividad de cobertura para diferentes actividades económicas, y se han explorado diversos modelos estocásticos que mejor describan la evolución del clima para efectos de la valoración de estos instrumentos financieros. Tal como documentan Vedevnov y Barnett (2004), los derivados climáticos han sido mayormente utilizados como instrumentos de reaseguro para la protección de las actividades agrícolas.

En el contexto anterior, otros estudios como el de Geysler y Van de Venter (2001), revisan la viabilidad para administrar el riesgo de clima en la producción de maíz en Sudáfrica, quienes utilizan las opciones sobre precipitaciones, en donde encuentran una relación positiva entre la precipitación y productividad promedio del maíz. Por lo que el uso de los derivados climáticos contribuiría en disminuir el riesgo de producción ante precipitaciones adversas durante las etapas de formación del grano de maíz. En otro caso, Cyr *et al.* (2010) analizan la efectividad del uso de opciones sobre precipitación para la cobertura del riesgo por exceso de lluvia en los viñedos de la región del Niagara, Canadá, quienes identifican que el riesgo de la base y la dependencia no lineal entre las variables de clima y la productividad de la cosecha, son factores que inducirían a reducir la efectividad del derivado climático.

En otras situaciones, Leggio y Lien (2002) diseñan estrategias de cobertura óptimas con derivados de clima para empresas de gas natural, con el propósito de minimizar la probabilidad y el riesgo creciente al que los consumidores se enfrentan en facturaciones extremas en épocas de invierno. Connors (2003) ejemplifica el uso de una cobertura con futuros y opciones sobre el índice HDD, para cubrir el aumento en los costos de construcción en épocas de invierno con muy bajas temperaturas y aun en inviernos cálidos. Tang y Jang (2011) analizan la exposición al riesgo de los centros vacacionales de esquí debido a los aumentos de temperatura en las épocas de nevada, quienes concluyen que la diversificación geográfica favorecería a la reducción del riesgo para horizontes de planeación de largo plazo, en tanto que la cobertura financiera con derivados climáticos favorecería más a la reducción del riesgo de nevada en horizontes de corto plazo.

Ante la importancia que han tenido los derivados climáticos para la cobertura del riesgo (volumétrico), brevemente descrito con anterioridad, su

forma de valoración e implícitamente la modelación del clima, se tornan influyentes en la determinación del costo de la cobertura, para lo cual debe considerarse que las variables de clima no son bienes transables en los mercados financieros. Por lo anterior, se han recurrido a metodologías de valoración alternas respecto del enfoque de ausencia de arbitraje, ya que éste supone la posibilidad de crear un portafolio que duplique los indicadores de medición con activos negociados en los mercados financieros. En este contexto, los derivados de clima son el ejemplo claro de un mercado incompleto, en donde el precio de mercado del riesgo puede considerarse como una constante para obtener precios únicos de los contratos (Alaton *et al.*, 2002).

Por consiguiente, el presente artículo tiene como propósito modelar la temperatura del estado de Campeche para contribuir así en una primera iniciativa, a la evidencia empírica sobre la modelación del clima para efectos de la valoración de los derivados climáticos. El artículo sigue la metodología desarrollada por Alaton *et al.* (2002) quienes modelan la temperatura promedio diaria de Estocolmo, y de Bhowan (2003) quien modela la temperatura diaria de Pretoria a través de un proceso Ornstein-Uhlenbeck el cual incorpora el componente estacional o cíclico, éste último referenciado como el valor dinámico sobre el cual la temperatura promedio diaria revierte en el largo plazo. Seguidamente, la investigación aplicada se justifica en la trascendencia que ha tenido la administración de riesgos en el desarrollo de las actividades rurales en México, tal como se enuncian en la Ley del Desarrollo Rural Sustentable de México (LDRSM) y en los programas de coberturas gestionados por FIRA (Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura). Finalmente, el estudio se circunscribe en el estado de Campeche, por ser éste considerado como “granero potencial del sureste del país”, lo que conlleva a la necesidad de generar esquemas de coberturas financieras que favorezcan al desarrollo tanto de los grandes productores como de aquellos ubicados en las zonas rurales.<sup>2</sup>

Por lo anterior, el presente documento se divide de la siguiente forma: la sección 1 describe el modelo y en paralelo la metodología de estimación;

---

<sup>2</sup> “Campeche podría convertirse en granero del sureste”, <http://elfederalista.mx>. En entrevista de quien fuera subdirector regional de FIRA, Eleazar Luna López, argumentó que Campeche tiene siete veces más de disponibilidad natural de agua per cápita respecto a las Zonas del Centro, Norte y Noroeste; tiene abundancia de luz solar, material genético y empresarios dispuestos a invertir. Igualmente se destacó la promoción de esquemas como cobertura de precios y la agricultura por contrato, éste último referido a la Administración de Riesgos de Mercado a través de Intermediarios Financieros (23 de julio de 2011).

en la sección 2 se muestra cómo se calcula el parámetro de la reversión a la media; la sección 3 presenta los resultados y análisis del modelo estimado. Finalmente se muestran las conclusiones de la investigación empírica.

## 1. El modelo y metodología de estimación

El proceso Ornstein-Uhlenbeck (O-U) se considera como una extensión al movimiento aritmético Browniano, el cual incorpora la reversión a la media, fenómeno observado tanto en el comportamiento de los precios de mercaderías (Gibson y Schwartz, 1990) como de las tasas de interés (Cox, Ingersoll y Ross, 1985). Partiendo del movimiento aritmético Browniano, el cual se expresa de la forma

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es la media instantánea por unidad de tiempo,  $\sigma^2$  es la varianza instantánea por unidad de tiempo, y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  su filtración aumentada la cual representa la información disponible hasta el tiempo  $t$  (Venegas-Martínez, 2006; 503); se tiene que la versión modificada que permite la reversión a la media, puede expresarse como:

$$dX_t = \lambda(\alpha - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2)$$

la cual a la vez, es un representación simplificada de la integral estocástica,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \lambda(\alpha - X_0)dt + \int_0^t \sigma dW_t. \quad (3)$$

donde:

1.  $dW_t \sim N(0, \sqrt{dt})$ ,
2.  $\lambda$  es el parámetro que mide la velocidad de la reversión a la media,

3.  $\alpha$  es el valor promedio de largo plazo al cual el proceso tiende a revertir,
4.  $\sigma$  mide la volatilidad del proceso.

La dinámica de los cambios en la temperatura, partiendo del proceso O-U, fue propuesta por Dornier y Queruel (2000), y Alaton *et al.* (2002), la cual se expresa como

$$dT_t = \left[ \alpha(\xi_t - T_t) + \frac{d\xi_t}{dt} \right] dt + \gamma_t dW_t, \quad (4)$$

en donde

$$\xi(t) = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

describe la variación promedio estacional o la estacionalidad de la temperatura y la constante  $\alpha$  es la velocidad a la cual la temperatura revierte a su valor medio.<sup>3</sup>

Una expresión similar la proponen Benth y Saltyte-Benth (2005), de la siguiente forma:

$$dT_t = dS_t + \kappa(T_t - S_t) + \sigma_t dB_t, \quad (6)$$

en donde  $S_t$  y  $\sigma_t^2$  se modelan a través de series de Fourier truncadas de la forma:

$$S_t = a + bt + a_0 + \sum_{i=1}^{I_1} a_i \sin(2i\pi(t - f_i)/365) + \sum_{j=1}^{J_1} b_j \cos(2j\pi(t - g_j)/365), \quad (7)$$

<sup>3</sup> La expresión (4) es la versión modificada del proceso de Vasicek con reversión a la media,  $dT_t = \alpha(\theta_t - T_t)dt + \gamma_t dW_t$ , ya que de lo contrario no se cumpliría que  $E[T_t] \approx \theta_t$  (Bhowan, 2003; 14).

y de la forma:

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^{I_2} c_i \sin(2i\pi t/365) + \sum_{j=1}^{J_2} d_j \cos(2j\pi t/365), \quad (8)$$

en donde los términos  $I_1, J_1$  en la expresión (7) y  $I_2, J_2$  en la expresión (8), se determinan a través de la transformada de Wavelet, descomponiendo la serie de temperatura en diferentes escalas de tiempo-frecuencia utilizando la función de Daubechies.

La metodología para estimar los parámetros de la expresión (4), con base en Alaton *et al.* (2002) y Bhowan (2003), se lleva a cabo de la siguiente forma:

## 2. Parámetro de reversión a la media $\theta(t)$

Sea una función de densidad conjunta,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) \cdot f(x_2 | \theta) \cdots f(x_n | \theta), \quad (9)$$

donde  $x_1, \dots, x_n$  son observaciones independientes extraídas de una función de distribución, la cual es descrita por los parámetros  $f(\cdot | \theta), \theta \in \Theta$ . Si se consideran los valores observados de  $X$  fijos en tanto que  $\theta$  varía libremente, entonces se tiene la función de verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta). \quad (10)$$

Aplicando el logaritmo a la expresión (10), se tiene

$$\hat{\ell}(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta). \quad (11)$$

Considerando que el proceso que describe a la temperatura se expresa de la forma:

$$dX_t = b(X_t; \xi) + \sigma(X_t; \xi)dW_t, \quad (12)$$

en donde el proceso revierte a  $\xi_t$  como en la expresión (5), se obtiene entonces la función de máxima verosimilitud en tiempo continuo:

$$\widehat{\ell}_t(\xi) = \int_0^t \frac{b(X_s; \xi)}{\sigma^2(X_s)} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{b^2(X_s; \xi)}{\sigma^2(X_s)} ds, \quad (13)$$

cuya representación discreta se expresa de la forma

$$\begin{aligned} \widetilde{\ell}_n(\xi) &= \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} (X_{i\Delta} - X_{(i-1)\Delta}) \\ &\quad - \Delta \sum_{i=1}^n \frac{b(X_{(i-1)\Delta}; \xi) \dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}. \end{aligned} \quad (14)$$

Con base en Bibby y Sorensen (1995), la anterior función es sesgada, por lo que se requiere ajustarla a través de un compensador que permita obtener una  $\mathbb{P}_\xi$  – martingala de media cero, con respecto a la filtración definida por  $\mathcal{F}_i = \sigma(X_i, \dots, X_{i\Delta})$ . Bajo la notación:  $F(X; \xi) = E_\xi(X_\Delta | X_0 = x)$ , se tiene que el compensador es:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n E_\xi \left\{ \widetilde{\ell}_i(\xi) - \widetilde{\ell}_{i-1}(\xi) | \mathcal{F}_{i-1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} \{F(X_{(i-1)\Delta}; \xi) - X_{(i-1)\Delta}\} \\ &\quad - \Delta \sum_{i=1}^n \frac{b(X_{(i-1)\Delta}; \xi) \dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial \xi}$ . Por lo que la función estimadora de media-cero es:

$$\tilde{G}_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta})} \{X_{(i)\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta}; \xi)\}. \quad (16)$$

Retomando la expresión (4) y (12), y considerando

$$F(X; \xi) = E[T_i | T_{i-1}] = \xi_i + e^{-\alpha}(T_{i-1} - \xi_{i-1}), \quad (17)$$

se tiene que la función estimadora del parámetro de reversión a la media del proceso es,

$$\tilde{G}_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi_{i-1} - T_{i-1})}{\gamma^2_{i-1}} [T_i - \xi_i - e^{-\alpha}(T_{i-1} - \xi_{i-1})]. \quad (18)$$

De la expresión (18), se resuelve para  $\alpha$ :

$$\hat{\alpha}_n = -\log \left( \frac{\sum_{i=1}^n Y_{i-1} [T_i - \xi_i]}{\sum_{i=1}^n Y_{i-1} [T_{i-1} - \xi_{i-1}]} \right), \quad (19)$$

el cual representa el estimador del parámetro de reversión a la media del componente determinista de la expresión (4), donde  $Y_{i-1} \equiv \frac{\xi_{i-1} - T_{i-1}}{\gamma^2_{i-1}}$ . El término  $y_j^2$ , se refiere a la varianza de un mes específico  $j$ , para  $n$  días del respectivo mes, la cual se determina como la variación cuadrática de  $T_t$  de la forma:

$$y_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (T_i^m - T_{i-1}^m)^2}{n} \quad (20)$$

en donde  $T^m_i$  hace referencia a la temperatura promedio (entre máxima y mínima) diaria. Si se considera que la volatilidad de la temperatura entre cada mes cambia, entonces a partir de la expresión (20) se tiene:

$$\sigma_{\gamma_j} = \begin{cases} \sigma_{\gamma_1}, & \text{Enero} \\ \sigma_{\gamma_2} & \text{Febrero} \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_{\gamma_{12}} & \text{Diciembre} \end{cases} \quad (21)$$

Por lo que la volatilidad del proceso, se determina como la variación cuadrática de la desviación estándar entre cada mes, de la forma:

$$\sigma_{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma_{j+1} - \gamma_j)^2} \quad (22)$$

Con base en lo anterior, y siguiendo a Alaton *et al.* (2002), se estima el parámetro de reversión a la media de la volatilidad; para lo cual se define un proceso similar a la expresión (6), que describe el comportamiento de la volatilidad como:

$$\begin{aligned} d\gamma_t &= \alpha_{\gamma}(\gamma_{tend} - \gamma_t)dt + \sigma_{\gamma}dW_t \\ &\equiv \left[ \alpha_{\gamma}(\gamma_{tend} - \gamma_t) + \frac{d\gamma_{tend}}{dt} \right] dt + \sigma_{\gamma}dW_t \end{aligned} \quad (23)$$

en donde  $\alpha_{\gamma}$  es el parámetro de reversión a la media del proceso estocástico,  $\gamma_{tend}$  es la tendencia de la volatilidad (valor promedio de largo plazo),  $\sigma_{\gamma}$  es la volatilidad del proceso estocástico, y se asume que el componente aleatorio del proceso estocástico sigue un movimiento browniano.

A partir de la expresión (16), es igualmente posible conocer la función estimadora del parámetro de reversión a la media del proceso estocástico, en donde primeramente se tiene que,

$$E[\gamma_i | \gamma_{i-1}] = \gamma_{tend} + e^{-\alpha}(\gamma_{i-1} - \gamma_{tend}). \quad (24)$$

En consecuencia, la función estimadora de media-cero corresponde a:

$$\tilde{G}_n(\alpha_\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{(\gamma_{tend} - \gamma_{i-1})}{\sigma_\gamma^2} [\gamma_i - \gamma_{tend} - e^{-\alpha_\gamma}(\gamma_{i-1} - \gamma_{tend})], \quad (25)$$

y resolviendo para  $\alpha_\gamma$  se tiene:

$$\hat{\alpha}_\gamma = -\log \left( \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_{tend} - \gamma_{i-1}}{\sigma_\gamma^2} \right) (\gamma_i - \gamma_{tend})}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_{tend} - \gamma_{i-1}}{\sigma_\gamma^2} \right) (\gamma_{i-1} - \gamma_{tend})} \right). \quad (26)$$

La simulación para la expresiones (6) y (23), a través de la aproximación de Euler (Bhowan, 2003), se representa como:

$$T_{t+1} = T_t + \alpha(\theta_t - T_t) + \theta'_t + \gamma_n Z_1, \quad (27)$$

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + \alpha_\gamma(\gamma_{tend} - \gamma_{n-1}) + \sigma_\gamma Z_2, \quad (28)$$

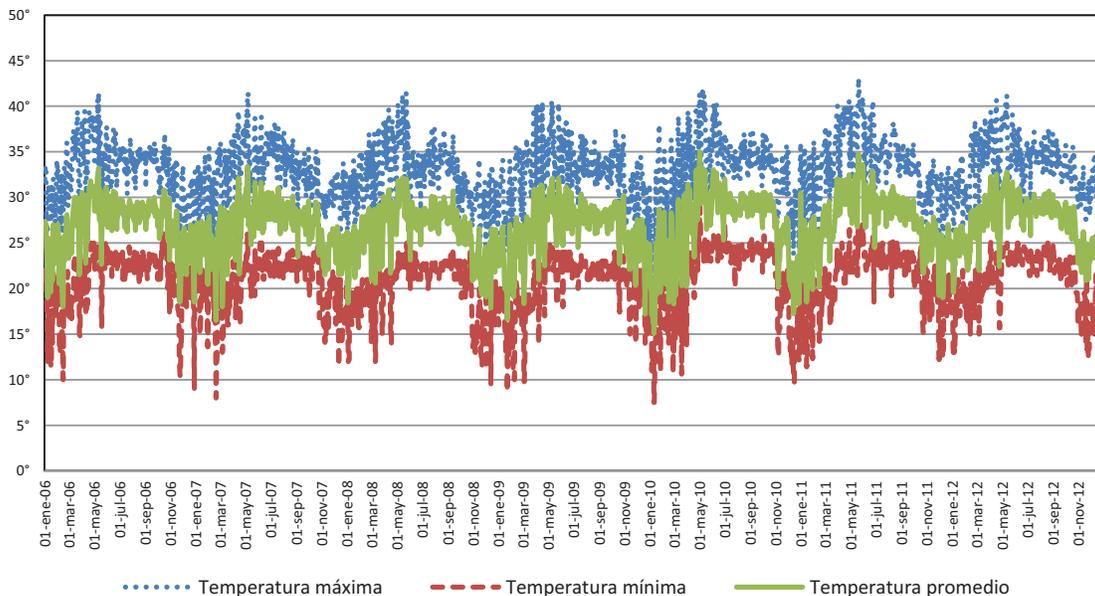
en donde  $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ .

### 3. Resultados y análisis

Los datos corresponden a observaciones diarias de la temperatura máxima, mínima y promedio, del estado de Campeche, en el periodo del 01/enero/2006 al 31/diciembre/2012, para un total de 2,557 observaciones. La fuente de la información corresponde a [www.tutiempo.net](http://www.tutiempo.net), de la estación meteorológica 766950, ubicada en la ciudad de Campeche. En el periodo comprendido, tan sólo hubo cuatro días (28/08/2007, 12/02/2008, 18/08/2008, y 31/10/2010) que no mostraron registro, por lo que los valores faltantes se calcularon a través de una interpolación lineal.

La Figura 1 muestra la evolución de la temperatura máxima, mínima y promedio diaria, para el periodo comprendido de estudio, en donde el valor máximo corresponde a  $43.10^{\circ}\text{C}$  y la temperatura mínima a  $7.5^{\circ}\text{C}$ . En los tres gráficos se aprecian los componentes cíclicos y estocásticos, en donde el primero se aproxima a través de la expresión (5), en tanto que el comportamiento estocástico se asume que sigue un movimiento browniano bajo la expresión (23).

Figura 1. Evolución de la temperatura máxima, mínima y promedio diaria, enero 2006 a diciembre 2012.



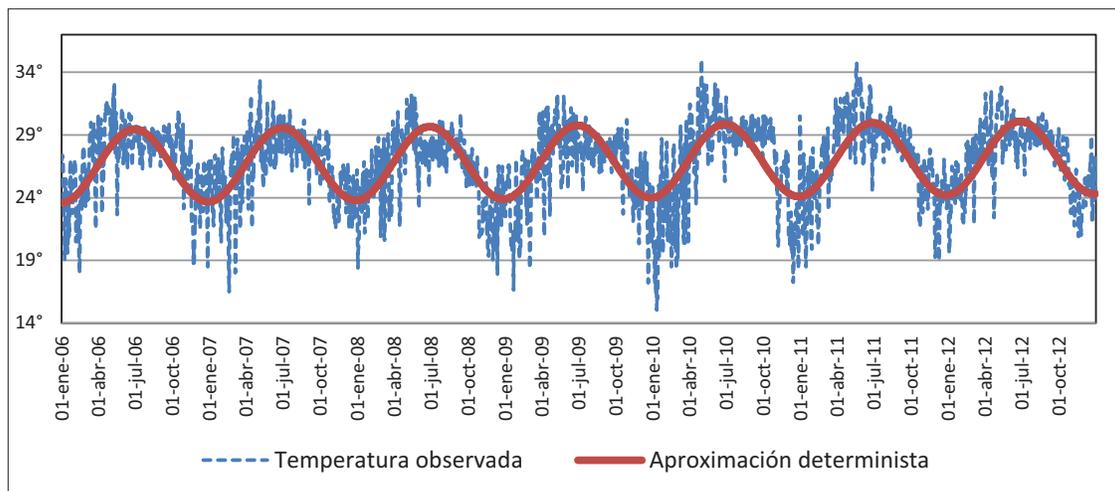
Fuente: Elaboración propia con datos de [www.tutiempo.net](http://www.tutiempo.net).

La Figura 2 muestra la aproximación determinista de la temperatura promedio diaria, la cual refleja el componente cíclico característico de una serie de tiempo climática como lo es la temperatura. En este caso, se aprecia que el periodo marcado entre marzo y septiembre de cada año, corresponde al ciclo Primavera-Verano (PV); en tanto que el periodo de octubre a febrero se relaciona con el ciclo Otoño-Invierno (OI), periodo en que se observa la fase de descenso de la temperatura.

La importancia en identificar el patrón cíclico de la serie de tiempo del índice de clima, se puede referir para la utilización de los derivados climáticos, en donde por ejemplo, es común fijar como temperatura de referencia los 18°C en los contratos de opciones sobre temperatura. Si la temperatura promedio diaria fuese mayor al valor de referencia, situación con mayor probabilidad de ocurrencia en el ciclo PV, entonces se ejercería la opción (tipo de compra) para compensar el mayor gasto en consumo de energía eléctrica, toda vez que un edificio requiere enfriarse cuando la temperatura ambiental es mayor a los 18°C.

La situación contraria ocurre cuando la temperatura es inferior a los 18°C, lo cual es mayormente observado en el ciclo OI; en este caso, se ejercería la opción (tipo venta) para compensar el mayor gasto por consumo de energía eléctrica, toda vez que se ha marcado como referencia, que un edificio requiere calentarse cuando la temperatura ambiental es menor a los 18°C.

Figura 2. Evolución de la temperatura promedio diaria y su aproximación determinista, enero 2006 a diciembre 2012.



Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 1 muestra los valores de la aproximación determinística graficada en la Figura 2, la cual se representa por la expresión (5), en donde los valores de los parámetros se obtienen a través del método de Mínimos Cuadros Ordinarios (MCO), para un nivel de confianza del 95%. A partir de la expresión (5), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi) \\
 &= A + Bt + C[\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t)] \\
 &= A + Bt + D \sin(\omega t) + E \cos(\omega t) \\
 \xi(t) &= \beta_0 + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 \quad (29)
 \end{aligned}$$

donde,  $\omega = \frac{2\pi}{365}$ , y se obtienen las siguientes relaciones para su estimación por MCO:

$$A = \beta_0,$$

$$B = \beta_1,$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta_3}{\beta_2},$$

$$C = \frac{\beta_2}{\cos \varphi}.$$

Para efectos de contraste, el Cuadro 2 muestra los valores obtenidos por Bhowan (2003), quien modela la temperatura promedio diaria en Pretoria, en el periodo 1978-1997, y por Maroua y Bari (2007), quienes modelan la temperatura promedio de Marruecos.

Cuadro 1. Estimación de los parámetros del componente cíclico.

Parámetro	Temperatura Máxima	Temperatura Mínima	Temperatura Promedio
$\beta_0$	32.3608615562798 (0.1139)* (284.0789)**	20.6206554571657 (0.0936)* (220.3577)**	26.4907585067228 (0.0876)* (302.4188)**
$\beta_1$	0.0004716321971 (0.0000)* (6.1044)**	0.0000956062443 (0.0000)* (1.5064)**	0.0002836192208 (0.0000)* (4.7739)**
$\beta_2$	0.8284517683757 (0.0807)* (10.2680)**	-0.6001365186464 (0.0663)* (-9.0548)**	0.114157624865 (0.0620)* (1.8400)**
$\beta_3$	-2.7225729021467 (0.0801)* (-33.9813)**	-3.1041318969803 (0.0658)* (-47.1636)**	-2.913352399563 (0.0616)* (-47.2877)**
$\varphi$	-1.2754083942149	1.3798178125897	-1.5316320799741
$C$	2.8458277425081	-3.1616133025504	2.9155881340404

\* Error estándar.

\*\* Valor del estadístico t, para un nivel de confianza del 95%.

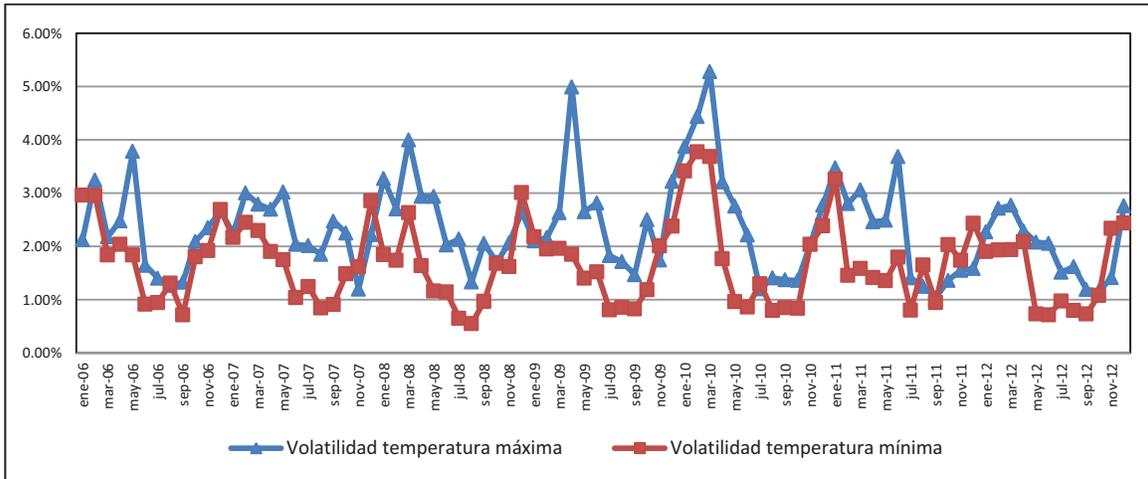
Cuadro 2. Comparación de valores de parámetros del componente cíclico.

Parámetro	Bhowan (2003)	Maroua y Bari (2007)
$A$	18.6053570109476	17.1113
$B$	0.00009240984128	0.000070201
$\varphi$	1.51698902215660	-4.9956
$C$	5.41444547377098	0.978

Con relación al componente estocástico, la Figura 3 muestra el comportamiento de la volatilidad mensual con base en la expresión (22) para las series de la temperatura máxima y mínima. Así como en la dinámica del componente determinista, la volatilidad del proceso muestra un comportamiento cíclico.

co el cual es modelado a través de la expresión (23); en donde la volatilidad mensual revierte a un valor cíclico de largo plazo.

Figura 3. Volatilidad mensual de la temperatura máxima y mínima.



Fuente: Elaboración propia.

El Cuadro 3 muestra la estimación de los parámetros de las expresiones (19), (22) y (26), mismos que se refieren a la velocidad de reversión a la media del componente determinista, estocástico, y la volatilidad del componente estocástico, respectivamente; así mismo, la tendencia de la volatilidad corresponde al promedio de las volatilidades mensuales la cual se refiere al valor promedio de largo plazo. De manera similar que el Cuadro 2, los resultados se comparan con aquellos obtenidos por Bhowan (2003) y Maroua y Bari (2007).

Los resultados del Cuadro 3, muestran que la temperatura diaria en Campeche tarda más en regresar al valor cíclico de largo plazo, por lo que dicha región comparada con Pretoria y Marruecos, reflejaría la presencia de mayores sequías (meteorológicas) y de una recuperación lenta después de fuertes descensos en la temperatura.<sup>4</sup> Los resultados obtenidos se pueden explicar por la investigación de Márdero *et al.* (2012), quienes analizan la variabilidad climática del sur de la península de Yucatán y cuyo estudio es motivado por la doble exposición que tiene dicha región a los huracanes y sequías según

<sup>4</sup> Con base en la Organización Meteorológica Mundial (OMM), una sequía meteorológica es aquella que se presenta por la ausencia prolongada o déficit notable de precipitación.

documentado por Orellana *et al.* en 2009. Los últimos, mencionan que la península presenta dos periodos de sequía: *pre-estival* (primavera) que ocurre entre enero y abril, e *intra-estival* (canícula) que se presenta entre los meses de julio y agosto.<sup>5</sup> Así mismo, Márdero *et al.* (2012) argumentan que diversos son los factores que originan una sequía en general, entre los cuales destacan: 1) cambio climático global (calentamiento global); 2) oscurecimiento global (disminución de la radiación solar); y, 3) deforestación, la cual provoca una menor evapotranspiración que es la fuente de la precipitación. De manera particular, sostienen que la sequía en la península de Yucatán podría relacionarse al aumento de aerosoles originado por los incendios forestales; a la vez, referencian que el *Chilam Balam* ya registraba la ocurrencia de sequías, por lo que dicho fenómeno se consideraría como una constante en la historia climática.

Cuadro 3. Estimación de parámetros del modelo estocástico de reversión a la media estacional.

Parámetro	Campeche (Téllez et al., 2013) 2,557 observaciones			Pretoria (Bhowan, 2003) 7,304 observaciones	Marruecos (Maroua y Bari, 2007) 3,652 observaciones	Definición
	Tp	Tmax	Tmin	Tp	Tp	
$\alpha$	0.1153	0.1824	0.1081	0.3768	0.2747	Reversión a la media del proceso determinista
$\alpha_\gamma$	0.2381	0.2693	0.2189	0.5629	1.8527	Reversión a la media del proceso estocástico
$\gamma_{tend}$	1.5163	2.3313	1.6757	2.6	1.57	Tendencia de la volatilidad
$\sigma_\gamma$	0.4851	0.8305	0.6557	0.6898	0.7079	Volatilidad del proceso estocástico

En el contexto anterior, Hernández *et al.* (2000) muestran bajo un escenario actual, que la entidad de Campeche ha registrado un índice de severidad de sequía meteorológica entre leve y fuerte. Sin embargo, bajo el modelo CCC (Canadian Climate Center), el índice se ubicaría de fuerte a muy fuerte, y en

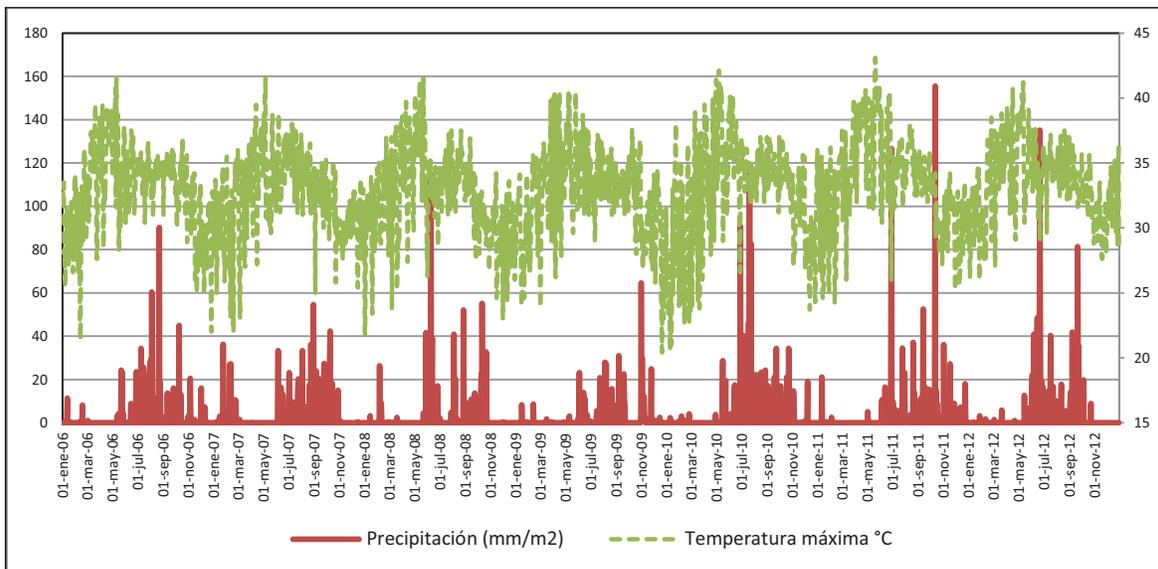
<sup>5</sup> Canícula, es aquel periodo en donde disminuyen considerablemente las lluvias y se intensifica el calor. Este fenómeno se debe a la ausencia de nubes de lluvia lo cual permite una mayor filtración de la radiación solar e intensificación del calor en la superficie (www.miambiente.com.mx, consultado el 18 de septiembre de 2013).

un modelo GFDL-R30 (Geophysical Fluid Dynamics Laboratory), el índice pasaría a un estado muy fuerte en más del 70% de la geografía espacial. A nivel península de Yucatán, encuentran que el cambio en la severidad tendría un aumento en 73.3% de la superficie, en donde el índice cambiaría de fuerte a severo.

Por consiguiente, es factible considerar que la velocidad a la cual la temperatura revierte a su valor cíclico, se relaciona con el grado de ausencia prolongada de precipitaciones y la presencia de canículas. Entonces, una tasa baja de reversión reflejaría la presencia de sequías meteorológicas, en tanto que una tasa alta de reversión implicaría una mayor presencia de precipitaciones.

La Figura 4 muestra la comparación de la evolución histórica diaria entre la precipitación y la temperatura máxima de Campeche, en la cual primeramente se aprecia que la disminución en la precipitación hasta su ausencia, ocurre en el periodo de principios de noviembre a finales de mayo que representa una proporción del 60% del año. Seguidamente, se detecta que la canícula ocurre comúnmente en mayo, mes en que finaliza el periodo de ausencia de precipitación.

Figura 4. Evolución de la precipitación y temperatura máxima diaria en Campeche, enero 2006 a diciembre 2012.



Fuente. Elaboración propia con datos de [www.tutiempo.net](http://www.tutiempo.net).

Retomando la dinámica del componente estocástico, el Cuadro 3 igualmente muestra que la volatilidad revierte a su valor cíclico a una tasa aún más lenta de como lo hace el componente determinista. Sin embargo, se detecta que la volatilidad del componente estocástico es considerablemente alta, tanto para la temperatura máxima como mínima, en 83.05% y 65.57%, respectivamente. La volatilidad alta se puede explicar a partir de la Figura 4, en donde toda vez que se presentan los espacios de ausencia de precipitación o un cambio de precipitación abrupto, se asocia con un cambio en la temperatura de manera amplia. Para efectos de corroborar estadísticamente la relación entre la precipitación y la volatilidad, se estima un modelo de regresión simple a través de MCO, considerando como variable dependiente a la volatilidad e independiente a la precipitación.<sup>6</sup> El Cuadro 4, muestra los resultados de la regresión simple utilizando valores mensuales, en donde se observa que a pesar del valor del coeficiente cercano a cero, la precipitación es estadísticamente significativa para explicar el comportamiento de la volatilidad en un sentido inverso.

Finalmente, con base en las estimaciones del Cuadro 3, la Figura 5 muestra una simulación de la temperatura máxima y mínima a partir de las expresiones (27) y (28), para un periodo de tres años.

Cuadro 4. Estimación del modelo de regresión simple:

$$\text{Volatilidad} = \beta_0 + \beta_1 \text{Precipitación} + u$$

Parámetro	Valor	Error típico	Estadístico t
$\beta_0$	2.60457495	0.10700296	24.3411485
$\beta_1$	-0.00370076	0.00086615	-4.27263263

Nivel de confianza del 95%.

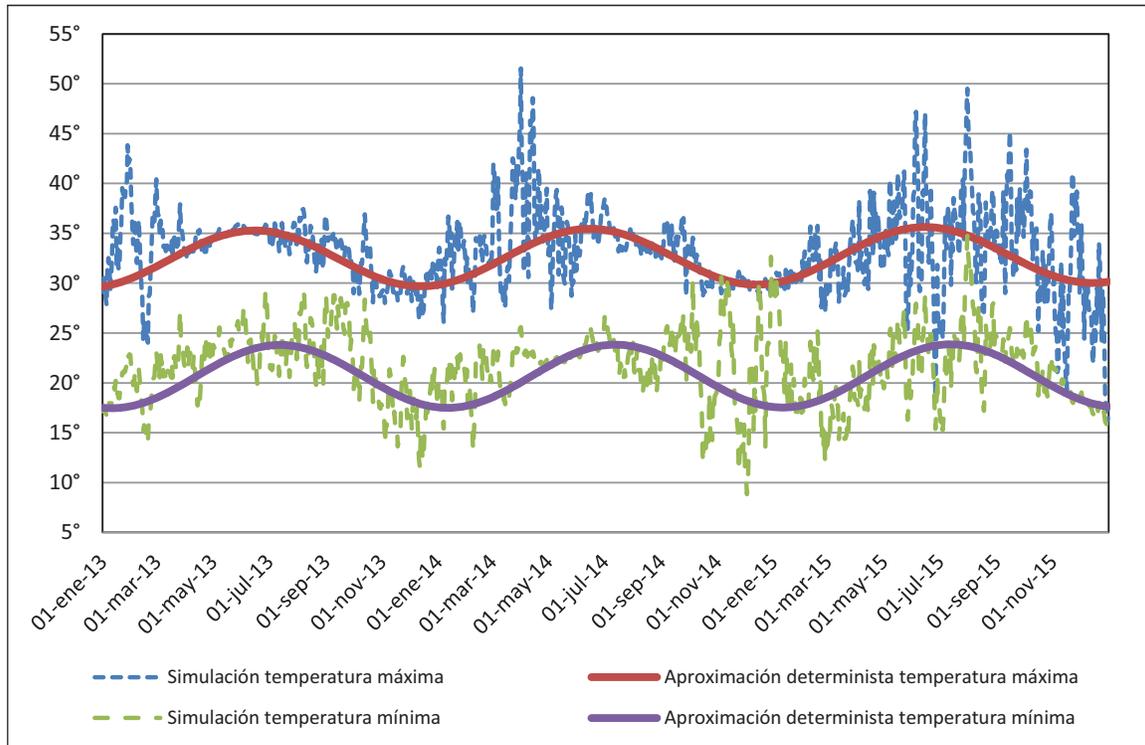
$R^2 = 0.18208886$

Error típico = 0.78619845

Observaciones: 84

<sup>6</sup> La prueba estadística de la regresión simple se considera como una primera aproximación para sustentar el valor alto de volatilidad en el proceso estocástico explicado por la precipitación, ya que ésta igualmente tiene su incidencia sobre la velocidad lenta a la cual revierte la temperatura a su valor cíclico. Una prueba más robusta deberá ser aquel modelo que considere la no linealidad de la volatilidad del componente estocástico de la temperatura.

Figura 5. Simulación de la temperatura máxima-mínima y su aproximación determinista, enero 2013-diciembre 2015.



Fuente: Elaboración propia.

## Conclusiones

La presente investigación empírica modeló el comportamiento de la temperatura máxima, mínima y promedio diaria de Campeche, a través de un proceso estocástico de reversión a la media estacional, el cual permite descomponer la dinámica de la temperatura en sus componentes determinista y estocástico. El modelo es una extensión al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, comúnmente utilizado en la modelación de tasas de interés y tipo de cambio. Primeramente, el componente determinista se aproxima por medio de una función senoidal que captura el comportamiento cíclico al cual la temperatura diaria revierte a través del tiempo. Seguidamente, la descripción del componente estocástico fue propuesta por un movimiento browniano, en donde se considera que los cambios en la temperatura se distribuyen como una normal.

Los resultados muestran que la temperatura en Campeche revierte a su valor cíclico de largo plazo a una velocidad baja, fenómeno que igualmente

ocurre con la reversión de la volatilidad. Así mismo, se encuentra que la volatilidad de la temperatura es alta, comparada con los estudios de Bhowan (2003) y Mraoua y Bari (2007); ambas situaciones, reversión lenta y volatilidad alta, se explican por la ausencia prolongada de precipitación que ocurre tanto en la Península de Yucatán como en el estado de Campeche, así como a la presencia de canícula. Con base en las estadísticas de precipitación, se detecta que la misma se ausenta en un 60% del año y al inicio del nuevo ciclo de precipitación es cuando ocurre la canícula; lo cual es un factor que se refleja en la tasa de reversión.

Lo anterior tiene sus implicaciones en el riesgo al que los agricultores y ganaderos se exponen en su producción, ya que la presencia de sequía y canícula desestabilizan principalmente los ingresos de aquellos productores de baja escala y que se encuentran primordialmente en las zonas rurales. Por lo que, una medida para controlar el riesgo de clima, es a través de los derivados climáticos, los cuales en contraste con un seguro, permiten la generación de un pago en función de un índice de clima aún cuando no se haya generado la pérdida física; así mismo, y debido a que un índice sobre clima no es un bien transable en el mercado financiero, el derivado climático no involucra problemas de información asimétrica como selección adversa y riesgo moral. La importancia entonces de los resultados de la investigación, se mostrarían en la valoración de los derivados climáticos, en donde primeramente se requiere describir el comportamiento del índice de clima que procure considerar los hechos estilizados que caracterizan a la variable de riesgo como lo es el fenómeno cíclico.

La investigación se limitó en estimar y simular la dinámica de la temperatura bajo la premisa en que el proceso sigue un movimiento browniano. Por lo que la continuación sería estimar los parámetros del modelo bajo procesos más generales como de Levy, que permitan capturar los saltos bruscos en la temperatura y que ello justifique además la volatilidad alta del proceso observado.

## Bibliografía

- Alaton, P., Djehiche, B. and Stillberger, D. (2002). "On Modelling and Pricing Weather Derivatives". *Applied Mathematical Finance*, 9(1), 1-20.
- Benth, F., and Saltyte-Benth, J. (2005). "Stochastic Modelling of Temperature Variations with a View Towards Weather Derivatives". *Applied Mathematical Finance*, 12(1), 53-85.
- Bhowan, A. (2003). "Temperature Derivatives". *School of Computational and Applied Mathematics*, University of Wiatersrand, January.
- Bibby, B., and Sorensen, M. (1995). "Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes". *Bernoulli*, 1(1/2), 17-39.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión, (2012). "Ley de Desarrollo Rural Sustentable". *Diario Oficial de la Federación*, México.
- Connors, R.B. (2003). "Weather Derivatives allow Construction to Hedge Weather Risk". *Cost Engineering*, Technical Article, 45(3), 21-24.
- Cont, R. (2001). "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues". *Quantitative Finance*, 1(2), 223-236.
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and Ross, S.A. (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53(2), 385-407.
- Cyr, D., Kusy, M., and Shaw, A.B. (2010). "Climate Change and the Potential use of Weather Derivatives to Hedge Vineyard Harvest Rainfall Risk in the Niagara Region". *Journal of Wine Research*, 21(2-3), 207-227.
- Dornier, F., and Queruel, M. (2000). "Caution to the Wind, Weather Risk Special Report". *Energy and Power Risk Management / Risk Magazine*.
- Geyser, J. M., and van de Venter, T.W.G. (2001). "Hedging Maize Yield with Weather Derivatives". *Working Paper 2001-13*, University of Pretoria, Department of Agricultural Economics, Extension and Rural Development, 1-19 (<http://purl.umn.edu/18067>).
- Gibson, R., and Schwartz, E.S. (1990). "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of oil Contingent Claims". *The Journal of Finance*, 45(3), 959-976.
- Hernández, M.E., Torres, L.A., y Valdez, G. (2000). *Sequía meteorológica en México: Una visión hacia el siglo XXI: el cambio climático en México*. editorial C. Gay García, 25-39, México, DF: Instituto Nacional de Ecología.
- Jewson, S., and Caballero, R. (2006). "Seasonality in the Statistics of Surface air Temperature and the Pricing of Weather Derivatives", *Meteorological Applications*, 10(4), 367-376.

- Leggio, K.B., and Lien, D. (2002). "Hedging Gas Bills with Weather Derivatives". *Journal of Economics and Finance*, 26(1), 88-100.
- Márdero, S., Nickl, E., Schmook, B., Schneider, L., Rogan, J., Christman, Z., y Lawrence, D. (2012). "Sequías en el sur de la península de Yucatán: análisis de la variabilidad anual y estacional de la precipitación". *Investigaciones Geográficas*, 78, 19-33.
- Mraoua, M., and Bari, D. (2007). "Temperature Stochastic Modeling and Weather Derivatives Pricing: Empirical Study with Moroccan data". *Afrika Statistika*, 2(1), 22-43.
- Orellana, R., Espadas, C., Conde, C., y Gay, C. (2009). "Atlas escenarios de cambio climático en la Península de Yucatán". Unidad de Recursos Naturales, Centro de Investigación Científica de Yucatán y Centro de Ciencias de la Atmósfera-UNAM, Mérida, Yucatán, México.
- Secretaría de Gobernación (2013). "Plan Nacional de Desarrollo 2013-2018". *Diario Oficial de Federación*, México.
- Tang, C., and Jang, S. (2011). "Weather Risk Management in Ski Resorts: Financial Hedging and Geographical Diversification". *International Journal of Hospitality Management*, 30, 301-311.
- Torró, H., Meneu, V., and Valor, E. (2003). "Single Factor Stochastic Models with Seasonality Applied to Underlying Weather Derivatives Variables". *Journal of Risk Finance*, 4(4), 6-17.
- Turvey, C. (1999). "Weather Derivatives for Specific Event Risks in Agriculture", *Review of Agricultural Economics*, 23(2), 333-351.
- Vedenov, D., and Barnett, B. (2004). "Efficiency of Weather Derivatives as Primary Crop Insurance Instruments". *Journal of Agricultural and Resource Economics*, 29(3), 387-403.
- Venegas-Martínez, F. (2006). *Riesgos financieros y económicos*. México, Thomson.
- Zapranis, A., and Alexandridis, A. (2008). "Modelling Temperature Time-Dependent Speed of Mean Reversion in the Context of Weather Derivatives Pricing". *Applied Mathematical Finance*, 15(4), 355-386.