Valuación de una nota estructurada que liga el rendimiento de un índice bursátil con los pagos de un bono y un derivado

Ambrosio Ortiz-Ramírez*

Francisco Venegas-Martínez**

Francisco López-Herrera***

Fecha de recepción: 20 de mayo de 2011

Fecha de aceptación: 10 de junio de 2011

* Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
a7ortiz@yahoo.com.mx

** Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
fvenegas1111@yahoo.com.mx

*** Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Contaduría y Administración, División de Investigación.
francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx

Resumen

En esta trabajo se valúa una nota estructurada que incluye un bono cupón cero y que paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal predeterminado. Dicha nota tiene además inmerso un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o contratos *forward*. Específicamente se proporciona una fórmula cerrada del precio de dicha nota; el precio, como es de esperarse, satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973).

Clasificación JEL: G13, C65.

Palabras clave: Productos derivados, notas estructuradas, modelación matemática.

Abstract

This paper provides the value of a structured note including a zero coupon bond and paying at the maturity date the logarithmic return of a stock index applied to a predetermined nominal. The note also has embedded a portfolio of European (call and put) options and/or forward contracts. Specifically, it is provided a closed formula of the value of the note; the price as expected, satisfies the Black-Scholes (1973) and Merton (1973) partial differential equation.

***Keywords**:**JEL Classification**: G13, C65*

Contingent claims, structured notes, mathematical modeling.

1. Introducción

En las últimas décadas, los mercados financieros han experimentado profundas transformaciones debido al avance en las tecnologías de información y al creciente desarrollo de innovaciones financieras. Estas últimas diseñadas para satisfacer necesidades específicas de inversionistas y emisores. Entre las innovaciones destacan: los productos derivados sofisticados y notas estructuradas, siendo estas últimas híbridos entre bonos, índices bursátiles y derivados. La literatura especializada sobre valuación de notas estructuradas es todavía escasa; véanse, al respecto, los trabajos de: Carlin (2009); Henderson y Pearson (2007); Palmer (2006); Shefrin y Statman (1993); y Stoimenov y Wilkens (2005).

En casi todas las economías, desarrolladas o no, las notas estructuradas han cobrado especial interés en los mercados financieros. En términos generales, las notas estructuradas, comparadas con los bonos (cuponados o no), pueden producir mejores alternativas de inversión para los fondos de pensiones, tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y empresas paraestatales (con facultades legales para invertir) pues en dichas notas se ligan pagos asociados a bonos y a índices bursátiles, lo cual genera alternativas de inversión con rendimientos potencialmente superiores a los que prevalecen en el mercado de dinero, sobre todo cuando las tasas de interés se mantienen bajas, o a la baja, durante periodos prolongados de tiempo.[1] En México, existe un mercado OTC creciente de certificados de depósito (CEDEs) estructurados con derivados, entre los que destacan: CEDE *call spread*; CEDE *put spread*; CEDE dual; CEDE gana si sube; CEDE gana si baja; CEDE TIIE *collar*; CEDE TIIE *floor*; CEDE *cap*; CEDE *knock out*, *down and out*; CEDE *knock out*, *up and out*; CEDE *knock out*, *up and out*, *down and out* (*no touch*); CEDE doble barrera (al *hit* acumulable); CEDE extendible; y CEDE *swaption*, entre muchos otros.[2]

---

1 Véase, por ejemplo, Das (1996).

2 Más detalles sobre estas notas aparecen en Venegas-Martínez (2007).

Sin duda, el mercado norteamericano de notas estructuradas es el que ha crecido más en los últimos años, esto debido a que cuando las tasas de interés no son atractivas a los inversionistas, las notas estructuradas cuyos pagos están ligados a algún índice bursátil constituyen una alternativa de inversión con rendimientos por arriba de lo que ofrece el mercado de deuda. Asimismo, muchas de las notas estructuradas en el mercado son emitidas por empresas paraestatales (con líneas de crédito abiertas por parte de alguna institución gubernamental) por lo que tienen calidad crediticia alta y, en consecuencia, el riesgo crédito (o riesgo de incumplimiento) es mínimo. En conclusión, los mercados de notas estructuradas son atractivos para los inversionistas por sus potenciales rendimientos y su alta calidad crediticia. Es también relevante subrayar que las notas estructuradas ofrecen al emisor y a los inversionistas un medio para aislar y redistribuir riesgos. De hecho, una de las causas de su creciente demanda es su capacidad para generar justamente la exposición al riesgo que el cliente esté dispuesto a tolerar y que, al mismo tiempo, se mantengan sus objetivos de inversión.

Como era de esperarse, las características de estos instrumentos introducen varias complicaciones técnicas para su valuación. A diferencia de la valuación de opciones en donde se requiere algún supuesto sobre el comportamiento del subyacente, la valuación de notas estructuradas requiere de supuestos sobre el comportamiento combinado del bono y el subyacente ligado a los pagos. En esta investigación se valúa una nota estructurada que incluye un bono cupón cero y que paga además al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal (predeterminado), la cual además tiene inmerso un portafolio de opciones europeas y/o un contratos *forward*. Este trabajo proporciona una fórmula analítica (cerrada) del precio de dicha nota. El precio de la nota, como es de esperarse, satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973).

Este trabajo se encuentra organizado como sigue. En la próxima sección se describe, en detalle, la nota estructurada bajo estudio. A través de las secciones 3 y 4 se valúa la nota. Por último, en la sección 5 se proporcionan las conclusiones.

2. Descripción de la nota

Considere una nota estructurada que se pacta al tiempo t y vence en T. La nota incluye un bono cupón cero, de nominal M, el cual paga una tasa de interés continuamente capitalizable *r*, y además paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a otro un nominal *N*. Posteriormente se combina con un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o un contrato *forward* del mismo vencimiento pero diferentes precios de ejercicio y de entrega. En lo que sigue se hará referencia a la nota incompleta (sólo el bono y pago de rendimiento logarítmico) antes de combinarla con opciones o contratos *forward* y a la nota completa después de combinarla. Con base en la descripción anterior, la función de pago al vencimiento (o valor intrínseco) de la nota incompleta está dada por:

$$V(S_t, t) = N \ln(S_t) + M \tag{1}$$

El primer sumando expresa el rendimiento logarítmico de un índice bursátil, de nivel S_t, aplicado al nominal *N* y el segundo representa el pago al vencimiento, *M*, del bono cupón cero. Se supondrá que el nivel del índice accionario satisface una ecuación diferencial estocástica de primer orden (el movimiento geométrico browniano) de la forma:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{2}$$

donde μ es el parámetro de tendencia (rendimiento medio anual del índice), σ es la volatilidad anualizada del índice (desviación estándar del rendimiento anual), $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento browniano (o proceso de Wiener) definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, F, (F_t^W)_{t\in[0,T]}, P)$. En este caso, el espacio medible en cuestión es $(\Omega, F) := (R, B(\mathrm{R}))$ donde $B(\mathrm{R})$ es la σ-álgebra estándar de Borel sobre R (los números reales). La medida de probabilidad satisface.

$$\mathrm{dP}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{w^2}{2t}\right\} \mathrm{d}w.$$

La filtración $(F_t^W)_{t\in[0,T]}$ es una familia de σ-álgebras tales que $F_t^W \subset F$ para toda t. Esta familia es creciente en el sentido de que $F_s^W \subset F_t^W$ cuando $s \le t$. Así, una filtración puede ser vista como un arreglo dinámico de información y F_t^W representa la información relevante disponible al tiempo t. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. Se cumple además que W_t tiene incrementos independientes normales con medias cero y varianzas iguales a los incrementos en el tiempo. Al tiempo $t=0$, se define $W_0=0$. El proceso $\mathrm{d}W_t \sim N(0,\mathrm{d}t)$ modela las fluctuaciones propias de los rendimientos (riesgo de mercado) del índice bursátil y, como se sabe, satisface:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right]=0 \;\text{ y }\; \mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_t\right]=\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{d}W_t\right)^2\right]=\mathrm{d}t$$

En este caso se cumple que

$$\mathrm{d}\ln(S_t)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t=\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}-\frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Es decir, el rendimiento logarítmico del índice accionario tiene distribución normal. De acuerdo con la descripción de la nota incompleta se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$S_t \geq 1 \tag{4}$$

Claramente, cualquier índice bursátil satisface (4). Se pedirá también que la volatilidad sea pequeña de tal forma que

$$\sigma << 1 \tag{5}$$

Por otro lado, observe que debido a la consideración de un rendimiento esperado μ, las ecuaciones (2) y (3) no son independientes de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ, y menor la volatilidad a fin de que el premio $\lambda=(\mu-r)/\sigma$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda=0$, así, $\mu=r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento), r. Ahora bien, si se escribe (2) como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right) \\ &= rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\left(\lambda\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right), \end{aligned}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo $\lambda = 0$, se tiene que las ecuaciones (2) y (3) se transforman, respectivamente, en

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t \qquad (2')$$

y

$$\mathrm{d}\ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{d}t \qquad (3')$$

en cuyo caso, se tiene que el movimiento browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. Una posible interpretación de (2´) es que los agentes estarían dispuestos a omitir su parámetro de preferencias, μ, y recibir r con tal de que la volatilidad, σ, se mantenga constante. La valuación de instrumentos financieros con (2´) es también llamada valuación neutral al riesgo.[3]

3. *Valuación de la nota incompleta*

En esta sección se valúa la nota incompleta. La condición inicial de la nota incompleta, tomando en cuenta (2´), está dada por

$$V(1,t) = (N + M)e^{-r(T-t)} + Nr(T-t) - \frac{1}{2}N\sigma^2(T-t) \qquad (6)$$

Observe que el segundo y tercer sumando están asociados a la tendencia en (3). Note además que si $S_t = 1,$ entonces el valor del contrato, en $t = 1,$ es el

3 El teorema de Girsanov (1960) proporciona una justificación teórica de (2´), véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008).

valor presente de la suma de los nominales más los intereses del nominal N y el ajuste por la tendencia de acuerdo con (3). La siguiente proposición proporciona el valor de la nota incompleta que combina capital y deuda

Proposición 1.

El precio, en un mundo neutral al riesgo, de la nota estructurada incompleta está dado por

$$V(S_t,t) = e^{-r(T-t)} N\left[\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right] + Me^{-r(T-t)}. \quad (7)$$

Además $V(S_t,t)$ satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton.

Demostración: Claramente la ecuación (7) cumple con las condiciones de frontera (1) y (6). En virtud de (5) se obtiene que

$$r - \frac{1}{2}\sigma^2 > 0 \quad (8)$$

y dado $S_t \geq 1$, entonces $\ln(S_t) > 0$. Por lo tanto, el precio $V(S_t,t)$ permanece siempre positivo. Asimismo, al ser $V(S_t,t)$ un producto derivado con un único pago al vencimiento debe cumplir con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial S_t} rS_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 = rV \quad (9)$$

junto con las condiciones de frontera (1) y (6). En efecto, si se denota

$$V(S_t,t) = Nf(S_t,t) + MB(t,T) \quad (10)$$

donde

$$f(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right]. \quad (11)$$

y

$$B(t,T) = Me^{-r(T-t)}, \tag{12}$$

Entonces se tiene que las derivadas parciales de $f(S_t, t)$ satisfacen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = rf - e^{-r(T-t)}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{e^{-r(T-t)}}{S_t^2} \tag{13}$$

y se puede verificar, fácilmente, que cumplen con

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} rS_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 = rf \tag{14}$$

Asimismo es fácil ver que $B(t,T) = Me^{-r(T-t)}$ también satisface (9), es decir,

$$\frac{\partial B}{\partial S_t} rS_t + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 = rB \tag{15}$$

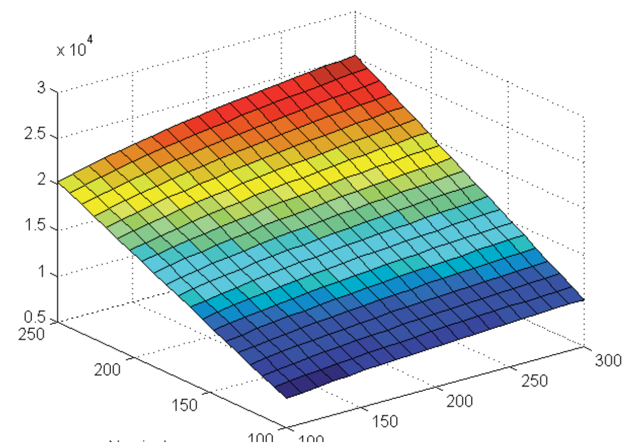
ya que *B* no depende de S_t, en cuyo caso se cumple trivialmente que

$$\frac{\partial B}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 B}{\partial S_t^2} = 0 \tag{16}$$

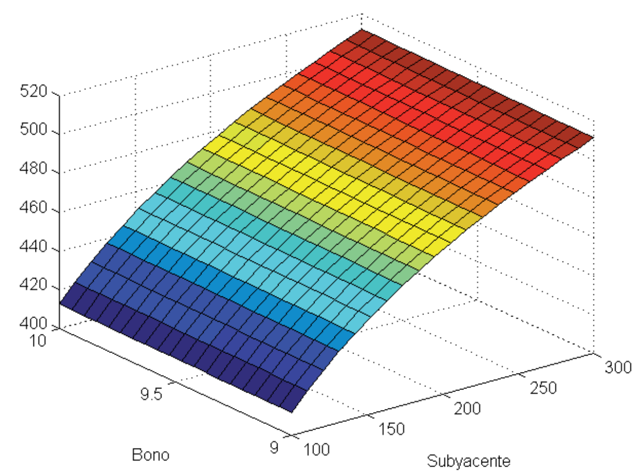
De hecho, como es de esperarse, $\mathrm{d}B = rB\mathrm{d}t$. Es decir, el cambio porcentual (rendimiento) del precio del bono se calcula con la tasa de interés por el plazo, esto es, se desanualiza la tasa de interés. Observe ahora que (9) es una ecuación diferencial parcial lineal, se sigue que cualquier combinación lineal de soluciones de (9), como lo son (11) y (12), son también solución de (9).

En la Gráfica 1 se muestra el comportamiento del valor de la nota incompleta ante variaciones en: (a) nominal y activo subyacente, (b) precio del bono y activo subyacente y (c) parámetro de volatilidad y activo subyacente.

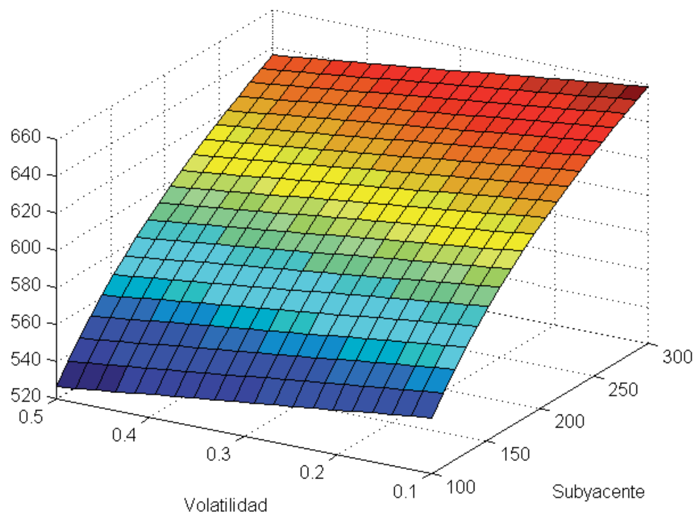
Gráfica 1. Comportamiento del precio (eje vertical) la nota incompleta ante variaciones de diferentes parámetros (ejes horizontales): (a) nominal y activo subyacente, (b) precio del bono y activo subyacente y (c) parámetro de volatilidad y activo subyacente.



(a)



(b)



(c)

4. Valuación de la nota completa

A la nota estructurada de la sección anterior se le pueden agregar opciones europeas (de compra o venta) y contratos *forward*, todos con el mismo vencimiento T, pero con diferentes precios de ejercicio y de entrega. El precio de la nota ampliada o completa se proporciona en la siguiente proposición,

Proposición 2.

Si

$$\Pi_t = w_1 c(S_t, t) + w_2 p(S_t, t) + w_3 F(S_t, t) \tag{17}$$

es el valor, al tiempo *t*, de un portafolio de w_1 unidades de opciones de compra con precio de ejercicio K_1 y prima $c(S_t,t)$, w_2 unidades de opciones de venta con precio *strike* K_2 y precio $p(S_t,t)$ y w_3 unidades de contratos *forward* con precio de entrega K_3 y valor $F(S_t,t)=S_t-K_3e^{-r(T-t)}$ donde

$$c(S_t,t)=S_t\Phi(d_1)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2\right),\;\; p(S_t,t)=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-d_2\right)-S_t\Phi(-d_1)$$

y $\Phi\left(d\right)$ es la función de distribución acumulada de $\varepsilon\sim N\left(0,1\right)$, es decir,

$$\Phi\left(d\right)=\mathrm{P}_\varepsilon\left\{\varepsilon\le d\right\}=\int_{-\infty}^{d}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon=1-\Phi\left(-d\right),$$

con

$$d_1=\frac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right)+\left(r+\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2=\frac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right)+\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t},$$

entonces

$$U(S_t,t)=Nf(S_t,t)+MB(t,T)+\Pi_t \tag{18}$$

es el valor, en un mundo neutral al riego, de la nota completa y satisface

$$\frac{\partial U}{\partial S_t}rS_t+\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2}\sigma^2S_t^2=rU \tag{19}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned}U(1,t)=(N+M)e^{-r(T-t)}+Nr(T-t)-\frac{1}{2}N\sigma^2(T-t)+w_1\max(1-K_1,0)\\+w_2\max(K_2-1,0)+w_3(1-K_3)\end{aligned}$$

y

$$U(S_t, t) = N \ln(S_t) + M + w_1 \max(S_t - K_1, 0) + w_2 \max(K_2 - S_t, 0) + w_3(S_t - K_3).$$

Demostración: La prueba es inmediata ya que $c(S_t, t)$, $p(S_t, t)$ y $F(S_t, t)$ satisfacen (19) con valores intrínsecos $\max(S_t - K_1, 0)$, $\max(K_2 - S_t, 0)$ y $S_t - K_3$, respectivamente. Además, en la proposición 1 ya se demostró que el primer sumando de (19), dado por $Nf(S_t, t) + MB(t, T)$, también satisface (19).

Por último, observe ahora que la nota completa, con precio dado en (18), tiene ahora inmerso un portafolio de opciones europeas y/o contratos *forward*, lo que la hace más atractiva para inversión y/o cobertura. Esta nota también permite acceder a diferentes mercados (deuda, capital y derivados) sin tomar directamente posiciones en los mismos. Por supuesto, una limitación de la nota es que ésta está sujeta al incumplimiento del emisor cuando la posición corta tiene baja calidad crediticia.

5. Conclusiones

La valuación de una nota estructurada tiene un nivel de complejidad que requiere no sólo del entendimiento del comportamiento del mercado, sino también del conocimiento de herramientas y técnicas especializadas de valuación. Las notas para las que existe una fórmula cerrada de su valor son, en general, notas *vanilla* asociadas con las fórmulas de valuación de Black-Scholes (1973) y/o de Black, F. (1976). Cuando se abandona el mundo *vanilla,* las complicaciones técnicas y metodológicas aparecen y se necesitan herramientas más sofisticadas para la determinación de precios En este trabajo se ha encontrado una fórmula analítica de una nota estructurada que tiene inmerso un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o contratos *forward* e incluye un bono cupón cero y paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal dado.

Bibliografía

Black, F. (1976). “The Pricing of Commodity Contracts”. *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 1-2, pp. 167-179

_______________. y M. Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.

Carlin, B. (2009). “Strategic Price Complexity in Retail Financial Markets”. *Journal of Financial Economics*, vol. 91, núm. 3. pp. 278-287.

Das, S. (1996). “Structured Notes and Derivative Embedded Securities”, *Euromoney Publications*.

Girsanov, I. V. (1960). “On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures”. *Journal of Theory of Probability and its Applications*, vol. 5, pp. 285-301.

Henderson, B. J. and N. Pearson (2007). “Patterns in the Payoffs of Structured Equity Derivatives”, Working paper, AFA 2008 New Orleans Meetings.

Merton, R. C. (1973). “Theory of Rational Option Pricing”. *Journal of Economic and Management Science*, vol. 4, núm. 1, pp. 141-183.

Palmer, B. (2006). “Equity-Indexed Annuities: Fundamental Concepts and Issues”, *Working Paper*. 45.

Shefrin, H. y M. Statman (1993). “Behavioural Aspects of the Design and Marketing of Financial Products”, *Financial Management*, vol. 22, núm. 2, pp. 123–134.

Stoimenov, P. A. and S. Wilkens (2005). “Are Structured Products ‘Fairly’ Priced? An Analysis of the German Market for Equity-Linked Instruments”. *Journal of Banking and Finance*, vol. 29, núm. 12, pp. 2971-2993.

Venegas-Martínez, F. (2007). “Mercados de notas estructuradas: un análisis descriptivo y métodos de valuación”, *El Trimestre Económico*, vol. 74(3), núm. 295, pp. 615-661.

_______________. (2008). *“Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre”*, 2a. ed. Cengage, México.