

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Stochastic discount factor for Mexico and Chile, a continuous updating estimation approach

Humberto Valencia Herrera

Estimación alternativa de una prima de seguro de gastos médicos mayores bajo el contexto de las opciones financieras

Fernando Gamaliel Hermosillo Ramírez
Guillermo Sierra Juárez

La ecuación de segundo grado en la estimación de parámetros de la martingala y la valuación de opciones americanas a través de la programación dinámica estocástica

José Antonio Climent Hernández

Aplicación de análisis multifractal de exponentes de Hölder en mercados financieros mexicanos: índice accionario IPC y tipo de cambio USD/MXN

Stephanie Rendón De la Torre

VOLUMEN 4, NÚMERO 2
JULIO - DICIEMBRE 2014

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Volumen 4, número 2
Julio - diciembre 2014

Directorio

Rector General

Dr. Salvador Vega y León

Secretario General

M. en C. O. Norberto Manjarrez Álvarez

Rector de la Unidad Azcapotzalco

Dr. Romualdo López Zárate

Secretario de la Unidad

Mtro. Abelardo González Aragón

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Secretario Académico

Lic. Miguel Pérez López

Jefa del Departamento de Administración

Dra. María Teresa Magallón Díez

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Dr. Saúl Jerónimo Romero

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández-Lerma

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, IPN

Dr. Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía, IPN

Dr. Edgar Ortiz

Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, UNAM

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
UAM-Iztapalapa

Dra. Patricia Saavedra Barrera

Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa

Dr. Francisco López Herrera

Facultad de Contaduría y Administración, UNAM

Comité Editorial

Editora

Dra. Marissa R. Martínez Preece

Coeditores

Dra. María G. Henaine Abed

Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Dr. Luis Fernando Hoyos Reyes

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Volumen 4, número 2, julio - diciembre 2014, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros, Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F., Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, D.F.; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154, Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx, Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 31 de julio de 2014, Tamaño del archivo:6.0 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Stochastic discount factor for Mexico and Chile, a continuous updating estimation approach

Humberto Valencia Herrera

103

Estimación alternativa de una prima de seguro de gastos médicos mayores bajo el contexto de las opciones financieras

Fernando Gamaliel Hermosillo Ramírez
Guillermo Sierra Juárez

123

La ecuación de segundo grado en la estimación de parámetros de la martingala y la valuación de opciones americanas a través de la programación dinámica estocástica

José Antonio Climent Hernández

155

Aplicación de análisis multifractal de exponentes de Hölder en mercados financieros mexicanos: índice accionario IPC y tipo de cambio USD/MXN

Stephanie Rendón De la Torre

191

PRESENTACIÓN

En este número se ofrecen cuatro artículos que incluyen modelos que proponen tanto mejores formas de medir ciertos fenómenos como formas alternativas de realizar estimaciones sobre fenómenos económicos o valuaciones de instrumentos financieros.

El primer artículo, del Dr. Humberto Valencia Herrera, es el caso de un modelo que se presenta como alternativa a métodos de estimación frecuentemente utilizados. En éste, se discute el método generalizado de momentos para estimar el factor de descuento estocástico en una economía, utilizando para ello, los mercados accionarios de México y de Chile, en el período comprendido entre 2007-2012. Asimismo, se comparan los resultados de este método con aquellos obtenidos con el método de dos etapas y con el iterativo, llegando a la conclusión de que el estimador *continuamente actualizado* produce resultados superiores a aquellos obtenidos con las otras dos técnicas de estimación.

El propósito del artículo de Fernando Gamaliel Hermosillo Ramírez y Guillermo Sierra Juárez, es estimar de forma complementaria a la metodología tradicional o actuarial, una prima de gastos médicos mayores utilizando la teoría Black-Scholes de opciones financieras. Se proponen cuatro variables independientes de salud como variables subyacentes donde la combinación ponderada de sus primas, como opciones financieras tipo *call* europeas, determinará la prima total que adicionalmente tendría que sumarse sobre todos los días del año.

En el tercer artículo, de José Antonio Climent Hernández, se presentan los factores de influencia y las características que se deben satisfacer en la teoría de valuación de opciones en un mercado completo, se utiliza el marco teórico del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se estiman los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a través de una ecuación de segundo grado y utilizando la programación dinámica estocástica se modela el precio subyacente para valorar opciones. Finalmente se analizan las diferencias entre el modelo obtenido y el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979).

En el último artículo se analiza una propuesta para mostrar la utilidad de modelos multifractales. En este trabajo, Stephanie Rendón De la Torre expone que mediante la evolución de los exponentes de Hölder y la detección de sus puntos irregulares, es posible estudiar la dinámica de los mercados financieros, metodología que puede resultar muy útil en casos en los que se desea pronosticar movimientos abruptos en los mercados o de variables financieras.

Esperamos que estos artículos resulten estimulantes para nuestros lectores, contribuyendo al enriquecimiento de las finanzas y la administración de riesgos, y que en un momento dado, sean de utilidad en el proceso de toma de decisiones.

Para nosotros siempre será importante mencionar que esta publicación ha llegado a su cuarto año gracias a la colaboración de la comunidad especializada que aceptó la invitación para participar en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en las disciplinas objeto de esta revista, por ello, agradecemos el interés mostrado en este proyecto y les reiteramos nuestra invitación para continuar formando parte del espacio de colaboración que representa esta publicación.

Comité Editorial

Stochastic discount factor for Mexico and Chile, a continuous updating estimation approach

Humberto Valencia Herrera

Fecha de recepción: 2 de diciembre de 2013

Fecha de aceptación: 22 de abril de 2014

* Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México.
Departamento de Contabilidad y Finanzas
humberto.valencia@itesm.mx

Factor de descuento estocástico para México y Chile, un enfoque de estimación continuamente actualizada.

RESUMEN

Se propone utilizar el estimador calculado por el método de momentos generalizado continuamente actualizado para caracterizar el factor de descuento estocástico de una economía. El estimador se aplica a los mercados accionarios de México y Chile en el período 2007-2012, que incluye el período de la crisis financiera internacional, en el cual en ambas economías el factor de descuento estocástico muestra años en los cuales fue menor que uno y la volatilidad del mercado fue alta. Se compara y discuten los resultados del método generalizado de momentos de dos etapas y los del iterativo, y se muestra la superioridad del estimador continuamente actualizado sobre estas dos técnicas de estimación tan usadas.

Clasificación JEL: C52, C61, G15

Palabras clave: factor de descuento estocástico, Mexico, Chile, método generalizado de momentos

ABSTRACT

This paper proposes the use of an estimator calculated using the generalized method of moments continuously updated to characterize a linear stochastic discount factor for a given economy. The estimator is applied to the Mexican and Chilean stock markets for 2007-2012, this period includes the international financial crisis. The stochastic discount factor, for both economies, took values of less than one and presented high market volatility values during several years. A comparison with the results from the two stages generalized methods of moments and the iterative one is also discussed, showing the superiority of the continuous updating estimator over these two frequently used estimation techniques.

JEL Classification: C52, C61, G15

Key words: *Stochastic Discount Factor, Mexico, Chile, Generalized Method of Moments*

Introduction

The stochastic discount factor is extensively quoted in financial literature when referring to risk adjustments. This article proposes the use of the continuously updated estimator to identify the linear stochastic discount factor. The estimator is applied to assess the changes in the stochastic discount factor in the Mexican and Chilean economies during the period 2007-2012, which includes the period of the international economic credit crisis 2008-2009.

The main applications of the stochastic factor are in asset pricing theory, in valuations and in the assessment of market efficiency. Lucas (1978), (Rubinstein 1976), Breeden (1979) and Cox, Ingersoll, *et al.* (1985) proposed and analyzed inter-temporal asset pricing models. Market efficiency is studied using different approaches, most frequently through asset pricing models. Valencia-Herrera (2012) uses the three and the four linear factor model for analyzing returns of the Mexican sustainable index. Márquez de la Cruz, (2006) uses the Consumption Based Asset Pricing Model (CCAPM) for analyzing the permanent and non-permanent consumption in the Spanish Economy. Previously, Márquez de la Cruz, (2005) estimated the inter-temporal rate of substitution for the Spanish Economy. Nieto and Rodríguez (2005) showed how to apply the CCAPM and the Fama and French (1996) three factor linear model to the Spanish and American Economies. Other analyses are, for example, Hansen and Jagannathan (1991), which estimated a lower bound on the volatility of the stochastic discount factor. Among its applications, it has been used, for example, to measure the performance of fund managers, see Farnsworth, *et al.*, (2002). They found that the use of the method results in a small bias toward lower returns.

The paper is divided in four sections: Section one, which introduces the moment conditions starting from a simple representative consumer-investor problem, section two, which gives an overview of the Mexican and Chilean economies during the period studied, section three, which includes the analysis and discussion of the empirical results. Finally, the conclusions section follows.

1. An analysis of equilibrium conditions

Considering that a consumer can freely trade assets i , and that the expected value of a discounted time-separable utility is maximized,

$$\text{Max} E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right] \quad (1)$$

where the subjective discount factor δ measures the personal time preference, $0 < \delta < 1$, C_{t+j} is the investor's consumption in period $t + j$, and $U(C_{t+j})$ is the period utility of consumption at $t + j$. Wealth W_t at t satisfies relation (2)

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^I ((R_{i,t} - R_{f,t})w_{i,t} + R_{f,t})(W_t - C_t) \quad (2)$$

where $w_{i,t}$ is the proportion invested in risky asset i of the total wealth in period t , $R_{i,t}$ is the return of risky asset i in period t and $R_{f,t}$ is the return of the risk free asset in period t .

The optimal consumption and portfolio plan must be such that satisfies that the marginal utility of consumption today is equal to the expected marginal utility benefit from investing one monetary unit in asset i at time t , selling it at time $t + 1$ for $R_{i,t+1}$ and consuming the proceeds, conditional on Ψ_t , which is a subset of the available information at t , A_t ,

$$U'(C_t) = \delta E_t (R_{i,t+1} U'(C_{t+1}) | \Psi_t) \quad (3)$$

If both sides are divided by $U'(C_t)$, then

$$1 = E_t (R_{i,t+1} m_{t+1} | \Psi_t) \quad (4)$$

where the stochastic discount factor m_{t+1} is equal to the stochastic inter-temporal rate of substitution $\delta U'(C_{t+1}) / U'(C_t)$.

Notice that if the returns of the n risky assets in the economy are the vector R_t , and $\bar{1}$ is a vector of ones, relationship (4) can be written as

$$\bar{1} = E(R_t m_t | \Psi_{t-1}), \quad (5)$$

where R_t has an unconditional non-singular variance-covariance matrix Σ .

An implication of this model and other inter-temporal asset pricing ones is that

$$E(R_{t+1} | \Psi_t) - R_t^f = \frac{\text{Cov}(R_{t+1}, m_{t+1} | \Psi_t)}{E(m_{t+1} | \Psi_t)}, \quad (6)$$

where the return on one period riskless bond is $R_t^f = 1 / E(m_{t+1} | A_t)$ and $R_t^f \in \Psi_t$.

For example, in the case of power utility, $U(C_t) = (C_t^{1-\eta} - 1) / (1-\eta)$, where η is the risk aversion coefficient. A limitation of the power utility is that the elasticity of inter-temporal substitution, Φ , is the reciprocal of the relative risk aversion coefficient η , which Hall (1988) argues that is inappropriate because Φ is related to the willingness to substitute consumption today with a future one, whereas η refers to the willingness of the investor to move consumption between possible future states of the world. Epstein and Zin (1989) and Weil (1989) break out the dichotomy. They propose a more general utility specification, which preserves the scale-invariance of the power utility, but breaks the equivalence between coefficient of relative risk aversion and elasticity of inter-temporal substitution.

If the information set is normal, any payoff satisfies

$$1 = E(m_{t+1} R_{t+1} | \Psi_t) = \exp[E(\log(m_{t+1} r_{t+1}) | \Psi_t); \\ + \frac{1}{2} \text{Var}(\log(m_{t+1} r_{t+1}) | \Psi_t)] \quad (7)$$

which can be written as:

$$E(\log(r_{t+1}) | \Psi_t) = E(\log(m_{t+1}) | \Psi_t) - \frac{1}{2} \text{Var}(\log(m_{t+1}r_{t+1}) | \Psi_t). \quad (8)$$

If the One Factor Capital Asset Pricing Model is satisfied,

$$E(R_{it}) = R_t^f + \beta_i \gamma = R_t^f + \beta_i (E(R_t^m) - E(R_t^f)) \quad (9)$$

where γ is a benchmark's risk premium, in equilibrium, the market return minus the risk free return.

Assume that the stochastic discount factor m_t has the form $a + bR_t^m$, relation (4) can be written for R_t^f and R_t^m as

$$1 = E(m_t R_{it}) = E(m_t R_t^m) = E(m_t) R_t^f \quad (10)$$

1.1 Estimation of Euler Equation of Consumption

In equilibrium, the conditional moment condition the stochastic discount factor m_t must satisfy, conditioned to previous information Ψ_{t-1} is that the expected product of any return R_t considering the discount factor must be equal to one,

$$E(m_t R_t | \Psi_{t-1}) = 1 \quad (11)$$

In particular, deviations in the moment condition can be interpreted as return's alpha for the investor, as in Chen and Knez (1996), or selection of an inappropriate discount factor. That is

$$\alpha = E(m_t R_t | \Psi_{t-1}) - 1. \quad (12)$$

The Euler equation of consumption (14) shows the expected rate of return on the assets as well as relative expected consumption stream which is negatively related to the risk aversion parameter.

$$1 = E\left(R_t \delta_t \frac{c_{t+1}^{\gamma-1}}{c_t^{\gamma-1}}\right) = E(R_t m_t). \quad (13)$$

This shows whether consumers prefer to trade-off their current consumption for higher consumption levels in the future. In order to estimate preference parameters of the Euler equation, the constant relative risk aversion coefficient (CRRA) γ and discount factor δ , the GMM technique is used. The necessary condition for the GMM method to estimate the structural parameters is that the moment must hold.

To get the moment condition from equation (1) it is necessary to rearrange this equation as:

$$E\left(R_t \delta_t \frac{c_{t+1}^{\gamma-1}}{c_t^{\gamma-1}}\right) - 1 = E(R_t m_t) - 1 = 0 \quad (14)$$

According to Hansen and Singleton (1982) the discrete-time models of the optimization behavior of economic agents often lead to first-order conditions of the form:

$$E_t(h(x_t, \beta_o)) = 0, \quad (15)$$

where x_t is a vector of variables observed by agents at time t and β_o is a p dimensional parameter vector to be estimated. Therefore:

$$E(h_t(x_t, \beta_o)) = E\left(R_t \delta_t \frac{c_{t+1}^{\gamma-1}}{c_t^{\gamma-1}}\right) - 1 = E(R_t m_t) - 1 = 0. \quad (16)$$

In general, let us construct an objective function that depends only on the available information of the agents and unknown parameters β . Let $g_o(\beta) = E[f(x_t; z_t; \beta_o)]$ according to Hansen and Singleton (1982), if the model in (16) is true then the method of moment estimator of the function g is:

$$g_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(x_t, z_t, \beta). \quad (17)$$

The value of $g_T(\beta)$ at $\beta = \beta_0$ should be close to zero for large values of T . This paper, follows Hansen and Singleton (1982) and choose β to minimize the function J_T ,

$$J_T(\beta) = g_T'(\beta)W_T g_T(\beta) \quad (18)$$

where W_T is a symmetric, positive definite weighting matrix. W_T can be estimated minimizing

$$W_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (f(x_t; z_t; \beta) f(x_t; z_t; \beta)) \quad (19)$$

The weighting matrix W_T is chosen so that g_T is close to zero, taking into account possible heteroscedasticity and autocorrelation (HAC) behavior.

Hansen and Singleton (1982) mention two advantages of estimating the non-linear Euler equation under GMM:

- (a) The GMM estimator does not require the specification of the joint distribution of the observed variables, unlike the maximum likelihood (ML) estimator.
- (b) The instrument vector needs to be predetermined in the period when the agent forms his expectations. Both past and present values of the variables in the model can be used as instruments. The model estimator is consistent even when the instruments are not exogenous or when the disturbances are serially correlated.

The iterated generalized method of moments estimator is calculated as follows: To compute W_T a consistent estimator of β_0 is needed. This can be obtained by initially using $W_T = I_{r \times r}$ (identity matrix) and suboptimal choice of β in minimizing $J_T(\beta)$ (18) and obtaining, therefore, the values of β_T . By using this value of β in (19), W_T is obtained. Again, by using the new values of W_T , β_T can be obtained by minimizing equation (18). This

process is repeated until the estimates converge. According to Pozzi (2003) this iterative GMM process is more efficient in a small sample than the simple standard two-step procedure given by Hansen and Singleton (1982).

Furthermore, the continuous updating estimator (CUE), proposed by Hansen, Heaton and Yaron (1996) and implemented here, performs better if the instruments are weak and has better small sample properties than the two-step General Method of Moments and instrumental variables estimators (Hahn, Hausman, and Kuersteiner 2004), although it requires intensive numerical optimization because the betas and the estimate of the variance-covariance matrix, S , which depends on the betas are calculated simultaneously (Baum, Schaffer and Stillman, 2007).

$$\beta_{cue} = \operatorname{argmin}_{\beta} J(\beta) = \operatorname{argmin}_{\beta} Tg(\beta)'[S(\beta)]^{-1}g(\beta)$$

2. The Mexican and Chilean economies

2.1 The Mexican economy

In the period of study five sup-periods can be identified: a slowdown of the economy, during 2007 and 2008, the crisis in Mexico, at the end of 2008 and beginning of 2009, the recovery period, 2009, 2010 and 2011 and a slowdown of the economy, at the end of 2012. During 2007, the economy slowed down because of the credit crises in the United States weakened its economy, Mexican exports moderated their growth and commodity prices increased: oil, food and metallic supplies. In August of 2008, the international banking market crises aggravated. With the bankruptcy of Lehman Brothers in September, uncertainty in the international market grew. The international markets lacked liquidity. The crises expanded to other financial markets, including the Mexican one. By the second quarter of 2008, the crisis effects began to subside. The actions that Mexican and international authorities had implemented started to give results. Progressively, market liquidity increased, the uncertainty diminished and the growth returned to the Mexican economy. During 2012, the uncertainty derived from the European Crisis affected the American Economy. Mexican exports slowed down and the manufacturing activity in some regions of

the country, contracted. These were signs of a possible deterioration of the economic activity prospects in México.

2.2 The Chilean economy

The Chilean government conducts a rule-based countercyclical fiscal policy, accumulating surpluses in sovereign wealth funds during periods of high copper prices and economic growth, and allowing deficit spending only during periods of low copper prices and growth.

As a result, Chile had a mild economic crisis as a consequence of the world wide credit crises. Chile benefited from a governmental rule-based countercyclical fiscal policy. The economics went from a recovery period in 2006 and 2007 a to slowdown period in 2008. Chile only suffered the world wide crises consequences in 2009. By 2010, the Chilean economy was fully recovered. During the period of 2010 to 2012, it grew 6%, each year. In 2012, in spite of the European crises, the Chilean economy kept growing.

Inflation decreased gradually during 2006 to 2008, from being 13% in 2006 to 5% and 1% 2007 and 2008, respectively. In 2009 and 2010, as a consequence of the international economic crisis and the contra cyclical expansionary measures, inflation rebounded to 4% and 7%, respectively. For 2011 and 2012, prices stabilized, inflation grew only 3% and 2%, respectively.

3. Discussion and Analysis

This study analyses the performance of the Mexican Stock Market and the Chilean Stock Market. In each one a market index is selected as benchmark. The index used in the Mexican Market was the Total Return Index “Índice de Rendimiento Total (IRT)” and for the Chilean Market, the Santiago Stock Exchange Index “Índice de la Bolsa de Santiago “IPSA”, both indexes are cash dividends adjusted. The mean and standard deviation of these indexes during the period under study are shown in Table 1. Notice also that 2008 had negative returns measured by IPSA and IRT. The same happened in 2011, when the prospects of the Mexican and Chilean economies weakened. The recovery was stronger during 2009 and 2010. The growth in 2012 was small, compared with those of 2009 and 2010. Volatility increased in 2008, decreased in the following two years, and it increased again in 2011, then decreased again in 2012, for both the IPC and the IRT.

Table 2 shows the average and standard deviation of the asset returns each year of the study in the Mexican and Chilean economies. The pattern is very similar to the one observed in Table 1. Chilean returns became negative in 2008 and 2011, as did the IPSA index. Mexico only shows a negative yearly return in the period of study: 2008, even though the 2011 IRT return was negative. Volatility is higher in all years for the asset returns than for the index returns, in both, the Mexican and Chilean economies.

If equation (13) is estimated for each return and the return for the risk free rate is subtracted for each of the returns, the following moment condition must be satisfied:

$$E\left(m_t\left(R_{it} - R_t^f\right)\right) = E\left(m_t R_{it}^e\right) = 0, \quad (20)$$

where $R_{i,t}^e$ is the excess return of asset i . Considering that m_t can be written as $a + bR_{i,t}^e$, and standardizing the coefficient a as 1, as in Kosi (2006), we get the one parameter model

$$E\left(m_t R_{i,t}^e\right) = E\left(\left(1 + bR_{m,t}^e\right)R_{i,t}^e\right) = E\left(R_{i,t}^e\right) + bE\left(R_{i,t}^e R_{m,t}^e\right) = 0 \quad (21)$$

The two parameter model follows from equation (15), where α can be different from zero, in this case the moment condition becomes

$$\begin{aligned} E\left(m_t R_{i,t}^e\right) - \alpha_0 &= E\left(\left(1 + bR_{m,t}^e\right)R_{i,t}^e - \alpha_0\right) = \\ E\left(R_{i,t}^e\right) - \alpha_0 + bE\left(R_{i,t}^e R_{m,t}^e\right) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Table 3 shows the coefficients obtained using the continuous updating (CUE) estimator for Mexico and Chile in the two parameter model. Notice that the alpha is positive and statistically significant, which indicates a possible premium over the one market factor model, albeit small. The only exception is in 2009, for Mexico, year in which alpha becomes negative and large, -0.082. The negative alpha reflects a persistent negative trend on the performance of stocks, despite the recovery of IRT. The beta coefficients are negative, except

for 2007 and 2012, which reflect a negative discount proportional to the return on the IRT. The higher the return on the IRT, the smaller the expected discount factor. During 2010 and 2012, the absolute value of the beta factor was larger than in 2007 and 2008, which reflects a higher discount during the recovery period and during a time period of a year when the Mexican economy slowed down due to the European crisis.

The anomalous results in 2009 for Mexico are associated with overidentification in the model. The probability that the Chi square value of the Hansen overidentification test be equal to zero is 0.02, see Table 4. In all other periods, the null hypothesis of lack of overidentification of the Hansen tests cannot be rejected.

For the Chilean economy, in the two parameter model, the discount factor is proportional to the market index and negative, and it is possible an alpha excess return over the one market factor model. Alphas are positive in all periods and statistically significant. The slope coefficients of the return are negative and statistically significant. There is no observable sign change in the discount factor model for the period under study.

However, the increase in the sensibility of the discount factor to the market index during 2009 (the recovery period) and 2012 (the European crisis period), this contrasts with the small beta coefficient in 2008 (the international credit crisis) is noticeable, this contrasts with, see Table 4. These observations can be consequences of the implemented countercyclical measures in the Chilean economy, which decreased the sensitivity of the asset returns to the index stock market. The Hansen hypothesis of non-overidentification is not accepted from 2009 to 2011, see Table 5.

In the restricted one coefficient model, similar results are observed. In the Mexican model, all beta coefficients are negative, except for 2009, for which the Hansen non-overidentification hypothesis cannot be accepted. In 2010 and 2012, there is an augmented sensitivity of the stochastic discount factor to the market index. However, during 2012 the Hansen non-overidentification hypothesis is rejected. In the Chilean model, the results are similar to those observed in the Mexican model. However, the beta coefficient has a positive sign for the year 2009, which can be due to overidentification, see Table 6 and Figure 1. The Hansen non-overidentification hypothesis cannot be accepted from 2009 to 2011, see Table 6. The beta coefficients to the market index are large and negative for 2010 (the recovery period) and 2012 (the European crisis), see Table 5.

The analysis using the two step GMM and IGMM methods shows less reliable estimates than the CUE estimator, see Table 7. For Mexico, 2009 and 2012, the beta coefficients of the market factor are positive according to the two steps GMM and IGMM methods, see Table 7. With the CUE estimator only in 2009 the beta coefficient is positive, see Table 5. In addition, only in 2008, 2009 and 2012 the beta coefficients are statistically different from zero with 95 percent confidence with the two steps GMM method. With the CUE estimator, only 2010 did not show a beta coefficient statistically different from zero. For Chile, in 2008, the beta coefficient is negative in the two steps GMM and the IGMM. Overidentification and weak instruments can be affecting results in the two steps GMM and IGMM.

Table 7 shows the coefficients using two-step estimation during the period under study for IPSA and IRT, as well as market indexes for Mexico and Chile. Notice that 2008 and 2010 have a negative coefficient $E(R \cdot RME)$ for Mexico given that the expected returns were negative. The slope coefficient for Chile was small for those years compared with other years, in which the expected index return became negative. The results suggest that a linear model with IRT can be more appropriate for Mexico than a linear one with IPSA for Chile.

Conclusions and recommendations

The applications show that the stochastic discount factor changed during the previous crisis credit period, in years 2009 and 2010, in the Mexican and Chilean economies. In 2009 the sensitivity to the index became abnormally positive. In 2010, it became abnormally large, although negative.

Using the continuous updating estimator (CUE), the alpha for Mexico and Chile is positive in all years except for 2009, when there are over identification issues. For Mexico and Chile, in all years except for Mexico in 2007 and 2012, the betas are negative, that is, the discount factor is inversely related to IRT factor.

The sizes of the betas are related to the economics and economic policies implemented in the countries. In Mexico and Chile, betas in absolute terms were higher during the recovery period from the credit crisis and during the European crisis and lower during the credit crisis.

The results suggest that using a continuous updating estimator gives more reliable estimates of the linear stochastic discount factor than the two stages or the iterated general method of moments estimators, particularly if instruments are weak.

Bibliografía

- Baum, C. F., M. E. Schaffer and S. Stillman (2007). "Enhanced Routines for Instrumental Variables/Generalized Method of Moments Estimation and Testing". *Stata Journal* 7(4): 465-506.
- Breeden, D. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities". *Journal of Financial Economics* 7: 265-296.
- Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices". *Econometrica*, 53: 363-384.
- Chen, Z. and P. J. Knez (1996). "Portfolio Performance Measurement: Theory and Applications". *Review of Financial Studies* 9: 511-556.
- Epstein, L. and S. Zin (1989). "Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework". *Econometrica* 57(4): 937-968.
- Fama, E. F. and K. R. French (1996). "Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies". *Journal of Finance* 51(1): 55-84.
- Farnsworth, H., W. Ferson, D. Jackson and S. Todd (2002). "Performance Evaluation with Stochastic Discount Factors". *Journal of Business* 75(3): 473-503.
- Hahn, J., J. Hausman and G. Kuersteiner (2004). "Estimation with Weak Instruments: Accuracy of Higher-order Bias and MSE Approximations". *Econometrics Journal* 7: 272-306.
- Hall, A. (1988). "Intertemporal Substitution in Consumption". *Journal of Political Economy* 96: 221-273.
- Hansen, L. and R. Jagannathan (1991). "Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies". *Journal of Political Economy* 99: 225-262.
- _____, y J. Heaton and A. Yaron (1996). "Finite-Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators". *Journal of Business & Economic Statistics* 14(3): 262-280.
- _____, y K. J. Singleton (1982). "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models". *Econometrica* 50: 1269-1286.
- Kosi, E. (2006). "The Stochastic Discount Factor and the Generalized Method of Moments". *Professional Masters Degree in Financial Mathematics, Worcester Polytechnic Institute*.
- Lucas, R. (1978). Asset Pricing in an Exchange Economy. *Econometrica* 46: 1429-1445.

- Márquez de la Cruz, E. (2005). "La Elasticidad de sustitución intertemporal y El consumo duradero: Un análisis para el caso español". *Investigaciones Económicas* 29(3): 455-481.
- _____ (2006). "Consumo duradero, hábitos y Mercado de Valores". *Revista de Economía Aplicada* 14(42): 5-33.
- Nieto, B. and R. Rodríguez (2005). "Modelos de valoración de activos condicionales: Un panorama comparativo". *Investigaciones Económicas* 29(1): 33-71.
- Pozzi, L. (2003). "The Coefficient of Relative Risk Aversion: a Monte Carlo Study Investigating Small Sample Estimator Problems". *Economic Modeling* 20: 923-940.
- Rubinstein, M. (1976). "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options". *Bell Journal of Economics* 7: 407-425.
- Valencia Herrera, H. (2012). *Decomposition of the stocks returns in the Sustainable Index of the Mexican Stock Exchange*. Memorias del XVII Congreso Internacional de investigación. U. FCA. México, D.F., Facultad de Contabilidad y Administración, UNAM, ISBN: 978-607.02-3608-2. 17.
- Weil, P. (1989). "The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle". *Journal of Monetary Economics* 24: 401-421.

Table 1. Mean and standard deviation of the daily market index returns in Mexico and Chile

Country Index	Chile: IPSA		México: IRT	
Year	Mean	Std. Dev.	Mean	Std. Dev.
2007	1.000581	0.012185	1.00062	0.01352
2008	0.999169	0.01848	0.999252	0.022944
2009	1.001694	0.010248	1.00166	0.017061
2010	1.001304	0.007358	1.000819	0.009072
2011	0.999442	0.013889	0.999994	0.01233
2012	1.000136	0.005965	1.000741	0.007104

Daily returns.

Source: Own elaboration

Table 2. Mean and standard deviation of the daily returns in Mexico and Chile

	Mexico		Chile	
Year	Mean	Std. Dev.	Mean	Std. Dev.
2007	1.001546	0.0220236	1.001008	0.0209549
2008	0.9989916	0.036032	0.9987378	0.027021
2009	1.002161	0.0324366	1.002126	0.0274227
2010	1.001043	0.0196362	1.002244	0.0282331
2011	1.000147	0.0228024	0.9997626	0.036385
2012	1.001278	0.0190305	1.000299	0.026818

Based on assets with at least 60 quotes in the year.

Source: Own elaboration

Table 3. Cue estimator, two parameter model

		México			Chile		
2007	ret_me	-21.82258	-3.62	***	-33.32382	-10.12	***
	_cons	0.0031768	5.58	***	0.0031076	12.55	***
2008	ret_me	-26.54003	-6.38	***	-14.78938	-8.56	***
	_cons	0.0067242	4.6	***	0.0014661	4.73	***
2009	ret_me	490.553	2.54	**	-470.0749	-3.45	***
	_cons	-0.0825211	-2.46	**	0.0236357	3.64	***
2010	ret_me	-73.860	-2.81	***	-60.10842	-3.35	***
	_cons	0.0042448	3.43	***	0.0032123	6.57	***
2011	ret_me	-9.780145	-1.97	**	-28.54276	-8.69	***
	_cons	0.0007979	1.73	*	0.0024213	6.32	***
2012	ret_me	-71.010	-2.5	**	-229.3429	-4.87	***
	_cons	0.00293	3.96	***	0.003834	4.46	***

***, **, * statistically significant at the 99%, 95% and 90%.

Source: Own elaboration

Table 4. Hansen overidentification test of all instruments,
CUE estimator, two parameter model

	Mexico		Chile	
	Hansen J statistic	Chi-sq(1) P-val	Hansen J statistic	Chi-sq(1) P-val
2007	3.502	0.0613	3.077	0.0794
2008	1.354	0.2446	3.957	0.0467
2009	5.412	0.02	11.358	0.0008
2010	0.039	0.8439	9.199	0.0024
2011	0.002	0.9683	14.465	0.0001
2012	1.63	0.2018	0.227	0.6339

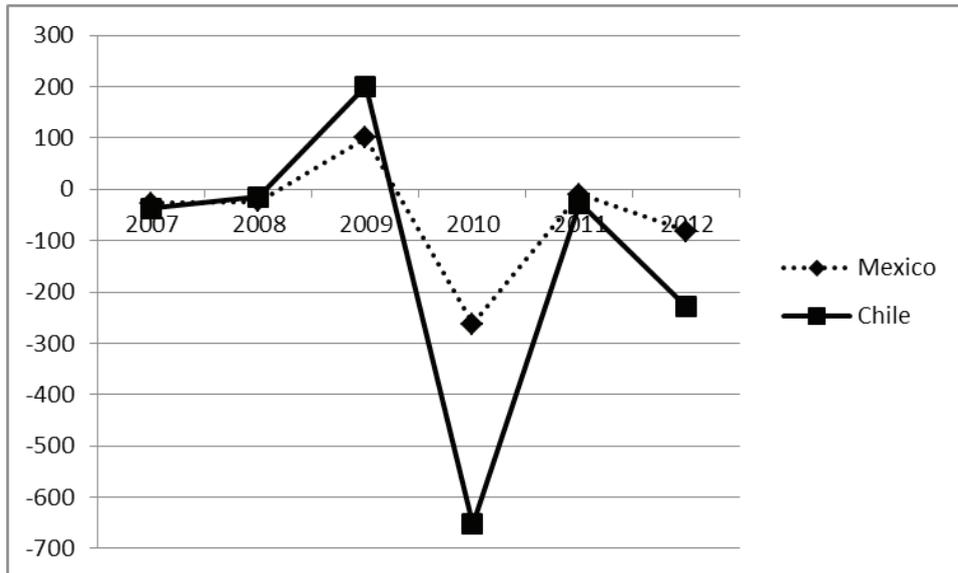
Source: Own elaboration

Table 5. Cue estimator, one parameter model

	Mexico		Chile	
ret_me	Coef.	Z	Coef.	z
2007	-27.027	-3.8 ***	-36.952	-10.24 ***
2008	-23.708	-6.66 ***	-14.622	-8.66 ***
2009	99.838	5.96 ***	200.184	7.67 ***
2010	-263.009	-1.58	-652.440	-3.16 ***
2011	-9.347	-1.99 **	-26.822	-9 ***
2012	-82.225	-2.47 **	-229.048	-4.77 ***

Source: Own elaboration

Figure 1: Stochastic discount factor for Mexico and Chile, one parameter model



Source: Own elaboration

Table 6. Hansen overidentification test of all instruments,
 CUE estimator, one parameter model

	Mexico Hansen J statistic	Chi-sq(1) P-va	Chile Hansen J statistic	Chi-sq(1) P-va
2007	2.587	0.1077	2.084	0.1488
2008	2.78	0.0954	3.55	0.0596
2009	16.538	0	33.819	0
2010	0.597	0.4398	8.045	0.0046
2011	0.006	0.9387	14.865	0.0001
2012	12.744	0.0004	0.6842	0.6842

Source: Own elaboration

 Table 7. Two steps and IGMM estimators for Mexico and Chile,
 one parameter model

	México		Chile	
Two steps	Coef.	Z	Coef.	z
2007	-15.446	-1.22	117.514	6.89 ***
2008	-66.896	-3.37 ***	-78.718	-2.24 **
2009	35.871	2.74 ***	55.959	2.3 **
2010	-5.584	-0.09	187.067	2.47 **
2011	-4.412	-0.24	9.572	0.42
2012	79.108	2.56 **	106.985	0.83
Igmm	Coef.	Z	Coef.	z
2007	-15.646	-1.24	116.922	6.91 ***
2008	-65.927	-3.42 ***	-82.058	-2.28 **
2009	36.088	2.75 ***	60.324	2.42 **
2010	-42.257	-0.67	194.799	2.52 **
2011	-5.030	-0.27	13.211	0.59
2012	78.831	2.55 **	92.930	0.75

The first three lags of the excess market return were used as instruments.

*, **, *** statistically significant at 90, 95 and 99 percent.

Source: Own elaboration

Estimación alternativa de una prima de seguro de gastos médicos mayores bajo el contexto de las opciones financieras

Fernando Gamaliel Hermosillo Ramírez*

Guillermo Sierra Juárez**

Fecha de recepción: 16 de diciembre de 2013

Fecha de aceptación: 14 de mayo de 2014

* Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas (CUCEA)
fhermosillo9@gmail.com

** Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas (CUCEA)
gsierraj@cucea.udg.mx

RESUMEN

El presente trabajo tiene el propósito de estimar de una forma complementaria a la metodología tradicional o actuarial una prima de gastos médicos mayores utilizando la teoría Black-Scholes de opciones financieras. Se proponen cuatro variables independientes de salud como variables subyacentes donde la combinación ponderada de sus primas como opciones financieras tipo *call* europeas determinará la prima total que adicionalmente tendría que sumarse sobre todos los días del año. El equivalente del precio de ejercicio es el límite máximo para no caer en una emergencia de salud recomendados en cada una de las variables. El trabajo presenta limitaciones en su análisis debido a la escasa cantidad de información histórica de las variables de salud y a las simplificaciones para encontrar su solución.¹

Clasificación JEL: F34, G10, G32, G39

Palabras Clave: Merton , Black-Scholes, prima, seguros.

Alternative estimation of major medical expensive prime in the financial options context

ABSTRACT

The present paper intended to estimate on complementary form to the traditional or actuarial methodology the premium of the medical care services but using the financial option theory in Black-Scholes context. We propose four healthy variables as underlying variables which combination and the daily sum of them give us the total premium. The equivalent of exercise price is the limit of good health. This work has limitations because of the shortage of healthy historical information and for reduction form in order to find the possible solution.

JEL Classification: F34, G10, G32, G39.

Keywords: Merton, Black-Scholes, premium, insurances.

¹ En lugar de considerar una opción americana donde el tiempo es un continuo, se considera una suma de opciones europeas diarias que en el límite continuo deberían de converger. La propuesta tiene como objetivo la simplificación y utilización de los datos e información obtenida.

Introducción

El sector asegurador en México ha ido experimentado cambios, principalmente dentro del marco legal a efecto de generar una mayor participación en la economía. Sin duda, el punto más importante que vivió el sector, se dio en la firma del Tratado de Libre Comercio de América del Norte en los años 1993-1994, cuando la penetración del sector asegurador fue de 1.43% (Reyes, 2008). Más recientemente para el año 2011, según datos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF, 2012), dicho índice subió a 1.8%, por lo que se podría decir que no ha habido cambios sustanciales desde esas fechas.

En México operan diversas empresas y diversos ramos de seguros. El presente estudio se enfocará en el ramo de gastos médicos mayores en virtud de que sólo el 5% de la población contaba, hasta el 2010, con un seguro de este tipo, lo cual evidencia la gran oportunidad que tienen las aseguradoras en este ramo. Se debe comentar que el precio de la prima de este tipo de seguros en México opera por encima del promedio que se cobra en América Latina, lo que a su vez es causa de la alta siniestralidad que existe en el país (El Economista, 2010). En esta propuesta se buscará estimar la prima de seguro de gastos médicos mayores utilizando la teoría de las opciones financieras de manera complementaria a la técnica actuarial, para lo cual se utilizará el modelo Black & Scholes (1973). Una de las principales ventajas del modelo es que buscará individualizar la prima de seguro, lo cual es tendencia en las aseguradoras a nivel internacional.

La estructura del trabajo se divide en cinco secciones: la primera consiste de una breve descripción de la industria del seguro en México, posteriormente, la segunda sección se presenta un resumen de la teoría de las opciones financieras. La sección tres consiste en una propuesta de la aplicación del modelo de opciones al sector asegurador. En la parte cuatro se revisa la metodología del modelo propuesto y finalmente en la quinta parte se explican sus resultados y las conclusiones.

1. La industria del seguro en México, el sector de gastos médicos mayores

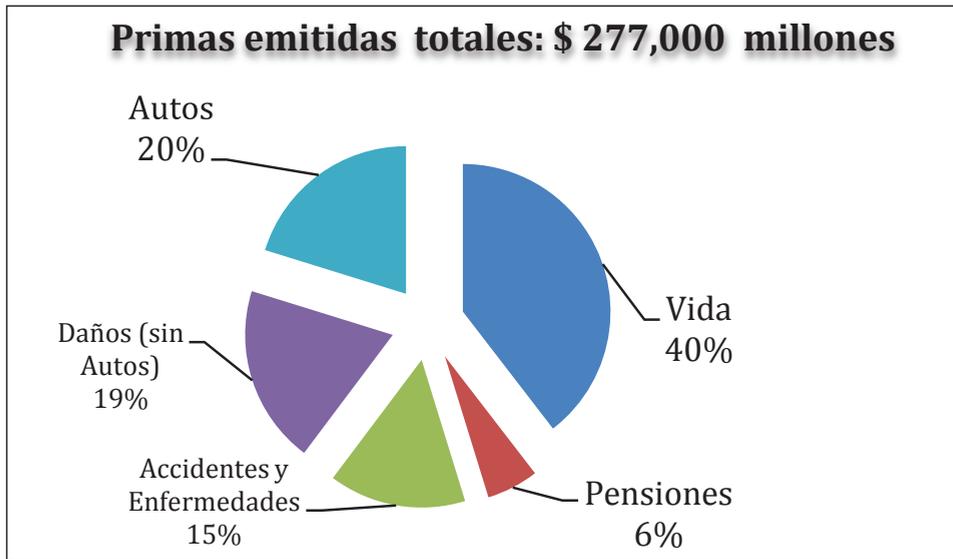
El sector asegurador en México ha mostrado cierto dinamismo en los últimos años, en específico a raíz de la firma del Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN), en el cual se acordó realizar las modificaciones correspondientes al marco legal en materia financiera permitiendo la inversión extranjera en el sector (Ley de Inversión Extranjera, *DOF*, 27 de Diciembre 1993). Si bien, se ha observado cierto crecimiento del sector en los últimos años, éste no ha sido el esperado. Como se mencionó anteriormente el sector asegurador en la economía, pasó de 1.43% en 1993 (Reyes, 2008) a aproximadamente 1.8% en el año 2011 según datos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF, 2012), lo cual evidencia de alguna manera el lento crecimiento del sector. Cabe mencionar, como referencia, que el índice promedio de penetración del sector asegurador en la economía para los miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) es aproximadamente del 8%, incluso en Gran Bretaña la relación es cerca de 15% (OCDE, 2010).

En México las 102 compañías registradas ante la CNSF en el año 2012 operaban en conjunto diversos ramos: responsabilidad civil y riesgos profesionales, terremoto y otros riesgos catastróficos, marítimo y de transporte, obligatorios, de crédito, automóviles y camiones, incendio, agrícola y de animales, de salud, gastos médicos mayores (GMM) y de accidentes personales, fianzas y diversos.

En la Figura 1 se puede observar la participación observada por ramo del sector asegurador en el año 2011, compuesto por 4 ejes principales: Vida, que concentró el 39.6%, daños (sin autos) 19.3%, autos el 20.3%, accidentes y enfermedades 15.1%, y el resto 5.7% corresponde a pensiones. En conjunto, este mismo año el sector asegurador emitió primas por un total de \$276,185 millones de pesos, de las cuales, cerca de \$41, 703 millones corresponden al ramo de gastos médicos mayores (CNSF, 2012).

Se observa que el ramo de GMM tiene una participación importante en la emisión de primas total del sector asegurador mexicano, éste representa una oportunidad de crecimiento importante dado que todo individuo es sujeto de seguro por el hecho de enfrentar el riesgo de accidente y/o enfermedad diariamente. El sector tiene el potencial de ir a la par con la emisión de primas del ramo de vida, incluso superarla. A continuación se hará una breve descripción del sector asegurador a raíz de la firma del TLCAN.

Figura 1. Participación por ramo en el mercado asegurador mexicano en el año 2011



Fuente: Elaboración propia con datos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 2012.

Los acuerdos derivados de la firma del TLCAN en materia financiera benefició en gran medida la entrada de nuevos competidores al sector asegurador en general. Sin duda este acuerdo representa un punto de inflexión en el sector asegurador puesto que hasta su firma operaban en México 38 empresas que ofrecían los distintos tipos de seguros: responsabilidad civil, automóviles, gastos médicos mayores, daños y otros. En la actualidad (Septiembre, 2012), según información proporcionada por la Comisión Nacional de Seguros y de Fianzas, la cantidad de firmas operando en el sector asegurador es de 102, es decir, casi se ha triplicado la cantidad de empresas ofreciendo este tipo de servicios. Del total de 102 firmas aseguradoras, 59 son empresas filiales, mientras que las 43 empresas restantes operan con capital nacional. Lo anterior es reflejo del aumento de inversión extranjera en el sector a raíz de la apertura comercial vía TLCAN. Asimismo, 38 firmas ofrecieron seguros de GMM en el año 2011. Considerando que en el año 2003 operaban este ramo solamente 8 compañías (Minzoni, 2005), se podría deducir que el ramo de GMM ha mostrado gran dinamismo en los últimos años, lo cual podría resultar ilusorio como se presentará más adelante; esto es, la oferta de este tipo de servicios se ha incrementado, no así la demanda por los mismos.

La operación de accidentes y enfermedades está integrado por 3 subramos: gastos médicos mayores (GMM), accidentes personales y salud; donde el 89% de la emisión de primas se concentra en GMM. El objetivo principal del seguro de GMM consiste en satisfacer la necesidad económica de resarcir los gastos por conceptos de servicio de salud no previstos, que por su severidad pudieran crear en la familia o al individuo dificultades económicas (Mejía, 1993). El ramo de GMM está dominado por 5 empresas aseguradoras, puesto que a finales del año 2011 de las 38 firmas participantes en la emisión de primas, estas empresas aseguradoras controlaron alrededor del 68% del mercado total: Grupo Nacional Provincial, S.A.B., Metlife México, S.A., AXA Seguros, S.A de C.V., Seguros Monterrey New York Life, S.A de C.V., y Seguros Inbursa S.A. Para determinar el índice de concentración de mercado se calculó el índice Herfindahl en función de la emisión de primas con datos obtenidos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Si bien, los seguros de GMM han mostrado un crecimiento importante en los últimos años, aún existe una oportunidad de crecimiento importante dado que solamente el 5% de la población contaba, hasta el año 2010, con un seguro de GMM según datos consultados en la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos en los Hogares (ENIGH, 2010), esto es, solamente 6.3 millones de mexicanos contaron con un seguro de GMM. En este sentido, se enfatiza el potencial de crecimiento de este ramo de seguros dado que todo individuo, al tener probabilidades de adquirir enfermedades, y con ello, necesidad de resarcir gastos derivados de éstas, se vuelve sujeto de seguro de GMM.

La emisión de primas por parte del ramo de GMM ha mostrado una tendencia creciente en el tiempo, sin embargo, el crecimiento no ha sido el esperado por diversos factores. Uno de los factores que inhiben la demanda del seguro de GMM en México es su precio relativamente alto en comparación con los demás países de América Latina, las primas resultan, según un estudio realizado por *Health Digital System*, hasta 40% más caras debido a la alta siniestralidad e incertidumbre en el control de riesgos, así como por el aislamiento entre las aseguradoras y los prestadores de servicios médicos que hace más vulnerable al sector en cuanto a intentos de fraude. Se identifican 2 tipos de fraude principalmente: el realizado por el asegurado y el que realizan los prestadores de servicios médicos solicitando exámenes de laboratorio, tomografías o análisis innecesarios para cobrar más al seguro (El Economista, 2010). La siniestralidad es un problema dada la incidencia que tiene en la determinación del precio del seguro, la cual se realiza por los actuarios utilizando la ley de los grandes números mediante la técnica actuarial.

En términos de seguros de GMM la siniestralidad se estima, *grosso modo*, del cociente de la suma de los gastos erogados por la compañía de seguros por concepto de pago de hospital, de consultas médicas, de estudios médicos, de medicamento y otros, para el total de pólizas de GMM; con el total de primas emitidas por la compañía en este tipo de póliza. En la Tabla 1 se ilustra el comportamiento que tuvo la siniestralidad en el ramo de GMM para el periodo 2000 – 2011, lo anterior con datos obtenidos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Tabla 1. Comportamiento de la siniestralidad en México 2000-2011

Año	Prima emitida*	Costo total de siniestros	Incremento anual primas emitidas	Incremento anual del costo siniestralidad	Siniestralidad
2000	\$ 7,797	\$ 5,363	–	–	69%
2001	\$ 9,621	\$ 6,648	23%	24%	69%
2002	\$ 11,173	\$ 7,273	16%	9%	65%
2003	\$ 12,939	\$ 8,846	16%	22%	68%
2004	\$ 15,169	\$ 10,546	17%	19%	70%
2005	\$ 17,750	\$ 12,455	17%	18%	70%
2006	\$ 20,502	\$ 14,534	16%	17%	71%
2007	\$ 24,446	\$ 16,341	19%	12%	67%
2008	\$ 27,955	\$ 18,487	14%	13%	66%
2009	\$ 30,389	\$ 21,864	9%	18%	72%
2010	\$ 32,707	\$ 23,242	8%	6%	71%
2011	\$ 36,371	\$ 25,891	11%	11%	71%

* Cantidades expresadas en millones de pesos

Fuente: Elaboración propia con datos de la CNSF (2012).²

En la Tabla 1 se observa claramente que tanto el total de primas emitidas, como el costo total de la siniestralidad han ido aumentando con el tiempo, si bien los incrementos de la prima emitida son considerables, este avance se ve disminuido con el incremento que registra el costo de siniestralidad en el mismo periodo. Lo anterior se ve reflejando en la siniestralidad que lejos de disminuir ha ido aumentando. Lo anterior justifica de alguna manera el aumento que se da año con año de la prima de seguro de GMM puesto que el costo de la siniestralidad tiene una ponderación importante al momento de

² Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF).

determinar la prima de seguro utilizando la técnica actuarial. Así pues, la prima de riesgo de este tipo de seguros aumenta casi proporcionalmente ante aumentos en el costo de la siniestralidad.

Seguridad Social

Por otra parte, según la evaluación de riesgos de salud realizada por el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) efectuado por la Coordinación de Administración de Riesgos Institucionales, mediante el Programa de Administración de Riesgos Institucionales (PARI) en el año 2010, existen ciertas enfermedades en la categoría de alto impacto financiero proyectado al año 2050 (ver anexo 1):

1. Diabetes Mellitus (DM).
2. Insuficiencia Renal (IR).
3. Hipertensión Arterial (HA).
4. Cáncer Cérvico-uterino (CaCu).
5. Cáncer de Mama (CaMa).
6. Infección por el Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida y su manifestación (VIH/SIDA).
7. Enfermedades de Atesoramiento Lisosomal (EAL).

La proyección de costos que realizó el PARI (2010) se fundamentó en 4 líneas de análisis para cada padecimiento:

1. Las tasas de incidencia y prevalencia.
2. La sobrevivencia de los pacientes mediante la estimación de las tasas de mortalidad obtenidas a partir de la información del Sistema Nacional de Información en Salud (SINAIS).
3. Los registros de egresos hospitalarios por institución obtenidos del SINAIS y de los resultados preliminares del Sistema de Costeo por Grupo Relacionados con el Diagnóstico (GRD).
4. Las guías clínicas y Normas Oficiales Mexicanas (NOM) con las que se identificaron y costearon los tratamientos médicos y auxiliares de diagnóstico.

Las proyecciones del gasto médico de los padecimientos que se consideran en el PARI se realizaron considerando 2 escenarios de evolución futura (ver anexo 2):

- a) Un escenario base, que se fundamenta en el supuesto de que tanto las acciones preventivas, como los avances médicos y tecnológicos contribuirán a disminuir las tasas de morbilidad de cada padecimiento.
- b) Un escenario inercial, en el que se asume que ninguno de las acciones ni avances descritos en el escenario base impactarán de manera significativa en las tasas de morbilidad, razón por la cual éstas se mantendrán constantes a lo largo del periodo de proyección.

Adicionalmente, para realizar las proyecciones del gasto bajo las premisas de los dos escenarios, se asumió que los gastos médicos se incrementan a una tasa anual real de 2.37%.

En la actualidad, las compañías de seguros en México determinan la prima del seguro de gastos médicos mayores de forma tradicional, mediante técnicas actuariales en función de la siniestralidad del año inmediatamente anterior, así como del nivel de riesgo de padecer un accidente y/o una enfermedad; esto es, se determina la prima a pagar por el servicio de GMM. La aplicación de instrumentos derivados, en este caso, el modelo Black-Scholes (1973) y las opciones financieras para determinar de manera complementaria o paralela, la prima de riesgo en seguros se ha utilizado ya en algunas partes del mundo, sin embargo, la literatura al respecto es escasa, incluso en México es prácticamente inexistente. Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo se limita a desarrollar una forma alternativa de valuación de la prima de riesgos para los seguros de gastos médicos mayores a partir de la teoría de valuación de opciones financieras, para ello, como primer paso, en la siguiente sección se hará una breve reseña de las opciones financieras.

2. Las opciones financieras

Los contratos de opciones financieras se han usado desde el siglo XVII con tulipanes en Holanda. Los comerciantes de tulipanes compraban opciones de compra (*call options*) cuando querían asegurarse de que podrían incrementar sus inventarios si los precios subían. Estas opciones daban al comprador el derecho pero no la obligación de comprar tulipanes a un precio preestablecido. Otros buscaban protección si los precios bajaban mediante

la compra de opciones de venta (*put option*), que daban el derecho pero no la obligación de vender tulipanes a un precio previamente acordado. Los vendedores de las opciones de tulipanes asumían sus riesgos a cambio de quedarse con una prima pagada por los compradores de estas opciones. Los contratos de opciones se diseñaron para que el comprador de la opción se beneficie de los movimientos del mercado en una dirección, pero no sufra pérdidas como consecuencia de movimientos del mercado en la otra dirección (De Lara, 2003).

Una opción es un contrato que le da al tenedor o comprador el derecho, más no la obligación, de comprar o vender alguna acción o valor en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido. De esta forma, por el derecho que otorga la opción al comprador de la misma, existen dos tipos: opciones de compra (*call option*) y opciones de venta (*put option*). Una opción de compra le da al tenedor el derecho, mas no la obligación, de comprar un valor hasta una fecha predeterminada y a un precio preestablecido. Por otra parte, una opción de venta le da al tenedor el derecho, mas no la obligación, de vender un valor hasta una fecha predeterminada y a un cierto precio preestablecido (Díaz, 2000).

Por su duración, las opciones se dividen en opciones americanas y opciones europeas. Las opciones europeas son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento; mientras que las opciones americanas son aquellas que se pueden ejercer durante la vida de la opción, en cualquier momento antes de la expiración (Díaz, 2000). Para analizar una opción americana hay que tener en mente que ésta puede ser ejercida antes de expirar, lo que lleva a resolver problemas de frontera libre. Al evaluar opciones americanas, no se conoce *a priori* dónde se aplican las condiciones de frontera, es decir, el tiempo óptimo, al que se ejerce la opción (Elizondo, R., Padilla P., y Bladt, M., 2009).

Si se considera la volatilidad inherente a los mercados bursátiles es razonable pensar que algún inversionista pueda querer tomar ventaja de algún movimiento fuerte del precio del activo subyacente: reclamando el flujo asociado al producto derivado inmediatamente sin tener que esperar a la terminación del contrato, corriendo el riesgo de que un movimiento adverso lo prive de las ganancias que podría obtener en ese momento. Por supuesto una opción americana ofrece las mismas ventajas, y quizá más que las ofrecidas por una opción de tipo europeo. Por ello, la opción americana deberá valer por lo menos lo mismo que su contraparte europea. Valuar una opción de tipo americano representa una dificultad poco trivial pues no

sabemos en qué momento del tiempo se ejercerá la opción y se generará un flujo de efectivo para el inversionista, el tiempo de ejercicio t es aleatorio.

Por otro lado, la teoría de la valuación de opciones ha revolucionado la teoría financiera moderna (Pérez y Lamothe, 2006). Estos autores distinguen al menos cinco modalidades de opciones: opciones sobre acciones, opciones sobre divisas, sobre tipos de interés y/o instrumentos de deuda, sobre índices bursátiles y derivados de riesgo crediticio.

El modelo Black-Scholes (1973) fue desarrollado por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton, este modelo propone una forma consistente para la estimación de precios de opciones sobre acciones. Posteriormente, Merton analizó la valuación de derivados suponiendo procesos estocásticos más complejos para el precio del activo subyacente, tales como discontinuidades. Este modelo ha tenido una gran influencia en la manera en que se determina el precio de las opciones, así como en sus coberturas. Asimismo, fue esencial en el crecimiento y éxito de la ingeniería financiera en 1980's y 1990's (Hull, 2003). El desarrollo de esta teoría les valió a Scholes y a Merton el premio Nobel de Economía en 1997 (Fernández, 1999).

La idea básica subyacente al modelo Black-Scholes (1973) es que mediante ciertas propiedades del mercado, cualquier opción sobre un activo financiero puede ser replicada, es decir, se puede hallar una estrategia de inversiones tal que la cartera correspondiente generará el mismo flujo de retornos que la opción. Si las condiciones del mercado son tales que las oportunidades de arbitraje están excluidas, entonces el precio de la opción y el precio de la cartera replicante deben ser iguales. Puede decirse que la contribución fundamental de Black, Scholes y Merton fue la de descubrir como asignarle un precio al riesgo (González, 1999).

- El modelo Black & Scholes (1973) asume que el comportamiento de los precios sigue una distribución *log normal* y muestra cómo formar una posición de cobertura con un portafolio que contenga el subyacente (posición larga) y una posición corta de opciones. Mediante argumentos de arbitraje determinan una ecuación diferencial parcial de segundo orden cuya solución representa el precio de la opción. Este modelo es sólo aplicable a opciones europeas. A continuación se presenta la expresión para la valuación de opciones de compra *Call* (De Lara, 2003):

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (2a)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (2b)$$

Donde;

S = valor del bien subyacente

K = precio del ejercicio de la opción

r = tasa libre de riesgo

t = periodo de la opción

σ = volatilidad del bien subyacente

$N(d_1)$ y $N(d_2)$ = valores que corresponden a la curva de distribución normal acumulada (el área bajo la curva).

Por otra parte los supuestos del modelo Black-Scholes (De Lara, 2003):

- La tasa libre de riesgos de corto plazo es conocida y es constante durante la vida de la opción.
- El precio del valor subyacente se comporta de acuerdo con una caminata aleatoria (*random walk*) en tiempo continuo y la distribución de posibles valores de dicho precio es *log normal*. La varianza de rendimientos del valor subyacente es constante durante el periodo de la opción.
- No se considera el pago de dividendos si el valor subyacente es una opción o el pago de intereses si dicho subyacente es un bono.
- La opción es “europea”, es decir, sólo se ejerce al vencimiento de la opción.
- Es posible pedir prestado una parte del valor subyacente para comprarlo o mantenerlo, a una tasa de interés libre de riesgo de corto plazo.
- No hay costos de transacción en la compra o venta del subyacente o la opción.

3. Antecedentes de opciones financieras en el sector asegurador

Las opciones financieras se han utilizado en el sector asegurador principalmente para proteger el patrimonio. Para cumplir con el objetivo, las entida-

des deben cubrirse adecuadamente ante sus riesgos, tanto los riesgos generales de cualquier empresa (entorno general), como los riesgos propios de su actividad (entorno específico), destacando especialmente el riesgo de suscripción derivado de las pólizas de seguros y el riesgo de inversión derivado de su cartera de activos. De la misma forma, dentro de la gestión del riesgo de las compañías aseguradoras, cabe destacar las soluciones dadas por los reaseguradores, ofreciendo coberturas de reaseguro flexibles y mejores para proteger sus resultados operativos contra peligros y riesgos financieros inherentes al negocio de seguros (Rivas, 2002).

Chicaíza y Cabedo (2007) utilizaron las opciones financieras como mecanismo para estimar las primas de seguro y reaseguro en el sistema de salud colombiano, buscando demostrar que la cobertura proporcionada por las operaciones de reaseguro de enfermedades de alto costo en el sistema de salud colombiano puede ser duplicada a través de la adquisición de opciones y que la teoría devaluación de opciones puede ser utilizada para la estimación del valor de las primas y de reaseguro. En general, las opciones y los seguros tienen cuatro elementos comunes: riesgo, prima, indemnización y plazo.

Estos autores utilizaron los derivados financieros como una alternativa al tradicional reaseguro, que se da cuando compañías reaseguradoras adquieren el riesgo tomado por las compañías aseguradoras, en este caso en el sector de salud colombiano. Lo anterior dada la existencia de enfermedades catastróficas que disparan el costo de siniestralidad para las empresas aseguradoras. Para este caso, se tomó como activo subyacente el costo medio de la siniestralidad por paciente (C_{cn}) en unidades monetarias, con la cual la firma de aseguramiento compra una opción de compra (call) para no tener que soportar un costo medio por paciente superior a C_{cn} . El vendedor, en este caso sería el reasegurador con un precio de ejercicio igual a C_{scn} . Por la compra de esta *call*, la firma pagará una prima igual a Pr .

En ese caso la estimación del valor de las primas que se ilustra en las ecuaciones 1, 2a y 2b quedaría de la siguiente manera:

$$Pr = C_{cn}N(d_1) - C_{scn}e^{-rt}N(d_2) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{C_{scn}}\right) + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (4a)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (4b)$$

En este caso, C_{cn} representaría el costo medio de la siniestralidad por paciente en unidades monetarias, mientras que C_{scn} haría referencia al costo medio de la siniestralidad al cual se dispara la siniestralidad afectando la rentabilidad de la aseguradora, C sería la Pr (prima). Así, la prima del seguro estaría determinada en función del costo medio de la siniestralidad. Las variables $N(d_1)$ y $N(d_2)$ son las funciones de distribución de probabilidad para variables estandarizadas.

Así pues, Chicaíza y Cabedo (2007) concluyeron que existe un claro paralelismo entre una opción *call* y una operación de reaseguro de enfermedades de alto costo financiero. Por ello, para una población homogénea, la prima que se va a pagar por la opción y la prima que se va a pagar por el reaseguro deben ser equivalentes. En otras palabras, la determinación de la prima que se va a pagar por el reaseguro puede realizarse a partir de la teoría de valuación de opciones.

En otro artículo, Pozo (2004) desarrolla un modelo de valuación de opciones aplicado a la valoración de una empresa aseguradora. Para ello, comienza con la aplicación a una empresa aseguradora utilizando el valor del capital de la firma (V_e), el cual es igual al valor de sus activos (A) menos el valor de sus obligaciones (L). Suponiendo que al final del periodo la compañía se liquida, los accionistas recibirán la diferencia entre los activos y las obligaciones (si A es mayor que L), o nada (si A es menor que L). Esta relación se puede expresar de la siguiente manera:

$$V_e = \max[A - L, 0] \quad (5)$$

Este valor al final del periodo es lo mismo que la liquidación de una opción de compra (*call*) europea, donde el valor de los activos es el valor del subyacente (A), y el valor de las obligaciones es el precio de ejercicio (L). Por tanto, los acreedores recibirán el valor de sus siniestros (L) si el valor de los activos supera al de las obligaciones, o el valor de los activos (A) si los activos de la compañía son menores que las obligaciones al final del periodo. El valor al final del periodo de los siniestros pendientes (VL) puede escribirse de la siguiente forma:

$$V_L = \min[L, A] \quad (6)$$

Los acreedores tienen suscrita la venta de una opción de venta (*put*), cuyo valor máximo es el valor de sus siniestros (L) si el valor de los activos (A) es mayor o igual a (L) cuyo valor mínimo es cero si los activos carecen de valor al final del periodo.

En este mismo artículo, Pozo (2004) utiliza la valuación de opciones aplicado a un contrato de seguros dado que el contrato de seguro es otro activo financiero que tiene características de una opción. En este caso, se supone que una compañía de seguros suscribe en un único periodo pólizas con una prima (P) con una franquicia de cuantía (B), y tiene una siniestralidad desconocida pero que se estima en una cuantía (L). Ignorando el valor del dinero para simplificar, el valor de la póliza al final del periodo asegurado (V_p) se podría escribir de la siguiente forma:

$$V_p = \min[P, P - (L - B)], \text{ o bien, } \min[P, P - L + B] \quad (7)$$

En este caso el asegurador obtendría la prima neta si no existe siniestralidad o si la siniestralidad no excede a la franquicia. Si la siniestralidad fuera mayor que la franquicia, el ingreso del asegurador se reduciría por la diferencia entre la siniestralidad y la franquicia. Así, la ecuación anterior, es muy similar a la liquidación de una opción de compra (*call*) europea, (el asegurador es vendedor de la *call*). El asegurador, en efecto, ha vendido una opción de compra europea con precio de ejercicio la franquicia. En este caso, el asegurado es comprador o propietario de una opción de compra europea. El valor del siniestro asegurado (V_h) se puede escribir:

$$V_h = \max[L - B - P, -P]. \quad (8)$$

Esto puede ser utilizado para determinar el rendimiento de equilibrio en la valuación del seguro empleando la estructura de valuación de opciones.

Hasta aquí se puede observar que existen diferentes formas en que se pueden utilizar las opciones financieras en el sector asegurador, ya sea para cubrir los riesgos como el caso colombiano, o bien para determinar el valor de contratos de seguros. El objetivo del presente trabajo es determinar la prima de seguro de GMM utilizando el modelo Black & Scholes (1973), el cual se comenzará a describir en el siguiente apartado.

4. Planteamiento y valuación del Modelo Black & Scholes para estimar la prima de seguro de gastos médicos

En la modelación de opciones financieras existen varios supuestos financieros y matemáticos, mencionados previamente. Uno importante, es el referente al comportamiento del activo subyacente como un tipo particular de proceso estocástico denominado “movimiento geométrico browniano”. En el presente trabajo el equivalente de un subyacente financiero son los cuatro indicadores de salud (se supone que se comportan cada uno como movimiento geométrico browniano) y que ponen alertas sobre la posible presencia de riesgos de enfermedades presión arterial (PA sistólica, diastólica), índice de masa corporal (IMC), frecuencia cardiaca (FC)), por ejemplo: el nivel de presión arterial repercute en la posibilidad de padecer hipertensión arterial, para este caso se supone que el comportamiento de la variable tensión arterial fungiría como un proceso estocástico que sería el activo subyacente. Al final se considera un equivalente de portafolio de índices de salud subyacentes de los cuatro índices mencionados en función de las variables y los datos del Programa de Administración de Riesgos Institucionales (PARI, 2010) antes descrito.

Por otra parte, el planteamiento puede realizarse tanto con opciones europeas como con opciones americanas, si bien, en el problema propuesto las primeras se acercarán más a una descripción real, debido a la falta de información empírica y a la dificultad técnica (al considerar un portafolio de cuatro activos con evolución continua en el tiempo) se simplifica el planteamiento y se selecciona para el análisis de la prima una suma de opciones europeas a lo largo de un año (incluso es más cercana a una opción bermuda).

Debe mencionarse que no existe un mercado para este tipo de opciones y las variables financieras no son monetarias, sino de salud, por lo que habrá que encontrar un factor de calibración para transformar la variable de salud a una variable financiera.

Para recabar las series de datos que corresponden a las variables que se utilizarán como activo subyacente se acudió a las oficinas del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), al área de enseñanza, cuyo objetivo era obtener la información médica (expediente), al menos, de 4 pacientes. Tal información, se pretendía tuviera las siguientes características:

- El expediente donde se pudiera observar el registro (mensual, semestral, o anual) de algunas de las variables elegidas (presión arterial (PA), índice de masa corporal (IMC), frecuencia cardiaca (FC)) lo anterior, estaría en

función de la enfermedad que contrajo el paciente a la postre y por la que seguramente es atendido.

- Que el expediente abarcara el antes, y el después de que el paciente contrajo alguna enfermedad. Lo anterior a efecto de poder determinar el momento en que se podría o no ejercer la opción. En realidad la edad del paciente no era importante, siempre y cuando pudiéramos obtener en el expediente el antes y el después.
- Que la observación abarcara al menos 10 años, siempre y cuando registrara el antes y después de que se contrajo algún padecimiento.

Las características buscadas se podrían obtener de los registros que llevan las aseguradoras de sus clientes de pólizas de vida, lo anterior porque ellas mismas solicitan exámenes generales de manera anual a sus asegurados con suma asegurada más elevada a efecto de reducir el riesgo del contrato de póliza. Sin embargo, por medio de aseguradoras no se pudo conseguir la información completa por razones de confidencialidad.

Debido a lo anterior, sólo fue posible obtener información del IMSS para personas en observación médica con registro de tensión arterial diastólica y sistólica, frecuencia cardiaca e índice de masa corporal de 4 pacientes femeninos con edad mayor a 60 años: 2 pacientes con diabetes mellitus y 2 pacientes con hipertensión arterial. Los expedientes abarcan un periodo de Febrero del 2004 a Octubre del 2012. Como se mencionó anteriormente, el portafolio de riesgos de salud estará formado por 4 equivalentes de activos subyacentes: Presión arterial sistólica, presión arterial diastólica, índice de masa corporal y frecuencia cardiaca.

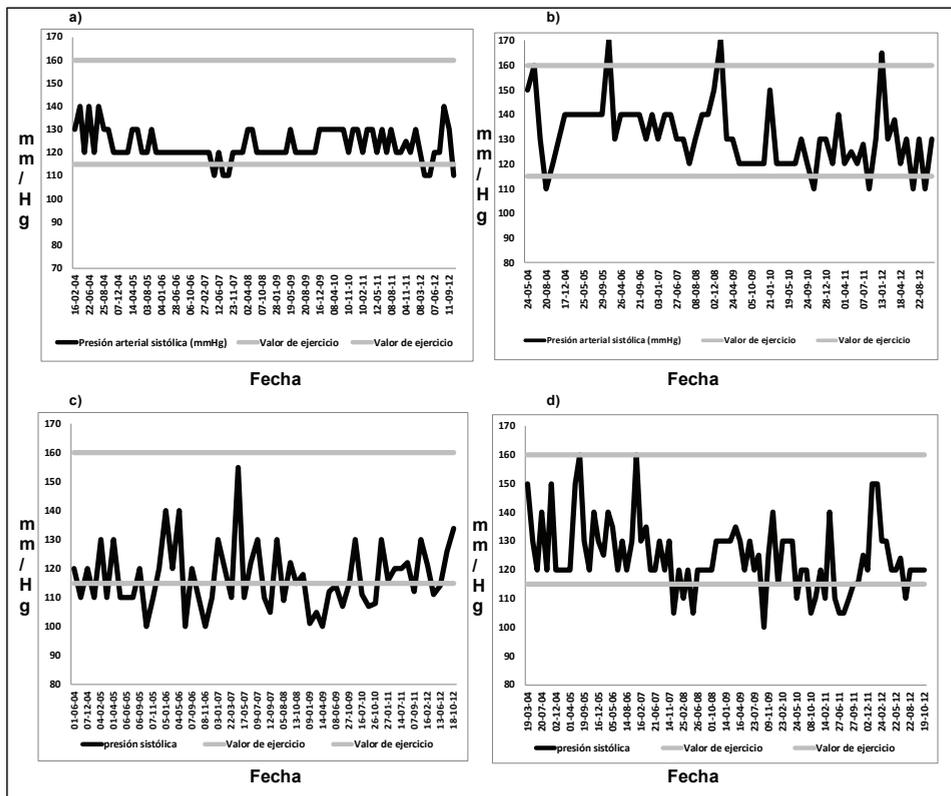
Para el caso de los datos que se utilizarían como precios de ejercicio de la opción, se buscaron datos en distintas fuentes acreditadas como la Organización Mundial de la Salud. Se encontró que el nivel promedio recomendable de presión arterial por rango de edad, así como del IMC según peso y estatura, y de la frecuencia cardiaca. Para el caso de la presión arterial sistólica se utilizó un valor de 160 mm/Hg, para la presión diastólica 100 mm/Hg, para el IMC un valor de 30 kg/m² y para el caso de la frecuencia cardiaca se tomó un valor de 100 latidos/min. Los límites anteriores establecidos funcionarán de forma equivalente del precio de ejercicio de las variables de salud, debido a que cuando se sobrepasan estos límites de índices de salud es cuando mayores posibilidades se tiene de poder enfermarse para cada uno de los cuatro casos. Finalmente, se tomará la tasa de interés (r) de 4.80%, a partir de la tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIIE) a 26 semanas o 182 días, que

corresponde a los resultados presentados en la sesión del día 5 de Enero de 2013 del Banco de México (Banxico), el plazo (t) a utilizar va desde un día a 1 año puesto que es la duración de una póliza o contrato de seguros de gastos médicos mayores, como se mencionó, se van sumando las opciones europeas para cada día.

Una vez obtenida la información de los activos subyacentes, se procedió a graficar el comportamiento que tuvo cada uno de ellos en el periodo total, las gráficas anuales de los 4 índices de salud subyacentes, para los 4 pacientes se muestran y describen en las siguientes gráficas:

De la Figura 2, las gráficas “a” y “b” corresponden a los pacientes diabéticos, mientras que las gráficas “c” y “d” corresponden a los pacientes hipertensos. En esta figura se puede observar que salvo en el paciente “a”, los

Figura 2. Comportamiento de la presión arterial sistólica 2004 – 2012



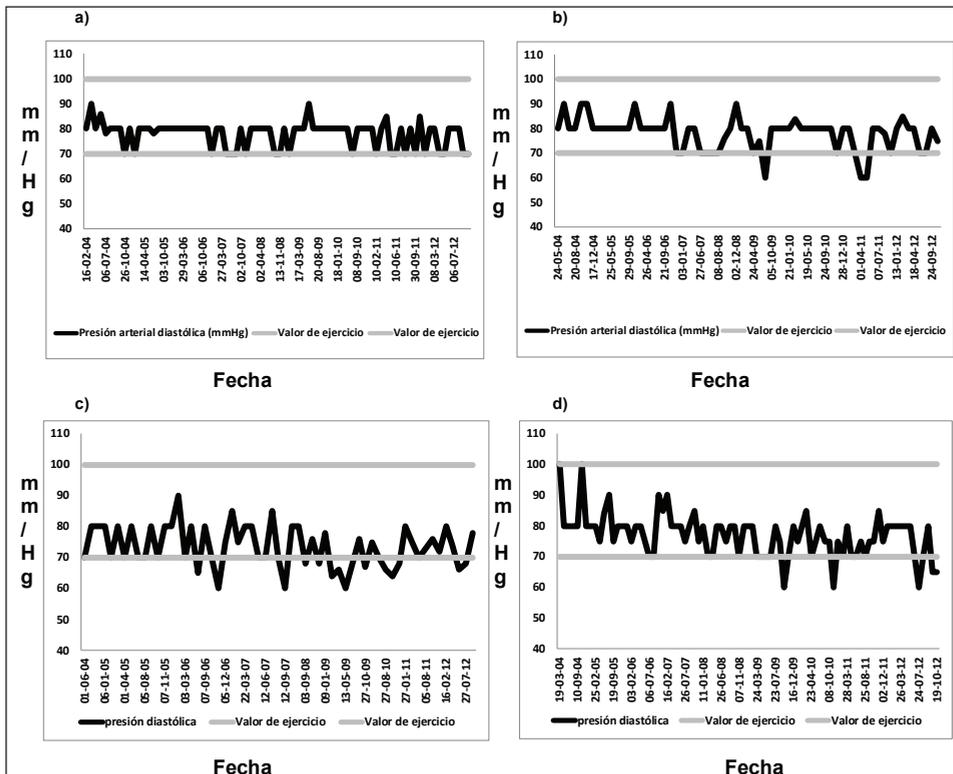
Fuente: Elaboración propia.

pacientes “b”, “c” y “d” registraron cierta dispersión en sus valores de presión arterial sistólica, incluso los pacientes hipertensos “c” y “d” llegaron a registrar niveles fuera del rango (115 – 160) durante varios periodos, lo cual implica una volatilidad alta.

En la Figura 3 se presentan el conjunto de gráficas de los mismos pacientes pero respecto a sus niveles de presión arterial diastólica. En ellas se observa que los pacientes diabéticos “a” y “b” mantienen cierta estabilidad en sus registros, pues se encuentran relativamente dentro del rango, mientras que los pacientes “c” y “d” registra mayores altibajos en sus valores, aunque no son tan volátiles como en el caso de la presión arterial sistólica.

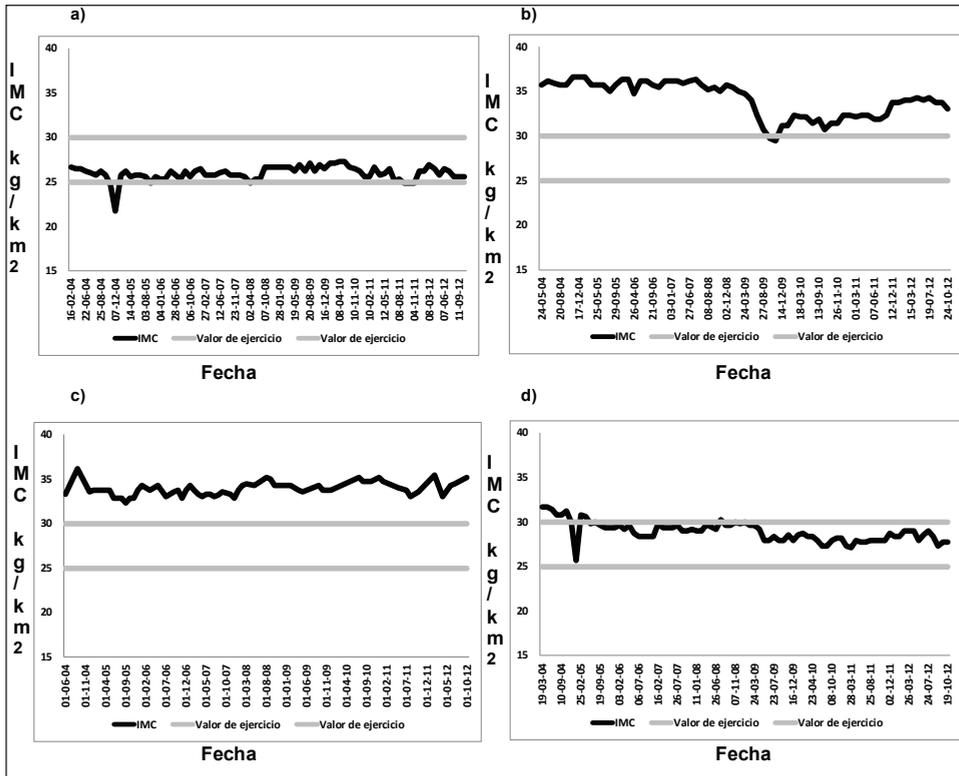
Asimismo, la Figura 4 representa un conjunto de gráficas que muestran los niveles registrados de índice de masa corporal (IMC) para los mismos 4

Figura 3. Comportamiento de la presión arterial diastólica 2004-2012



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en las oficinas del IMSS.

Figura 4. Comportamiento del IMC 2004-2012



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en las oficinas del IMSS.

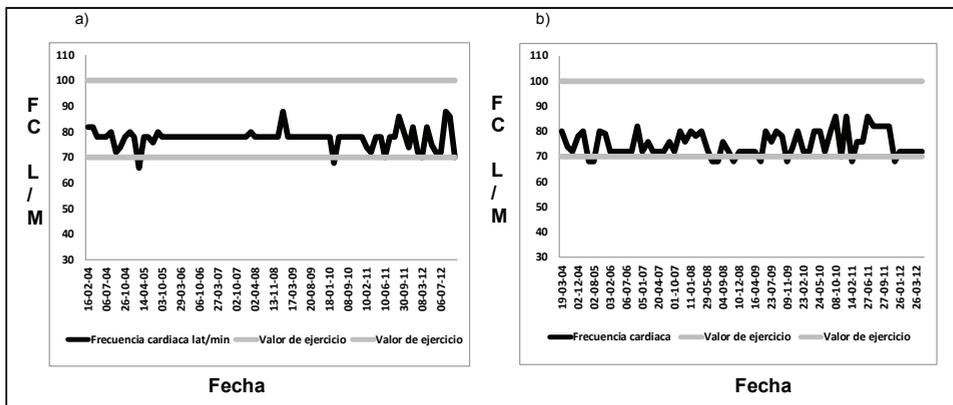
pacientes y en el mismo periodo de tiempo 2004 – 2012. Cabe mencionar que para este indicador se pueden tomar diversos valores como el equivalente del precio de ejercicio tal como el grado de obesidad. Sin embargo, para efectos del presente se tomó el valor 30 (obesidad) como precio de ejercicio en el modelo, por ello es que los casos del diabético “b” y el hipertenso “c”, los niveles registrados de IMC están fuera del rango o valor crítico de 30 kg/m²; es decir, se encuentran en niveles de obesidad tipo I y tipo II. Para efectos de uniformidad y entendiéndose que a partir de un nivel de IMC equivalente a 30 kg/m² aumentan las probabilidades de contraer alguna de las enfermedades relacionadas con esta variable, o acentuar las ya existentes, es que se determinó utilizar como valor crítico a partir de 30 kg/m².

Si bien, se puede observar poca dispersión en los valores registrados para todos los pacientes, se observan algunos picos en el paciente “a” y “d”,

por lo demás sólo se puede observar cierta tendencia a la baja para todos los pacientes, lo cual es entendible puesto que están bajo control médico.

Finalmente, en la Figura 5 que muestran sólo 2 gráficas puesto que sólo 2 de los 4 pacientes tuvieron registro de frecuencia cardiaca en el periodo 2004-2012, se observa un comportamiento de frecuencia cardiaca dentro del rango permitido, incluso el paciente hipertenso “d” tuvo registros dentro del rango, no obstante en periodos estuvo rozando el límite inferior. En ambas series se puede observar poca dispersión en sus valores, sobre todo en la correspondiente al paciente diabético “a”, que por periodos registró un valor constante de 80 lat/min.

Figura 5. Comportamiento de la frecuencia cardiaca 2004-2012



Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos en las oficinas del IMSS.

Hasta aquí sólo se ha hecho el análisis gráfico de cada uno de los valores de los activos subyacentes de cada expediente del periodo 2004 – 2012, visualmente se aprecia que dependiendo del índice y del paciente puede observar se mayor o menor volatilidad. Parecería que sí siguen una caminata aleatoria.

En el siguiente apartado se determinará las series de cambios porcentuales que serían los equivalentes de los rendimientos financieros para cada uno de los índices, con el objeto de obtener las volatilidades que se utilizarán en el modelo, asimismo, se realizará un análisis gráfico de estas series elaborando un histograma para cada una de ellas.

La volatilidad es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como cambio porcentual o “rendimiento” a las variaciones del índice original (en este caso son: mm Hg, kg/m², y lat/min). Es un indicador importante puesto que guarda una relación directa con la prima de riesgo.

Para calcular la volatilidad diaria sólo se multiplicó la volatilidad anual que ya tenemos por $\sqrt{\frac{t}{360}}$ donde, t va de 1 a 360. Una vez calculada la *call* diaria, como se acaba de mencionar, se procedió a sumar todas para cada activo subyacente.

Para el periodo 2004 - 2012, se procedió a calcular el equivalente del rendimiento o cambio porcentual en la serie de salud a partir de la fórmula descrita a continuación:

$$\Delta = \frac{V_f - V_i}{V_i} \quad (9)$$

donde

Δ = rendimiento del activo subyacente

V_f = valor final del activo subyacente

V_i = valor inicial del activo subyacente

De las series generadas de rendimientos o cambios porcentuales para cada índice de salud subyacente se determinó la volatilidad para utilizar posteriormente en el modelo Black & Scholes (1973), para cada serie de manera individual y para cada paciente. Asimismo, se elaboraron unas gráficas de frecuencias o histogramas de cada una de estas series a efecto de observar si los valores de las series tienen un comportamiento normal o *log normal*. Las gráficas se pueden consultar en el apéndice (anexo 3).

Resumiendo, a partir de las series de salud PA sistólica, PA diastólica, IMC y FC tomadas como subyacentes, se calcula una serie de cambios porcentuales que nos ayudarán a estimar las volatilidades de cada variable. Debe mencionarse que a partir de las gráficas de los histogramas de los pacientes y de las series de salud se toma como supuesto para el planteamiento y solución del modelo que el comportamiento de los índices siguen un proceso estocástico conocido como un movimiento geométrico browniano y la volatilidad es constante en los distintos casos.

Considerando los supuestos anteriores y suponiendo que la prima de GMM se puede modelar como una suma en un año de portafolios de cuatro opciones europeas compuesta por los subyacentes de los cuatro índices, el

siguiente paso es calcular los valores d_2 y d_1 (ecuaciones) para calcular el $N(d_1)$ y $N(d_2)$ que son las funciones de distribución de probabilidad para variables estandarizadas. En otras palabras, la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0,1)$, sea menor que d_1 (Hull, 2003).

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \quad (10)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (11.a)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (11.b)$$

Donde;

S = valor del bien subyacente de la variable de salud

K= precio del ejercicio es decir el límite máximo de la variable de salud antes de enfermar

r = tasa libre de riesgo

t = periodo de la opción (diaria y luego se sumaron las de todo el año)

σ = volatilidad del bien subyacente de cada variable de salud

Al valor obtenido de la opción final *call* (C) se le multiplicó por un factor con la finalidad de calibrar el modelo con precio de una póliza de características similares estimada mediante la técnica actuarial, pero antes esta opción final *call* es producto de la suma ponderada de las cuatro opciones donde cada una de ellas tiene asociada un índice de salud subyacente, además hay que recordar que hay que sumar las opciones europeas para el periodo de un año. El índice se determinó en función de la proporción de enfermos de hipertensión, diabetes y obesidad en México; información que se obtuvo de la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición, (2012).

Así, tomando en cuenta a la presión arterial sistólica y diastólica como los predictores más importantes de enfermedades cardiovasculares, según la *American Heart Association*, se determinó asignarles a ambas una ponderación de 60%, siendo la presión arterial sistólica de 40% y la diastólica de 20%

porque se considera de mayor peligrosidad para la salud a la presión arterial sistólica (Tranche, S., Marín, R., Prieto M., Hevia, E., 2001).

Considerando que el IMC es un indicador de la diabetes mellitus y la hipertensión arterial, se otorga una ponderación de 25%, el restante 15% se otorga a la frecuencia cardiaca de acuerdo a la opinión de los expertos.

Para el caso de pacientes que tuvieron registro de la frecuencia cardiaca se asignará el peso entre los 3 activos subyacentes, quedando 45% para presión arterial sistólica, 25% para presión arterial diastólica y el restante 30% para el IMC. La ponderación propuesta es sugerida con base a la experiencia de médicos. Lo que se pretende pues con los índices es asignar al valor total de la *Call* una ponderación en función del activo subyacente en cuestión.

$$K = w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 \quad (12)$$

donde:

K = Valor de la prima de seguro considerando la suma de distintas variables de salud.

w_i = Ponderación asignada a cada una de las variables de salud.

k_i = Valor de la suma diaria durante un año de los call con diferentes subyacentes de variables de salud.

5. Resultados

A continuación se presentará la prima anualizada (después de sumar las opciones europeas y la suma ponderada de los distintos índices) obtenida para cada uno de los pacientes descritos con anterioridad.

Considerando las distintas series de salud (PS, PD, IMC y FC), se obtuvieron los siguientes resultados de las *call* anualizadas para cada uno de los pacientes:

En este caso, el factor multiplicativo o factor de calibración, que iguala el valor de la prima actuarial a la prima financiera de la opción *call* C, resulta ser muy distinto para cada uno de los pacientes, como puede observarse en el cuadro 2. En el caso del primer paciente se tuvo que utilizar un factor de 600 a efecto de que la prima total tuviera cierta similitud con la prima calculada mediante la técnica actuarial. Así, la prima total para el paciente A es de

Cuadro 2. Resultados por activo subyacente y paciente (diario)

Paciente	Activo Subyacente	Call	Factor	Ponderación	Prima	Prima total
A	PS	98.1712	600	0.4	\$23,561.08	\$67,065.59
	PD	272.1078		0.2	\$32,652.93	
	IMC	24.8591		0.25	\$3,728.87	
	FC	79.1412		0.15	\$7,122.70	
B	PS	2206.2995	40	0.45	\$39,713.39	\$62,423.84
	PD	641.6325		0.25	\$6,416.32	
	IMC	1357.8441		0.3	\$16,294.13	
C	PS	3451.9834	25	0.45	\$38,834.81	\$63,612.58
	PD	1412.1934		0.25	\$8,826.21	
	IMC	2126.8743		0.3	\$15,951.56	
D	PS	1374.8710	100	0.4	\$54,994.84	\$67,528.05
	PD	255.9566		0.2	\$5,119.13	
	IMC	125.8222		0.25	\$3,145.55	
	FC	284.5681		0.15	\$4,268.52	

Fuente: Elaboración propia.

67,065.59. Esto es, para el paciente “a”, si durante Octubre del 2012 a Octubre del 2013 tiene que utilizar el servicio de seguro de gastos médicos mayores, su prima a pagar será de \$ 67,065.59 M. N., de \$62,423 M. N para el paciente “b”, de \$ 63,612.58 M. N. para el paciente “c”; y de \$67,528.05 M. N. para el paciente “d”. Cabe mencionar que para cada paciente se utilizaron factores distintos como se ilustra en el Cuadro 2.

Posteriormente se realizaron diferentes cambios en los valores de la ponderación para el resultado de la *call* C, y se observó que la ponderación asignada a la presión diastólica tenía gran sensibilidad al cambio en el valor de este ponderador para el caso del paciente “a”, lo cual era de esperarse puesto que este activo subyacente se comportó como el más volátil en este expediente. En los pacientes “b”, “c” y “d”; se detectó que los cambios en el ponderador del activo subyacente presión sistólica ocasionaron mayores movimientos en la prima total, o sea, la sensibilidad de este activo fue mayor en la mayoría de los casos, lo cual se podría explicar por la volatilidad observada en esta variable.

Los valores utilizados de factor para cada uno de los pacientes resultaron muy distintos, lo cual no es consistente, se esperaría que en todos los expedientes se hubiese utilizado el mismo factor, al menos un valor cercano entre los cuatro expedientes, esto con la intención de poder generalizar este factor

como un múltiplo importante en la determinación de la prima para cualquier tipo de expediente.

Conclusiones

El seguro de gastos médicos mayores ha experimentado un lento crecimiento, pues cerca del 6% de la población cuenta con un seguro de este tipo. Recordemos que en México se tienen las primas de seguros de gastos médicos mayores más elevadas de toda América Latina, y que estas primas elevadas son resultado de la alta siniestralidad que existe en México en el ramo. Debido a la importancia de este ramo conviene tener formas alternativas y complementarias para realizar estimaciones en el valor de las primas.

El presente trabajo pretende calcular la prima de seguro de gastos médicos de una forma paralela o complementaria utilizando la teoría de las opciones financieras, en específico, del modelo Black & Scholes. Con el objeto de simplificar el modelo y debido a la escasez de información se considera en lugar de opciones americanas, una suma de opciones europeas y que existe un factor de calibración entre el modelo de primas actuarial y de opciones financieras.

Se considera como supuestos que los índices de salud PA sistólica, PA diastólica, IMC se comportan como un movimiento geométrico browniano con volatilidad constante. El modelo plantea construir un portafolio ponderado (a partir de la opinión de expertos) de opciones de compra europeas cada una con un subyacente de un índice indicador de salud: presión arterial sistólica, presión arterial diastólica, IMC y frecuencia cardiaca y el equivalente de precio de ejercicio el límite de buena salud en cada rubro para cada una de las cuatro series. Al final este portafolio se suma durante todos los días del año.

Como las variables originales están dadas en términos de series de salud y no hay un mercado de este tipo de opciones se propone un factor de calibración en donde se compara el valor obtenido con el precio ofrecido por un seguro de gastos médicos mayores.

A pesar de los fuertes supuestos y de la limitación de la información, los resultados son modestos pero en general alentadores. Además, no son concluyentes porque los factores de calibración son distintos para cada persona y es muy importante mencionar que se necesitaría validar los resultados con un muestra más representativa, es decir, se necesitan datos históricos de salud de un mayor número de personas. Resumiendo, no podemos generalizar los resultados obtenidos a partir de sólo unos casos.

Bibliografía

- Black Fischer y Scholes Myron (Mayo-Junio 1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Chicaíza Becerra Liliana Alejandra y Cabe do Semper José David (2007), *Las opciones financieras como mecanismo para estimar las primas de seguro y rea-seguro en el sistema de salud colombiano*. Cuad. Adm. Bogotá (Colombia), 19(34): 221-236.
- De Lara H., Alfonso (2003), *El riesgo en productos derivados: en Medición y Control de Riesgos Financieros*, De Lara H., (tercera edición), Limusa Noriega Editores, 101-140.
- Del Pozo G., Eva (2004). *Modelo de análisis de opciones aplicado a la valoración del seguro*, Gerencia de riesgos y seguros, año 21; Núm 85: 41-50.
- Díaz Tinoco, Jaime y Hernández Trillo, Fausto (2000), *Futuros y opciones financieras: Una introducción*. México, Limusa Noriega Editores.
- Elizondo, R., Padilla, P., y Blatt, M. (2009). *Una fórmula alternativa de valorar opciones americanas*, Working papers/Banco de México, Dirección de Investigación Económica; 2009,06.
- Fernández, Viviana (1999), "Teoría de opciones: Una síntesis", *Revista de Análisis Económico* 14(2) 87-116.
- González de Paz, Raúl B. (1999), *Introducción a los instrumentos derivados y su aplicación al análisis de riesgo*. CEMLA, 46, 1-42.
- Hull, John C. (2003), *Options, Futures and Other Derivates*, Upper Saddle River, New Jersey USA, Fifth Edition 2003. Prentice Hall.
- Ley de Inversión Extranjera. Título I, capítulo III. *De las actividades y adquisiciones con regulación específica*, 27 de Diciembre 1993.
- Mejía Tapia, Pedro (1993). *Aspectos relevantes del seguro de gastos médicos mayores*. Comisión Nacional de Seguros y de Fianzas, 28, 2-39.
- Minzoni, Antonio (2005). *Crónica de dos siglos de seguro en México*. Recuperado de <http://www.cnsf.gob.mx/Difusion/Otraspublicaciones/historia/CRONICA%20DE%20DOS%20SIGLOS%20DEL%20SEGURO%20EN%20MEXICO.pdf>
- Pérez Somalo, Miguel y Lamothe Fernández, Prósper (2006), *Opciones financieras y productos estructurados*. Madrid, España, Mc Graw Hill.
- Reyes Durán, J. Francisco (2008). *Sector Asegurador y Economía Mexicana*, Revista Latinoamericana de Economía, problemas del desarrollo, 39(154) 157-180.

Rivas López, María Victoria (2002), *Análisis de la gestión de riesgos financieros aplicado a las entidades aseguradoras*, Gerencia de Riesgos y Seguros, Núm. 78, Madrid, España.

Tranche, S., Marín, R., Prieto, M., Hevia, E. (2001), "La presión de pulso como marcador de riesgo cardiovascular", *Revista Hipertensión* 18(5), 218-224.

Referencias de Páginas Web

<http://eleconomista.com.mx/sistema-financiero/2010/04/14/sector-asegurador-mexico-mas-costoso>. *Sector Asegurador en México, el más costoso en AL*, Periódico El Economista, Revisado en Octubre 2011.

<http://vivecondiabetes.com/basicos-de-diabetes/estadisticas/136-estadisticas?format=pdf> Estadísticas básicas de diabetes, Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT), Revisado en Diciembre 2012.

<http://www.cnsf.gob.mx/paginas/informacionfinanciera.aspx>, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Revisado en Abril 2012.

<http://www.imss.gob.mx/estadisticas/financieras/Documents/parievaluacion2010.pdf>, Programa de Administración de Riesgos Institucionales (2010). Dirección de Finanzas del Instituto Mexicano del Seguro Social, Coordinación de Administración de Riesgos Institucionales, Revisado en Diciembre 2012.

<http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/encuestas/hogares/regulares/enigh/enigh2010/ncv/default.aspx> Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH, 2010). Consultado en la base de datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, Revisado en Febrero 2012.

<http://www.oecdilibrary.org/docserver/download/fulltext/191800041e1t002.pdf?expires=1329954296&id=id&accname=freeContent&checksum=5DD57C70B0670F21236732F3EA87CD3A>, Insurance activity indicators, OECD Insurance Statistics (database), Accessed on September 2012.

<http://allman.rhon.itam.mx/~ggomez/CLASE10.pdf>

Apéndice

Anexo 1

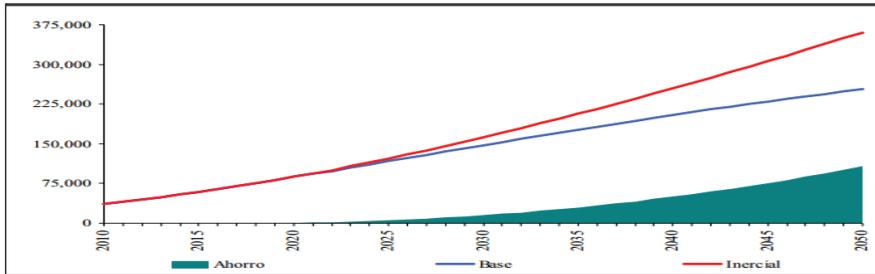
Proyección de consultas totales, pacientes bajo tratamiento, egresos hospitalarios y gasto médico por componente, de las enfermedades de alto impacto financiero (2010-2050). Escenario Base (Cifra de gastos en millones de pesos de 2010)

Pacemiento	Año	(En miles)			Gasto Médico			Total
		Consultas	Pacientes bajo Tratamiento	Egresos Hospitalarios	Consultas	Medicamentos y Auxiliares de Diagnóstico	Hospitalización	
Diabetes Mellitus	2010	10,245.5	546.7	75.7	5,922	3,183	5,259	14,364
	2020	14,045.5	1,718.6	102.0	10,261	13,854	8,954	33,069
	2030	15,310.0	2,581.0	110.8	14,137	26,817	12,305	53,260
	2040	15,481.3	2,906.8	113.7	18,068	38,414	15,959	72,441
	2050	14,516.6	2,834.3	107.6	21,414	47,467	19,076	87,957
Hipertensión Arterial	2010	12,759.5	3,673.5	21.7	7,209	6,471	801	14,480
	2020	17,614.7	7,028.8	28.1	12,578	16,068	1,306	29,952
	2030	19,612.2	10,188.5	31.1	17,701	29,864	1,829	49,395
	2040	20,302.5	11,770.9	33.3	23,161	43,859	2,479	69,499
	2050	19,354.4	11,805.5	33.3	27,907	55,750	3,130	86,786
Insuficiencia Renal	2010	761.8	274.5	70.2	590	2,878	3,077	6,545
	2020	972.2	1,218.3	88.0	952	19,457	4,874	25,283
	2030	1,001.8	1,997.1	93.0	1,240	41,299	6,512	49,050
	2040	978.2	2,422.8	93.9	1,530	63,815	8,308	73,652
	2050	897.1	2,488.6	89.3	1,774	83,114	9,986	94,874
Cáncer Cérvico Uterino	2010	139.9	43.9	7.4	124	33	480	637
	2020	181.2	44.3	9.5	203	42	792	1,037
	2030	184.3	43.0	9.5	261	53	1,226	1,541
	2040	175.1	38.9	9.0	314	66	1,791	2,171
	2050	156.8	33.3	8.0	355	81	2,463	2,899
Cáncer de Mama	2010	1,000.1	35.2	9.5	770	67	817	1,654
	2020	1,201.2	46.7	12.3	1,169	113	1,340	2,621
	2030	1,120.7	54.1	12.4	1,378	165	1,714	3,258
	2040	985.9	54.2	11.8	1,533	210	2,061	3,804
	2050	829.4	49.6	10.6	1,630	243	2,325	4,197
Virus de Inmunodeficiencia Humana	2010	178.5	99.8	3.0	163	910	297	1,371
	2020	204.5	113.0	3.3	236	1,303	415	1,955
	2030	181.1	110.9	3.0	265	1,617	469	2,351
	2040	150.1	95.5	2.5	277	1,761	499	2,537
	2050	120.3	76.2	2.0	281	1,777	510	2,569
Total	2010	25,085.3	4,673.6	187.5	14,778	13,541	10,731	39,051
	2020	34,219.3	10,169.7	243.2	25,400	50,836	17,681	93,917
	2030	37,410.1	14,974.6	259.8	34,983	99,816	24,056	158,855
	2040	38,073.1	17,289.1	264.2	44,883	148,124	31,097	224,104
	2050	35,874.6	17,287.5	250.8	53,361	188,432	37,490	279,283

Fuente: Base de datos IMSS en la Coordinación de Administración de Riesgos Institucionales.

Anexo 2

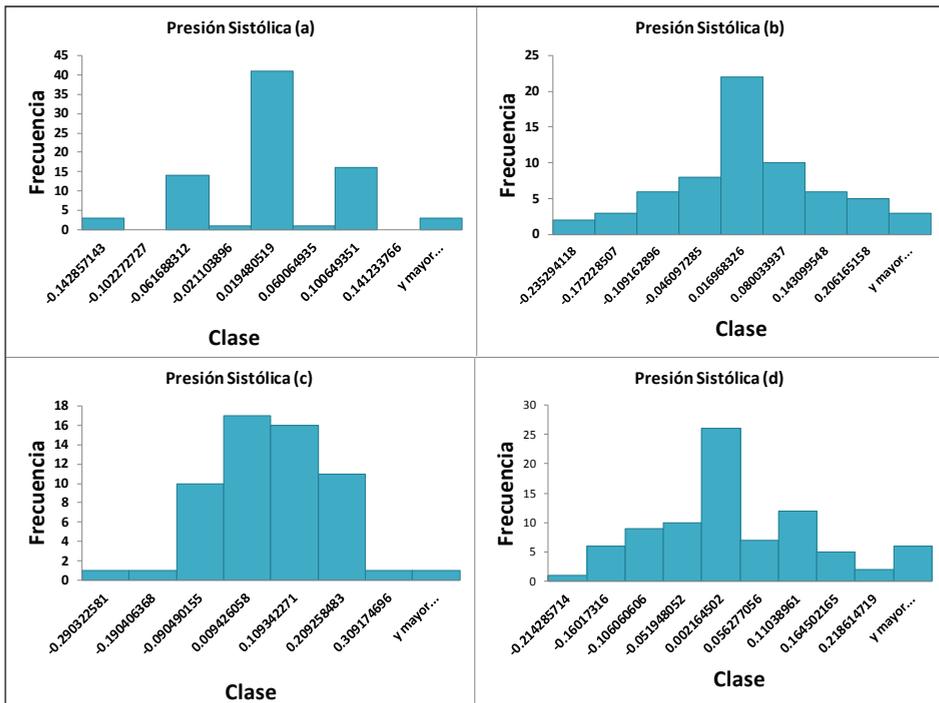
Gráfica 1.2. Comparativo del gasto médico estimado de los seis padecimientos en los escenarios base e inercial. 2010-2050 (millones de pesos de 2010)



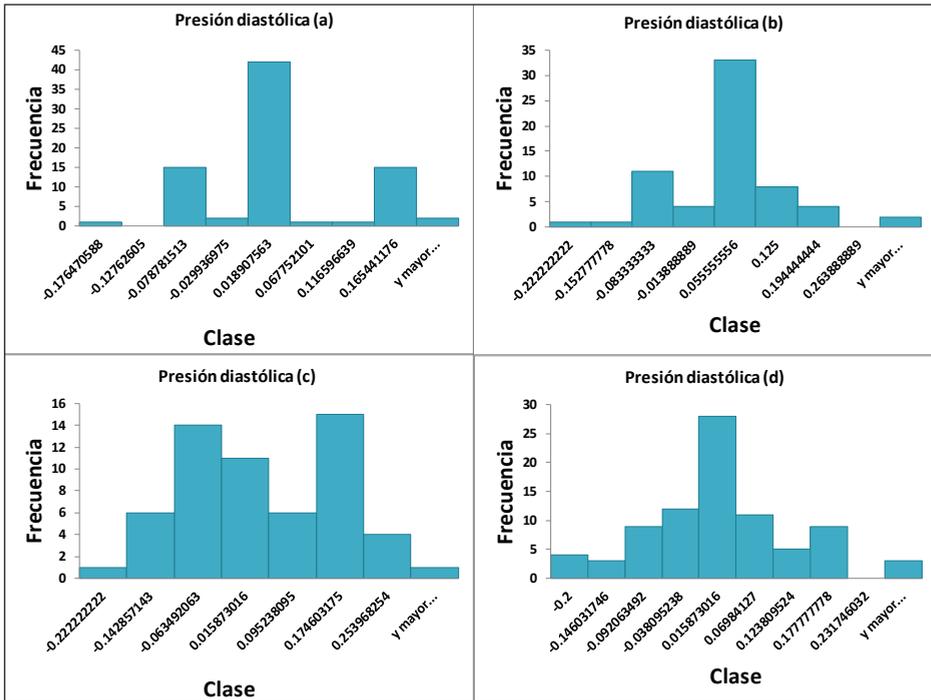
Fuente: Coordinación de Administración de Riesgos Institucionales.

Anexo 3

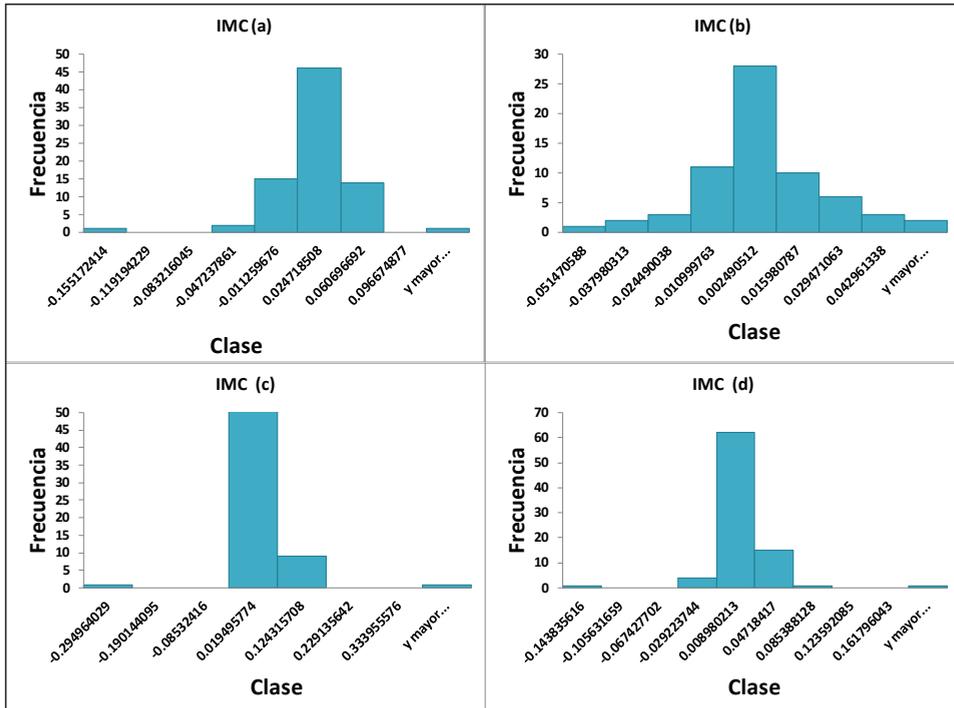
3.1. Presión Sistólica



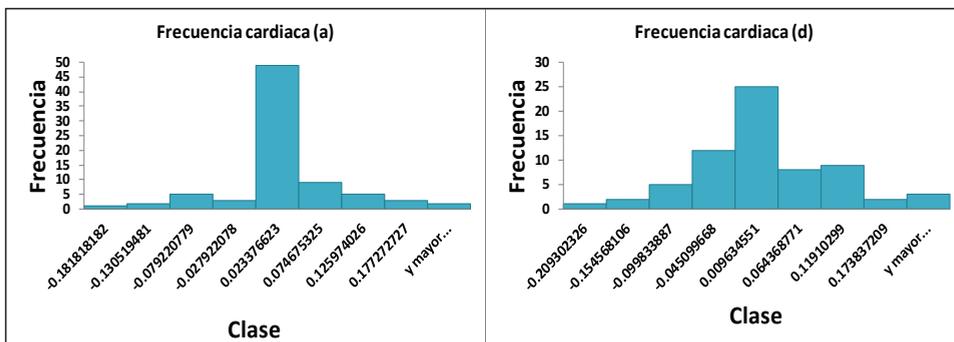
3.2. Presión Diastólica



3.3 Índice de Masa Corporal (IMC)



3.4 Frecuencia Cardíaca (FC)



La ecuación de segundo grado en la estimación de parámetros de la martingala y la valuación de opciones americanas a través de la programación dinámica estocástica

José Antonio Climent Hernández*

Fecha de recepción: 14 de mayo de 2014

Fecha de aprobación: 10 de julio de 2014

* Universidad Autónoma Metropolitana
Departamento de Administración
antonio.climent@hotmail.mx

RESUMEN

En este trabajo se presentan los factores de influencia y las características que se deben satisfacer en la teoría de valuación de opciones en un mercado completo, se utiliza el marco teórico del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se estiman los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a través de una ecuación de segundo grado y utilizando la programación dinámica estocástica se modela el precio subyacente para valorar opciones, se analizan las diferencias entre el modelo obtenido y el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se analiza gráficamente la convergencia de las opciones europeas y americanas de compra al modelo de Merton (1973) y al modelo de Black y Scholes (1973), se valúa una opción europea de compra sobre la paridad fix del mercado extrabursátil mexicano y un *warrant* americano sobre Kodak, se muestra que el modelo obtenido tiene diferencias en la valuación de las opciones con respecto al modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se valúan las opciones americanas de venta sobre la paridad fix y sobre Kodak utilizando los insumos de la opción europea de compra sobre la paridad fix y del *warrant* americano sobre Kodak y se analiza gráficamente la convergencia al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987), se muestran las diferencias entre ambos modelos concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) tiene una calibración elegante de los parámetros de la probabilidad libre de riesgo pero subestima o sobreestima el riesgo de mercado y la valuación de las opciones con respecto al modelo propuesto en este trabajo.

Clasificación JEL: G13, D81, G32, C61.

Palabras clave: valuación de opciones, administración de riesgo, análisis de riesgo, programación dinámica estocástica.

The quadratic equation in the parameter estimation of the riskless probability and the american options pricing through stochastic dynamic programming

ABSTRACT

In this paper, the influencing factors and the characteristics that have to be satisfied in the options pricing theory in a complete market are presented. The theoretical framework of the model by Cox, Ross and Rubinstein (1979) is used. The risk free probability parameters are estimated by means of a quadratic equation, using stochastic dynamic programming, the underlying price for valuing options is modeled. The differences between the proposed model and the one by Cox, Ross and Rubinstein (1979) are analyzed. The convergence of European and American call options to the Merton (1973) and Black and Scholes (1973) models is analyzed graphically. A European call option on the fix parity of the Mexican over the counter market, and an American warrant on Kodak are priced, showing that the proposed model has differences in the options pricing when compared to the Cox, Ross and Rubinstein (1979) model. The American put options are priced on the fix parity and on Kodak, using the inputs on the European call option on the fix parity and the American warrant on Kodak. The convergence to the Barone-Adesi and Whaley (1987) model is graphically analyzed. The differences between both models are shown, concluding that the Cox, Ross and Rubinstein (1979) model has an elegant calibration of the risk free probability parameters, but it underestimates or overestimates the market risk and the options pricing with respect to the model proposed in this paper.

JEL Classification: G13, D81, G32, C61.

Keywords: *options pricing, risk management, risk analysis, stochastic dynamic programming.*

Introducción

Las opciones americanas son contratos, en los que los titulares adquieren el derecho, pero no la obligación, de negociar una cantidad determinada del subyacente a un precio de liquidación durante el periodo hábil comprendido entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento.

La valuación de las opciones depende de la distribución del rendimiento subyacente y se obtiene como el valor presente de la esperanza condicional del precio de liquidación en función de la medida neutral al riesgo como se ha propuesto en los trabajos de Ross (1976) y Cox y Ross (1976).

El modelo de Bachelier (1900) supone que la evolución del subyacente es una caminata aleatoria binomial, asociando la probabilidad de ocurrencia de cada estado posible y obtiene la distribución límite en tiempo continuo utilizando la fórmula asintótica de Stirling. Bachelier (1900) aplicó el teorema central del límite aproximando la distribución de la caminata aleatoria a una distribución gaussiana. Las dos aproximaciones presentadas por Bachelier (1900) son los primeros modelos formales para modelar los movimientos del subyacente.

El modelo de Black y Scholes (1973) usa el supuesto a priori acerca de la función de distribución de probabilidad log-gaussiana del precio subyacente, el modelo es derivado a través métodos de ecuaciones diferenciales parciales y es el primer modelo de valuación de opciones que satisface las condiciones de no arbitraje de acuerdo a los límites en el precio de las opciones con respecto al precio subyacente, al precio de liquidación, al tiempo de vigencia y a la paridad de compra-venta. El modelo de Merton (1973) extendió el modelo de Black y Scholes (1973) mostrando las propiedades de las opciones en función de su valor (payoff) en la fecha de vencimiento, definiendo los límites inferiores y superiores entre los que se encuentra el valor de las opciones para satisfacer el supuesto de la no existencia de oportunidades de arbitraje, mostrando que existe diferencia entre las opciones europeas y las americanas debido a la probabilidad del ejercicio anticipado, mostrando el efecto de los dividendos, mostrando la propiedad de la paridad compra-venta, mostrando

una aproximación alternativa al modelo de Black y Scholes (1973) y valuando opciones americanas.

La valuación y determinación del ejercicio anticipado óptimo de las opciones americanas consiste en determinar la frontera óptima que maximiza el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado, actualmente no se tiene una ecuación cerrada, sólo se tienen métodos de aproximación como el numérico de Villeneuve y Zanette (2002), el de diferencias finitas de Brennan y Schwartz (1977), y el de una fórmula analítica aproximada de Barone-Adesi y Whaley (1987) que tiene consistencia con los supuestos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973).

En este artículo se presenta un modelo de tiempo discreto para valuación de opciones utilizando la programación dinámica estocástica como se propone en Cox, Ross y Rubinstein (1979) estimando los parámetros de la probabilidad libre de riesgo de una forma alternativa. El resto de este trabajo está organizado de la forma siguiente: en la sección 1 se presentan los factores de influencia y se analizan las características que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones en un mercado completo, en la sección 2 se analiza el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se presenta la calibración de los parámetros de la probabilidad libre de riesgo del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se muestran las fórmulas recursivas y generales para valuación de opciones, en la sección 3 se estiman los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a partir de un sistema de ecuaciones donde la solución alternativa es obtenida a través de una ecuación de segundo grado, también se presentan las relaciones entre los parámetros del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo, en la sección 4 se valúa una opción europea de venta sobre la paridad fix y un warrant americano sobre Kodak, se muestra gráficamente la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto a los modelos de Merton (1973) y de Black y Scholes (1973), respectivamente, se valúan las opciones americanas de venta sobre la paridad fix y sobre Kodak, se muestra gráficamente la convergencia de ambos modelos, al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) y se muestra que existe diferencia entre ambos modelos, en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, y por último la bibliografía utilizada: un apéndice en el que se presenta el algoritmo para la valuación de opciones sobre subyacentes que pagan dividendos durante el periodo de vigencia y un apéndice en el que se presenta la convergencia del modelo propuesto al modelo log-gaussiano.

1. Modelo de tiempo discreto para valorar opciones americanas

El ser humano ha creado instrumentos que permiten transferir los riesgos extrínsecos (riesgo de mercado: precios, tipos de cambio y tasas de interés) y proteger las pérdidas económicas derivadas de las exposiciones a ciertas contingencias.

Las opciones de compra y venta otorgan el derecho al titular de comprar y vender, respectivamente, una cantidad de subyacente determinada en los contratos, las opciones americanas y europeas determinan el periodo durante el cual, los titulares, pueden ejercer el derecho de comprar o vender la cantidad de subyacente indicada en los contratos.

1.1 Factores de influencia en la valuación de opciones

Los factores exógenos son: el precio subyacente M , la volatilidad subyacente σ , la tasa de interés libre de riesgo nacional i , y la tasa de interés libre de riesgo extranjera r . Los factores endógenos son: el precio de liquidación S , y el tiempo de vigencia T .

1.2 Valor de las opciones (payoff) en la fecha de liquidación

Sean $c(t, M_t)$ y $p(t, M_t)$ los valores de las opciones europeas de compra y venta, respectivamente y sean $C(t, M_t)$ y $P(t, M_t)$ los valores de las opciones americanas de compra y venta, respectivamente, entonces en la fecha de liquidación T se tiene que:

$$\begin{aligned} c(T, M_T) &= \max(0, M_T - S) = (M_T - S)_+ \\ p(T, M_T) &= \max(0, S - M_T) = (S - M_T)_+ \\ C(t, M_t) &= \max(0, M_t - S) = (M_t - S)_+ \\ P(t, M_t) &= \max(0, S - M_t) = (S - M_t)_+ \end{aligned} \quad (1)$$

1.3 Límites en la valuación de las opciones

La valuación de opciones a través del enfoque en el que obtener beneficios por las compras y ventas simultáneas de activos se debe considerar para evi-

tar oportunidades de arbitraje. Por lo que para las opciones europeas se deben satisfacer los límites siguientes:

$$\begin{aligned} (M_T \exp(-rT) - S \exp(-iT))_+ \leq c(T, M_T) \leq M_T \\ (S \exp(-iT) - M_T \exp(-rT))_+ \leq p(T, M_T) \leq S \exp(-iT) \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación (2) se obtiene a partir de proposiciones que hace Merton (1973) para mostrar la existencia de valores mínimos y máximos en el valor de las opciones europeas que indican condiciones que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones para satisfacer la hipótesis de no existencia de oportunidades de arbitraje o valuación en un mundo neutral al riesgo.

Mientras que para las opciones americanas se deben satisfacer los límites siguientes:

$$\begin{aligned} (M_t \exp(-r\tau) - S, M_t \exp(-r\tau) - S \exp(-i\tau))_+ \leq C(t, M_t) \leq M_t \\ (S \exp(-i\tau) - M_t \exp(-r\tau), S \exp(-i\tau) - M_t)_+ \leq P(t, M_t) \leq S \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\tau = T - t$ representa el tiempo remanente y $t \in [0, T]$ es el tiempo transcurrido desde la negociación de las opciones.

La ecuación (3) se obtiene a partir de proposiciones que hace Merton (1973) y muestran la existencia de valores mínimos y máximos en el valor de las opciones americanas, los que indican condiciones que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones, así también indica que las opciones americanas de compra no se deben ejercer antes de la fecha de vencimiento ya que el flujo de efectivo en valor presente, por el pronto ejercicio, es menor que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio en la fecha de vencimiento. Por lo cual, las opciones americanas de compra tienen al menos el mismo valor por la cobertura otorgada por las opciones europeas, esto indica que $c(t, M_t) = C(t, M_t)$. También indica que las opciones americanas de venta pueden ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento ya que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio anticipado, es mayor que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio en la fecha de vencimiento. Por lo cual, los contratos americanos de venta tienen un valor superior por la cobertura que otorgan las opciones europeas, esto es significa que $p(t, M_t) \leq P(t, M_t)$.

1.4 Paridad compra-venta

Es la relación entre las opciones europeas de compra y venta:

$$c(t, M_t) + S \exp(-i\tau) = p(t, M_t) + M_t \exp(-r\tau) \quad (4)$$

Lo que significa que el precio de las opciones europeas de compra se pueden calcular a partir del precio de las opciones europeas de venta de la misma serie (opciones emitidas sobre el mismo bien subyacente, igual precio de liquidación y misma fecha de vencimiento) y viceversa. Es decir:

$$\begin{aligned} c(t, M_t) &= p(t, M_t) + M_t \exp(-r\tau) - S \exp(-i\tau) \\ p(t, M_t) &= c(t, M_t) + S \exp(-i\tau) - M_t \exp(-r\tau) \end{aligned}$$

La relación entre las opciones americanas de compra y venta es:

$$M \exp(-r\tau) - S \leq C - P \leq M - S \exp(-i\tau) \quad (5)$$

El valor de las opciones americanas de compra se encuentra entre los límites inferiores y superiores de las opciones americanas de venta de la misma serie y el valor de las opciones americanas de venta se encuentra entre los límites inferiores y superiores de las opciones americanas de compra de la misma serie.

2. Modelo de Cox, Ross y Rubinstein para valuación de opciones

Al igual que Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979), el supuesto es que el precio subyacente puede tener sólo dos valores posibles derivados del estado anterior. A esta hipótesis se le conoce como supuesto binomial. El precio subyacente se modela mediante una caminata aleatoria y el valor de las opciones se calcula a través de la programación dinámica estocástica que por medio del principio de inducción regresiva maximiza el flujo de efectivo en valor presente, cuantificando el riesgo que otorga la cobertura de las opciones. Para representar las trayectorias del precio subyacente, el modelo considera la no existencia de oportunidades de arbitraje para los inversionistas.

El modelo discreto de un periodo supone que al final del periodo se tienen dos valores posibles del precio subyacente. Sea un bien subyacente con precio de mercado M_0 , una opción europea de compra con valor $c(t, M_t)$ sobre el bien subyacente y el tiempo de vigencia T de la opción. En la fecha de vencimiento el precio aumenta de M_0 a M_0a con probabilidad π o disminuye de M_0 a M_0d con probabilidad $\theta = 1 - \pi$, donde $0 < d < 1 < a$. Si el precio subyacente aumenta, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c(T, M_1^a) = (M_0a - S)_+$ y si el precio subyacente disminuye, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c(T, M_1^d) = (M_0d - S)_+$.

Se conocen los dos valores posibles que puede tener la opción en la fecha de vencimiento, los cuales son $c(T, M_1^a)$ y $c(T, M_1^d)$. Para conocer el valor actual se crea una opción europea de compra sintética que es el portafolio replicante compuesto por la posición larga de Δ bienes subyacentes en valor presente a la tasa de interés libre de riesgo extranjera ($\Delta M_0 \exp(-rT)$) y la posición corta de la opción que se desea valorar ($-c(0, M_t)$). El valor de Δ que mantiene el portafolio libre de riesgo es:

$$\Delta = \frac{c(T, M_1^a) - c(T, M_1^d)}{M_0a - M_0d} \quad (6)$$

El número de activos que debe tener el portafolio para estar libre de riesgo es Δ . Si el precio subyacente aumenta o disminuye el valor presente del portafolio es $(c(T, M_1^a) - M_1^a \Delta) \exp(-iT)$ cuando aumenta y $(c(T, M_1^d) - M_1^d \Delta) \exp(-iT)$ cuando disminuye, en la fecha de la negociación el valor de la opción sintética es $M_0 \Delta \exp(-rT) - c(0, M_t)$. Por lo que el valor de la opción es:

$$c(0, M_0) = \left(\frac{c(T, M_1^a)(\exp((i-r)T) - d) + c(T, M_1^d)(a - \exp((i-r)T))}{a - d} \right) \exp(-iT) \quad (7)$$

donde i es la tasa de interés instantánea libre de riesgo nacional y el valor de la opción es independiente de la probabilidad de ocurrencia de los movimientos en el precio subyacente.

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente, el rendimiento esperado por la inversión en el bien subyacente es equivalente a la tasa de interés libre de riesgo y el valor esperado del rendimiento subyacente al final del periodo T es $E(X) = \exp((i-r)T) = a\pi + d(1-\pi)$. Por lo cual las probabilidades neutrales al riesgo, respectivamente, son:

$$\pi = \frac{\exp((i-r)T) - d}{a - d} \quad \text{y} \quad 1 - \pi = \frac{a - \exp((i-r)T)}{a - d} \quad (8)$$

donde $0 \leq \pi \leq 1$ y $0 < d < 1 \leq \exp((i-r)T) \leq a$.

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (7) se obtiene que el valor de la opción europea de compra sintética se puede calcular como:

$$c(0, M_0) = (c(T, M_1^a)\pi + c(T, M_1^d)(1-\pi))\exp(-iT) \quad (9)$$

donde $c(T, M_1^a) = (M_0a - S)_+$ y $c(T, M_1^d) = (M_0d - S)_+$.

El proceso estocástico supuesto para modelar el rendimiento subyacente implica que la varianza proporcional en el rendimiento subyacente durante el periodo T es:

$$\sigma^2 T = (a-d)^2 \pi(1-\pi) \quad (10)$$

Sea $u = \exp((i-r)T)$, entonces las probabilidades neutrales al riesgo son:

$$\pi = \frac{u-d}{a-d} \quad \text{y} \quad 1-\pi = \frac{a-u}{a-d} \quad (11)$$

donde la varianza proporcional del rendimiento subyacente durante el periodo T es:

$$\sigma^2 T = (u-d)(a-u) \quad (12)$$

Se tiene un sistema con las dos ecuaciones (11) y (12) y las tres incógnitas π , a y d , por lo cual al incluir la tercera restricción $ad = 1$, propuesta por Cox, Ross y Rubinstein (1979) en donde definen a las incógnitas $a = \exp(\sigma\sqrt{T})$ y $d = \exp(-\sigma\sqrt{T})$ a partir de la distribución límite de la distribución binomial.

2.1 Modelo multiperiodo para valuación de opciones europeas

Supone que al final de cada estado el precio subyacente tiene sólo dos posibles valores, por lo que al dividir el tiempo de vigencia T en n intervalos de igual duración, existen $n + 1$ valores posibles del precio subyacente y en consecuencia $n + 1$ precios de la opción en la fecha de vencimiento.

Para resolver el problema se emplea una técnica basada en la secuencia de decisiones que satisface que si las decisiones futuras constituyen una decisión óptima con base en las decisiones precedentes, entonces la decisión actual es óptima y tiene una definición recursiva de la solución.

Suponiendo que las tasas de interés libres de riesgo i y r , y la volatilidad subyacente σ son constantes, sean $V(t, M_t)$ el valor de las opciones en el instante $t \in [0, T]$ cuando el precio subyacente es M_t , $V(t, M_t^a)$ el valor de las opciones en el instante t cuando el precio subyacente aumenta su valor de M_{t-1} a $M_t^a = M_{t-1}a$ y $V(t, M_t^d)$ el valor de las opciones en el instante t cuando el precio subyacente disminuye su valor de M_{t-1} a $M_t^d = M_{t-1}d$, entonces la estrategia óptima Δ_t durante el periodo $[t-1, t)$ es:

$$\Delta_t = \frac{V(t, M_t^a) - V(t, M_t^d)}{M_t^a - M_t^d} \quad (13)$$

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente en cada uno de los n intervalos, el rendimiento subyacente esperado al final del intervalo δT es $E(X) = \exp((i-r)\delta T) = u$. Por lo cual las probabilidades neutrales al riesgo, respectivamente, son:

$$\pi = \frac{u-d}{a-d} \quad \text{y} \quad 1-\pi = \frac{a-u}{a-d} \quad (14)$$

donde $\delta = \frac{1}{n}$, $0 < d < 1 \leq u \leq a$, $a = \exp(\sigma\sqrt{\delta T})$, $d = a^{-1}$ y $u = \exp((i-r)\delta T)$.

Suponiendo que el periodo de vigencia T está dividido en dos intervalos ($n = 2$), en el primer intervalo, donde M_1^a entonces $V(1, M_1^a) = (V(2, M_2^a)\pi + V(2, M_2^{ad})(1-\pi))\exp(-i\delta T)$ y donde M_1^d entonces $V(1, M_1^d) = (V(2, M_2^{ad})\pi + V(2, M_2^{d^2})(1-\pi))\exp(-i\delta T)$ y los valores de la opción son, respectivamente $V(2, M_2^a) = (M_0a^2 - S)_+$, $V(2, M_2^{ad}) = (M_0a - S)_+$ y $V(2, M_2^{d^2}) = (M_0d^2 - S)_+$. Para valorar la opción cuando M_0 , se tiene que $V(0, M_0) = (V(1, M_1^a)\pi + V(1, M_1^d)(1-\pi))\exp(-i\delta T)$ sustituyendo $V(1, M_1^a)$ y $V(1, M_1^d)$ en $V(0, M_0)$ el valor de la opción está dado por la ecuación siguiente $V(0, M_0) = (V(2, M_2^a)\pi^2 + 2V(2, M_2^{ad})\pi(1-\pi) + V(2, M_2^{d^2})(1-\pi)^2)$.

Generalizando la definición recursiva para n intervalos y bajo la hipótesis de valuación en un mundo neutral al riesgo, se tienen dos formas para valorar opciones europeas de compra:

1. La valuación de la opción se hace mediante la fórmula recursiva.

(15)

$$V(\eta, M_\eta^{a^k d^{\eta-k}}) = \begin{cases} (V(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^{k+1} d^{\eta-k}})\pi + V(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^k d^{\eta-k+1}})(1-\pi))\exp(-i\delta T) & \text{si } 0 \leq k \leq \eta < n \\ V(\eta, M_\eta^{a^k d^{\eta-k}}) = (Ma^k d^{\eta-k} - S)_+ & \text{si } 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

2. La valuación de la opción se hace mediante la fórmula general.

$$V(0, M_0) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} V(n, M_n^{a^k d^{n-k}}) \right) \exp(-iT) \quad (16)$$

donde $\delta = \frac{1}{n}$, $0 < d < 1 \leq u \leq a$, $a = \exp(\sigma\sqrt{\delta T})$, $d = a^{-1}$ y $u = \exp((i-r)\delta T)$.

Para la fórmula recursiva, es necesario calcular el valor intrínseco en los $n + 1$ estados al término del n -ésimo intervalo. Cada par de estados tiene un estado padre, el cual es calculado mediante la fórmula recursiva hasta el primer intervalo, el cual tiene dos estados, de los cuales se obtiene el valor de la opción en el intervalo de negociación a través de las 2^n trayectorias del precio subyacente. Para la fórmula general, es necesario calcular el valor intrínseco en los $n + 1$ estados al término del n -ésimo intervalo, si la opción es europea no existe la posibilidad de ejercer anticipadamente por lo que es suficiente calcular las combinaciones de cada uno de los $n + 1$ valores intrínsecos y las probabilidades asociadas, sumar los $n + 1$ resultados en valor presente para obtener el valor de la opción europea.

También se cuenta con dos formas para valorar opciones europeas de venta:

1. La valuación de la opción se realiza a través de la fórmula recursiva.

(17)

$$V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = \begin{cases} \left(V\left(\eta + 1, M_{\eta+1}^{a^{k+1} d^{\eta-k}}\right) \pi + V\left(\eta + 1, M_{\eta+1}^{a^k d^{\eta-k+1}}\right) (1 - \pi) \right) \exp(-i\delta T) & \text{si } 0 \leq k \leq \eta < n \\ V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = (S - Ma^k d^{\eta-k})_+ & \text{si } 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

2. La valuación de la opción se realiza a través de la fórmula general.

$$V(0, M_0) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k} V\left(n, M_n^{a^k d^{n-k}}\right) \right) \exp(-iT) \quad (18)$$

donde

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad 0 < d < 1 \leq u \leq a, \quad a = \exp(\sigma\sqrt{\delta T}), \quad d = a^{-1} \text{ y } u = \exp((i - r)\delta T).$$

2.2 Modelo multiperiodo para valuación de opciones americanas

Los titulares de las opciones americanas tienen el derecho, pero no la obligación, de negociar una cantidad del subyacente en cualquier día hábil antes o en la fecha de vencimiento y al precio de liquidación, por lo que es necesario

considerar el flujo de efectivo en valor presente por el ejercicio anticipado. Como se demuestra en Cox, Ross y Rubinstein (1979) y Climent Hernández (2005) no es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de compra, por lo cual se pueden utilizar las ecuaciones (15) y (16).

Como se demuestra en Cox, Ross y Rubinstein (1979) y Climent Hernández (2005) en algunos casos es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de venta, por lo que es necesario calcular de forma recursiva el valor de la opción en cada estado de cada intervalo, por lo que para considerar el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado se tiene que:

(19)

$$V(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}) = \begin{cases} \max\left(V(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}), \left(V(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^{k+1} d^{\eta-k}})\pi + V(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^k d^{\eta-k+1}})(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T)\right) & \text{si } 0 \leq k \leq \eta < n \\ V(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}) = (S - Ma^k d^{\eta-k})_+ & \text{si } 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

donde

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad 0 < d < 1 \leq u \leq a, \quad a = \exp(\sigma\sqrt{\delta T}), \quad d = a^{-1} \quad \text{y} \quad u = \exp((i-r)\delta T).$$

3. Estimación de parámetros para valuación de opciones

Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) suponen que δ representa el tiempo transcurrido entre los cambios sucesivos del precio subyacente. Es decir, si T es el tiempo de vigencia, y n es el número de intervalos de longitud δ antes de la fecha de vencimiento, entonces $T = n\delta$. Si el número de cambios n incrementa indefinidamente, δ se aproxima a cero y por lo tanto se deben ajustar las variables a , d y u para obtener resultados de acuerdo a cada instante δT . Utilizando el teorema central del límite, Bachelier (1900) supone que las probabilidades son $\pi = 1 - \pi = \frac{1}{2}$, entonces el ajuste de las variables es $a = \exp((i-r)\delta T) - \sigma\sqrt{\delta T}$ y $d = \exp((i-r)\delta T) - \sigma\sqrt{\delta T}$, mientras que Cox, Ross y Rubinstein (1979) proponen que $a = \exp(\sigma\sqrt{\delta T})$

y $d = \exp(-\sigma\sqrt{\delta T})$ a partir de la distribución límite de la distribución binomial.

Se propone una solución alternativa suponiendo como en Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) que el rendimiento esperado durante el intervalo δT es $E(X) = a\pi + d(1 - \pi) = u$, entonces:

$$a\pi + d(1 - \pi) = \exp((i - r)\delta T) \quad (20)$$

Despejando π y $1 - \pi$ de la ecuación (20), se obtiene la ecuación (14) donde donde debido a la probabilidad libre de riesgo se satisface que $0 < d < 1 < \exp((i - r)\delta T) < a$, y la varianza proporcional durante el intervalo δT es constante y está dada por $\text{var}(X) = (a - d)^2 \pi(1 - \pi)$, sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación de la varianza proporcional durante el intervalo δT se tiene que:

$$(u - d)(a - u) = \sigma^2 \delta T \quad (21)$$

Se tiene un sistema con las ecuaciones (20) y (21) y las variables a , d y π , incluyendo, igual que Cox, Ross y Rubinstein (1979) la ecuación siguiente:

$$ad = 1 \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (22) en la ecuación (21) y despejando a la variable a se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$$a^2 - (\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)\exp(-(i - r)\delta T)a + 1 = 0 \quad (23)$$

Sean $A = 1$, $B = -(\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)\exp(-(i - r)\delta T)$ y $C = 1$, se tiene que:

$$a_1 = \tan(\gamma_2) - \sec(\gamma_1) \quad \text{y} \quad d_1 = -\tan(\gamma_2) - \sec(\gamma_1) \quad (24)$$

donde $\gamma_1 = \arcsen\left(\frac{2}{B}\right)$ y $\gamma_2 = \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4}\right)$.

A través de la solución propuesta para las variables a_1 y d_1 se puede comparar la valuación de opciones del mercado mexicano extrabursátil utilizando las ecuaciones, y donde se tiene que $\delta = n^{-1}$, $0 < d_1 < 1 \leq u \leq a_1$, $u = \exp((i-r)\delta T)$, $a_1 = \tan(\gamma_2) - \sec(\gamma_1)$ y $d_1 = -\tan(\gamma_2) - \sec(\gamma_1)$ y mostrar gráficamente la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto a la valuación mediante el modelo log-gaussiano.

3.1 Valuación de opciones a través del modelo multiperiodo

La metodología empleada para modelar el precio subyacente es la programación dinámica estocástica a través de los insumos en un instante determinado y la valuación de las opciones se realiza utilizando el principio de inducción regresiva. Los insumos utilizados son el precio subyacente M_0 , la volatilidad subyacente σ , las tasas de interés libres de riesgo i y r , el precio de liquidación S , el tiempo de vigencia T y el tiempo remanente $\tau = T - t$ donde t es el tiempo transcurrido desde la negociación de las opciones. Los parámetros a_1 y a_2 de la ecuación son equivalentes a:

$$a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{B^2 - 4} - B) \quad \text{y} \quad d_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{B^2 - 4} + B) \quad (25)$$

donde $B = -(\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)\exp(-(i-r)\delta T)$, por lo que el incremento a_1 y el decremento d_1 en el precio subyacente está modelado a través de las tasas de interés, la volatilidad subyacente y el tiempo de vigencia y además por la propiedad de tricotomía se tienen los tres casos siguientes:

$$\begin{aligned} a_1 < a & \quad \text{si} \quad B > -(a+d) \\ a_1 = a & \quad \text{si} \quad B = -(a+d) \\ a_1 > a & \quad \text{si} \quad B < -(a+d) \end{aligned} \quad (26)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} B = \lim_{\delta \rightarrow 0} B = -2$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a = \lim_{\delta \rightarrow 0} a = 1$.

Lo que significa que en el límite ambos resultados son equivalentes, sin embargo los parámetros a_1 y d_1 propuestos modelan más adecuadamente el precio subyacente que los parámetros a y d debido a que las tasas de interés son factores de influencia en el modelado del precio subyacente y en la valuación de opciones, así entonces la probabilidad libre de riesgo también se modela más adecuadamente, lo que permite que la valuación cuantifique de manera más adecuada el riesgo de mercado ya que la ecuación significa el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima el precio subyacente cuando $a_1 > a$ y sobreestima el precio subyacente cuando $a_1 < a$, por lo cual también subestima o sobreestima el riesgo de mercado y en consecuencia ocurre lo mismo con la valuación de las opciones.

4. Valuación de opciones americanas

Actualmente el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) no tiene opciones americanas de venta vigentes por lo que se valúa una opción europea de venta sobre la paridad peso-dólar del mercado extrabursátil y se compara la valuación de la opción europea de ambos modelos y se muestra la convergencia al modelo de Merton (1973), se valúan las opciones americanas de compra y venta de la misma clase utilizando los insumos con los que el proveedor de precios Valuación Operativa y Referencias de Mercado (Valmer) realizó las valuaciones, utilizando ambos modelos de tiempo discreto y comparando los resultados con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987). También se valúa un warrant americano sobre Kodak que es equivalente a la valuación de una opción americana de compra, comparando la valuación de ambos modelos y mostrando la convergencia al modelo de Black y Scholes (1973), se valúa la opción americana de venta de la misma clase y también se comparan los resultados con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987).

4.1 Los insumos utilizados en la valuación de una opción americana

El tipo de cambio fix del día 2 de enero de 2014 fue $M_0 = 13.1011$ pesos por dólar, la volatilidad subyacente $\sigma = 0.12442667$, la tasa de interés libre de riesgo nacional $i = 3.24253071789042\%$, la tasa de interés extranjera

$r = 0.251595108417202\%$, el precio de liquidación $S = 12.93$ y el periodo remanente $\tau = 102$ días para la fecha de vencimiento el día 14 de abril de 2014. Utilizando el modelo de Merton (1973) para la valuación de la opción europea de venta se tiene el resultado siguiente:

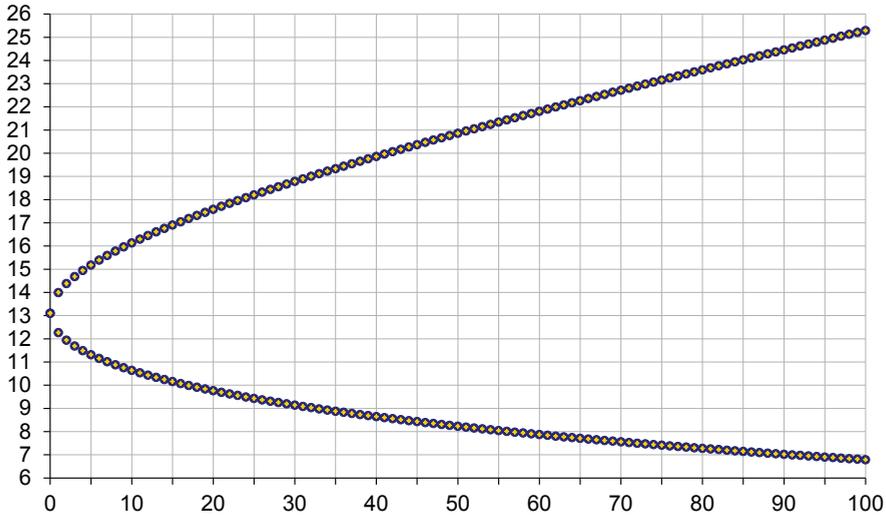
$$p(t, M_t) = S \exp(-i\tau) \Phi(-d_2) - M_0 \exp(-r\tau) \Phi(-d_1) = 0.218557$$

donde $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{M_0}{S}\right) + \left(i - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ y $\Phi(x)$ es la distribución estándar del rendimiento subyacente.

Utilizando estos insumos se valúan las opciones europeas y americanas utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en la investigación presente, la valuación se realiza utilizando de uno a cien intervalos. A través de la programación dinámica estocástica se modela la evolución del precio subyacente en función del número de intervalos y se muestran los límites superiores e inferiores en la Figura 1.

En la Figura 1 se aprecia el modelado del precio subyacente a través de la programación dinámica en función del número de intervalos (1-100) y no se observa a simple vista diferencia entre el precio subyacente para ambos modelos (en rombos claros el modelo propuesto y en círculos oscuros el modelo de Cox, Ross y Rubinstein), sin embargo el precio máximo para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) es $M_0 a^n = 25.291180$, el precio mínimo es $M_0 d^n = 6.786509$ y para el modelo propuesto los precios son $M_0 a_1^n = 25.291797$ y $M_0 d_1^n = 6.786343$, respectivamente, por lo cual se tiene que $M_0 a_1^n > M_0 a^n$ y $M_0 d^n > M_0 d_1^n$, además, éste resultado se presenta para toda $n = 1, \dots, 100$, concluyendo el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la evolución del precio subyacente y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado utilizando los insumos dados. La convergencia del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y del modelo propuesto al modelo de Merton (1973), en función del número de intervalos se presenta en la Figura 2.

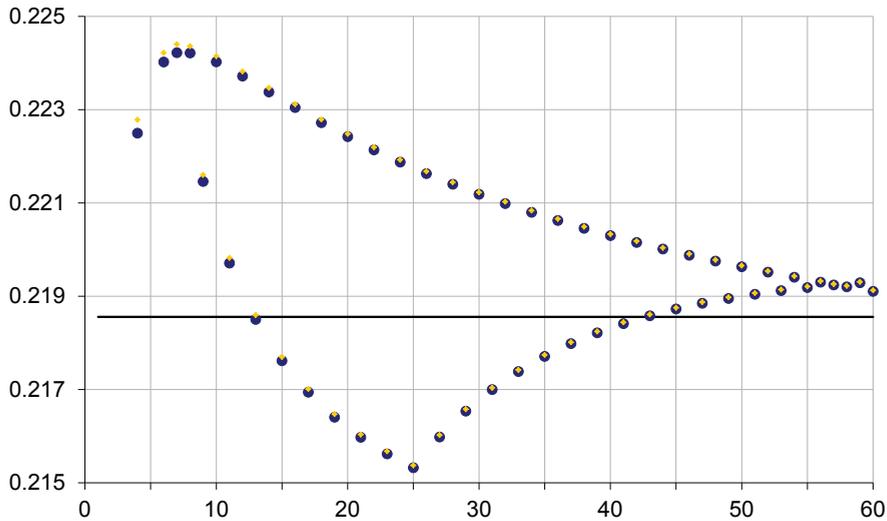
Figura 1. Evolución del precio subyacente



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

En la Figura 2 se observa la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto al precio del modelo de Merton (1973) que está representado por la línea negra horizontal y el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos oscuros y el modelo propuesto en este trabajo por los rombos claros en función del número de intervalos. La convergencia de ambos se da en el intervalo $n = 58$ con los valores $p(t, M_t) = 0.219201$ y $p_1(t, M_t) = 0.219222$, respectivamente. Se puede observar que la diferencia entre ambos modelos existe para los insumos utilizados y además se tiene que $p_M(t, M_t) < p(t, M_t) < p_1(t, M_t)$ para $n = 58$ intervalos y para los tres modelos se tiene el resultado $p_M(t, M_t) 0.218557 < p(t, M_t) = 0.217747 < p_1(t, M_t) = 0.217759$ cuando el número de intervalos es $n = 100$. Además, éste resultado se da para toda $n = 1, \dots, 100$, concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la valuación de la opción europea con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados. Considerando el volumen de operación de los mercados extrabursátiles las diferencias se presentan cuando

Figura 2. Convergencia de los modelos discretos al modelo de Merton (1973)



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

existen más de diez mil subyacentes involucrados o mil contratos que amparan cien subyacentes cada uno.

4.2 Valuación de la opción americana de venta

La importancia del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo se presenta en la posibilidad de la valuación de las opciones americanas de venta ya que actualmente no se tiene una ecuación cerrada, entonces se compara la valuación de la opción americana de la misma clase con los insumos utilizados por Valmer para la opción europea, utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), el modelo propuesto en este trabajo y se muestra la relación de ambos modelos de tiempo discreto con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987).

Utilizando el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) para la valuación de la opción americana de venta se tiene que:

$$P_{BAW}(t, M_t) = P_{BS}(t, M_t) + A_1 \left(M_t (M^*)^{-1} \right)^{q_1} = 0.222409$$

donde:

$$P_{BS}(t, M_t) = 0.218557, \quad m = 2i\sigma^{-2} = 4.188776, \quad N = 2(i-r)\sigma^{-2} = 3.863760$$

$$M(\infty) = S \left(1 - 2 \left(-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4m} \right)^{-1} \right)^{-1} = 10.307117$$

$$h_1 = - \left((i-r)\tau - 2\sigma\sqrt{\tau} \right) \left(S(S - M(\infty))^{-1} \right) = -0.607307$$

$$M^* = M(\infty) + (S - M(\infty)) \exp(h_1) = 11.736106$$

y además:

$$g(\tau) = 1 - \exp(-i\tau) = 0.009020$$

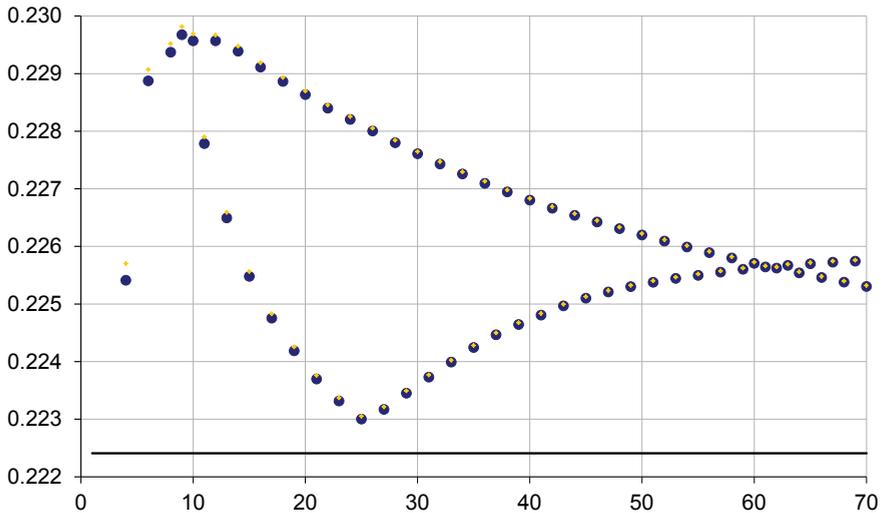
$$q_1 = -\frac{1}{2} \left((N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4mg^{-1}(\tau)} \right) = -23.028589$$

$$A_1 = -M^* q_1^{-1} \left(1 - \exp(-r\tau) \Phi(-d_1(M^*)) \right) = 0.048538$$

El precio subyacente se modela a través de la programación dinámica estocástica y se obtiene un resultado igual al de la Figura 1 y utilizando el principio de inducción regresiva, en función del número de intervalos, se obtiene el resultado presentado en la Figura 3.

En la Figura 3 se observa la convergencia de la valuación de la opción americana de venta donde el modelo Barone-Adesi y Whaley (1987) está representado por la línea negra horizontal, el modelo de Cox Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos oscuros y el modelo propuesto por los rombos claros en función del número de intervalos. La convergencia de los modelos de tiempo discreto se da en el intervalo $n = 60$ con el valor $P_{BAW}(t, M_t) = 0.222409$ para el modelo Barone-Adesi y Whaley (1987), con el valor $P(t, M_t) = 0.225707$ para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), y con el valor $P_1(t, M_t) = 0.225727$ para el modelo propuesto. La diferencia entre ambos modelos existe con los insumos utilizados, $P_{BAW}(t, M_t) < P(t, M_t) < P_1(t, M_t)$

Figura 3. Valuación de la opción americana sobre la paridad fix



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

cuando el número de intervalos es $n=60$ y también ocurre que $P_{\text{BAW}}(t, M_t) = 0.222409 < P(t, M_t) = 0.224431 < P_1(t, M_t) = 0.224443$ cuando $n=100$. La valuación de las opciones americanas $P_{\text{BAW}}(t, M_t) < P(t, M_t) < P_1(t, M_t)$ se cumple para toda $n=1, \dots, 100$ por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la valuación de la opción americana de venta con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados. Considerando el volumen de operación de los mercados extrabursátiles las diferencias se presentan con mil contratos que amparan cien subyacentes cada uno. Ambos modelos de tiempo discreto tienen una valuación superior con respecto al modelo de Merton (1973) y al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) de tal forma que $p_M(t, M_t) < P_{\text{BAW}}(t, M_t) < P(t, M_t) < P_1(t, M_t)$.

La valuación de opciones europeas y americanas con los insumos utilizados por Valmer, del 2 de enero de 2014, a través del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subvalúa el riesgo de mercado con respecto al modelo propuesto con la estimación de los parámetros a_1 y d_1 , sin embargo debido a la tricotomía de los números reales, representada por la ecuación, el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) puede valorar adecuadamente cuando $a_1 = a$ o sobrevalorar el riesgo de mercado cuando $a_1 < a$ con respecto al modelo propuesto. En el caso de las opciones americanas de venta no hay convergencia al modelo de Merton (1973) sin embargo de acuerdo a Martínez Palacios (2012) el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto, convergen, mediante un enfoque de control óptimo estocástico a $p_M(t, M_t) + (1 - \exp(-i\nu))f(M_t, g(\nu))$ que es el valor de una opción europea más un valor positivo que debe satisfacer algunas otras condiciones y como se ha mostrado el valor se aproxima al modelo Barone-Adesi y Whaley (1987). Entonces el modelo propuesto al igual que el modelo de Cox, Ros y Rubisntein (1979), utilizando matemáticas elementales, permite realizar la valuación de las opciones americanas de venta de una forma sencilla y computacionalmente eficiente.

4.3 Valuación de un warrant americano sobre Kodak

Valmer realiza la valuación de un warrant americano sobre la acción de Eastman Kodak Company, acción que no paga dividendos durante la vigencia del warrant y que es equivalente a la valuación de una opción americana de compra descubierta, con los insumos del día 22 de abril de 2014 siguientes: precio subyacente $M_0 = 29.65$ dólares, volatilidad subyacente $\sigma = 0.2944$, tasa de interés libre de riesgo $i = 1.60544805126257\%$, precio de liquidación $S = 14.93$ y periodo remanente $\tau = 1,595$ días para la fecha de vencimiento el día 3 de septiembre del año 2018. Utilizando el modelo de Black y Scholes (1973) para la valuación de la opción europea de compra se tiene que $c_{BS}(t, M_t) = 16.37157$, la valuación del proveedor de precios utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) con $n = 100$ intervalos es $c(t, M_t) = 16.374963$ y la valuación con el método propuesto es $c_1(t, M_t) = 16.373954$ donde $c_{BS}(t, M_t) < c_1(t, M_t) < c(t, M_t)$. Además

éste resultado se cumple para toda $n = 1, \dots, 100$, por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima la valuación de la opción americana de compra con respecto al modelo propuesto a partir de un contrato que ampara cien subyacentes y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados.

La diferencia entre la tasa de interés y la volatilidad es demasiado amplia, y en el modelo propuesto, la estimación de los parámetros a_1 y d_1 está en función de la tasa de interés, de la volatilidad y del tiempo remanente, el análisis de sensibilidad muestra que entre menor es la diferencia entre la tasa de interés y la volatilidad, los parámetros estimados satisfacen $a_1 > a$ y $d > d_1$, el riesgo de mercado es grande comparado con la tasa de interés esperada en la inversión, el riesgo es 18.3376 veces mayor que la tasa de interés libre de riesgo. Cuando la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 12.2\%$, entonces $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n = 1, \dots, 100$. Si la tasa de interés libre de riesgo es $i \geq 10\%$ y la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 30.4\%$, se tiene que $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n = 1, \dots, 100$. Si la tasa de interés libre de riesgo es $i = 25\%$ y la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 100\%$, entonces se satisface que: $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n = 1, \dots, 100$. Por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima el riesgo de mercado y la valuación del warrant americano equivalente a la valuación de la opción americana de compra con respecto al modelo propuesto en este trabajo.

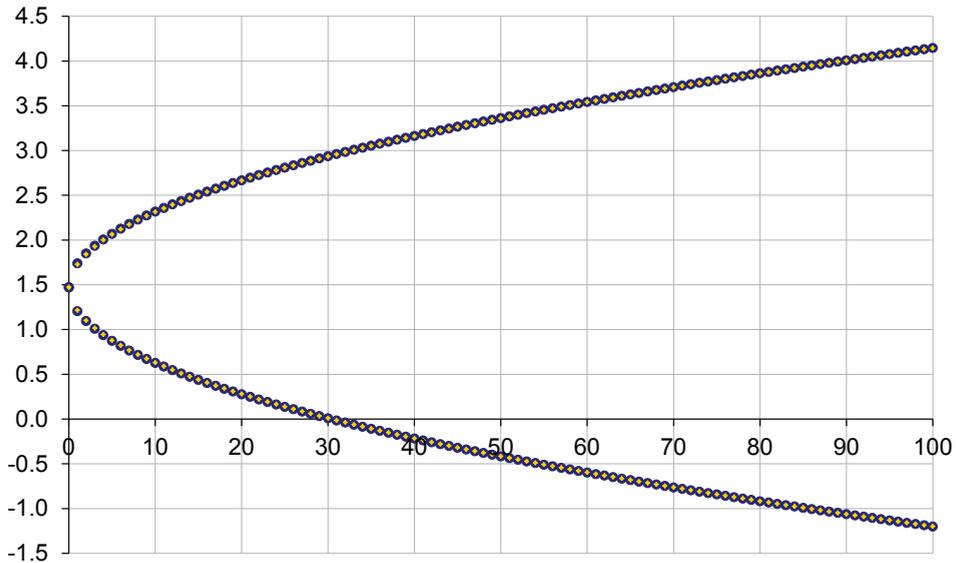
4.4 Valuación de una opción americana de venta sobre Kodak

Suponiendo que existe una opción americana de venta sobre Kodak de la misma serie que el warrant americano se realiza la valuación a través del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), del modelo propuesto en este trabajo y además se realiza y se presenta un análisis con los resultados siguientes:

La valuación de la opción europea de venta sobre Kodak realizada a través del modelo de Black y Scholes (1973) es $p_{BS}(t, M_t) = 0.640043$, utilizando los insumos del warrant americano sobre Kodak se modela la evolución del logaritmo precio subyacente en función del número de intervalos y se muestran los límites superiores e inferiores en la Figura 4.

En la Figura 4 se aprecia el modelado del logaritmo precio de Kodak, $(n, \log(M_n))$, a través de la programación dinámica estocástica en función del

Figura 4. Evolución del logaritmo del precio de Kodak



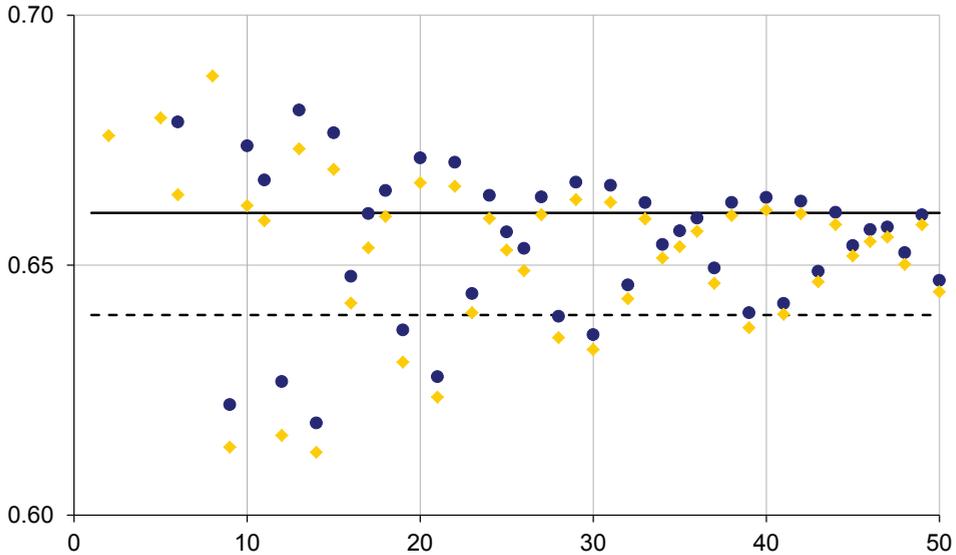
Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

número de intervalos $n = 1, \dots, 100$ y no se observa diferencia entre el precio subyacente para ambos modelos (en rombos claros el modelo propuesto), sin embargo para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) el precio máximo está dado a través del valor $M_0 a^n = 13,955.984640$, el precio mínimo es $M_0 d^n = 0.062993$ y para el modelo propuesto, los valores respectivos son $M_0 a_1^n = 13,917.960027$ y $M_0 d_1^n = 0.063165$, por lo cual se observa que los límites superiores e inferiores son $M_0 a^n > M_0 a_1^n$ y $M_0 d_1^n > M_0 d^n$, además, este resultado se presenta para toda $n = 1, \dots, 100$, por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima la evolución del precio subyacente con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica adecuadamente el riesgo de mercado.

Utilizando el principio de inducción regresiva, considerando el pronto ejercicio de la opción americana de venta y en función del número de intervalos, se obtiene el resultado de la Figura 5.

En la Figura 5 el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) está representado por la línea negra horizontal, el modelo de Black y Scholes (1973) está representado por la línea negra y discontinua horizontal el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos oscuros

Figura 5. Valuación de la opción americana sobre Kodak



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

y, el modelo propuesto por los rombos claros en función del número de intervalos, la convergencia se da por primera vez en el intervalo $n = 25$ con el valor $P(t, M_t) = 0.656664$ para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y con el valor $P_1(t, M_t) = 0.653002$ para el modelo propuesto, la convergencia siguiente es en el intervalo $n = 35$ donde $P(t, M_t) = 0.656873$ y $P_1(t, M_t) = 0.653685$, la tercera convergencia ocurre en el intervalo $n = 46$ donde $P(t, M_t) = 0.657113$ y $P_1(t, M_t) = 0.654730$ que son las valuaciones con los valores máximos para ambos modelos, el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) tiene el valor $P_{BAW}(t, M_t) = 0.660458$ y el modelo de Black y Scholes (1973) tiene el valor $p_{BS}(t, M_t) = 0.640044$. La diferencia entre ambos modelos de tiempo discreto existe y es notoria con los insumos utilizados, $P_{BS}(t, M_t) < P_1(t, M_t) < P(t, M_t) < P_{BAW}(t, M_t)$ para toda $n = 1, \dots, 100$ concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobrestima la valuación de la opción americana de venta sobre Kodak con respecto al modelo propuesto a partir de diez contratos que amparan cien subyacentes y en consecuencia el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado y el riesgo equivalente a la cobertura de la opción al utilizar los insumos dados. Ambos modelos tienen una valua-

ción superior con respecto al modelo de Black y Scholes (1973) y una valuación inferior con respecto al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) de tal forma que $p_{BS}(t, M_t) < P_1(t, M_t) < P(t, M_t) < P_{BAW}(t, M_t)$.

Las opciones americanas de venta no convergen al modelo de Black y Scholes (1973), sin embargo de acuerdo a Martínez Palacios, Sánchez Daza y Venegas-Martínez (2012) el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto, convergen, mediante un enfoque de control óptimo estocástico a $p_{BS}(t, M_t) + (1 - \exp(-iv))f(M_t, g(v))$ y como se ha mostrado en este trabajo el valor se aproxima al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) donde $P_{BAW}(t, M_t) = P_{BS}(t, M_t) + A$ para toda $A > 0$.

En el mercado mexicano organizado y en el extrabursátil no se realiza actualmente la valuación de opciones americanas de venta, por lo cual se ha tenido que recurrir a la valuación de opciones americanas de venta de la misma clase que las existentes de compra para mostrar las cualidades y diferencias entre el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo a través de la estimación de los parámetros a_1 y d_1 para modelar la evolución del precio subyacente a través del tiempo, y mediante las probabilidades libres de riesgo y el principio de inducción regresiva realizar la valuación de las opciones.

El teorema central de límite muestra que el modelo de Bachelier (1900) converge a un modelo gaussiano, bajo los supuestos del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) la convergencia es al modelo log-gaussiano de Black y Scholes (1973), y de Merton (1973), como se analiza en la publicación de Clement Hernández (2005), en modelo de Merton (1973) y en el Apéndice B de este trabajo. El modelo propuesto realiza la estimación de los parámetros a través de un sistema de ecuaciones y la convergencia también se da al modelo de tiempo continuo de Black y Scholes (1973) y de Merton (1973) para las opciones europeas y para las opciones americanas de compra. Por lo que la importancia y oportunidad de utilizar el modelo propuesto se presenta en la valuación de las opciones americanas de venta debido a la complejidad para la valuación de éstas opciones a través de los modelos de aproximación, de diferencias finitas, y de una fórmula analítica que proponen aproximaciones para la valuación de opciones mediante una excesiva complejidad y el uso de recursos de cómputo como es el caso del método Montecarlo.

La valuación de las opciones americanas de venta a través del método propuesto tiene diferencias con el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), el cual presenta una calibración elegante y que no incluye la tasa de interés

en los parámetros a y d , por lo cual puede subvaluar o sobrevaluar el riesgo de mercado con respecto al modelo propuesto, esto es debido a la propiedad de tricotomía de los números reales. En el modelo propuesto está incluida la tasa de interés libre de riesgo en los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a_1 y d_1 , los cuales representan el aumento y descenso en el precio subyacente. La tasa de interés libre de riesgo, efectivamente tiene una influencia menor que la volatilidad subyacente, pero debe ser considerada en el modelado del precio subyacente y en las probabilidades libres de riesgo para la cuantificación adecuada del riesgo de mercado y de la valuación de las opciones ya que es un factor de influencia en la teoría de valuación de opciones.

5. Conclusiones

El modelo en tiempo discreto de Cox, Ross y Rubinstein permite modelar el precio subyacente a través de la programación dinámica estocástica y por medio del principio de inducción regresiva se realiza la valuación de las opciones, en particular las opciones americanas de venta. Los parámetros propuestos por Cox, Ross y Rubinstein son elegantes ya que están en función de la volatilidad y el tiempo remanente, y se obtienen a partir del límite de la distribución binomial a la distribución log-gaussiana.

La estimación propuesta en este trabajo se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones y el resultado incluye a la tasa de interés, a la varianza proporcional y al tiempo remanente. La tasa de interés libre de riesgo es un factor que tiene menor influencia en la teoría de valuación de opciones, sin embargo el cambio en la tasa de interés libre de riesgo produce un cambio en la valuación de opciones debido al cambio en el modelado del precio subyacente y en el valor actual de éste. La estimación propuesta tiene diferencias con la estimación de Cox, Ross y Rubinstein, la cual es elegante, pero puede subestimar o sobreestimar el modelado del precio subyacente por la propiedad de tricotomía de los números reales, y como consecuencia subestimar o sobreestimar el riesgo de mercado y también se presentan diferencias en la valuación de las opciones subestimando o sobrestimando el riesgo por la cobertura. El modelo propuesto utiliza supuestos idénticos al modelo de Cox, Ross y Rubinstein, sin embargo la estimación de los parámetros a través de una ecuación de segundo grado es la diferencia del modelo propuesto y el resultado incluye a la tasa de interés en los parámetros de la probabilidad libre de riesgo y como un factor de influencia en el modelado del precio subyacente, de la cuantificación del riesgo y de la valuación de las opciones.

Se utilizan los insumos de una opción europea de compra sobre la paridad fix y los insumos de un warrant americano sobre la acción de Kodak y se compara la valuación teórica que realiza el proveedor de precios Valmer a través del método de Cox, Ross y Rubinstein con el modelo propuesto y la convergencia al modelo de Merton, al modelo de Black y Scholes y al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987), respectivamente, mostrando que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein subestima o sobreestima el riesgo de mercado y así también la valuación de las opciones debido a la propiedad de tricotomía de los números reales aun cuando el modelo propuesto utiliza los mismos supuestos y el mismo marco teórico como modelo de optimización para los flujos de efectivo en valor actual. En las opciones valuadas en este trabajo las diferencias se presentan a partir de un cierto número de contratos que amparan cien subyacentes, por lo que con un volumen mayor de operación en los contratos las diferencias son mayores.

Como investigaciones futuras se puede utilizar el modelo propuesto en la valuación de opciones reales como lo hacen Cruz Aranda (2012) y Milanesi (2013), y analizar un modelo de tiempo discreto y la estimación de parámetros de la probabilidad libre de riesgo para analizar la convergencia a un modelo de tiempo continuo con distribución log-estable para la valuación de opciones como se propone en las investigaciones de Contreras Piedragil y Venegas Martínez (2011) y de Climent Hernández y Venegas Martínez (2013).

Bibliografía

- Bachelier, L. J. B. A. (1900). *Théorie de la Spéculation*, PhD thesis, Sorbonne. www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17_21_0.
- Barone-Adesi, G. y Whaley, R. (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Options Values". *The Journal of Finance*, 42(2): 301-320.
- Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.
- Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1977). "The Valuation of American put Options". *The Journal of Finance*, 32(2): 449-462.
- Climent Hernández, J. A. (2005). "Valuación de opciones, Vínculo Matemático No. 38". Facultad de Ciencias, UNAM.

- Climent Hernández, J. A. y Venegas Martínez, F. (2013). "Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos α -estables". *Contaduría y Administración*, 58(4): 119-150.
- Contreras Piedragil, C. E. y Venegas-Martínez, F. (2011). "Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables". *Estocástica* 1(1): 55-71.
- Cox, J. y S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*, 3(1): 145-166.
- Cruz Aranda, F. (2012). "Procesos estocásticos en la valuación de proyectos de inversión, opciones reales, árboles binomiales, simulación bootstrap y simulación Montecarlo: flexibilidad en la toma de decisiones". *Contaduría y Administración*, 57(2): 83-112.
- Martínez Palacios, Ma. Teresa. V. (2012). "Modelo macroeconómico de riesgos de mercado y política fiscal incierta". Tesis, Escuela Superior de Economía, IPN.
- _____, y Sánchez Daza, Alfredo, Venegas-Martínez, Francisco (2012). "Valuación de opciones americanas: un enfoque de control óptimo estocástico en un horizonte finito con fecha final aleatoria". *Análisis Económico*, 64(XXVII): 165-183.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183.
- Milanesi, G. (2013). "El modelo binomial borroso y la valoración de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera". *Estocástica* 3(3): 55-118.
- Ross, S. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing". *Journal of Economic Theory*, 13(3): 341-360.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning Latin America. Segunda edición.
- Villeneuve, S. y Zanette, A. (2002). *Parabolic A.D.I. Methods for Pricing American Options on Two Stocks*. *Mathematics of Operations Research*, 27: 121-149.

Apéndice A

Valuación de opciones sobre subyacentes que pagan dividendos

Suponiendo que $\forall j=1, \dots, m$ el subyacente paga dividendos y se conoce por anticipado el valor de los dividendos $\{D_1, \dots, D_m\}$ en las fechas $\{0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_m \leq T\}$ donde $0 \leq \tau_j \leq T$ y $D_j \in [0, T]$, en las fechas τ_j en las que el subyacente paga los dividendos D_j , el subyacente disminuye de precio en un valor equivalente al pago del dividendo, entonces, el pago de dividendos disminuye el valor de las opciones de compra e incrementa el valor de las opciones de venta. El precio subyacente es modelado a través de la programación dinámica estocástica suponiendo que el precio subyacente es la suma del componente libre de riesgo y del componente con riesgo. El valor del componente libre de riesgo es:

$$D_\eta = \sum_{j=1}^m D_j \exp(-r(\tau_j - \eta\delta T)) \quad (27)$$

La volatilidad del componente con riesgo es:

$$\sigma_1 = \sigma \frac{M_0}{M_0 - D_0} \quad (28)$$

Sustituyendo la ecuación en B se tiene que:

$$B = -(\sigma_1^2 \delta T + u^2 + 1) \exp(-(i-r)\delta T) \quad (29)$$

donde las probabilidades libres de riesgo están expresadas por la ecuación siguiente:

$$\pi = \frac{u - d_1}{a_1 - d_1} \quad \text{y} \quad 1 - \pi = \frac{a_1 - u}{a_1 - d_1} \quad (30)$$

Por lo que el componente con riesgo se modela de la forma siguiente:

$$M_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}} = \begin{cases} \tilde{M}_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}} + D_\eta = \tilde{M}_0 a_1^k d_1^{\eta-k} + D_\eta & \text{si } \eta\delta T \leq \tau_j \\ \tilde{M}_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}} = \tilde{M}_0 a_1^k d_1^{\eta-k} & \text{si } \tau_j < \eta\delta T \end{cases} \quad (31)$$

donde:

$$\tilde{M}_0 = \begin{cases} M_0 & \text{si } \eta = 0 \\ M_0 - D_0 & \text{si } 0 < \tau_j < \eta \delta T \end{cases} \quad (32)$$

Apéndice B

Convergencia del modelo

Sea $\omega = \lfloor w \rfloor$ el número entero mínimo de movimientos del precio subyacente para que las opciones europeas estén dentro de dinero entonces la distribución complementaria es:

$$B(\omega; n, \pi) = \sum_{k=\omega}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \quad (33)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación se tiene:

$$V(0, M_0) = \left(\sum_{k=\omega}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} V(n, M_n^{a^k d^{n-k}}) \right) \exp(-iT) \quad (34)$$

Sean $\tilde{\pi} = a_1 \pi \exp(-i\delta\tau)$ y $\tilde{\theta} = 1 - \tilde{\pi} = d_1 (1 - \pi) \exp(-i\delta\tau)$, entonces se obtiene:

(35)

$$\begin{aligned} c(0, M_0) &= M_0 \exp(-rT) B(\omega; n, \tilde{\pi}) - S \exp(-iT) B(\omega; n, \pi) \\ p(0, M_0) &= S \exp(-iT) (1 - B(\omega; n, \pi)) - M_0 \exp(-rT) (1 - B(\omega; n, \tilde{\pi})) \end{aligned}$$

Sea $R_T = \ln\left(\frac{M_n}{M_0}\right)$, entonces $R = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \ln(X_k)$, entonces la tasa instantánea de crecimiento es:

$$\mu = \frac{1}{\delta T} (\pi \ln(a_1) + (1-\pi) \ln(d_1)) \quad (36)$$

La varianza de la tasa instantánea de crecimiento durante el periodo δT es:

$$\text{var}(R) = \frac{1}{T^2} \sum_{k=1}^n \text{var}(\ln(X_k)) \quad (37)$$

Por lo que la varianza de la tasa instantánea de crecimiento es:

$$\sigma^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{\delta T} \ln^2\left(\frac{a_1}{d_1}\right) \quad (38)$$

Sean $a_1 = a^* \exp(i\delta\tau)$ y $d_1 = d^* \exp(i\delta\tau)$, ya que $E(X) = \exp((i-r)T) = a_1\pi + d_1(1-\pi)$, entonces $a^*\pi + d^*(1-\pi) = 1$. Sea ρ el parámetro de riesgo tal que:

$$\exp(2\rho\sqrt{\delta\tau}) = \frac{a_1}{d_1} \quad (39)$$

Sustituyendo la ecuación (39) en la ecuación (38) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$1 = \pi + (1-\pi) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = 4\pi(1-\pi)\rho^2 \quad (40)$$

Por lo cual:

$$4\rho^2\pi^2 - 4\rho^2\pi + \sigma^2 = 0 \quad (41)$$

Resolviendo la ecuación (41) se obtiene que:

$$\pi = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \right) \quad \text{y} \quad 1 - \pi = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}} \right) \quad (42)$$

donde $0 < \sigma \leq \rho$ para satisfacer que $\pi \in [0,1]$.

De la ecuación (39) y $E(X) = \exp((i-r)T) = a_1\pi + d_1(1-\pi)$ se tiene

que:

$$a_1 = \frac{\exp(\rho\sqrt{\delta\tau} + i\delta\tau)}{\pi \exp(\rho\sqrt{\delta\tau}) + (1-\pi) \exp(-\rho\sqrt{\delta\tau})} \quad (43)$$

$$d_1 = \frac{\exp(-\rho\sqrt{\delta\tau} + i\delta\tau)}{\pi \exp(\rho\sqrt{\delta\tau}) + (1-\pi) \exp(-\rho\sqrt{\delta\tau})}$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación se tiene que la tasa de crecimiento esperada es:

$$\mu = i - r - \frac{\rho}{\sqrt{\delta\tau}} - \frac{1}{\delta\tau} \ln\left(\pi \exp(\rho\sqrt{\delta\tau}) + (1-\pi) \exp(-\rho\sqrt{\delta\tau})\right) \quad (44)$$

Resolviendo las ecuaciones y cuando $\rho = \sigma$, se tiene que $\pi = 1 - \pi = \frac{1}{2}$ por lo cual:

$$\mu = i - r - \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\tau} \ln\left(\frac{\exp(\sigma\sqrt{\delta\tau}) + \exp(-\sigma\sqrt{\delta\tau})}{2}\right) = i - r - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sigma_n^2 T \quad (45)$$

Sea $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ donde $Y_k = \frac{1}{T} \ln(X_k)$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{P}{=} N(n\mu_n, n\sigma_n^2) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2) \quad (46)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{P}{=} N(n\mu_n, n\sigma_n^2)$ significa que la variable aleatoria Z_n converge en medida (en probabilidad) a la variable gaussiana con media $n\mu_n$ y varianza $n\sigma_n^2$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$ significa que la variable aleatoria Z_n converge

en ley (en distribución) a la variable gaussiana con media μ y varianza σ^2 .

Por lo que el precio subyacente tiene una distribución log-gaussiana:

$$M_t = M_0 \exp\left(i - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dW_t \quad (47)$$

donde dW_t representa el proceso de Wiener, por lo tanto el modelo propuesto para valuar opciones europeas converge al modelo log-gaussiano.

Aplicación de análisis multifractal de exponentes de Hölder en mercados financieros mexicanos: índice accionario IPC y tipo de cambio USD/MXN

Stephanie Rendón De la Torre*

Fecha de recepción: 4 abril de 2014

Fecha de aceptación: 16 de julio de 2014

* Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración.
stretomx@gmail.com

RESUMEN

El modelo multifractal ha demostrado que es posible modelar sistemas económicos al describir una serie de tiempo financiera a través de su espectro multifractal. Este tipo de análisis ofrece la posibilidad de estudiar (entre otras características) la regularidad local de las series de tiempo (la cual es útil en la detección a priori y a posteriori de las caídas fuertes en los mercados). La propuesta de este trabajo es demostrar que a través de la evolución de los exponentes de Hölder y la detección de sus puntos irregulares, es posible estudiar la dinámica de los mercados financieros. Para evaluar y probar lo anterior, se determinaron los exponentes locales y puntuales de las series de tiempo históricas del índice IPC de México, y del tipo de cambio dólar americano/peso mexicano durante los años de 1992-2013 (utilizando precios de cierres oficiales diarios) y finalmente, se propone la posibilidad de anticipar y de detectar movimientos críticos en estas series de tiempo mediante la metodología definida.

El presente documento se divide de la siguiente manera: al inicio se incluye una introducción, en la primera parte se elabora una revisión de la literatura, en la segunda sección se analiza detalladamente la metodología aplicada, en la tercera parte se muestran y analizan los resultados obtenidos y finalmente, la última parte resume las conclusiones.

Clasificación JEL: C32, C53, C61, G17

Palabras clave: Exponentes de Hölder, Análisis Multifractal, Series de tiempo financieras

A Multifractal Analysis Application of Hölder Exponents in Mexican Financial Markets: Mexican Stock Index and Foreign Exchange USD/MXN.

ABSTRACT

The Multifractal Model has proven that it is possible to model economic systems by describing a financial time series through its multifractal spectrum. This type of model offers the possibility of study time series local regularity (among other characteristics) which allows to detect large market falls a priori and a posteriori. This paper aims to show that it is feasible to study financial markets dynamics through the evolution of Hölder Exponents and the detection of their irregularities. In order to assess and test the above mentioned, local and punctual exponents from the Mexican Stock Market (IPC) and Foreign Exchange financial series (considering official daily closing prices), from 1992 to 2013, were determined. Eventually, the possibility to anticipate and detect critical movements in the financial series studied, through the methodology stated, is proposed.

This paper is divided as follows: an introduction is presented, then section one includes a literature review, in section two the methodology used is described in detail, in the third section the results obtained are shown and analyzed, and in the last part conclusions are drawn.

JEL Classification: C32, C53, C61, G17

Keywords: Hölder Exponents, Multifractal Analysis, Financial Time Series

Introducción

El objetivo es evaluar los resultados de aplicar los exponentes de Hölder locales y puntuales a series de tiempo financieras correspondientes a mercados mexicanos. Estos exponentes son indicadores útiles para modelar y también son útiles en la detección de puntos críticos (en series de tiempo financieras) y son herramientas propias del análisis multifractal. Existe un algoritmo que calcula la regularidad de una serie de tiempo; este algoritmo parte del supuesto de que antes de que ocurra un evento crítico la dinámica intrínseca de una serie de tiempo financiera cambia de forma radical, dicho algoritmo es útil en el pronóstico de los cambios de precios agresivos. Este fenómeno se explica cualitativamente como una reducción universal de los horizontes de inversión al aproximarse un punto crítico, es decir, los operadores o inversionistas con horizontes de tiempo de largo plazo intentarán reducir sus posiciones (en inversiones cualesquiera que éstas sean) lo más posible antes de que el mercado se hunda, es decir, que el espectro de los horizontes temporales se ve reducido y como consecuencia se incrementa la regularidad de la serie de tiempo. Si se calcula la regularidad de una serie de tiempo financiera determinada, podrían pronosticarse posibles puntos críticos en el futuro (Kuperin & Schastlivtsev, 2001), es decir, momentos de crisis financieras.

Los modelos convencionales estadísticos financieros basados en supuestos de estacionariedad no pueden analizar apropiadamente los “cracks” o caídas dramáticas de precios en los mercados, precisamente porque las propiedades estadísticas de sus datos altamente no estacionarios son muy diferentes de las propiedades estadísticas de las estacionarias. Entonces, un modelo basado en datos obtenidos en tiempos estables y estacionarios no es de mucha utilidad al evaluar momentos de crisis.

Los sistemas complejos pueden ser divididos en dos categorías: Los sistemas en equilibrio y los que no están en equilibrio (Blackedge, 2008). Los sistemas complejos en equilibrio pueden conducir a estados críticos y mostrar estructuras fractales aleatorias en los que sus datos estadísticos poseen invariancia de escala. Por ejemplo, cuando los ferro magnetos son calentados y la temperatura se eleva, los spins de los electrones que contribuyen a ga-

nar energía al campo magnético comienzan a cambiar de dirección. A cierta temperatura, los spins forman un campo de vector aleatorio, con media cero y ocurre una fase de transición en la que el campo magnético promedia cero. Pero el campo no sólo es aleatorio, es auto afín ya que su distribución estadística es la misma a diferentes escalas, sin importar las características de la distribución. Los sistemas complejos que no están en equilibrio dan origen a estados críticos auto organizados, un ejemplo es el crecimiento de montículos de arena; eventualmente, se generarán pequeñas avalanchas ocasionadas por la fuerza de gravedad. Los valores estadísticos espaciales y temporales de dichas avalanchas presentan invariancia de escala.

Bajo este contexto, los mercados financieros pueden ser considerados como sistemas fuera de equilibrio (Blackedge, 2010) porque están siendo influenciados constantemente por transacciones que se producen como resultado de la incorporación de información nueva sobre las empresas y el entorno. En los sistemas complejos, los elementos se adaptan al patrón que crean; en tanto los componentes reaccionan, el todo cambia, y en tanto el todo cambia los componentes reaccionan. Las transacciones de los mercados generalmente ocurren globalmente a una tasa de cientos, miles o millones por segundo. Son la frecuencia y la naturaleza de estas transacciones las que dictan los índices de los mercados, de la misma forma que la frecuencia y la naturaleza de las partículas en la arena dictan la estadística de las avalanchas de las dunas de arena; todos estos son ejemplos de fractales escalantes (Mandelbrot, 1970, Feder, 1988). La relación entre los sistemas dinámicos, el caos y la economía es importante porque los sistemas dinámicos muestran que la aleatoriedad y el determinismo global pueden coexistir.

1. Revisión de la literatura

De acuerdo al punto de vista académico de que los mercados son eficientes, sólo la información negativa relevante podría causar una crisis financiera (Samuelson 1964 y Fama 1970, 1991), sin embargo hasta ahora el enfoque lineal de la estructura de los mercados no puede explicar con exactitud las caídas altamente frecuentes en los mercados financieros; por otra parte, los mercados han mostrado ser similares a los sistemas dinámicos complejos. La idea de investigar y analizar mercados durante las épocas de crisis financieras está basada en la evidencia científica en física de que los sistemas dinámicos complejos revelan sus propiedades mejor bajo condiciones de estrés que en circunstancias normales (Johansen, Sornette & Ledoit, 2000).

La investigación en los últimos treinta años ha dado diversos avances en cuanto a ciertas técnicas no lineales aplicadas en los mercados. En 1997 y en 2000 Mantegna y Stanley encontraron que las distribuciones financieras concuerdan con las distribuciones estables de Lévy y que las colas de las distribuciones de las acciones en general describen un comportamiento que incluye leyes de potencia, es decir encontraron evidencia de escalamiento en sus investigaciones. En 1997, Mandelbrot junto con otros autores, desarrollaron un modelo multifractal de activos (Mandelbrot, Fisher y Calvet 1997); Peters (1991) y Hilborn (1994) también han publicado diversos libros y artículos de investigación con aplicaciones y modelos fractales y multifractales a las series de tiempo financieras.

Costa y Vasconcelos (2003) construyeron coeficientes de Hurst del mercado brasileño a partir de un modelo multifractal para pronosticar crisis en dicho mercado; Kuperin *et al.* utilizaron los exponentes de Hölder para analizar la crisis financiera de los Estados Unidos de 1987. Cornelis y Rossitsa (2004) analizaron los patrones de los espectros multifractales de la crisis financiera de 1987 y concluyeron que hay un patrón de cambio en la dinámica de los mercados antes de que las crisis ocurran.

Otros estudios como los de Sornette (2003) también demuestran las propiedades multifractales y su relación con los exponentes de Hölder. Johansen, Sornette & Ledoit (2000) encontraron que las oscilaciones log-periódicas aparecen en el precio de los activos justo antes de que ocurra una caída agresiva, y que esas oscilaciones se pueden detectar mediante análisis multifractal.

De acuerdo a Sornette, Johansen & Bouchaud (1996) la conducta de los mercados accionarios antes de una crisis se relaciona con la conducta volátil que precede a un conjunto de datos en estado de equilibrio. Esta observación habilita y hace posible la detección temprana (y de advertencia) de caídas o crisis en los mercados financieros partiendo de la idea de que un mercado financiero que funcione normalmente exhibe propiedades de un sistema dinámico complejo.

La Tabla 1 muestra las características y diferencias más notables entre la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) y la Hipótesis del Mercado Fractal (HMF):

Análisis multifractal

El análisis multifractal es relativamente reciente en el campo de estudio de las matemáticas (Feder, 1988). Al tener características universales, sus apli-

Tabla 1: Diferencias más notables entre HME y HMF:

Hipótesis del Mercado Eficiente	Hipótesis del Mercado Fractal
Estadística Gaussiana. Retornos independientes normalmente distribuidos.	Estadística No Gaussiana. Los cambios en los precios no están distribuidos de forma normal. Pueden caer más rápido de lo que se elevan.
Movimiento browniano geométrico: 0.50 o Raíz cuadrada del tiempo para escalar volatilibades a diferentes periodos de tiempo.	Movimiento browniano fraccionario: Leyes de potencia o escala.
Procesos estacionarios.	Procesos no estacionarios.
No hay correlaciones históricas.	Hay correlaciones históricas.
No hay memoria. Eventos pasados no influyen el presente o el futuro.	Existe memoria (los eventos están interconectados). Los inversionistas están influenciados por lo ocurrido. Sus expectativas están basadas en experiencias anteriores.
No se repiten (o muy raramente) los patrones a ninguna escala.	Se repiten patrones en todas las escalas de tiempo (minutos, días, años).
Continuas y estables en todas las escalas.	Se presentan discontinuidades en cualquier escala. (Por ej. Vuelos de Lévy o eventos tipo cisnes negros)
Toda la información se refleja en los precios.	Cada individuo interpreta la información de diferentes formas y en distintos momentos. (En ocasiones la información no se asimila de forma inmediata ni en un solo periodo de tiempo, a veces la información del presente tiene efectos claros en el futuro).
Los inversionistas son adversos al riesgo, y son racionales.	Los inversionistas pueden actuar de forma irracional, y pueden buscar riesgo cuando hay peligro de perder valor.

*Fuente de elaboración propia.

caciones no sólo se dan en las matemáticas o en la física, sino también en otras áreas como en la lingüística, medicina, informática y por supuesto en la econofísica.

Las crisis de los mercados sugieren que las caídas son precedidas por un incremento de susceptibilidad y señales precursoras similares a la inestabilidad crítica de la dinámica física de los fluidos, por eso el análisis de espectros multifractales puede revelar la existencia de un patrón precursor identificable.

Exponentes de Hölder

Existen varias maneras de medir la regularidad de una función alrededor de un determinado punto. La más conocida es usando el exponente puntual de Hölder, pero existen otras como la del exponente local de Hölder.

Un exponente de Hölder da una medida de la regularidad de una señal y se usa para detectar la presencia de discontinuidad y cuándo ocurre dicha discontinuidad en una señal dinámica. Así, la regularidad de una señal está definida por el número de derivadas continuas que una señal posee. Primero, el origen del tiempo de variación del exponente de Hölder se obtiene basándose en una transformada wavelet. Como los puntos discontinuos no tienen derivadas continuas, estos puntos se identifican localizando puntos en el tiempo donde el valor de exponente de Hölder cae repentinamente. Luego, un indicador se desarrolla para cuantificar los cambios significativos en este exponente de Hölder (Sohn, Robertson & Farrar, 2002).

Los exponentes son una herramienta útil en el procesamiento de señales e imágenes, además de tener aplicaciones en las finanzas. Adicionalmente, la distribución estadística de los exponentes de Hölder es utilizada para caracterizar señales naturales a través de análisis multifractal.

Las estructuras singulares e irregulares de los sistemas complejos usualmente poseen información esencial en su señal; para caracterizar estas estructuras es necesario cuantificar la regularidad local de una señal $f(t)$.

2. Metodología

Existen diversas técnicas que han sido desarrolladas para estimar los exponentes locales y puntuales de Hölder, pero no todas dan resultados satisfactorios. Estimar un indicador de irregularidad local sobre datos discretos es una tarea difícil. El método utilizado para los exponentes puntuales y locales en este trabajo está basado en la evaluación de las oscilaciones. Se utilizó el programa de MATLAB (Fraclab) en la determinación de los exponentes locales y puntuales de Hölder.

Exponente puntual

La diferencia entre la estimación del exponente puntual y el local, es que el exponente puntual caracteriza la regularidad de la función en un punto dado, y el exponente local se relaciona con la regularidad de una función determinada, alrededor de un punto determinado.

Un punto en una función altamente irregular está caracterizado por un valor bajo del exponente puntual de Hölder, mientras que las partes regulares y suavizadas de una función presentan valores más altos, es decir, este exponente cuantifica la rugosidad de la función de una gráfica. Cuando el valor tiende a cero, es indicador de alta irregularidad en una señal, lo que se interpreta como un indicador de inestabilidad en los mercados financieros (Figliola, Rosenblatt & Serrano, 2012).

Sea $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$... y... $x_0 \in \mathbf{R}^2$ tal que f no es diferenciable en x_0 .

El exponente puntual de Hölder de f en x_0 es el número real:

$$\alpha_p(x_0) = \liminf_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + h) - f(x_0)|}{\log \|h\|} \quad (1)$$

donde $\| \cdot \|$ denota la norma euclidiana en \mathbf{R}^2 . Esta definición se ilustra en la siguiente Figura 1 que establece que, para cualquier $\mathcal{E} > 0$, la gráfica de f , en una región suficientemente pequeña de x_0 , está incluida en la ecuación:

$$\pm |x - x_0|^{\alpha_p(x_0) - \mathcal{E}} \quad (2)$$

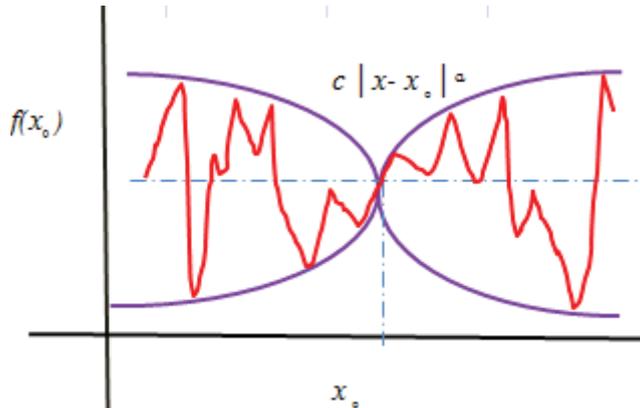
Pero no en la ecuación:

$$\pm |x - x_0|^{\alpha_p(x_0) + \mathcal{E}} \quad (3)$$

La ecuación 1 da un vínculo de la cantidad por la cual una señal varía u oscila alrededor de un punto x_0 dentro de una región $B(x_0, n)$. A partir de la definición y la Figura 1, se puede ver que una pequeña α cercana al valor de cero se traduce en una señal altamente variable, mientras que una α cercana al valor de uno, corresponde a una señal más suave.

Según Trujillo, Legrand, Olague y Lévy-Vehel (2012) el método acertado para estimar α sería usar los incrementos y directamente aplicar la ecuación 1, explicada previamente, sin embargo se deben hacer ajustes y reescribir dicha ecuación tomando en cuenta las oscilaciones. Sea la siguiente expresión la definición de oscilación que es la que se utilizó para efectos de este trabajo:

Figura 1: Envoltente de Hölder en una señal no diferenciable f en un punto x_0 .



*Fuente: Elaboración propia. Esta gráfica no contiene datos reales es únicamente para explicar de forma gráfica el comportamiento de una señal a partir del valor de α .

La oscilación de f en una bola centrada en t es:

$$osc_{\tau}(t) = \sup_{||t-t'|| \leq \tau} f(t') - \inf_{||t-t'|| \leq \tau} f(t') \quad (4)$$

Se puede expresar el exponente de Hölder en términos de las oscilaciones (cuando es menor a uno).

Entonces, una definición alternativa del exponente de Hölder es:

$$\alpha_f(t) = \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log osc_{\tau}(t)}{\log \tau} \quad (5)$$

Para estimar $\alpha(t)$ con esta fórmula, el límite inferior es de hecho un límite y se asume la siguiente relación para un τ suficientemente pequeña:

$$\log osc_{\tau}(t) = \alpha_f(t) \log \tau + k \quad (6)$$

Donde k es una constante. Se estima $\alpha_f(t)$ como la pendiente de la regresión de los mínimos cuadrados del logaritmo de la oscilación como función del logaritmo de tamaño τ .

Los parámetros en este método basado en las oscilaciones son los tamaños mínimos y máximos de la región τ , y la base de incremento τ entre sus valores extremos.

Un exponente puntual cercano a uno revela altos niveles de regularidad y uno cercano a cero revela niveles de muy poca regularidad.

Exponente local

Para determinar el exponente local de Hölder, primero definimos que (Agaev, Kuperin 2005):

$f(x)$ pertenece a la clase de funciones de Hölder del orden de α , si se cumple:

$$|f(t+h) - f(t)| < const \times h^\alpha ; t, h, \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7)$$

Una función de Hölder es aquella que asocia a cada punto un exponente de Hölder.

En el caso de que α dependa de t , por ejemplo: $\alpha \rightarrow \alpha(t)$, entonces $\alpha(t)$ tiene un exponente local de Hölder.

Cuando $\alpha = 1$, coincide con la clase diferenciable de funciones; cuando $\alpha = 0$, coincide con la clase de funciones discontinuas, por lo tanto, la clase de funciones de Hölder está en un punto intermedio entre las funciones continuas y las discontinuas, y el exponente de Hölder es una medida de la función de irregularidad.

Para obtener un exponente local, se parte de información expresada en una dimensión, por ejemplo una serie de datos:

Sea $Y(t)$ el precio de un activo, luego la medida asociada con las series de tiempo estudiadas puede ser definida de la siguiente manera:

$$X(t, \Delta t) = (\ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t))^2 \quad (8)$$

Luego se divide el intervalo de tiempo $[0, T]$ entre N intervalos del tamaño de Δt y se define la suma de la muestra:

$$Z_r(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |X(i \times \Delta t, \Delta t)|^r \quad (9)$$

En términos de una muestra, se puede definir la siguiente función de escala:

$$\tau(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln Z_r(T, \Delta t)}{\ln \Delta t} \quad (10)$$

El espectro de la dimensión fractal de los retornos logarítmicos cuadrados, $X(t, I)$ se define como:

$$D_r = \frac{\tau(r)}{r-1} \quad (11)$$

Finalmente, para obtener el exponente local de Hölder se debe diferenciar $\tau(r)$

$$\alpha = \frac{d\tau(r)}{dr} \quad (12)$$

Entonces se puede determinar si la serie de tiempo es multifractal o no. Si $D_r \neq D_0$ para r real, entonces $X(t, 1)$ es multifractal. Para series de tiempo monofractales la función de escala $\tau(r)$ sólo es lineal. Las series multifractales se pueden caracterizar por sus exponentes de Hölder locales:

$$\alpha(t) = X(t, \Delta t) \sim (\Delta t)^{\alpha(t)} \quad (13)$$

En el modelo clásico de precios de activos: $\alpha(t) = 1$

Un exponente local que resulte entre valores de cero y de uno significa que la señal es continua pero no diferenciable en un cierto punto. Adicionalmente, el valor más bajo del exponente significa mayor irregularidad en la señal.

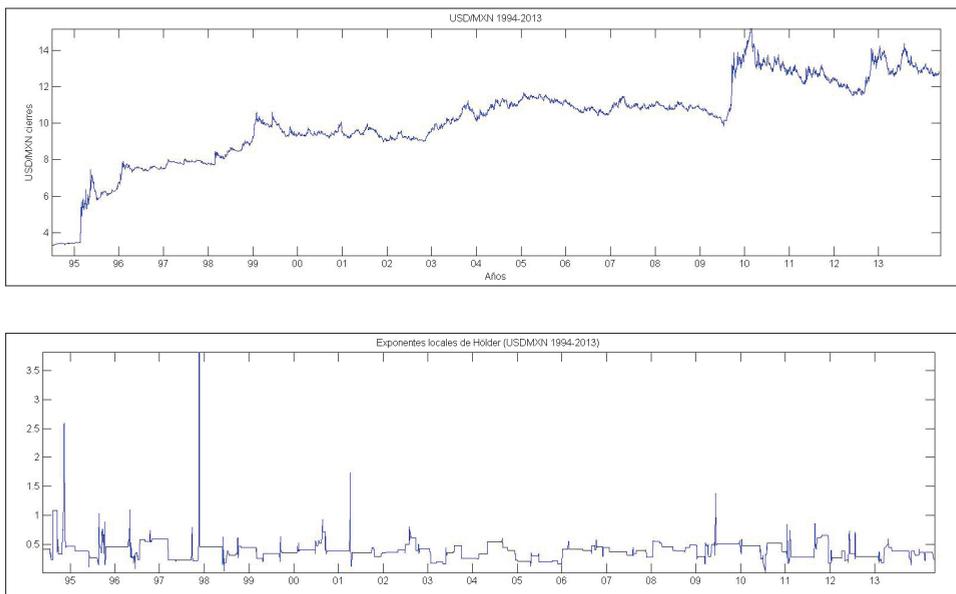
3. Resultados

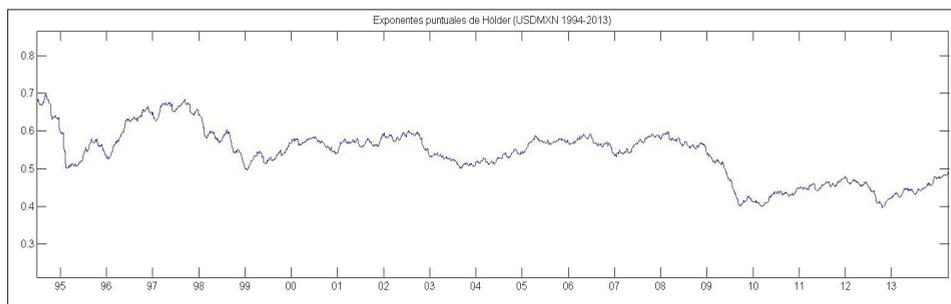
Se analizaron datos de cierres diarios de mercado, tanto del índice accionario de México IPC como del tipo de cambio dólar/peso mexicano. Los periodos de tiempo analizados fueron desde 1992 a febrero de 2013, respectivamente. En estos resultados se muestra que existen patrones que pueden modelar correctamente los momentos de crisis o caídas e incluso como alertas para anticipar una crisis, y que dichos patrones han mostrado funcionar bien en los datos analizados.

La Figura 2, consta de tres gráficas, en ellas se señalan con líneas verticales punteadas continuas las épocas de crisis que fueron detectadas exitosamente por los exponentes locales de Hölder. Las líneas verticales discontinuas y el círculo discontinuo son caídas detectadas por los exponentes puntuales, que no detectaron los exponentes locales.

La primera gráfica muestra los cierres del tipo de cambio dólar/peso mexicano. En la segunda gráfica se muestran los exponentes locales de Hölder correspondientes a cada periodo. En la tercera gráfica se muestran los exponentes puntuales que corresponden a cada periodo.

Figura 2: Tipo de cambio USD/MXN por el periodo de 1994-2013, exponentes locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder





Cuando se obtienen exponentes locales y puntuales con valores entre 0 y 1, significa que la señal es continua pero no diferenciable en un punto determinado; adicionalmente entre más pequeño sea el valor de un exponente significa que la señal es más irregular y entre más se aproxime a 1 es más regular. En los exponentes locales, se observan algunos puntos que superan el valor de 1, y precisamente estos puntos son indicadores de crisis. De acuerdo con la metodología de Agaev y Kuperin (2005), las crisis se pueden detectar por la caracterización de periodos de muy alta regularidad seguidos de periodos prolongados de mucha irregularidad. Esto es, que las crisis o los cambios fuertes (ya sean hacia arriba o hacia abajo) ocurren después de encontrarse exponentes locales con valores por encima de 1 seguidos de exponentes con valores muy bajos cercanos a 0 por tiempos prolongados.

Hay 7 regiones en la gráfica de los exponentes locales donde se supera el exponente con valor 1, sin embargo, sólo 5 de estos puntos presentan exponentes locales mayores a 1 seguidos de exponentes locales cercanos a cero y que corresponden a caídas fuertes.

Como se puede observar, las líneas rectas continuas punteadas de la gráfica de los exponentes locales aparecen después de que se detecta un patrón de crisis (un punto con exponente local superior a uno y luego exponentes cercanos a cero). De esta forma, los exponentes locales detectaron exitosamente 4 momentos de caídas fuertes, en 1994, 1995, en 1998 y en 2009-2010. Un aspecto interesante de los exponentes es que modelan y replican los cambios en la estructura de la señal o de la serie de tiempo.

El primer y segundo patrón de crisis detectado fue a finales del año 1994 en el año 1995; coincide con la crisis mexicana denominada «Efecto Tequila» (Mussachio, 2012) y sus efectos cambiarios posteriores.

El segundo patrón detectado corresponde al año de 1998, el cual coincide con los efectos en América Latina derivados de la crisis asiática. El peso continuó perdiendo valor frente al dólar durante todo ese año y el que siguió.

El tercer patrón detectado es en el año 2009 y coincide con la crisis mundial que azotó el mundo y los mercados en general y que tuvo como consecuencia la desaceleración económica de Estados Unidos y la pérdida de valor del peso frente al dólar.

Para el caso de los exponentes puntuales las regiones circuladas muestran congruencia con los patrones de crisis encontrados en los exponentes locales, es decir, las regiones en las que el exponente puntual resultó muy cercano a cero, coinciden con los momentos en los que sucedieron las caídas detectadas en los años 1994, 1995, 1998, y 2009; sin embargo, los exponentes puntuales revelan otro patrón de caída que ocurre a mediados de 2012 y que no es detectado por los exponentes locales, y que corresponde a una caída fuerte del peso frente al dólar. En la primera gráfica de precios, se puede apreciar que la caída ocurre después de que el exponente puntual lo indica.

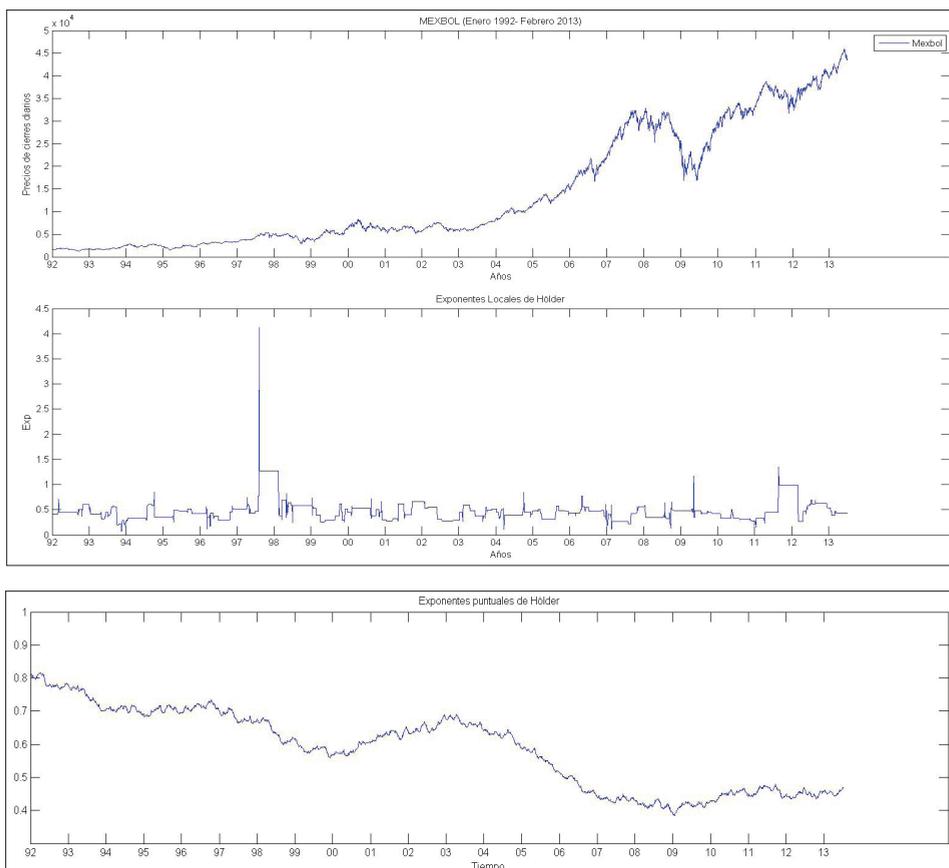
La Figura 3, está dividida en tres gráficas; la primera muestra la serie de tiempo completa analizada del índice accionario de México: IPC, la segunda gráfica muestra los exponentes locales y la tercera los exponentes puntuales. Las líneas punteadas rectas muestran el periodo en el que se muestra una baja fuerte o crisis en el mercado y que fue detectada exitosamente por los exponentes de locales. Los círculos punteados muestran las caídas fuertes detectadas por los exponentes puntuales.

Se detectaron exitosamente 3 patrones de caídas en los exponentes locales. Los exponentes puntuales detectaron los mismos puntos, pero además los exponentes puntuales detectaron que la serie de tiempo a lo largo del tiempo se ha vuelto cada vez más irregular. Se detectaron caídas en 1997-1999, luego en el año 2009 y en el 2011.

En el año 1994 hay un exponente local cuyo valor no llega al de uno pero es muy alto, e indica un cambio en la dinámica del comportamiento de precios, lo que coincide con la crisis de finales 1994 en México; otro detalle interesante es que en 1994 el exponente local llega al valor de cero, lo que muestra que el comportamiento de la serie de tiempo fue irregular durante ese año y hubo muchos movimientos muy bruscos en las subidas y bajadas de precios; los exponentes puntuales también detectan este cambio y aunque no llegan a ser muy cercanos a cero, registran una disminución por el periodo de mediados de 1994 hasta mediados de 1995.

A partir de mediados del año 1997, los exponentes locales detectan un cambio drástico ya que el valor del exponente llega a ser hasta de 4, y luego se reduce a valores muy bajos, lo que representa un patrón de crisis. Este punto coincide con la crisis asiática que se gestó en 1998. Los exponentes puntuales

Figura 3: Índice de la Bolsa Mexicana de Valores: IPC 1992-2013, exponentes locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder



detectaron irregularidades desde el año de 1997, esto coincide con lo detectado por los exponentes locales.

Los exponentes locales detectaron otra caída fuerte en 2009 y otro patrón de caída en 2011 que coincide con una caída drástica en el IPC.

4. Conclusiones

La aportación fundamental de este trabajo es que al no encontrarse estudios o aplicaciones anteriores de este tipo de análisis multifractal para analizar específicamente el caso mexicano, es decir el índice IPC y el tipo de cambio

dólar/peso mexicano, presenta los resultados obtenidos de estos mercados a partir de la evolución de la dinámica de los exponentes de Hölder de sus respectivas series de tiempo. Además, a partir de estos resultados, se recomienda que al analizar series de tiempo financieras se analicen ambos exponentes, tanto el puntual como el local, ya que existió un caso en el que los exponentes puntuales detectaron una caída que los exponentes locales no, lo que conduce a pensar que los exponentes locales y puntuales de Hölder son análisis complementarios al buscar patrones de crisis.

Otra propuesta derivada de este trabajo es pues, el estudio de la dinámica de los mercados financieros a partir de la evolución de los exponentes locales y puntuales de Hölder, o de los puntos singulares/irregulares de las series de tiempo. Más allá de identificar con éxito las caídas *a posteriori*, los exponentes de Hölder podrían servir para identificar patrones que puedan prevenir caídas en los mercados financieros ya que en algunos casos, las caídas se detectaron de forma previa y un instrumento útil en el modelado y posible detección de patrones de caídas resulta útil en la gestión de riesgos financieros para inversionistas o departamentos de riesgos de alguna empresa.

En este estudio, se encontró que los exponentes locales y puntuales de Hölder pueden ser una herramienta útil para modelar el comportamiento y la detección de patrones de caídas en los mercados, ya que detectaron suficientemente bien ciertos eventos críticos en las series de tiempo del tipo de cambio dólar/peso mexicano y en el índice accionario de México IPC. El análisis multifractal realizado tanto a la serie de tiempo del índice de México IPC como al mercado cambiario de USD/MXN, en el periodo 1992-2013 reveló que la variación temporal de los exponentes puntuales y locales de Hölder refleja la evolución de las crisis y caídas, y detectó correctamente los eventos históricos que se desarrollaron durante ese fenómeno.

Los exponentes de Hölder pueden aplicarse a diferentes mercados con distintas dinámicas como los mercados cambiarios y los accionarios y muy posiblemente serían útiles en otros mercados como los de *commodities*, deuda y derivados. La propuesta derivada de este trabajo sería extender el análisis realizado a otro tipo de mercados para probar su efectividad.

La presente investigación concuerda con los resultados de investigaciones previas como las de Agaev y Kuperin (2005), Figliola, Rosenblatt y Serrano (2012) y Kuperin y Schastlivtev (2001) en las que aplican análisis multifractal utilizando los exponentes para detectar patrones de crisis en otros mercados.

Bibliografía

- Agavev, I.A., Kuperin Yu. A. (2005). Multifractal Analysis and Local Hölder Exponents Approach to Detecting Stock Market Crashes.
- Ayache A., Lévy-Vehel, J. (2004). "On the identification of the pointwise holder exponent of the generalized multifractional Brownian motion". *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 111 (1), p. 119-156.
- Blackedge, J. M., (2008). "Application of the Fractal Market Hypothesis for Macroeconomic Time Series Analysis". *ISAST Transactions on Electronics and Signal Processing*, Vol. 1(2).
- _____ (2010). "Systemic Risk Assessment using a Non-stationary Fractional Dynamic Stochastic Model for the Analysis of Economic Signals." *ISAST Transactions on Computers and Intelligent Systems*, Vol. 2 (1), p. 76 – 94.
- Cornelis, A., Rossitsa, Y. (2004). "Multifractal Spectral Analysis of the 1987 Stock Market Crash". Kent State University, recuperado de <http://65.54.113.26/Publication/58551073/multifractal-spectral-analysis-of-the-1987-stock-market-crash>.
- Costa R., Vasconcelos G. L. (2003). "Long Range Correlations and Nonstationarity in the Brazilian Stock Market". *Physica A*, 329, p. 231-248.
- Fama E.F. (1970). "Efficient Capital Market: Review of Theory and Empirical Work". *The Journal of Finance*, 25.
- _____ (1991). "Efficient Capital Markets: II, *The Journal of Finance*". Vol. 46(5).
- Feder, J. (1988). "Fractals". *Plenum Press*, New York, London, p. 254.
- Figliola A., Rosenblatt M., Serrano, E.P. (2012). "Local Regularity Analysis of Market Index for the 2008 Economical Crisis". *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* 2012, Vol. 19 (1), p. 65-78.
- Hilborn (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press.
- Jaffard, S (2004). Wavelet techniques in multifractal analysis. In: *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 72, p. 91-151.
- Johansen, A., Sornette D., Ledoit O. (2000). "Crashes as Critical Points". *International Journal for Theoretical & Applied Finance*, Vol. 3(2), p. 219-255.
- Kuperin Y.A, Schastlivtsev R.R. (2001). Modified Holder Exponents Approach to Prediction of the USA Stock Market Critical Points and Crashes". Saint Petersburg State University, Russia.

- Mandelbrot, B. (1970). *La geometría fractal de la naturaleza*. España, Matemas, Tusquets Editores.
- _____, y Fisher A., Calvet L. (1997). "A Multifractal Model of Asset's Returns". *Cowles Foundation Discussion Paper, #1164*.
- Mantegna R., Stanley H (1997). *Physica A*, 239.
- _____. (2000). *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.
- Mussachio, A. (2012). "Mexico's financial crisis 1994-1995". *Working Paper 12-101*, May 2012, Harvard Business School.
- Peters, E.E. (1991), *Chaos, order in the capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Samuelson P.A. (1964). Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6.
- Sohn H., Robertson Amy N., Farrar C. R., (2002). "Singularity Detection Using Hölder Exponent". *Proceedings of the US-Korea Workshop on Smart Infrastructural Systems*, Pusan, South Korea.
- Sornette, D. A., Johansen J., Bouchaud, P. (1996). "Stock Market Crasher, Precursors and Replicas". *Journal of Physics in France*, 6, p. 167-175.
- _____. Why Stock Market Crash, *Physics Reports*, V. 378 p. 1-100.
- Trujillo L., Legrand, P., Olague G., Lévy-Véhel J., (2012). "Evolving estimators of the Pointwise Hölder Exponent with Genetic Programming". *Information Sciences*, Elsevier. Vol. 209, p. 61-79.

Convocatoria abierta

La revista **Estocástica: finanzas y riesgo**, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. Estocástica es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- ❖ Administración y análisis de riesgos financieros.
- ❖ Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- ❖ Diseño de instrumentos financieros.
- ❖ Econometría financiera.
- ❖ Finanzas computacionales.
- ❖ Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- ❖ Finanzas matemáticas.
- ❖ Ingeniería financiera.
- ❖ Innovación financiera.
- ❖ Mercados financieros.
- ❖ Modelado del comportamiento de instrumentos financieros
- ❖ Modelado matemático de riesgos.
- ❖ Modelos de regulación financiera.
- ❖ Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- ❖ Teoría financiera.
- ❖ Teoría del riesgo.
- ❖ Valuación de activos financieros.

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica del departamento de administración de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

CALL FOR PAPERS

Estocástica: finanzas y riesgo will consider for possible publication articles written in Spanish or English, provided they contain unpublished work. *Estocástica* is published twice a year and its objective is to contribute to developing knowledge in the areas of finance, risk management and modeling and financial engineering. *Estocástica* promotes communication of original research results, either theoretical or empirical, related to the study and practice of the above mentioned disciplines and the following research lines:

- ❖ Financial risk analysis and management
- ❖ Financial instruments design
- ❖ Financial and economic analysis and modeling
- ❖ Financial econometrics
- ❖ Computational finance
- ❖ Mathematical finance
- ❖ Behavioral finance applying quantitative methods
- ❖ Financial engineering
- ❖ Financial innovation
- ❖ Financial markets
- ❖ Financial instruments modeling
- ❖ Mathematical risk modeling
- ❖ Financial regulation modeling
- ❖ Stochastic processes applied to finance
- ❖ Financial theory
- ❖ Risk theory
- ❖ Financial asset valuation

In addition to these research lines, closely related original manuscripts will be accepted according to the editorial guidelines published in the web site of the Departamento de Administración, of the Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Research papers will be reviewed by an experts' panel and those accepted will be scheduled for publication.

Manuscripts should be sent to estocastica@azc.uam.mx. Further information may be obtained dialing 5318-9454 ext. 157 or 154.

Authors grant, by sending a research work for review and possible publication, the legal authorization to *Estocástica: finanzas y riesgo* for publishing it in print and electronic formats. In addition, authors will be fully responsible for any legal acts pursued by third parties questioning the authorship and originality of their research work freeing the Universidad Autónoma Metropolitana of any legal or economic responsibility associated to such claims.

CS
H *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco

DEPARTAMENTO
DE SISTEMAS

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros

ISSN 2007-5383

