

Estocástica:

FINANZAS Y RIESGO

**Evaluación del grado de integración
de los principales mercados de
capital europeos con un modelo
Cópula-GARCH**

Roberto J. Santillán-Salgado
César Gurrola Ríos
Francisco López-Herrera

**Análisis, aplicación y comparación
de tres métodos estadísticos en la
estimación del VaR y el EVaR**

Jaime Iván Urbina Rugeiro
Gabriel Núñez Antonio
Patricia Saavedra Barrera

**Intervalos de confianza para VaR
y ES, y su aplicación al mercado
colombiano**

Jorge Rosales Contreras

**Valor en Riesgo anual de los
mercados accionarios de México y
Estados Unidos: VaR tradicional vs
VaR cópulas elípticas**

Christian Bucio
Raúl De Jesús
Alejandra Cabello

**VOLUMEN 6, NÚMERO 1
ENERO - JUNIO 2016**

Universidad
Autónoma
Metropolitana 
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Salvador Vega y León

Secretario General

M. en C. O. Norberto Manjarrez Álvarez

Unidad Azcapotzalco

Rector de la Unidad

Dr. Romualdo López Zárate

Secretario de la Unidad

Mtro. Abelardo González Aragón

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Secretario Académico

Lic. Miguel Pérez López

Jefa del Departamento de Administración

Dra. María Teresa Magallón Díez

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Dr. Saúl Jerónimo Romero

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández-Lerma
Departamento de Matemáticas, CINVESTAV,
Instituto Politécnico Nacional,
Cd. de México, México

Dr. Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional,
Cd. de México, México

Dr. Edgar-Ortiz
Facultad de Ciencias Políticas y Sociales,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dra. Patricia Saavedra-Barrera
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Francisco López-Herrera
Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dan Rosen
Programa de Finanzas Matemáticas
Universidad de Toronto,
Toronto, Canadá

Dr. Diego Agudelo-Rueda
Área de Mercados Financieros,
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine-Abed
Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Editora

Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Departamento de Administración,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Coeditor

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Dirección de este número

Dra. María G. Henaine-Abed
Dra. Marissa R. Martínez Preece
Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 6, número 1
Enero - junio 2016

El objetivo de la revista es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Volumen 6, número 1, enero-junio 2016, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F., Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200. México, D.F.; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 26 de febrero de 2016, Tamaño del archivo: 5.9 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Evaluación del grado de integración de los principales mercados de capital europeos con un modelo Cópula-GARCH

Roberto J. Santillán-Salgado
César Gurrola Ríos
Francisco López-Herrera

9

Análisis, aplicación y comparación de tres métodos estadísticos en la estimación del VaR y el EVaR

Jaime Iván Urbina Rugeiro
Gabriel Núñez Antonio
Patricia Saavedra Barrera

37

Intervalos de confianza para VaR y ES, y su aplicación al mercado colombiano

Jorge Rosales Contreras

55

Valor en Riesgo anual de los mercados accionarios de México y Estados Unidos: VaR tradicional vs VaR cópulas elípticas

Christian Bucio
Raul De Jesús
Alejandra Cabello

83

PRESENTACIÓN

El cierre de 2015 se caracterizó por una fuerte incertidumbre tanto a nivel internacional como en las economías nacionales. En el ámbito de la economía mexicana la incertidumbre se derivó principalmente de la caída de los precios del petróleo, la cual provocó la depreciación del peso mexicano frente al dólar estadounidense.

Aunado a lo anterior, en el panorama internacional se encuentra la frágil recuperación de la eurozona y la desaceleración de la economía china, ambos fenómenos han afectado a la economía mundial y por ende a la mexicana.

En enero de 2016, nuevamente, se reunirán en Davos, Suiza los líderes de la economía mundial y se espera harán un nuevo intento de encontrar soluciones para diseñar políticas económicas con el propósito de evitar caer en una nueva crisis mundial.

Estas circunstancias refuerzan la convicción de los editores de Estocástica: finanzas y riesgo de continuar apoyando los esfuerzos encaminados al estudio de los mercados financieros, y de métodos que ayuden a plantear nuevas alternativas de solución que puedan contribuir en distintos grados, a encontrar una mejor comprensión de los problemas que enfrentan los sistemas financieros y una mayor precisión en los métodos utilizados por la administración y modelado de riesgos financieros en la detección, medición, control y supervisión de los mismos.

En este número presentamos dos metodologías, con distintas aplicaciones y variantes, que son ampliamente usadas en el sistema financiero. Por un lado, la métrica del Valor en Riesgo, VaR, que desde la última década del siglo pasado empezó a usarse de manera generalizada para cuantificar el riesgo, y cuya importancia ha crecido al ser adoptada como indicador de éste por los reguladores a nivel internacional. Por otra parte, se encuentra la teoría de cópulas, la cual tiene como una de sus principales aplicaciones en las finanzas, la medición de la dependencia entre distintas variables, debido a que, dada una distribución multivariada arbitraria, ésta puede descom-

ponerse en sus marginales y en su estructura de dependencia. A principios de este siglo, el concepto de cópula se utilizó en los modelos VaR con distribuciones gaussianas y t-student para modelar dependencias sectoriales. Y a partir de entonces, tanto los modelos VaR como la teoría de cópulas, con sus distintas variantes, han sido utilizadas extensivamente.

En esta edición se presentan cuatro artículos, el primero “Evaluación del grado de integración de los principales mercados de capital europeos con un modelo cópula-GARCH” de Roberto J. Santillán-Salgado, César Gurrola-Ríos y Francisco López-Herrera tiene como objetivo mejorar la comprensión de las dificultades y oportunidades que surgen para los inversionistas internacionales y para los gobiernos de los países de la eurozona como consecuencia de la creciente integración de los mercados, misma que ha sido resultado de la eliminación de barreras institucionales y de la utilización de la misma moneda. En este trabajo, como su nombre lo indica, se presenta un modelo cópula-GARCH, que consiste en estimar, primero, la distribución univariada y en una segunda etapa la distribución conjunta. Con la teoría de cópulas, como medida de dependencia entre las series, los autores obtuvieron una estimación que se considera más precisa que la obtenida con los métodos tradicionales.

Por otro lado, como se mencionó, el papel que han jugado el Valor en Riesgo, VaR y el Valor en Riesgo Extremo, EVaR, en la práctica financiera ha sido de gran importancia por lo intenso de su uso. Ésta última variante surgió por las limitaciones del VaR, en especial en lo referente a la propiedad subaditiva que debe tener toda medida de riesgo coherente. Dentro de este contexto, el segundo artículo: “Análisis, aplicación y comparación de tres métodos estadísticos en la elaboración del VaR y el EVaR” de Jaime Iván Urbina-Rugeiro, Gabriel Núñez-Antonio y Patricia Saavedra-Barrera, se presenta una comparación de distintos métodos para calcular el VaR. En este trabajo se analizan los métodos de varianza-covarianza, el método histórico y el método de picos sobre el umbral en términos de su pertinencia en la estimación del VaR y EVaR. Se propone una forma de estimar puntualmente y por intervalos el VaR y EVaR usando cada uno de los métodos señalados, en el contexto particular de portafolios de inversión.

En el artículo “Intervalos de confianza para VaR, y ES y su aplicación al mercado colombiano” de Jorge Rosales-Contreras, se ofrece una aplicación para los mercados financieros con la cual se propone utilizar algunas de las propiedades que se encuentran al elaborar los intervalos de confianza del VaR y el EVaR, y sugiere que éstos pueden utilizarse como un sistema de alertas tempranas en la toma de decisiones ante posibles riesgos.

Por último, en el cuarto artículo “Valor en riesgo anual de los mercados accionarios de México y Estados Unidos: VaR tradicional vs VaR cópulas elípticas”, de Christian Bucio-Pacheco, Raúl de Jesús-Gutiérrez y Alejandra Cabello-Rosales, se ofrece un ejemplo de las ventajas de trabajar con cópulas para la estimación del VaR en dos mercados bursátiles distintos, debido a que se gana precisión al utilizar cópulas en lugar de los métodos tradicionales de estimación.

Como en otros números, el deseo de los/as editores/as es que los artículos aquí incluidos contribuyan al avance de las ciencias financieras, en especial, en aquellas áreas especializadas en riesgo y que éstos puedan resultar un referente en la toma de decisiones financieras.

Agradecemos a la comunidad académica y especializada en estos temas que hayan hecho posible que esta publicación llegue a su sexto año ininterrumpido, con lo que reiteramos la invitación para que los/as investigadores/as continúen participando en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en finanzas, y administración y modelado de riesgos, y sigan formando parte del espacio de colaboración que representa Estocástica: finanzas y riesgo.

Comité Editorial

Evaluación del grado de integración de los principales mercados de capital europeos con un modelo Cópula-GARCH

Estimation of the Degree of Integration of the Main European Capital Markets using a Copula-GARCH Model

Roberto J. Santillán-Salgado*

César Gurrola Ríos**

Francisco López-Herrera***

Fecha de recepción: 3 de diciembre de 2014

Fecha de aceptación: 19 de octubre de 2015

* EGADE Business School, Campus Monterrey,
Tecnológico de Monterrey.
Monterrey, Nuevo León, México,
roberto.santillan@itesm.mx

** Facultad de Economía, Contaduría y Administración,
Universidad Juárez del Estado de Durango.
Cd. de Durango, Durango, México,
cgurrola@ujed.mx

*** División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Cd. de México, México,
francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx

RESUMEN

El enfoque metodológico que se sigue en este trabajo para estudiar el comovimiento de los cinco principales mercados de capital europeos es el de Cópula-GARCH, ajustando primero modelos GARCH para estimar las distribuciones marginales de los rendimientos de cada uno de dichos mercados. Con base en las distribuciones marginales estimadas, se procede a llevar a cabo el modelado de la distribución conjunta de los rendimientos mediante la estimación de un modelo canónico de viña de copulas (vine copula).

Clasificación JEL: C22, C58, C65

Palabras clave: GARCH-Cópula, C-Vine cópula, viñas de cópulas, integración financiera europea, mercados financieros europeos.

ABSTRACT

The Copula-GARCH model is used to assess the simultaneous movement of the main five European Capital Markets. First, the returns marginal distributions were estimated with GARCH models, with these estimations, the returns joint distributions modeling was carried out using a canonic vine copula model.

JEL Classification: C22, C58, C65

Key words: *GARCH-Copula, C-Vine copula, European financial integration, European financial markets.*

Introducción

La interdependencia entre los mercados de valores es uno de los temas de frontera en la agenda de investigación financiera, en especial a raíz de eventos como la caída de precios de octubre de 1987 o la crisis financiera de 2007-2009, y la subsecuente crisis de la deuda soberana de varios países europeos. Tales fenómenos provocaron movimientos y co-movimientos inesperados en los precios de activos históricamente correlacionados. Evidentemente, el libre flujo de capitales ha provocado la presencia de mercados nacionales cada vez más interdependientes (Kanas, 1998).

En el contexto europeo, la situación actual es muy distinta a la que existía en 1999, cuando por primera vez comenzó a utilizarse el euro como moneda común entre los 11 países fundadores de la eurozona,¹ y diametralmente diferente de la que prevalecía en 1993, cuando tuvo lugar uno de los primeros actos formales tendientes a lograr la integración financiera, la creación del Mercado Financiero Único. Los esfuerzos destinados a la creación de un mercado financiero sin fronteras para la prestación de servicios, inversiones y crédito, fue una parte fundamental del proceso más amplio de convergencia económica y política de los países de la Unión Europea, y deben ser interpretados en ese contexto, pero también es necesario analizar su desarrollo empírico y evaluar el grado de convergencia entre mercados nacionales hasta el presente.

La operación de los mercados bursátiles requiere de un sólido marco legal, de una supervisión eficiente y, por supuesto, de una infraestructura física moderna y confiable. El grado con el cual este conjunto de condiciones está presente difiere sustancialmente entre países miembros. El establecimiento de la Unión Monetaria Europea en 1999 dio lugar a la coordinación de algunas políticas macroeconómicas entre los países miembros. Sin embargo, los diferentes mercados nacionales aún difieren profundamente en materia de regulación y supervisión, aspectos funcionales y operativos diversos,

¹ Alemania, Austria, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Países Bajos y Portugal.

esquemas fiscales aplicables, etcétera, lo cual conlleva a la permanencia de un importante grado de segmentación hasta el día hoy (Thalassinos y Thalassinos, 2006).

Los esfuerzos realizados en distintos ámbitos para reducir gradualmente las diferencias han requerido abordar temas complejos en materia regulatoria y de supervisión e impulsar reformas estructurales para modernizar y elevar la competitividad de la zona, especialmente en las regiones más rezagadas (Rajan y Zingales, 2003).

Si bien la integración financiera puede coadyuvar a absorber las perturbaciones macroeconómicas al ofrecer alternativas para redistribuir riesgos y mejorar la reasignación de recursos también podría, si no se acompaña de políticas adecuadas, ampliar las divergencias entre las economías afectadas (Hasan y Schmiedel, 2004; Van Ewijk y Arnold, 2015).

El presente estudio extiende los resultados de Santillán-Salgado, *et al.* (2015 a), quienes confirman la presencia de una relación de largo plazo entre los principales mercados de capital de Europa continental (Francia, Alemania, España, Italia), aun cuando distintos episodios afectaron la estabilidad de los mercados financieros globales durante el periodo analizado (enero de 1998 a junio de 2014). El modelo propuesto por estos autores fue un VECM-GARCH, hasta ahora poco utilizado en estudios del mercado financiero, capaz de resolver los problemas que se presentan en la estimación como consecuencia de la presencia de rupturas estructurales en las series. De esa forma les fue posible confirmar la presencia de una relación cointegrante entre los cuatro mercados estudiados y, después de corregir los problemas de autocorrelación de los residuos y modelar la heterocedasticidad de los mismos, llevar a cabo una interpretación de los parámetros del modelo.

Los estudios citados en los párrafos anteriores son parte de un conjunto mucho más amplio de iniciativas exploratorias que tienen como objetivo mejorar la comprensión de las dificultades y oportunidades que surgen para los inversionistas internacionales y para los gobiernos de los países de la eurozona como consecuencia de la creciente integración de los mercados, a su vez resultado de la eliminación de barreras institucionales y de la utilización de la misma moneda. Tienen la intención de evaluar los resultados del proceso en materia de volatilidad y correlación de los mercados y de proporcionar información útil a los tomadores de decisiones en el ámbito de los administradores de portafolios internacionales, de los inversionistas institucionales y de todos aquellos inversionistas potenciales

atraídos por las bondades de la fusión de las economías europeas en una sola región económica.

El presente estudio plantea la utilización de un enfoque novedoso y robusto no únicamente ante las rupturas estructurales asociadas a fenómenos exógenos, sino también a la ausencia de normalidad de los rendimientos, el Análisis de Cópulas. Con este enfoque se ofrece una nueva validación de la naturaleza de la convergencia e integración financiera en Europa.

En la primera sección se aborda una breve revisión de la Teoría de la Integración de los Mercados Financieros, así como de algunos de los estudios más representativos sobre la integración financiera en Europa Occidental. Ello permite enmarcar la relevancia y originalidad del enfoque metodológico propuesto en este trabajo, así como destacar los resultados obtenidos en el contexto de la literatura sobre este tema (subsección 1) y algunas de las principales limitaciones de los estudios publicados hasta hora (subsección 2). La segunda sección explica los aspectos metodológicos; la tercera analiza los resultados de la contrastación empírica y, finalmente, la cuarta concluye con reflexiones y recomendaciones sobre la dirección posible de futuras investigaciones.

1. Teoría de la integración de los Mercados Financieros

En su acepción más amplia, la integración financiera entre países se refiere a fenómenos, tales como: el listado de empresas en múltiples mercados nacionales, la realización de transacciones financieras transfronterizas sin enfrentar obstáculos regulatorios ni costos excesivos, la oferta transfronteriza de servicios de crédito y la inversión extranjera de portafolios en distintos mercados nacionales, entre otros aspectos (Litch, 1997).

En algunos casos, el concepto de integración financiera se interpreta como la ausencia de oportunidades de arbitraje, una vez considerados los costos de transacción. Si dos o más mercados están integrados, los márgenes potenciales por arbitraje son suficientemente pequeños como para desmotivar a los agentes económicos interesados en realizarlo, aún en ausencia de barreras regulatorias (e.g., Bekaert y Harvey, 1995; Ferson y Harvey, 1991).

Para otros autores, el grado de integración se mide en términos de la importancia de los factores de riesgo regionales con respecto a los riesgos específicos de cada país. Por ejemplo, Baele y Vander-Vennet (2001), estudian si la evolución de la volatilidad del tipo de cambio, la creciente integración económica, y la coordinación de política monetaria aumentaron la integra-

ción entre los mercados accionarios europeos antes de la adopción del euro, y concluyen que, efectivamente, dicho fenómeno está fuertemente vinculado con la reducción de la volatilidad del tipo de cambio y con la convergencia de la política monetaria.

Otra perspectiva sobre integración financiera entre países, consiste en analizar empíricamente la correlación de mercados generalmente (pero no exclusivamente) cercanos geográficamente. Este enfoque introduce metodologías de modelación incrementalmente complejas para corroborar la presencia de integración (e.g., Bekaert, y Harvey 1995; Thalassinos y Thalassinos, 2006).

Bekaert y Harvey (1995), sostienen que la mayoría de los estudios sobre integración financiera pueden clasificarse en tres vertientes: mercados segmentados, mercados integrados y mercados parcialmente segmentados. En un extremo, los autores consideran que los mercados están totalmente integrados si los activos con el mismo nivel de riesgo ofrecen el mismo rendimiento esperado, independientemente del mercado. Heston *et al.*, (1995), por ejemplo, examinan la estructura de covarianzas de rendimientos accionarios en Europa y EUA y confirman la hipótesis de integración.

Si existe segmentación en los mercados, la covarianza con algún factor mundial tendrá poco poder explicativo sobre los rendimientos esperados; en cuanto a la prima al riesgo se esperarían comportamientos distintos pues su origen proviene de diferentes tipos y exposiciones al riesgo (Bekaert y Harvey, 1995). Entre los estudios más influyentes que sostienen la hipótesis de la segmentación parcial en los mercados financieros internacionales destaca el de Errunza y Losq (1985), sobre las implicaciones de las barreras a la inversión para la valoración de activos. En él afirman los autores que las dificultades resultantes de restricciones impuestas por autoridades gubernamentales conducen a primas de riesgo elevadas, directamente proporcionales al riesgo condicional del mercado en cuestión. Otros estudios que sostienen la idea de la integración parcial y/o variante en el tiempo son Arouri y Foulquier (2012); Arouri, Teulon y Rault (2013).

La cantidad de trabajos publicados sobre el tema de integración financiera en distintas regiones del planeta es numerosa y, en su gran mayoría corrobora la existencia del fenómeno al utilizar distintas metodologías de análisis econométrico para determinarla (e.g., Kim *et al.* (2015) para los mercados de Asia-Pacífico; Licht, (1997) y Santillán-Salgado *et al.* (2015 a), para los mercados de Europa Occidental; Gurrola *et al.* (2014), para América Latina).

1.1 La integración económica y financiera de los países europeos

El fenómeno de integración de los mercados financieros europeos ha tenido lugar dentro del marco de la convergencia internacional observada en la mayoría de las regiones geográficas del planeta. Semejante a lo observado en otras latitudes los principales factores que lo han impulsado han sido: la evolución de tecnología, los procesos de desregulación y la adopción de sistemas alternativos de gobierno corporativo. No obstante, la diferencia específica del caso de la eurozona fue la adopción de una misma moneda, a partir del 1º de enero de 1999.

En realidad, la convergencia económica de los países de Europa Occidental ha sido un proceso muy largo, que ha superado retos muy grandes y se ha caracterizado por la voluntad y decisión de preservar la unidad, aún en las circunstancias más adversas.² Europa unificada tiene un mayor peso específico en la geopolítica mundial y una importancia económica apenas comparable con la de Estados Unidos. En tal virtud, los mercados financieros de los países miembros de la eurozona han eliminado gradualmente los obstáculos para aumentar el volumen de transacciones transfronterizas y homologar la regulación, mecanismos de operación y autoridades supervisoras.

En el estudio de Rajan y Zingales (2003), queda plasmada una clara idea de de la transformación financiera que tuvo lugar en Europa Occidental durante los veinte años transcurridos entre 1980 y 2000. Basta citar algunos datos para ilustrar la magnitud de las profundas transformaciones estructurales que tuvieron lugar. La razón de capitalización del mercado accionario con respecto al Producto Interno Bruto de Estados Unidos se triplicó durante ese periodo, al mismo tiempo que la proporción de la inversión de las empresas privadas financiada con emisiones de acciones también lo hizo. En Europa Occidental, la razón de capitalización del mercado accionario con respecto al PIB creció más de trece veces, en tanto que la proporción de la inversión privada financiadas mediante la emisión de acciones aumentó dieciséis veces.

² Por ejemplo, uno de los momentos más complejos en la historia de la integración monetaria fue el rescate de Grecia, Irlanda, Portugal y España; instrumentado por el resto de los miembros de la Eurozona liderados por Alemania y Francia durante la Crisis de la Deuda Soberana (2009-2012). La enorme capacidad de convocatoria de los líderes políticos y los fuertes intereses comunes se manifestaron como una clara voluntad de hacer de la integración monetaria una condición permanente para los países que ya han adoptado el euro.

Aunque ese importante crecimiento no eliminó completamente la brecha existente con respecto a la economía de Estados Unidos, sí la redujo sustancialmente. En 1980, la capitalización del mercado accionario era cinco veces mayor en Estados Unidos y Gran Bretaña, en comparación con Europa Continental, pero veinte años más tarde, apenas era 60% más grande.

Además, durante el periodo tuvo lugar un crecimiento explosivo de los mercados de derivados financieros en Europa. Hacia finales de los años 1980s y principios de los 1990s todos los países Europeos crearon mercados de derivados y su valor nominal aumento poco menos de cien veces entre 1980 y 2001.

Aunque aún hay un camino largo y difícil por recorrer; para lograr la plena integración de los mercados financieros europeos se observan signos importantes de convergencia con las características del mercado financiero norteamericano, considerado por muchos estudiosos (incluidos Rajan y Zingales) como el paradigma de referencia internacional en materia del papel económico que desempeña.

La adopción de una sola moneda fue un paso muy importante hacia la integración económica definitiva, pero las diferencias legislativas, institucionales y en materia fiscal entre países dejan abierta la posibilidad de que surjan desequilibrios macroeconómicos entre éstos con niveles de desarrollo distintos, tal como fue el caso durante la Crisis de la Deuda Soberana 2009-2012 Santillán-Salgado *et al.* (2015 b).

Hasan y Schmiedel (2004) argumentan que la creciente integración financiera internacional observada en años recientes ha aumentado la frecuencia de las fusiones de bolsas de valores, o bien la creación de redes entre las bolsas (fusiones implícitas). Estos arreglos son capaces de desarrollar un entorno más competitivo, donde las bolsas más eficientes ganan la confianza de los inversionistas, los intermediarios y las empresas. También presentan varios detalles sobre como funcionan los acuerdos de cooperación entre las bolsas europeas y el impacto potencial de dichas iniciativas en el desempeño, crecimiento y costos de transacción. Concluyen que la decisión de llevar a cabo un acuerdo de esta naturaleza impacta el valor de capitalización de los mercados participantes, genera mayor crecimiento y, en menor medida, reduce los costos de transacción.

Inzinger y Haiss (2006) consideran que uno de los temas centrales de estudio sobre la evolución de la eurozona tiene que ver con la integración financiera de los mercados de capital, puesto que la integración de éstos tiene influencia significativa sobre el dinamismo de la inversión, de la liquidez

del mercado y, en general, sobre la asignación más eficiente del capital. Una aportación importante de estos autores es su extensa revisión de los trabajos que han abordado el tema del impacto de la Unión Económica y Monetaria (UEM) en la integración de los mercados de valores en Europa. Del total de estudios revisados, el 45% encuentra evidencia significativa sobre el aumento de la integración financiera en la eurozona y 25% de ellos confirma que el grado de integración aumentó con la introducción del euro; sólo 9% de los trabajos revisados documenta que la integración del mercado de valores no aumentó.

Entre las principales conclusiones del estudio se destaca que no obstante la costumbre de asociar a la globalización y, especialmente a la integración financiera, con un fuerte impacto sobre el dinamismo de la inversión, la liquidez del mercado y la asignación más eficiente del capital; también es preciso reconocer que tales procesos implican riesgos adicionales.

Bley (2009) demuestra la naturaleza variable en el tiempo del proceso de integración de los mercados de la eurozona. Sus resultados demuestran que el comportamiento de los rendimientos está cambiando y que los mercados de capital están comenzando a desvincularse; concluye que asumir un nivel creciente de integración entre los mercados financieros de la eurozona no puede darse por descontado.

Baele *et al.*, (2004), aseguran que la integración de los mercados financieros europeos se sostiene sobre un escenario en el cual conceptualmente todos los agentes económicos enfrentan las mismas normas e igualdad de oportunidad en el acceso a instrumentos y servicios financieros. Estudian separadamente cinco segmentos del mercado financiero: dinero, deuda pública, bonos corporativos, banca, crédito, y renta variable y sus resultados revelan que, no obstante los esfuerzos institucionales y legislativos para lograr una integración sin límites en materia financiera, los diferentes segmentos presentan distintos niveles de integración. Destacan que, como cabría esperar dada la existencia de una política monetaria única en la eurozona, el mercado de dinero ha llegado a ser el más integrado.

Más recientemente la literatura ha abordado el tema de los procesos de integración en la eurozona con nuevas metodologías como, por ejemplo, los trabajos de Reboredo, *et al.* (2015), Bartram y Wang (2015), ambos sustentados con Análisis de Cópulas.

El primero estudia la estructura de dependencia entre las cuatro principales bolsas de valores de Europa Central y Oriental (República Checa, Hungría, Polonia y Rumanía), utilizando funciones cópula estáticas y diná-

micas, con diferentes formas de dependencia de la cola de la distribución. Los resultados confirman la presencia de dependencia positiva y variable en el tiempo.

El segundo investiga el grado y los determinantes de la dependencia entre mercados europeos con una muestra de 10 industrias en 12 países de la eurozona, y 8 mercados de valores fuera de ella, durante el período que comprende la introducción del euro, el colapso de *Lehman Brothers* y la crisis de deuda soberana europea. Sus conclusiones destacan que la mayor parte de las industrias de los países de la zona euro muestran un aumento en su nivel de dependencia después de la introducción del euro. Asimismo, revelan que la dependencia es más fuerte entre países con mayor capitalización de mercado.

1.2 Limitaciones de los estudios sobre integración financiera

Algunos autores aseguran que las evidencias de un incremento en el nivel de integración financiera en Europa podrían ser contradictorias, sesgadas o simplemente incompletas (Pascual (2003); Anderson *et al.*, (2011); Andrade y Chhaochharia (2012); Van Ewijk y Arnold (2015)).

Por ejemplo, Pascual (2003) utiliza técnicas de cointegración sobre los movimientos comunes de largo plazo en los mercados de capitales de Reino Unido, Alemania y Francia, y reporta no haber encontrado evidencia significativa de cambios en el grado de integración para los dos primeros países. Sólo en el caso de Francia se confirma una tendencia significativa en la sensibilidad de su mercado de valores hacia los otros mercados de la muestra.

O bien, el trabajo de Anderson, *et al.* (2011) donde se destaca que en los estudios de series de tiempo que han abordado el tema de los procesos de integración de la eurozona se ha dado poca atención al aspecto metodológico y, en particular se señalan dos problemas: la cantidad insuficiente de datos históricos para el análisis econométrico, y la muestra limitada de países estudiados. Respecto al primer problema, los autores aseguran que no obstante que la moneda euro existe desde 1999, algunos instrumentos de mercado de dinero estuvieron disponibles apenas hasta 2002, por lo que no existen observaciones suficientes para análisis macroeconómicos de series de tiempo. En cuanto al segundo problema, sostienen que los países que participaron en el Sistema Monetario Europeo cambiaron con el transcurso del tiempo y que, en ocasiones, los nuevos miembros tienen políticas macroeco-

nómicas sustancialmente diferentes a las de los miembros originales. Al ser dinámico el número de miembros, no es posible realizar análisis histórico-comparativos consistentes.

En línea con el estudio anterior, Scheller (2004), plantea que no existe un consenso sobre la fecha de arranque de la integración financiera en la eurozona, se acostumbra tomar como referencia: *a*) el inicio de la operación del Sistema Monetario Europeo (SME), en marzo de 1979; *b*) inicio de la primera fase de la Unión Monetaria Europea en 1990; *c*) la firma de la Tratado de la Unión Europea “Tratado de Maastricht” en 1992 y *d*) cuando los países fundadores acuerdan las condiciones de admisión a la zona del euro así como la creación del Banco Central Europeo (BCE), en 1998. Tal falta de homogeneidad, argumenta Sheller (2004) puede tener serias implicaciones al momento de realizar análisis de series de tiempo.

Andrade y Chhaochharia (2012) documentan la reversión en la tendencia de largo plazo de la integración de mercados de capitales en Europa durante 2007-2011, a la luz de tres crisis importantes en la región: la crisis de competitividad/crecimiento, la crisis de la deuda soberana, y la crisis bancaria. En su estudio aseguran que la causa fundamental de tales episodios fue la introducción de la moneda única en un contexto aún no suficientemente maduro para ello. Paradójicamente, plantean estos autores, mientras que el euro fue concebido para integrar aún más los mercados financieros europeos, parecería ser que en realidad sentó las bases para los periodos de crisis mencionados y provocó una reversión de la integración de los mercados de capitales europeos.

Por último, el trabajo de Van Ewijk y Arnold (2015), al investigar el papel de la integración financiera en el proceso de ajuste macroeconómico de los países de la Unión Europea, parte de la idea de que la política monetaria comúnmente señalada como “*one size fits all*” puede complicar el proceso de ajuste monetario. La Comisión Europea en 2008 señaló que en la Unión Europea no sólo estaba asegurada la estabilidad macroeconómica sino que la zona se erigía como un polo de estabilidad. No obstante, argumentan Van Ewijk y Arnold, es de llamar la atención que en el mismo informe se menciona que los desequilibrios económicos entre los estados miembros habían crecido con el tiempo, y concluyen que, desde la introducción del euro, la integración financiera ha afectado negativamente el proceso de ajuste macroeconómico de los países de la eurozona.

2. Aspectos metodológicos

La estrategia de modelado conocida como Cópula-GARCH combina modelos GARCH y funciones de cópula para permitir flexibilidad en la selección de distribuciones marginales y estructuras de dependencia. En la primera etapa se emplearon modelos AR-GARCH para las distribuciones marginales. La selección del modelo más apropiado para cada serie se llevó a cabo con el criterio de Schwarz.

Las ecuaciones de la media incluyeron en principio una constante, cinco términos autorregresivos y la variable *dummy* que captura la ruptura estructural de las series a partir del modelo de Perron, más un error aleatorio:

$$R_{it} = C_1 + C_2AR(1)_t + C_3AR(2)_t + C_4AR(1)_t + C_5AR(2)_t \\ + C_6AR(1)_t + C_7\delta_i + \varepsilon_t ;$$

donde, $i = FTSE, DAX, CAC, MIB, IBEX$.

El modelo GARCH;³ desarrollado independientemente por Bollerslev (1986) y Taylor (1986), asume que la varianza condicional depende de las noticias o *shocks* pasados y de sus propios rezagos, como una función ponderada del valor promedio α_0 , de la volatilidad de periodos previos $\alpha_i u_{t-i}^2$, y de las varianzas condicionales rezagadas $\beta_j h_{t-j}$, de la manera siguiente:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + u_t$$

La estimación de los parámetros utiliza la técnica conocida como Ajuste por Máxima Verosimilitud, la cual encuentra los valores más probables de los parámetros para la especificación modelada.

³ Generalized Autoregressive Conditional Heterscedasticity Model

Cuando el modelo se ajusta correctamente, los residuos presentan las características de “ruido blanco”. Además del modelo GARCH (1,1) tradicional se probaron otras tres distintas variantes de la misma familia: EGARCH, TGARCH, IGARCH.⁴

Para continuar el análisis por medio del enfoque de cópulas (segunda etapa del modelado Cópula-GARCH), se tomaron los residuos estandarizados que se obtuvieron de los modelos seleccionados por el criterio de Schwarz, como las distribuciones marginales de los rendimientos de cada mercado. La base de dicho enfoque lo constituye el teorema de Sklar, según el cual la relación entre las distribuciones marginales, F_i , $i = 1, \dots, d$, y la distribución conjunta $F(x_1, \dots, x_d)$ está dada por una función $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$, llamada cópula, que puede describir toda la estructura de dependencia que existe en la distribución conjunta multivariada. Un resultado proporcionado por el teorema de Sklar es que la cópula se puede obtener con base en las distribuciones marginales de las d variables aleatorias involucradas y es que la cópula puede estimarse con base en las distribuciones uniformes de las marginales, es decir, una cópula es entonces una distribución en el hipercubo unitario con marginales uniformes.

El análisis con base en cópulas ha ganado un buen terreno en el análisis financiero y econométrico en la última década, especialmente gracias al uso de cópulas bivariadas. Se ha encontrado poca flexibilidad cuando el número de variables analizadas crece; entre las posibles soluciones al problema multivariado de grandes dimensiones ha surgido el enfoque conocido como viñas de cópulas (vine copulas). Las viñas de cópulas son representaciones gráficas que permiten especificar lo que se conoce como construcciones de cópulas por pares. Este enfoque ha cobrado popularidad recientemente, ya que es posible descomponer las densidades multi-dimensionales en un producto de las densidades de pares de cópulas y las densidades de las distribuciones marginales:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j)|i+j, \dots, (i+j-1)} \cdot \prod_{k=1}^d f_k(x_k),$$

⁴ Los modelos EGARCH(1,1) —Exponential GARCH— y TGARCH(1,1) —Threshold GARCH o GJE—, incorporan la asimetría en las innovaciones para la estimación de los parámetros de la varianza condicional; en tanto que el modelo IGARCH(1,1) permite modelar cierto grado de persistencia en la varianza.

esta descomposición no es única, Bedford y Cooke (2001, 2002) presentan el modelo llamado viña para clasificar las d construcciones de cópulas por pares acomodándolas en $d(d-1)/2$ árboles vinculados, por lo que el conjunto de d dimensiones se puede representar con conjuntos de árboles anidados que satisfacen alguna condición de proximidad.

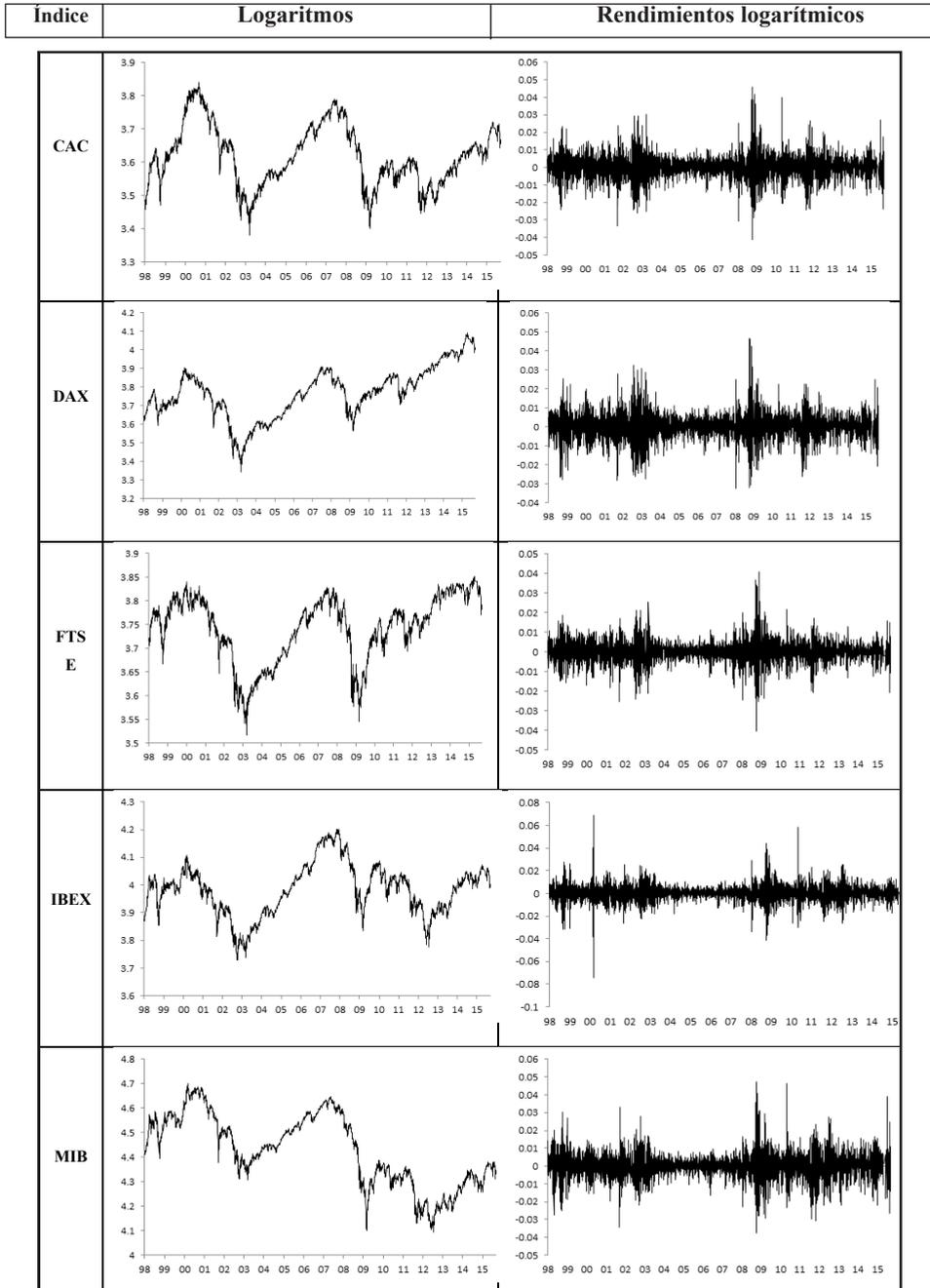
La aplicación de un modelo de viñas de cópulas implica, *grosso modo*, la selección de una estructura (árbol), las familias de cópulas pertinentes y la estimación de los parámetros correspondientes. Para la selección de la estructura se puede utilizar alguna medida de ponderación de las ramas que unen los nodos (pares) de los árboles, en tanto que para seleccionar las(s) cópula(s) se puede recurrir a pruebas de independencia, de bondad de ajuste y/o criterios de selección de modelos como el de Akaike o el de Schwarz. La estimación de los parámetros correspondientes se puede llevar a cabo mediante el método de máxima verosimilitud, estimación secuencial o estimación bayesiana.

3. Análisis de resultados

Las series utilizadas son los precios de cierre diarios de los índices bursátiles más representativos de Reino Unido (FTSE), Alemania (DAX), Francia (CAC), Italia (MIB) y España (IBEX), para el periodo comprendido del 2 de enero de 1998 al 7 de septiembre de 2015. Los datos fueron obtenidos de *Yahoo Finance*. Los índices están expresados en sus monedas locales; a saber, la libra esterlina para Gran Bretaña, y el euro en el caso de los demás países de la muestra.

La representación gráfica en la Figura 1 utiliza precios de cierre diarios en forma logarítmica y en primeras diferencias (rendimientos logarítmicos) para ilustrar el comportamiento de los índices bursátiles estudiados (FTSE, DAX, CAC, MIB e IBEX). El comportamiento de los rendimientos exhibe racimos de volatilidad, en tanto que los niveles revelan dos importantes caídas. El primer desplome se presenta hacia el final del primer trimestre de 2001, en parte explicado por la explosión de la burbuja de las acciones *dot-com*, o de la “nueva economía”, agravado por los ataques terroristas a las Torres Gemelas de Nueva York, en septiembre del mismo año, y los preparativos bélicos para la invasión de Irak a lo largo de 2002. Durante los primeros meses de 2003, los comienza una recuperación, para alcanzar los niveles previos al desplome a mediados de 2007. Pero la recuperación terminó inesperadamente, debido a que comenzaron a presentarse los efectos de la Crisis de las

Figura 1. Precios de cierre y rendimientos logarítmicos



Fuente: Elaboración propia con datos de Yahoo Finance.

Hipotecas *Subprime*. A partir de aquel momento se inicia un nuevo periodo bajista que toca fondo a inicios de 2009.

Para llevar a cabo un análisis más riguroso de la similitud de comportamiento de las distintas bolsas, se utiliza una metodología econométrica que comienza por determinar el grado de integración de las series de precios de cierre diario. Para ello, se realizaron pruebas de raíz unitaria, tanto en la transformación logarítmica de los niveles como en sus primeras diferencias, mediante la prueba Dickey-Fuller (véase el Cuadro 1). Los valores de las pruebas indican que en ningún caso se puede rechazar la presencia de raíces unitarias en niveles, en tanto que las pruebas sobre las primeras diferencias rechazan dicha hipótesis en el total de los casos.

Cuadro 1. Pruebas de raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentada

	Niveles			Primeras Diferencias		
	Intercepto	Intercepto y Tendencia	Ninguno	Intercepto	Intercepto y Tendencia	Ninguno
CAC	-2.5989	-2.7279	0.4210	-42.0918***	-42.0907***	-42.0927***
DAX	-1.3443	-1.9868	0.7604	-66.3409***	-66.3365***	-66.3389***
FTSE	-2.1889	-2.2732	0.2175	-32.3209***	-32.3172***	-32.3233***
IBEX	-2.5339	-2.5033	0.2083	-65.690***	-65.6848***	-65.6968***
MIB	-1.5175	-2.6937	-0.1843	-67.279***	-67.2737***	-67.2859***

Valores Críticos de la Prueba Dickey Fuller Aumentada

Sig.	Intercepto	Intercepto y Tendencia	Ninguno
1%	-3.4316	-3.9601	-2.5655
10%	-2.5671	-3.1272	-1.6167

Fuente: Elaboración propia con salida de Eviews.

No obstante los resultados anteriores, el comportamiento gráfico de las series en la Figura 1 sugiere la presencia de rompimientos estructurales. Por lo tanto, se prueba nuevamente la hipótesis de la presencia de raíz unitaria con la técnica de Perron, desarrollada para utilizarse precisamente en ese caso (véase Cuadro 2).

Cuadro 2. Pruebas de raíz unitaria de Perron para series con rompimientos estructurales

	Niveles			Rendimientos		
	Intercepto	Tendencia	Ambos	Intercepto	Tendencia	Ambos
CAC	-3.18	-2.89	-3.02	-33.01***	-32.64***	-33.04***
DAX	-3.63	-3.12	-3.51	-31.05***	-30.76***	-31.16***
FTSE	-3.73	-3.40	-3.67	-33.04***	-32.32***	-33.4***
IBEX	-3.43	-2.53	-3.67	-41.29***	-40.91***	-41.29***
MIB	-3.68	-2.77	-3.45	-31.37***	-31.15***	-31.46***

Valores críticos de la prueba de Perron

	Intercepto	Tendencia	Ambos
***	-5.92	-5.45	-6.32
Sig. al 5% = **	-5.23	-4.83	-5.59
Sig. al 10% = *	-4.92	-4.48	-5.29

Fechas de ruptura estructural identificadas en los rendimientos

	Intercepto	Tendencia	Ambos
CAC	10/10/2008	2/19/01	10/15/02
DAX	10/10/2008	2/23/01	03/12/2003
FTSE	10/10/2008	9/22/00	10/10/2008
IBEX	10/10/2008	8/31/00	10/10/2008
MIB	03/06/2009	2/21/01	9/21/01

Fuente: Elaboración propia con salidas de Eviews y datos de Yahoo Finance.

Los resultados del Cuadro 2 permiten corroborar el rechazo de la hipótesis de presencia de raíz unitaria en los rendimientos logarítmicos de los índices accionarios en presencia de rompimientos estructurales de las series, con un alto nivel de significancia.

Tal como se describió en la sección anterior, para representar la volatilidad condicional de los rendimientos se recurrió a un modelo GARCH cuya ecuación de la media expresa el rendimiento medio de cada uno de los

índices como función de una constante, cinco términos autorregresivos y una variable *dummy*⁵ que captura el efecto de la ruptura estructural en el intercepto de la serie identificada con la prueba de Perron.⁶

Para modelar la volatilidad condicional se seleccionó el modelo de mejor ajuste de acuerdo al Criterio de Información de Schwarz⁷ entre las versiones siguientes de la familia GARCH: GARCH(1,1), EGARCH(1,1), TARCH(1,1), IGARCH(1,1).

Con base en los resultados de la primera corrida para cada serie se redujo el número de términos autorregresivos, según el caso, cuando no fueron estadísticamente significativos. En la mayoría de los casos, los autorregresivos resultaron ser no significativos, con contadas excepciones. En aquellos casos en los cuales se encontró una significancia del 5% o menos, se incluyeron en el cálculo de los residuos estandarizados. Las variables *dummy* con valor cero antes de la fecha identificada por la prueba de Perron para la ruptura estructural en el intercepto de cada serie resultaron, en todos los casos, no significativas y, por lo mismo, fueron eliminadas.

Como se mencionó anteriormente, para seleccionar entre las variantes del modelo de volatilidad condicional aquel que ofrece el mejor ajuste, se optó por el criterio de información de Schwarz.⁸ En Cuadro 3 se destaca con negritas el criterio de información cuyo valor mínimo dio lugar a la elección del modelo óptimo. Es importante destacar una excepción a la regla anterior: en el caso de los modelos utilizados para la serie de rendimientos del índice DAX, no fue posible eliminar la heterocedasticidad condicional de los residuos⁹ con tres de los cuatro modelos probados,¹⁰ por lo cual se optó por

⁵ El valor de la *dummy* es igual a uno a partir de la fecha de ruptura en adelante y cero antes de esa fecha.

⁶ La fecha de ruptura en tendencia o en ambas, intercepto y tendencia, no se reportan ni se incorporan en la ecuación auxiliar ya que, tratándose de series de rendimientos sólo hace sentido hablar de ruptura en el intercepto de la serie, pero no en la tendencia y, en consecuencia, tampoco en ambas.

⁷ En la mayoría de los modelos coincidieron los tres criterios de información típicamente utilizados: Akaike, Hannan-Quin y Schwarz. No obstante, en caso de conflicto entre la señal se optó por el criterio de Información de Schwarz. En el caso de la modelación.

⁸ No obstante en el Cuadro 3 se reportan los valores de los tres criterios de información tradicionales (Akaike, Hannan-Quin y Schwarz) para los distintos modelos GARCH, para destacar que, en la mayoría de los casos, fueron consistentes entre sí.

⁹ Se utilizó la prueba ARCH LM para verificar la presencia de efectos GARCH. Para confirmar que los efectos GARCH son completamente capturados con cada uno

Cuadro 3: Criterios de información para elegir el modelo GARCH de mejor ajuste.

		GARCH	EGARCH	TARCH (GJR)	IGARCH	Valor Mínimo
CAC	AIC	-5.8797	<u>-5.9099</u>	-5.9072	-5.8715	-5.9099
	BIC (Schwarz)	-5.8666	-5.9021	<u>-5.8985</u>	-5.8614	-5.9021
	Criterio Hannan-Quinn	-5.8751	-5.9038	-5.9042	-5.8680	-5.9042
DAX	AIC	-5.8319	-5.8631	-5.8609	-5.8241	-5.8631
	BIC (Schwarz)	-5.8246	-5.8544	-5.8522	<u>25.3457</u>	-5.8544
	Criterio Hannan-Quinn	-5.8293	-5.8600	-5.8579	-5.8225	-5.8600
FTSE	AIC	-6.3347	-6.3712	-6.3673	-6.3260	-6.3712
	BIC (Schwarz)	-6.3260	<u>-6.3625</u>	-6.3586	-6.3188	-6.3625
	Criterio Hannan-Quinn	-6.3317	-6.3681	-6.3642	-6.3243	-6.3681
IBEX	AIC	-5.8274	-5.8564	-5.8536	-5.8206	-5.8564
	BIC (Schwarz)	-5.8201	<u>-5.8477</u>	-5.8450	-5.8163	-5.8477
	Criterio Hannan-Quinn	-5.8248	-5.8533	-5.8506	-5.8191	-5.8533
MIB	AIC	-5.8207	-5.8431	-5.8401	-5.8156	-5.8431
	BIC (Schwarz)	-5.8135	<u>-5.8344</u>	-5.8314	-5.8098	-5.8344
	Criterio Hannan-Quinn	-5.8182	-5.8401	-5.8371	-5.8136	-5.8401

Notas:

1. Los modelos con los cuales no fue posible eliminar el problema de heterocedasticidad condicional fueron: a) para el CAC, TARCH; b) para el DAX, GARCH, EGARCH y TGARCH; c) para el IBEX, TARCH; d) para el MIB, TARCH.

2. En el caso del DAX, el modelo cuyo Criterio de Información habría sido elegido fue el EGARCH, pero al probar la presencia de heterocedasticidad condicional en los residuos, se confirmó que no se logró eliminarla. En la tabla se indica la falta de correspondencia entre el valor mínimo del Criterio de Schwarz y del modelo IGARCH seleccionado finalmente.

Fuente: Elaboración propia con resultados de EViews.

de los modelos considerados, se utilizó una prueba de Multiplicador de Lagrange (LM), aplicada sobre los residuos cuadrados de la ecuación estimada de la media:

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t,$$

donde v_t es un error estocástico. Las pruebas de interés en este caso son:

$$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_q = 0$$

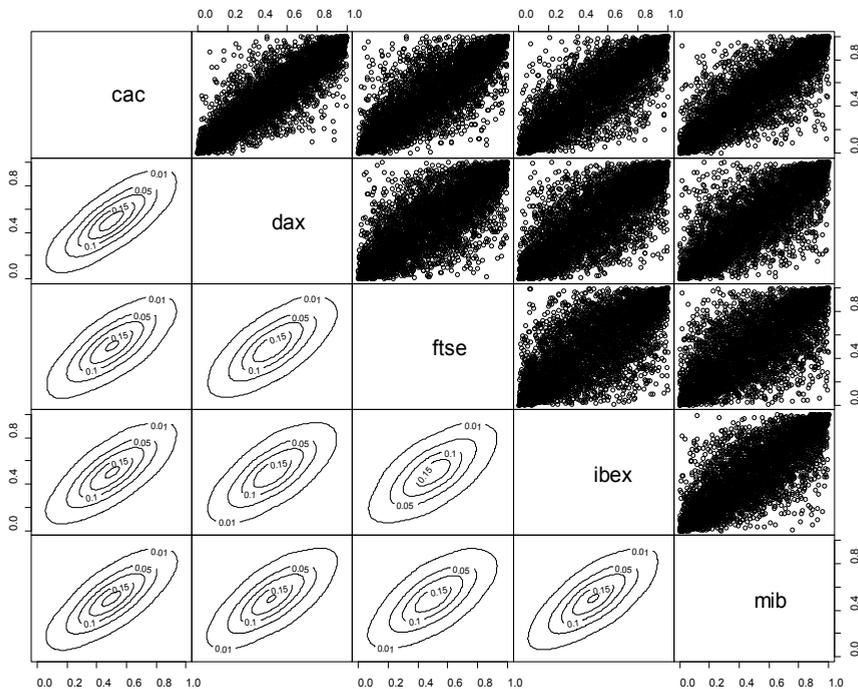
$$H_1: \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \dots \neq \gamma_q \neq 0$$

¹⁰ Los modelos que no resultaron capaces de eliminar la heterocedasticidad condicional autorregresiva en los residuos de la ecuación auxiliar estimada del índice DAX fueron: GARCH(1,1), EGARCH(1,1), TARCH(1,1).

escoger el único de los cuatro modelos que sí lo logró, el modelo IGARCH (1,1), aun cuando no correspondió con el valor mínimo indicado por el Criterio de Información de Schwarz. El modelo de volatilidad condicional escogido para las etapas subsecuentes del análisis fue el EGARCH (1,1), en cuatro de los cinco índices. La excepción correspondió al índice DAX, para el cual fue necesario optar por el modelo IGARCH (1,1).

Los residuos estandarizados de los modelos seleccionados en la etapa anterior se transformaron en distribuciones uniformes mediante la integral de la probabilidad, aplicada a cada serie. La Figura 2 muestra los diagramas de dispersión de las distribuciones marginales uniformes en la triangular

Figura 2.
Diagramas de dispersión de las distribuciones uniformes y gráficas de contorno de las cópulas con marginales normales estándar



Fuente: Gráfico elaborado con R¹¹

¹¹ El análisis de cópulas en R se llevó a cabo con el paquete CDVine, véase Brechmann y Schepsmeier (2013).

superior, de los cuales se desprende que la mejor cópula para describir esas distribuciones bivariadas puede ser de la familia elíptica (gaussiana o t de Student). Dicha figura también muestra las gráficas de contorno de cópulas correspondientes a las marginales normales estándar de los datos con diferentes valores del parámetro de dependencia.

El Cuadro 4 muestra las correlaciones entre las distribuciones uniformes, de las marginales y el valor que alcanza la Tau de Kendall para cada par. En general se puede ver que los grados de asociación entre los diferentes mercados analizados tienden a ser de medianos a altos. Se puede ver que el índice CAC muestra niveles más altos de asociación con los demás mercados, como lo sugieren los coeficientes de correlación y las Tau de Kendall estimadas empíricamente. El mercado británico parece ser el que tiene un menor grado de asociación con los otros mercados, no obstante, su Tau promedio es marginalmente superior al 0.58; el grado más bajo de asociación es, en este caso, con el mercado madrileño.

Cuadro 4: Matriz de Correlaciones-Tau de Kendall

	CAC	DAX	FTSE	IBEX	MIB
CAC	1	0.7074	0.6381	0.6454	0.6657
DAX	0.8818	1	0.5920	0.5925	0.6136
FTSE	0.8223	0.7817	1	0.5380	0.5537
IBEX	0.8302	0.7829	0.7249	1	0.6261
MIB	0.8459	0.7987	0.7409	0.8118	1
Correlaciones en la diagonal superior Tau de Kendall (empíricas) en la diagonal inferior					

Fuente: Tabla elaborada con resultados de R.

En el Cuadro 5 se observa el rechazo de la independencia que sugieren para todos los casos los resultados de la prueba T, y se puede ver también ahí que los criterios de Akaike y de Schwarz (BIC) sugieren la cópula t de Student como la mejor opción para todos los pares.

Cuadro 5: Pruebas de independencia y de selección de cópula por pares

Par	Prueba de independencia		Cópula seleccionada (MV)	
	Estadístico T de G&F	p	AIC	BIC
CAC-DAX	70.4464	< 0.01	t de Student	t de Student
CAC-FTSE	63.5490	< 0.01	t de Student	t de Student
CAC-IBEX	64.2672	< 0.01	t de Student	t de Student
CAC-MIB	66.2936	< 0.01	t de Student	t de Student
DAX-FTSE	58.9555	< 0.01	t de Student	t de Student
DAX-IBEX	59.0068	< 0.01	t de Student	t de Student
DAX-MIB	61.1021	< 0.01	t de Student	t de Student
FTSE-IBEX	53.5795	< 0.01	t de Student	t de Student
FTSE-MIB	55.1403	< 0.01	t de Student	t de Student
IBEX-MIB	62.3458	< 0.01	t de Student	t de Student

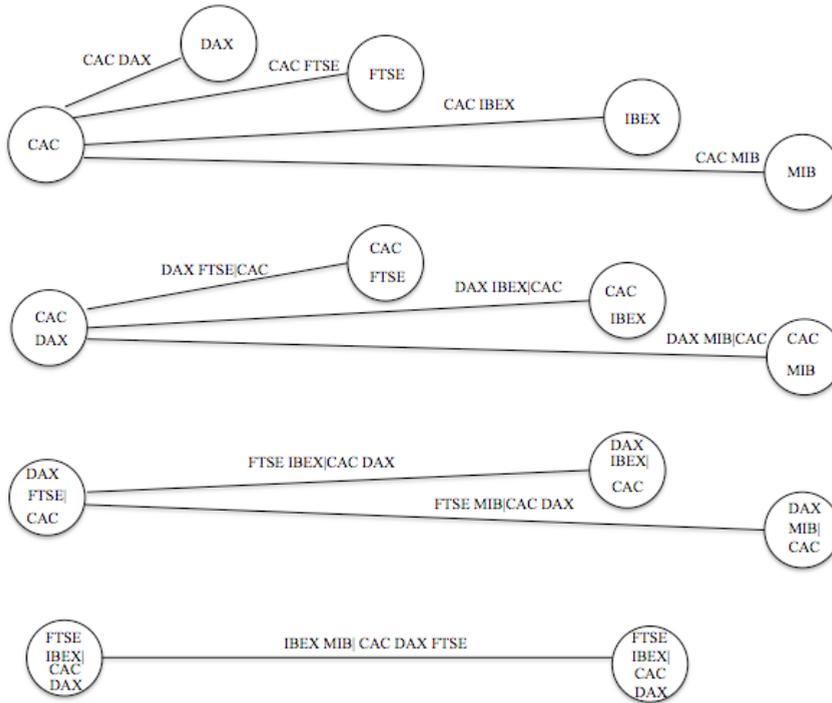
G&F = Genest y Favre (2007), AIC = criterio de información de Akaike;
BIC = Criterio Bayesiano de Schwarz, MV = Estimación máximo-verosímil

Fuente: Tabla elaborada con resultados de R.

La Figura 3 muestra la estructura de la viña empleada en este trabajo para analizar la dependencia de los cinco mercados europeos estudiados; se trata de una viña canónica en la cual cada árbol tiene sólo un nodo que se conecta con todos los demás. En el cuadro 6 se observan los resultados de la estimación secuencial de los parámetros (ρ , ν), los cuales sugieren una significancia superior a cualquier nivel convencional. La estimación secuencial de los parámetros se lleva a cabo comenzando desde el árbol ubicado en la cima, mediante máxima verosimilitud bivariada.

Como se había indicado anteriormente, las cópulas que relacionan los rendimientos del mercado francés con los rendimientos de los demás mercados son las que muestran mayores grados de asociación, dados los altos valores de los parámetros de dependencia estimados, ρ mayores en todos los casos a 0.83 y las τ de Kendall mayores a 0.63 (estimadas con base en los valores de los parámetros ρ), en particular con el mercado alemán. Aunque la moneda de las cotizaciones del mercado británico difiere de todos los demás,

Figura 3: Árbol de la viña canónica estimada para los cinco mercados



Fuente: Gráfico elaborada con base en resultados obtenidos de R.

la asociación de sus rendimientos con los del mercado francés superan a la fuerza de asociación de los rendimientos de España e Italia con ese mismo mercado. En todos los demás árboles de la viña, se observa una caída drástica en los parámetros de asociación, incluso a pesar de que los parámetros de las cópulas correspondientes se encuentren condicionadas al mercado francés. No obstante, resulta conveniente destacar que los rendimientos del mercado de la Gran Bretaña se encuentra más fuertemente asociado con los rendimientos de los otros mercados que como lo están los de España e Italia, en particular cuando la estructura de su dependencia se encuentra condicionada por los rendimientos de los mercados francés y alemán.

En la estructura de dependencia se encuentra que las cópulas estimadas en el primer árbol de la viña, las que relacionan los rendimientos del mercado francés con los rendimientos de los otros mercados, implica una

Cuadro 6: Estimación Secuencial de la Viña

Nodos	ρ	Error estand.	ν	Error estand.	τ de Kendall	AIC	BIC
1,2	0.8888	0.0030	5.6594	0.5255	0.6970	-6863.6125	-6850.8288
1,3	0.8592	0.0038	5.1659	0.4633	0.6581	-5932.9202	-5920.1365
1,4	0.8433	0.0041	5.6704	0.5549	0.6388	-5507.9684	-5495.1847
1,5	0.8382	0.0043	5.2191	0.4680	0.6328	-5389.2522	-5376.4685
2,3 1	0.2318	0.0153	8.6853	1.1332	0.1489	-295.9198	-283.1361
2,4 1	0.1871	0.0155	9.9124	1.5218	0.1198	-212.9418	-200.1581
2,5 1	0.1984	0.0152	12.0421	2.2112	0.1271	-211.6648	-198.8811
3,4 1,2	0.3526	0.0138	9.6981	1.4180	0.2294	-637.9373	-625.1536
3,5 1,2	0.0977	0.0157	14.2983	3.0536	0.0623	-61.5086	-48.7248
4,5 1,2,3	0.0568	0.0161	12.4470	2.3218	0.0362	-47.0550	-34.2713
Máximo Verosimil Global=12,600.39							
C. de Información Globales: AIC= -25,160.78; BIC= -25,032.94							

Notas: AIC se refiere al Criterio de Información de Akaike; BIC se refiere al Criterio de Información de Schwarz. La correspondencia de los dígitos utilizados para identificar a los nodos es la siguiente: 1= CAC; 2=DAX; 3=FTSE; 4=IBEX; 5=MIB.

Fuente: Tabla elaborada con resultados de R.

distribucion t con mayores niveles de dispersión que todos los demás casos. La cópula que modela la estructura de dependencia de los rendimientos de los mercados francés y español es la que muestra mayor dispersión, en tanto que la estructura de dependencia de los rendimientos de Gran Bretaña e Italia muestran la menor cuando se encuentran condicionados por los rendimientos de Francia y Alemania.

Conclusiones

Durante los últimos lustros ha tenido lugar un notable crecimiento y profundización de los mercados de capital europeos, aunque con importantes diferencias de uno a otro. La coordinación de políticas macroeconómicas (al menos en materia de política monetaria) ha sido uno de los impulsores más importantes de una mayor integración financiera.

En este estudio se analizan las relaciones entre los rendimientos de los cinco principales mercados de capital de Europa occidental mediante la metodología Cópula-GARCH que consiste en identificar el modelo GARCH de mejor ajuste en términos del criterio de información de Schwarz para generar residuos estandarizados en la siguiente etapa de modelación con Cópulas Viña. En la totalidad de los casos, el modelo GARCH de mejor ajuste, de acuerdo con el Criterio de Schwarz son del tipo EGARCH. No obstante, en el caso del índice DAX, el modelo EGARCH no fue capaz de eliminar el problema de heterocedasticidad en los residuos de acuerdo con la prueba ARCH LM. Por lo tanto, se opta por el modelo IGARCH, el único cuyos residuos no están afectados por heterocedasticidad, para generar los residuos estandarizados a utilizar en la siguiente etapa del estudio.

Con base en los resultados del análisis de Cópulas-Viña de la siguiente etapa, destaca que no en todos los casos se identifican relaciones fuertes entre los mercados estudiados pero, en promedio, se trata de valores medianos a altos. Asimismo, es notable que aquellos mercados con menor grado de integración son, también, los que tienen menor dispersión y, por lo tanto, los más adecuados para la construcción de portafolios.

Otro aspecto que vale la pena destacar es que, a pesar de que los rendimientos del mercado británico están calculados en su moneda original, libras esterlinas, en tanto que los rendimientos de los otros mercados están estimados en euros, aquel no se encuentra menos relacionado con los demás por la diferencia de monedas e, incluso, muestra vínculos más fuertes con el conjunto que los mercados de España e Italia. Asimismo resalta, como se comenta en los párrafos anteriores, las cópulas que relacionan los rendimientos del mercado francés con los de los demás mercados sugieren una asociación más fuerte entre ese mercado y el resto.

Estos resultados contribuyen a una mejor comprensión de las relaciones que prevalecen entre los mercados de capital de las principales economías de Europa occidental. Específicamente, se mide objetivamente el impacto que tiene la volatilidad de los rendimientos de alguno de los mercados sobre los demás.

Es preciso destacar la importancia de continuar con la búsqueda de explicaciones sobre la dinámica e interacción de los distintos mercados. Sólo de esa manera, será posible generar información más completa con la cual apoyar los procesos de administración de riesgos, valuación de activos, diversificación de portafolios, regulación y supervisión de los mercados.

Referencias bibliográficas

- Anderson, H. M., Dungey, M., Osborn, D. R., y Vahid, F., (2011). "Financial Integration and the Construction of Historical Financial Data for the Euro Area". *Economic Modelling*, 28(4), pp. 1498-1509.
- Andrade, S. C., y Chhaochharia, V., (2012). "The Euro and European Equity Market (Dis) Integration". *Working Paper*, University of Miami.
- Arouri, M. y Foulquier, P. (2012). "Financial Market Integration: Theory and Empirical Results". *Economic Modelling*, 29(2), pp. 382-394.
- Arouri, M. y Teulon, F., y Rault, C. (2013). "Equity Risk Premium and Regional Integration". *International Review of Financial Analysis*, 28, pp. 79-85.
- Baele, L., Ferrando, A., Hördahl, P., Krylova, E., y Monnet, C., (2004). "Measuring Financial Integration in the Euro Area". European Central Bank, *Occasional Paper Series*, no. 14.
- Baele, Lieven y Vander-Vennet, R. (2001). "European Stock Market Integration and EMU". Department of Financial Economics, Ghent University, *Paper in progress*.
- Bartram, S. M., y Wang, Y. H., (2015). "European Financial Market Dependence: An Industry Analysis". *Journal of Banking & Finance*, 59, pp. 146-163.
- Bedford, T. y Cooke, R.M. (2001). "Probability Density Decomposition for Conditionally Dependent Random Variables Modeled by Vines". *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 32, pp. 245-268.
- Bedford, T. y Cooke R.M. (2002). "Vines-A new Graphical Model for Dependent Random Variables". *The Annals of Statistics*, 30, pp. 1031-1068.
- Bekaert, G y Harvey, C.R., (1995). "Time-Varying World Market Integration". *Journal of Finance*, 50 (2), pp. 403-44.
- Bley, J., (2009). "European Stock Market Integration: Fact or fiction?" *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 19 (5), pp. 759-776.
- Bollerslev, T., (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Brechmann, E.C. y Schepsmeier, U. (2013). "Modeling Dependence with C-and D-Vine Copulas: the R package CDVine". *Journal of Statistical Software*, 52 (3), pp. 1-27.
- Errunza, V., & Losq, E. (1985). "International Asset Pricing Under Mild Segmentation: Theory and Test". *The Journal of Finance*, 40 (1), pp. 105-124.
- Ferson, W., y Harvey, C., (1991). "The Variation of Economic Risk Premiums". *Journal of Political Economy*, 99, pp. 385- 415.

- Genest, C., y Favre, A.C., (2007). "Everything you Always Wanted to Know About Copula Modeling But Were Afraid to Ask". *Journal of Hydrologic Engineering*, 12 (4), pp. 347-368.
- Gurrola-Ríos, C., Santillán-Salgado, R.J. y Jiménez-Preciado, A.L., (2014). "Interrelaciones y causalidad entre los principales mercados de capital de América Latina". *Estocástica, Finanzas y Riesgo*, 4 (1), pp. 65-88.
- Hasan, Iftekhar y Schmiedel, Heiko, (2004). "Networks and Equity Market Integration: European Evidence". *International Review of Financial Analysis*, 13 (5), pp. 601-619.
- Heston, S.L., Rouwenhorst, G. y Wessels, R. G. (1995). "The Structure of International Stocks Returns and the Integration of Capital Markets". *Journal of Empirical finance*, 2 (3), pp. 173-197
- Inzinger, Dagmar y Haiss, Peter (2006). "Integration of European Stock Markets. A Review and Extension of Quantity-Based Measures". Vienna, University of Economics and Business Administration Vienna, European Institute, *EI Working Paper*, 74.
- Kanas, A., (1998). "Volatility Spillovers Across Equity Markets: European Evidence". *Applied Financial Economics*, 8 (3), pp. 245-256.
- Kim, S.W., Kim, Y.M. y Choi, M.J., (2015). "Asia-Pacific Stock Market Integration: New Evidence by Incorporating Regime Changes". *Emerging Markets Finance & Trade*, 51, pp. 568-588.
- Licht, A. N., (1997). "Stock Market Integration in Europe". Program on International Financial Systems, Harvard Law School.
- Pascual, A. G., (2003). "Assessing European Stock Markets (co) Integration". *Economics Letters*, 78 (2), pp. 197-203.
- Rajan, R. y Zingales, L., (2003). "Banks and Markets: The Changing Character of European Finance". NBER National Bureau of Economic Research, *Working Paper* 9595.
- Reboredo, J. C., Tiwari, A. K., y Albulescu, C. T., (2015). "An Analysis of Dependence Between Central and Eastern European Stock Markets". *Economic Systems*, en prensa.
- Santillán-Salgado, R.J., Escobar-Saldivar L.J. y Gurrola-Ríos, C., (2015 a). *Cointegración entre las principales bolsas de Europa Continental en presencia de rompimientos estructurales (1999-2004)*. Contaduría y Administración, Aceptado para publicación.
- Santillán-Salgado, R.J., Fonseca-Ramírez, A. y Ortiz-Arango, F., (2015 b). "La Crisis de la deuda soberana en la eurozona (2009-2012)". Capítulo 4, en: *La Gran recesión (2007-2012): Lecciones y oportunidades para México*. Roberto J. San-

- tillán-Salgado, (coord.), Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas y EGA-DE Business School, México.
- Scheller, H. K., (2004). *The European Central Banks: History, Role and Functions*. European Central Bank. Recuperado el 7 de octubre de 2015 de: [<http://www.ecb.int/pub/pdf/other/ecbhistoryrolefunctions2004en.pdf>].
- Taylor, S. J., (1986). "Forecasting the Volatility of Currency Exchange Rates". *International Journal of Forecasting*, 3, pp. 159-70.
- Thalassinos, Eleftherios, y Thalassinos, Pantelis E., (2006). "Stock Markets' Integration Analysis". *European Research Studies*, 9 (3-4), pp. 3-14.
- Van Ewijk, S. E., y Arnold, I. J., (2015). "Financial Integration in the Euro Area: Pro-Cyclical Effects and Economic Convergence". *Economic Modelling*, 44, pp. 335-342.

Análisis, aplicación y comparación de tres métodos estadísticos en la estimación del VaR y el EVaR

Analysis, application and comparison of three statistical methods for the estimation of VaR and EVaR

Jaime Iván Urbina Rugeiro*
Gabriel Núñez Antonio*
Patricia Saavedra Barrera*

Fecha de recepción: 24 de mayo de 2015
Fecha de aceptación: 5 de octubre de 2015

* Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Cd. de México, México,
jaimivan@yahoo.com,
gabnunez@xanum.uam.mx,
psb@xanum.uam.mx

RESUMEN

En el área de análisis financiero, medidas como el Valor en riesgo, el VaR, y el Valor en riesgo extremo, el EVaR, son medidas comúnmente aceptadas para evaluar el riesgo en portafolios de inversión. En este trabajo se analizan los métodos de varianza-covarianza, el método histórico y el método de picos sobre el umbral en términos de su pertinencia en la estimación del VaR y EVaR. Se propone una forma de estimar puntualmente y por intervalos el VaR y EVaR usando cada uno de los métodos señalados, en el contexto particular de portafolios de inversión. Los procedimientos propuestos son desarrollados poniendo énfasis en su correcta aplicación, en términos de los supuestos técnicos que los validan. El desempeño de las metodologías propuestas se ilustran con datos simulados de un portafolio de inversión, así como en portafolios de acciones del sector de la construcción.

Clasificación JEL: C1, G11.

Palabras clave: Estimación por intervalos, intervalos Bootstrap, método de picos sobre el umbral, método de corridas.

ABSTRACT

In Finance, indicators such as Value at Risk, called VaR, and Value at Extreme Risk, EVaR, are commonly accepted to assess risk in investment portfolios. In this paper variance-covariance, historical and the peak on the threshold methods are analyzed in terms of their applicability to estimate VaR and EVaR. In addition, punctual and interval estimations under those methods are carried out. The procedures are reviewed under the specific context of investment portfolios. Special care was taken on the correct application of the proposed procedures in terms of their underlying technical assumptions. Their performance is illustrated using a simulated investment portfolio, and a real stock portfolio related to the construction sector in Mexico.

JEL Classification: C1, G11.

Keywords: *Interval estimation, Bootstrap methods for interval estimation, threshold exceedances, runs method.*

Introducción

A lo largo del tiempo los inversionistas han colocado su capital en diferentes instrumentos de inversión, con el fin de obtener mayores ganancias en una fecha futura. En algunos casos en el momento en que determinan en cuáles activos invertir, desconocen cuál será su valor futuro, y por ende, la ganancia correspondiente. Algunos ejemplos de instrumentos de inversión son las acciones, los bonos, los bienes y los derivados, entre otros. En la mayoría de los casos, los valores de los instrumentos cambian a través del tiempo y siguen un comportamiento aleatorio debido a que sus variaciones son inciertas. Todo instrumento cuyo comportamiento es aleatorio tiene un riesgo asociado. El riesgo, desde el punto de vista financiero, se define como la exposición ante posibles eventos que impactan de manera adversa en la inversión de un individuo. Existen varios tipos de riesgo tales como el de mercado, el de crédito y el de liquidez, entre otros. En este trabajo se analiza el riesgo de mercado, el cual consiste en el riesgo que conllevan las variaciones de los precios de los activos financieros.

Algunas propuestas, existentes en la literatura, para medir el riesgo son la volatilidad de un portafolio, introducida por primera vez por Harry Markowitz en 1952, (Markowitz, 1952), el coeficiente *beta*, el cual se utiliza en el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM) desarrollado por Sharpe, Lintner y Mossin, ver (Sharpe, 1964), (Mossin, 1966) y (Lintner, 1965), respectivamente. Otras medidas de riesgo, las cuales utilizan la distribución de las pérdidas del portafolio, son el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Extremo o Condicionado (EVaR). El VaR nació a finales del siglo pasado y es una medida de riesgo que por su sencillez es muy popular en el sistema financiero. El VaR tiene varias propiedades atractivas, entre ellas: se puede aplicar a cualquier portafolio sin importar su composición; toma en cuenta las correlaciones en los cambios de los precios de los activos del portafolio, el riesgo se representa mediante un sólo número y es fácil de calcular. Sin embargo, tiene sus inconvenientes, entre los que se encuentra no tener la propiedad de subaditividad, que viola el principio de diversificación en finanzas, por lo que no es una medida de riesgo coherente. Debido a esta limitación, se propone usar al EVaR que es una medida coherente y por ende, más confiable desde el punto de vista financiero. Cabe mencionar que

la volatilidad de un portafolio y el coeficiente *beta* tampoco son medidas coherentes, (McNeil *et al.*, 2005).

En el presente trabajo se aplican a varios portafolios de inversión distintos métodos para estimar el VaR y el EVaR. El de varianza-covarianza que supone rendimientos que siguen una distribución Normal. Otros, que trabajan directamente con las pérdidas del portafolio sin suponer distribución alguna, como son el método histórico y el de picos sobre el umbral (POT). Este último usa la teoría de valores extremos que permite estimar de mejor manera la probabilidad de ocurrencia de pérdidas excesivamente grandes.

El objetivo general del presente trabajo es analizar, comparar y aplicar los métodos de varianza-covarianza, histórico y de picos sobre el umbral, en la estimación del VaR y EVaR asociados a datos financieros. Lo anterior poniendo especial atención al cumplimiento de los supuestos teóricos asociados a cada método. Particularmente, se muestra cómo obtener estimaciones puntuales y por intervalos de confianza.

El contenido del presente artículo es el siguiente. En la Sección 1 se presentan el cálculo de la pérdida en el valor de un portafolio de inversión, se introducen las definiciones del VaR y el EVaR, se explican las metodologías utilizadas en este trabajo para estimar puntualmente estas medidas de riesgo y los procedimientos para generar los correspondientes intervalos de confianza. En la Sección 2 se muestran los resultados obtenidos cuando se estiman el VaR y EVaR de un portafolio de acciones con distintas estrategias de inversión. Por último, en la Sección 3 se ofrecen las conclusiones correspondientes.

1. Definiciones y métodos para estimar el VaR y EVaR

1.1. La función de pérdida

A continuación se explica cómo calcular la pérdida en el valor de un portafolio de inversión. Se asume que en el tiempo t se conoce el valor del instrumento financiero i , denotado por P_i^t , desde $i = 1, \dots, n$. Además, sea $m_i P_i^t$ el monto que se invierte en el instrumento i . Se asume que la composición del portafolio permanece fija en el tiempo. En el tiempo t se desconocen los precios de los instrumentos financieros correspondientes al tiempo $t + 1$. Así el valor del portafolio al tiempo t , V_t , y su pérdida al tiempo $t + 1$, L_{t+1} , se calculan respectivamente como:

$$V_t = \sum_{i=1}^n m_i P_i^t. \quad (1)$$

$$L_{t+1} = - (V_{t+1} - V_t). \quad (2)$$

Cabe resaltar que si los precios de los instrumentos financieros P_i^{t+1} son aleatorios, entonces V_{t+1} y L_{t+1} también son variables aleatorias. Por lo general, la distribución de probabilidad de estas variables se desconoce.

1.2. Valor en Riesgo y Valor en Riesgo Extremo

El Valor en Riesgo es la pérdida más grande que se obtiene de un portafolio de inversión para un nivel de confianza $1 - \alpha$ y en un horizonte de tiempo dado. Es decir, el VaR es un cuantil asociado a la distribución de la pérdida. Su expresión matemática está dada por

$$VaR_\alpha = \inf \{k_\alpha \mid P(L \leq k_\alpha) \geq 1 - \alpha\}. \quad (3)$$

Por otro lado, el Valor en Riesgo Extremo o Condicionado se define como la pérdida esperada que se puede obtener del portafolio de inversión dado que ésta excedió el VaR. Su expresión matemática está dada por

$$EVaR_\alpha = E [L \mid L > VaR_\alpha]. \quad (4)$$

Existen modelos, tanto paramétricos como no paramétricos, para estimar el VaR y el EVaR. En los primeros, se asume que la pérdida se modela mediante una distribución de probabilidad específica. En los modelos no paramétricos sólo se considera que la distribución de probabilidad que describe el comportamiento de la pérdida es alguna dentro de una familia F de distribuciones.

1.3. Métodos para estimar puntualmente el VaR y el EVaR

Aproximación varianza-covarianza

El procedimiento de varianza-covarianza asume que la distribución de las pérdidas L , en el valor del portafolio, es normal con media μ y varianza σ^2 .

En la práctica, los parámetros se desconocen por lo que se estiman con datos históricos. Con base en este supuesto, el VaR se define como el cuantil de orden $1 - \alpha$ de una distribución Normal, y se estima por

$$\widehat{VaR}_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\hat{\sigma} + \hat{\mu}, \quad (5)$$

y el EVaR como

$$\widehat{EVaR}_\alpha = \frac{\hat{E}[L \ I_{[L > VaR_\alpha]}]}{\alpha}, \quad (6)$$

donde Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución acumulada de una Normal estándar. El supuesto de normalidad no se cumple en general puesto que las pérdidas exhiben colas pesadas, ver las gráficas que se presentan en la Sección 2. De hecho, el procedimiento de varianza-covarianza subestima el VaR y el EVaR, (McNeil *et al.*, 2005).

Método histórico

En el método histórico se selecciona una muestra de los cambios en los factores de riesgo sobre un periodo de tiempo dado y se evalúa el operador de pérdida para cada elemento de la muestra. Después, con la distribución empírica de la pérdida del portafolio se calculan el VaR y el EVaR. Así, si L_1, \dots, L_n es una muestra de datos históricos de las pérdidas en el valor del portafolio, el VaR y el EVaR al nivel $1 - \alpha$ se estiman, respectivamente, como

$$\widehat{VaR}_\alpha = \hat{F}^{-1}(1 - \alpha), \quad (7)$$

$$\widehat{EVaR}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n L_i \ I_{[L_i > VaR_\alpha]}}{\sum_{j=1}^n I_{[L_j > VaR_\alpha]}}$$

donde \hat{F} es la función de distribución empírica de las pérdidas. El mayor atractivo de este método es que es completamente no paramétrico, es decir, no se asume ninguna distribución específica de la pérdida. Sin embargo, la variabilidad de los estimadores depende de la muestra que se obtenga. Es por ello que una estimación puntual no es suficiente. Este procedimiento se puede complementar mediante métodos de remuestreo como los de Bootstrap con los cuales se pueden calcular intervalos de confianza para el VaR y el EVaR a partir de la muestra de datos. El inconveniente de este método reside en su dependencia muestral. En consecuencia, genera únicamente escenarios que ocurrieron en el pasado, lo que es un problema en el área de finanzas donde lo importante es prever las expectativas futuras del mercado, (McNeil, *et al.*, 2005) y (Crouhy, *et al.*, 2001).

Método de picos sobre el umbral (POT)

En contraste con la aproximación varianza-covarianza y el método histórico, el método POT modela únicamente la distribución de la pérdida a partir de un valor u definido como umbral, es decir, se enfoca en la cola derecha de la distribución. El método asume una distribución de los excedentes o excesos. Los excedentes son aquellos valores de la pérdida que exceden el umbral u y el exceso es la diferencia entre el excedente y el umbral. Este método se fundamenta en el Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan, (Pickands, 1971) y (Balkema y de Haan, 1974).

Teorema (Pickands-Balkema-de-Haan)

Para una función de distribución F y un umbral u se puede encontrar una función positiva medible $\beta(u)$ tal que:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup |F_u(y) - G_{\varepsilon, \beta(u)}(y)| = 0, \quad (8)$$

si y sólo si F está en el máximo dominio de atracción de una función de distribución del valor extremo generalizado H_ε , ver McNeil *et al.*, (2005).

Es decir, conforme el umbral se aproxime al punto final derecho x_F , los excesos convergen, en distribución, a una Distribución Pareto Generalizada (GPD) $G_{\varepsilon, \beta(u)}(y)$ definida por:

$$G_{\varepsilon, \beta(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \varepsilon \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \varepsilon \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (9)$$

donde $y \geq 0$ si $\varepsilon \geq 0$ y si $\varepsilon < 0$ y $0 \leq y \leq -\frac{\beta}{\varepsilon}$ en ambos casos $\beta > 0$.

Con frecuencia los parámetros se desconocen y deben estimarse por algún procedimiento, por ejemplo, por máxima verosimilitud. Por lo general, se asume que los parámetros se estiman a través de una muestra de observaciones independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, en finanzas los excedentes no son independientes por lo que debe recurrirse a métodos como el de corridas para obtener una muestra de elementos, al menos poco correlacionados, ver (Campa, 2001). A continuación se explica brevemente el método de corridas.

Método de corridas

El método de corridas se basa en agrupar la muestra de pérdidas, ordenadas cronológicamente, en grupos disjuntos y de cada grupo seleccionar el valor máximo. La muestra de excedentes se escoge por medio de este método: se ordenan las pérdidas cronológicamente, se agrupan en corridas, tomando en cuenta su tamaño. Cada corrida debe tener un número de elementos mayor o igual a r , donde $r > 0$ se elige de antemano, y se selecciona de cada grupo el valor más grande. La nueva muestra de excedentes se forma con aquellos valores seleccionados que excedan el valor del umbral u . Con esta muestra de excedentes se aplica el Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan. Para estimar los parámetros de la distribución de Pareto Generalizada se asume que los excedentes se modelan mediante una distribución de este tipo. Este supuesto debe verificar mediante alguna prueba de bondad de ajuste. Por ejemplo, la prueba de Anderson-Darling, (Razali, *et al.*, 2011).

Una vez que se valida la aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan se puede estimar el VaR y el EVaR mediante la relación entre la distribución de los excedentes y la distribución de las pérdidas F como se muestra a continuación.

$$F(x) = P(X > x) = P(X > u)P(X > x | X > u) = F(u)\left(1 + \varepsilon \frac{x-u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (10)$$

donde $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ es la función de supervivencia. Para conocer el VaR de orden $1 - \alpha$ simplemente se despeja x de la ecuación (10). Es decir, se igualan $\bar{F}(x) = \alpha$ y $VaR_\alpha = x$ y se obtiene:

$$VaR_\alpha = u + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\varepsilon} - 1 \right]. \quad (11)$$

El EVaR al mismo nivel $1 - \alpha$ se calcula obteniendo la esperanza de la GPD, la cual está dada por

$$EVaR_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \varepsilon} + \frac{\beta - \varepsilon u}{1 - \varepsilon}, \quad (12)$$

siempre que $\varepsilon < 1$. Para $\varepsilon \geq 1$ no existe ningún momento central. En la práctica ε , β y $\bar{F}(u)$ se reemplazan por sus respectivos valores estimados.

2.4. Estimación por intervalos

En la aproximación de varianza-covarianza se asume que la pérdida en el valor del portafolio L sigue una distribución Normal con media μ y varianza. Sin embargo, aun bajo este supuesto la variabilidad de algún cuantil, como el VaR, es difícil de estimar. Para tratar de estimar la variabilidad de los correspondientes estimadores del VaR y EVaR, en el presente trabajo se propone usar el método de remuestreo que consiste en generar varios modelos de variables aleatorias normales con media y varianza estimadas a través de una muestra. Esto es, bajo el supuesto de normalidad de la aproximación varianza-covarianza, sea $\{L_1^{(j)}, \dots, L_m^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, R$ la j -ésima modelo aleatorio donde R es el número de muestras generales y m es el tamaño de cada muestra. Para cada una de éstas se estima el VaR y el EVaR por lo que se tiene una muestra de distintos valores del VaR, $\widehat{VaR}_1, \dots, \widehat{VaR}_R$ y otra de distintos valores de EVaR,

$\widehat{EVaR}_1, \dots, \widehat{EVaR}_R$. A partir de la distribución de la muestra de valores del VaR estimado se obtiene un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$. Análogamente se obtiene un intervalo de confianza para el EVaR.

En el caso del método histórico se sugiere usar el del percentil básico que es un método Bootstrap no paramétrico para estimar intervalos de confianza. Los métodos Bootstrap son de remuestreo, empleados para estimar el sesgo de un estimador y el intervalo de confianza de un parámetro, ver, por ejemplo, (Davidson y Hinkley, 1997).

Cuando se emplea la estimación por Máxima Verosimilitud (MV) se puede derivar un intervalo de confianza asintótico para algún parámetro desconocido θ . Los intervalos de confianza se calculan a partir de la tasa de log-verosimilitud, la cual es un estadístico de prueba utilizada para probar si el parámetro θ tiene cierto valor θ_0 (hipótesis nula). Este procedimiento conocido con el nombre de método de la razón de verosimilitud, genera un intervalo de confianza asimétrico. Dado que se usa el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de la distribución de los excedentes, también se usa este procedimiento para generar intervalos de confianza para la estimación del VaR y EVaR en el método POT (Urbina, 2015).

3. Aplicación a portafolios de inversión

Como se ha dejado ver en las secciones anteriores, la aplicación correcta de métodos formales para estimar adecuadamente cantidades como VaR y el EVaR dependen fuertemente de los supuestos bajo los que trabaja cada uno de los métodos. A continuación se ilustran las metodologías analizadas anteriormente empleando datos reales del sector de la construcción en México y datos simulados de pérdidas de portafolios de inversión. Se pone énfasis en la adecuada aplicación de cada una de las metodologías.

Portafolios con datos reales

Para este caso, se seleccionaron acciones de las siguientes cinco empresas: Grupo ICA, Grupo Mexicano de Desarrollo (GMD), Cementos Mexicanos (CEMEX), Desarrolladora HOMEX y Grupo CARSO (GCARSO). Se tomaron los precios diarios de cada una de sus acciones en el periodo 2009-2013 y se estimaron el vector de rendimientos promedio y la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos diarios. Se empleó el método de Markowitz,

(Davison, 1998), para encontrar el vector de pesos óptimo, es decir, los porcentajes del monto total que se invierten en cada una de las acciones para minimizar la varianza del portafolio. La solución del problema de optimización de la varianza del portafolio se muestra en la Tabla 1. Los pesos dados en la Tabla 1 están en el intervalo abierto $(0, 1)$, lo que significa que no se requiere pedir prestado capital para lograr tener la menor volatilidad con el rendimiento esperado dado, el cual se propuso del 5% anual.

Adicionalmente, se realizaron pruebas de bondad de ajuste de Shapiro-Wilk (Razali y Wah, 2011), para validar el supuesto de normalidad de la distribución de las pérdidas del portafolio correspondiente.

Tabla 1: Vector de pesos óptimo de Markowitz para el portafolio de acciones

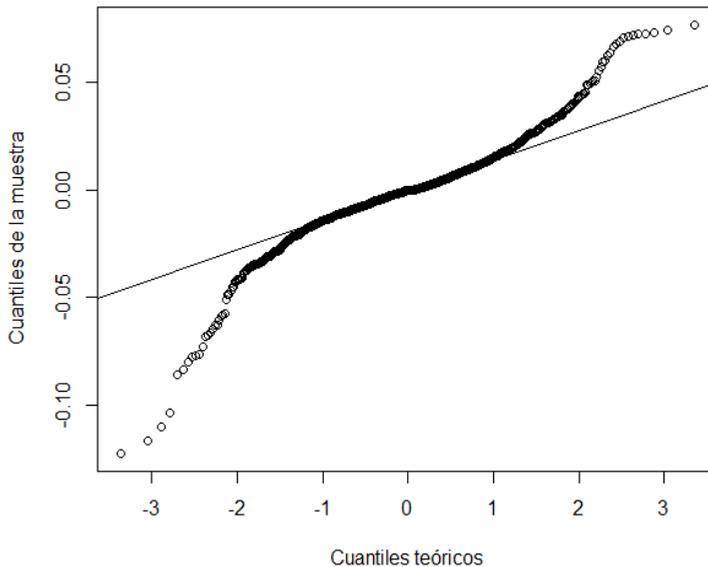
Acción	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO
w_i	0.4057	0.0948	0.0379	0.0997	0.3616

Fuente: elaboración propia.

En el presente trabajo se analizaron dos portafolios compuestos por las mismas acciones. Los dos portafolios difieren en los pesos de inversión. El portafolio A es aquel donde se invierte la misma proporción del monto de capital en cada una de las acciones y el portafolio B es aquel donde se invierte de acuerdo a la solución del problema de Markowitz mostrada en la Tabla 1. Se construyeron los gráficos QQ-plot para las pérdidas de cada portafolio como se muestran en las Figuras 1 y 2. Se puede apreciar una discrepancia en las colas de la distribución en ambas gráficas. Por otro lado, los valores p de las respectivas pruebas de Shapiro-Wilk son del orden de 10^{-16} . Por lo tanto, se puede concluir que la distribución Normal no modela adecuadamente las pérdidas en el valor de ninguno de los dos portafolios, lo que invalida el uso del método de varianza-covarianza para estimar el VaR y EVaR. Cabe mencionar que también se analizó si las pérdidas de ambos portafolios podrían seguir una distribución *t-student*. Se aplicó una prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling para distintos grados de libertad. En todos los casos el valor p de las pruebas correspondientes resultó muy pequeño por lo que también se rechaza el supuesto que los datos se pueden modelar mediante una distribución *t-Student*.

En la Tabla 2 y en la Tabla 3 se muestran los resultados numéricos de las estimaciones del VaR y el EVaR empleando los métodos de varianza-covarianza, el histórico y el método POT. Asociadas al método de varianza-covarianza se presentan las estimaciones por intervalos de confianza del método de remuestreo, empleando el método del percentil básico las correspondientes estimaciones por el método histórico y finalmente, por el método de verosimilitud de perfiles o de razón de verosimilitud se exhiben los intervalos asociados al método POT. Para este último se estableció el cuantil empírico de 85% como umbral. Se aplicó el método de corridas para generar una muestra independiente de excedentes. El tamaño de la muestra antes de usar el método de corridas fue de 195 excedentes. Al aplicar el método de corridas, con tamaño de corrida igual a 2, se obtuvieron 133 excedentes para el portafolio *A* y 128 para el portafolio *B*. Con el fin de validar la correcta aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan a los datos de los excedentes de los dos portafolios se les aplicó la prueba de Anderson-Darling. En ambos portafolios los correspondientes valores resultaron ma-

Figura 1: QQ plot de las pérdidas en el valor del portafolio A.



Fuente: elaboración propia.

Tabla 2: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio A. Monto = \$ 1.00,
Tiempo = 1 día. IC=Intervalo de confianza

Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	0.0329	0.0313	0.0331
IC VaR	(0.0314, 0.0344)	(0.0278, 0.0345)	(0.0295, 0.0374)
EVaR	0.0414	0.0463	0.0481
IC EVaR	(0.0396, 0.0431)	(0.0407, 0.0523)	(0.0427, 0.0579)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio B. Monto=\$ 1.00,
Tiempo = 1 día.

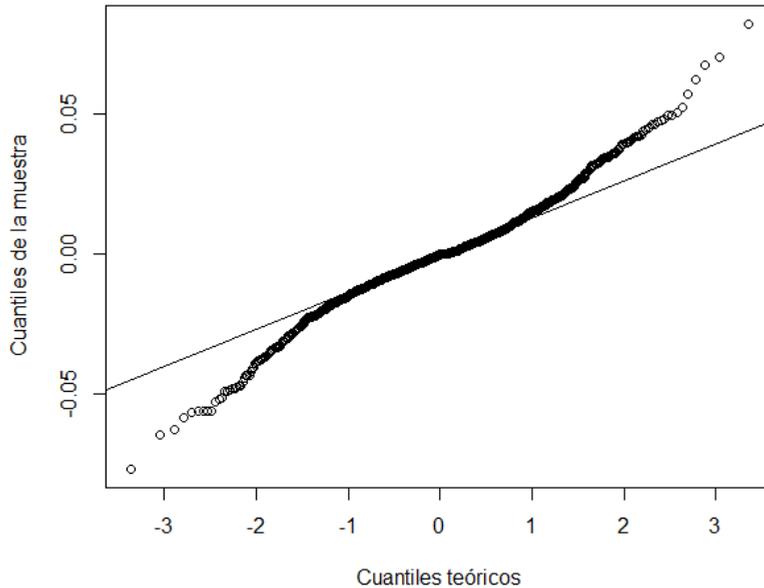
Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	0.0284	0.0305	0.0309
IC VaR	(0.0272, 0.0297)	(0.026, 0.0339)	(0.0279, 0.0344)
EVaR	0.0358	0.0405	0.0427
IC EVaR	(0.0343, 0.0372)	(0.0366, 0.0447)	(0.0384, 0.0489)

Fuente: elaboración propia.

iores a 0.8. Por lo anterior, se puede concluir que la aplicación del teorema es adecuado para ambos portafolios.

De los resultados presentados en las tablas 2 y 3 se puede observar que el método POT es el que ofrece las estimaciones más altas tanto para el VaR como el EVaR en ambos portafolios. A excepción de la estimación del VaR para el portafolio *A*, la aproximación de varianza-covarianza es la que da las estimaciones más bajas. Como se discutió previamente, los resultados anteriores están acordes a lo que se esperaría desde el punto de vista teórico. Es decir, dado que las correspondientes pruebas de bondad de ajuste (Anderson-Darling) validaron la aplicación del Teorema de Pickands-Balkema-de Haan y dado que las correspondientes pruebas de bondad de ajuste para la normalidad y para una distribución *t-Student* se rechazaron, se pue-

Figura 2: QQ plot de las pérdidas en el valor del portafolio B.



Fuente: elaboración propia.

de concluir que a excepción del método POT los otros métodos subestiman el riesgo. Particularmente, en este caso se observa que el método de varianza-covarianza subestima en demasía el riesgo, al asumir una distribución Normal para las pérdidas. Aunque los intervalos de confianza obtenidos por el método histórico (remuestreo y del percentil básico) y por el método de POT (verosimilitud de perfiles) se intersectan en todos los casos, es claro que los intervalos asociados al método POT ofrecen valores mayores, comparados con el método histórico.

Por otro lado, se puede observar que las estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio *B* son generalmente menores que las correspondientes al portafolio *A*. Específicamente, lo anterior siempre ocurre en el caso del método de varianza-covarianza. Esto último se puede explicar dado que el VaR y EVaR están en función de la desviación estándar del portafolio, y el portafolio *B* es aquel donde ésta alcanza su valor mínimo. Sin embargo, no hay ningún resultado teórico que nos permita asegurar que lo anterior se cumple para el método histórico o para el método POT.

Portafolios con datos simulados

En este caso se presentan ejemplos con datos simulados donde se analiza el desempeño de los diferentes métodos de estimación. Se generó una muestra de pérdidas que siguen una distribución Normal con media -0.00076475 y varianza 0.0002942 . Se aplicaron los tres métodos antes vistos. Los resultados se muestran en la Tabla 4. Como se puede observar, el POT estima bien el VaR dado que es el más cercano al de varianza-covarianza que en este caso es el valor correcto. Los intervalos obtenidos para cada uno de los métodos contienen al valor verdadero. Esto muestra la ventaja de contar con intervalos de confianza porque permiten asegurar que la estimación es razonable a pesar de que puntualmente las estimaciones son distintas. Para el EVaR, como era de esperarse, el POT lo sobreestima cuando se comparan las estimaciones puntuales. Aunque todos los intervalos estimados contienen al valor correcto se puede notar un sesgo respecto a los valores obtenidos por el método de varianza-covarianza. Por otro lado, se simuló un portafolio donde las pérdidas se generaron de una distribución *t-Student* con cinco grados de libertad. El VaR bajo esta distribución es 2.015 y una aproximación numérica del EVaR resultó ser 2.925 . En la Tabla 5 se muestran los resultados correspondientes. En este caso se puede observar que el método de varianza-covarianza es el que peor se desempeña cuando la distribución que genera las pérdidas tiene colas relativamente más pesadas que la distribución Normal. Particularmente, el valor exacto no se encuentra dentro del intervalo de confianza asociado.

Tabla 4: Estimaciones del VaR y el EVaR para un portafolio con las mismas características del portafolio B en el que se asume que las pérdidas son normales. Monto=\$ 1.00, Tiempo = 1 día.

Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	.027439	.026364	.027483
IC VaR	(0.0263, .0286)	(.0242, .0296)	(.0248, .0306)
EVaR	.03452	.03347	.03805
IC EVaR	(.0331, .0359)	(.0308, .0362)	(.0342, .044)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 5: Estimaciones del VaR y el EVaR para un portafolio cuyas pérdidas tienen distribución t-Student con 5 grados de libertad.

Método	Var-Covarianza	Histórico	POT
VaR	2.229789	2.133007	2.208766
IC VaR	(2.1350, 2.3238)	(1.9577, 2.3095)	(2.0032, 2.4579)
EVaR	2.7871	3.0640	3.1567
IC EVaR	(2.6790, 2.8910)	(2.6730, 3.5404)	(2.8150, 3.6992)

Fuente: elaboración propia.

4. Conclusiones

Derivado del análisis de este trabajo se puede observar que las pérdidas excesivas tienen probabilidades más grandes que si se asumiera un modelo con una distribución Normal. Por lo anterior, la aproximación de varianza-covarianza subestima el riesgo. Por otro lado, el método histórico no proporciona suficiente información sobre la cola de la distribución de las pérdidas y difícilmente permite considerar escenarios futuros. Esto implica que las estimaciones del VaR y el EVaR son poco útiles. Por otro lado, una opción que resulta atractiva es la aplicación de métodos basados en la Teoría de Valores Extremos, como el método POT. A pesar de que se debe tener cuidado en la aplicación de métodos de remuestreo como el Bootstrap, estos ofrecen una manera fácil de construir intervalos de confianza para el VaR y el EVaR en situaciones donde teóricamente resultaría retador. Los métodos que trabajan con los valores extremos dan una mejor estimación del riesgo ya que al garantizar que los supuestos se cumplen, se asegura que las estimaciones sean consistentes. El método POT, a diferencia del método histórico, tiene la posibilidad de generar nuevos escenarios que permiten al inversionista estimar de antemano el riesgo que conllevan. Aunque el método POT es el que da las mejores estimaciones, tiene la limitación de requerir de un tamaño suficientemente grande de excedentes para estimar los parámetros y así poder estimar el VaR y el EVaR adecuadamente. Por último, es importante hacer notar que la información que se usó en las aplicaciones es histórica por lo que no refleja las expectativas futuras del mercado. Como una futura

línea de investigación se explora la posibilidad de incorporar información del mercado de futuros o de volatilidades implícitas del mercado de derivados para estimar la función de pérdidas y emplear métodos de estimación bayesiana.

Referencias bibliográficas

- Balkema, A. A. y L. de Haan (1974). "Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability*, 2, pp. 792–804.
- Campa Rojas M. A. (2001). *Teoría de valores extremos con aplicaciones a medidas de riesgo*. Tesis de Licenciatura, México, UNAM.
- Crouhy M., Galai D. y Mark R. (2001). *Risk Management*. New York, EUA, Ed. McGraw-Hill.
- Davison, A. C. y Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. New York, EUA, Cambridge University Press.
- Luenberger D. (1998). *Investment Science*. EUA, Ed. Oxford University Press.
- Lintner, John (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), pp. 13–37.
- Markowitz H. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, EUA.
- McNeil A., Frey R. y Embrechts P. (2005). *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*. EUA, Ed. Princeton University Press.
- Mossin, Jan (1966). "Equilibrium in a Capital Asset Market". *Econometrica*, vol. 34 (4), pp. 768–783.
- Pickands, J. (1971). "The Two-Dimensional Poisson Process and Extremal Processes". *Journal of Applied Probability* 8, pp. 745–756.
- Razali N. M. y Wah Y. B. (2011). "Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests". *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, Faculty of Computer and Mathematical Sciences, 2 (1), pp. 21-33.
- Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance* 19, pp. 425-442.
- Urbina Rugeiro J. I. (2015). *Estimación del riesgo en portafolios de inversión*. Tesis de Maestría. México, Universidad Autónoma Metropolitana.

Intervalos de confianza para VaR y ES, y su aplicación al mercado colombiano

Confidence Intervals for VaR and ES and their Application to the Colombian Market

Jorge Rosales Contreras*

Fecha de recepción: 8 enero 2016

Fecha de aceptación: 10 febrero 2016

Gerencia de Riesgo Financiero
LarrainVial
Santiago, Chile

RESUMEN

Las métricas usuales de riesgo de mercado, tales como Valor en Riesgo (VaR) o Déficit Esperado (ES), se calculan usando estimadores puntuales. Desde un punto de vista estadístico, el VaR es un cuantil y el ES una esperanza condicional de la distribución de pérdidas, la cual puede ser modelada de forma paramétrica o no paramétrica. Sin embargo, un estimador puntual es tan bueno como su precisión, por lo que cualquier estimación de riesgo debería complementarse con alguna indicación de su precisión. En este trabajo construimos intervalos de confianza para los estimadores de ambas métricas bajo las distribuciones más comúnmente usadas: normal y empírica. La utilidad de los intervalos radica en que es posible obtener conclusiones equivalentes a la prueba de backtesting desde la primera estimación de riesgos que se realice, sin necesidad de esperar a tener una muestra de estimaciones de métricas de riesgo.

Clasificación JEL: C12, C13, G17.

Palabras clave: Valor en riesgo, déficit esperado, backtesting, intervalos de confianza.

ABSTRACT

The usual market risk metrics, such as Value at Risk (VaR) or Expected Shortfall (ES), are estimated pointwise. From a statistical viewpoint, VaR is a quantile and ES is a conditional expectation of the loss distribution, which can be modeled parametrically or non-parametrically. However, a point estimator is only as good as its precision; therefore any risk estimation should be accompanied with some indication of its precision. In this paper confidence intervals for the estimators of both metrics, under the most commonly used distributions: Normal and empirical, were calculated. The usefulness of the intervals lies in the possibility of drawing a decision equivalent to backtesting from the very first risk estimation, without having to wait to gather a sample of risk estimates.

JEL Classification: C12, C13, G17.

Keywords: *Value at risk, expected shortfall, backtesting, confidence intervals.*

Introducción

Una vez que se han estimado las métricas de riesgo por algún tiempo, es importante que la adecuación del modelo de estimación de riesgos sea evaluada periódicamente. Ello supone tanto verificar los supuestos del modelo como cuantificar su desempeño. Esto último se refiere al uso de métodos estadísticos para contrastar las métricas de riesgo pronosticadas con los resultados —reales o hipotéticos— del período posterior.

En términos prácticos, esto significa realizar una prueba de hipótesis. Para ello, se requiere establecer una hipótesis nula que probar, una hipótesis alternativa consistente con el tipo de desviación que se desea validar; así como un nivel de significancia (la máxima probabilidad aceptable de rechazar un modelo válido) independiente del nivel de confianza de la métrica de riesgo. Seleccionar un nivel demasiado pequeño no tiene sentido porque se incrementaría la probabilidad de no rechazar un modelo inválido. Así, generalmente se elige un nivel de significancia arbitrario y se procura construir una prueba con la máxima potencia (habilidad de rechazar un modelo inválido).

Para medir dicha habilidad se construye un estadístico de prueba y se estima su distribución de probabilidades bajo la hipótesis nula. Si el valor de esta probabilidad (valor-p) es menor que el nivel de significancia, la hipótesis nula se rechaza, entendiéndose que la muestra presenta evidencia razonable en su contra.

Si la estimación de métricas de riesgo es una disciplina relativamente reciente, la validación de modelos (*backtesting*) lo es aún más. Una de las primeras y todavía más ampliamente usadas pruebas de validación para el VaR es la propuesta por Kupiec (1995), basada en el cociente de verosimilitudes de la distribución binomial. La potencia de esta prueba no es muy alta (salvo para muestras muy grandes) porque no usa ni valida la aleatoriedad ni la magnitud de los excesos.

La prueba de Christoffersen (1998) incorpora la aleatoriedad de forma explícita en el estadístico de prueba, mientras en McNeil *et al.*, (2005) propone una prueba independiente para la aleatoriedad. Engle y Manganelli

(2004) proveen un ejemplo de cómo probar la independencia usando una regresión binaria y lo llaman la prueba dinámica de cuantiles. Algunas pruebas recientes que usan el tiempo transcurrido entre excesos incluyen Christoffersen y Pelletier (2004), Candelon *et al.*, (2011) y Pelletier y Wei (2015). Dowd (2005) presenta algunas pruebas alternativas, mientras Campbell (2006) hace una revisión extensa de modelos de validación.

La popularidad del Déficit Esperado (ES por sus siglas en inglés) como métrica de riesgo creció a raíz de que Artzner *et al.*, (1999) probaron que el VaR no es una medida coherente, Acerbi y Tasche (2002), entre otros, mostraron que el ES sí lo es. Posteriormente, El Comité de Basilea (BIS 2013) decidió reemplazar al VaR a 99% por el ES al 97.5% como la métrica estándar de riesgo de mercado, pero mantuvo el VaR para efectos de validación de modelos.

Validar la estimación de VaR es relativamente sencillo porque basta verificar la fracción de tiempo que la pérdida posterior excedió el VaR y esto se puede hacer con independencia del modelo que produjo el VaR. El caso del ES no es tan directo por dos razones vinculadas entre sí: 1) el ES involucra en general el cálculo de un promedio, pero la pérdida del día siguiente es la realización de un único escenario y 2) el ES depende de la distribución subyacente. Así para validar un modelo de estimación de ES se requieren necesariamente técnicas tipo MonteCarlo o Bootstrap.

Algunos autores proponen métodos paramétricos para la estimación de ES y su *backtesting* (ver McNeil y Frey (2000), por ejemplo). Entre los métodos no paramétricos podemos destacar los trabajos de Kerkhof y Melenberg (2004), quienes usan la funcional delta para construir una prueba que se compara favorablemente con el *backtesting* del VaR de Basilea, así como Acerbi y Szekely (2014), quienes proveen tres estadísticos de prueba que mediante MonteCarlo muestran en general mejor potencia que la prueba de Basilea para VaR a 99%.

Una limitación de los procedimientos de validación de modelos de riesgos más populares es que se basan en aproximaciones asintóticas de la distribución del estadístico de prueba, lo que se traduce en la necesidad de contar con muestras grandes antes de poder tomar una decisión acerca de la adecuación del modelo de estimación de riesgos.

En la práctica, si se usan cuatro años de retornos diarios para estimar las métricas de riesgo y se realiza una prueba de adecuación (*backtest*) contrastando, según recomienda el Comité de Basilea, al menos un año de estimaciones diarias de riesgos con la pérdida del día siguiente, se tendría que

disponer de alrededor de 1 250 datos diarios antes de poder tomar una decisión sobre la bondad del modelo. Desde la primera estimación de riesgos, se debe esperar al menos un año para evaluar el modelo.

Otra limitante del procedimiento usual de *backtesting* es que existen subconjuntos no observables de la región de rechazo de la hipótesis nula. En particular, supóngase que se intenta probar la adecuación de un modelo de VaR estimado a 99% con base en una muestra de un año (250 observaciones). La región de no rechazo de la prueba de Kupiec para esta situación es $[0,6]$, esto es, se considera que el modelo subestima el riesgo si se observan más de seis excesos. Sin embargo, no será posible detectar si el modelo sobre-estima el riesgo, ya que es imposible observar un número negativo de excesos. Este será el caso siempre que el riesgo se estime a un nivel de confianza alto.

Para superar estas limitaciones es importante conocer la distribución de las métricas de riesgo al considerarlas como variables aleatorias. Para el VaR, por ejemplo, esto equivale a encontrar la distribución de un estadístico de orden, tal como lo hace Dowd (2005). Sin embargo, la distribución muestral es siempre función de la distribución de los factores de riesgo, lo que puede complicar su instrumentación práctica.

Respecto a intervalos de confianza, Dowd (2006) se basa en estadísticos de orden para estimar intervalos para VaR que funcionan bajo modelos paramétricos y no paramétricos. Moraux (2011) construye el intervalo para el VaR Normal, como en la sección 2.2.2, mejorando la estimación de Jorion (1996), quien ignoraba la media y, por tanto, su dispersión. Cotter y Dowd (2007) usan simulación MonteCarlo para construir intervalos para VaR, ES y medidas espectrales, partiendo de la Normal y luego alejándose en cuando a asimetría y kurtosis de la distribución de retornos. Gao y Song (2008) y Spierdijk (2014) construyen intervalos para estimadores basados en modelos GARCH.

En este trabajo se propone un método completamente general para el cálculo de intervalos de confianza que se basa en el estimador máximo verosímil y sus propiedades distribucionales asintóticas. Al usar propiedades asintóticas, no se pretende resolver el problema del tamaño de la muestra para la toma de decisiones. Sin embargo, en la medida que se suponga una distribución específica para los factores de riesgo, es posible construir intervalos más precisos con la misma muestra que se usó para estimar los parámetros.

En estricto sentido, las pruebas de validación tienen el componente de la aleatoriedad (McNeil *et al.*, (2005)) e independencia (Christoffersen (1998)) de los excesos, pero las métricas de riesgo heredan esa propiedad de los retornos de los factores de riesgo y consideramos, por tanto, que la independencia debe validarse antes de estimar el riesgo. Campbell (2006) recomienda efectuar las pruebas de independencia o aleatoriedad de forma separada de la prueba de cobertura no condicional (frecuencia de excesos). En este sentido, la metodología de intervalos de confianza va más allá de los modelos tradicionales de validación al incluir la magnitud de los excesos y no sólo la frecuencia de éstos.

El resto del artículo está dividido en 4 secciones. En la primera Sección se hace una revisión muy general de los procedimientos usuales de validación de modelos. En la Sección 2 se construyen los intervalos de confianza en el caso general, cuando los estimadores son máximo verosímiles, así como los intervalos de confianza para VaR y ES en los casos de Simulación Histórica (SH) y Normal. En la Sección 3 se demuestra la equivalencia entre las pruebas de validación e intervalos de confianza para ambas métricas. La Sección 4 presenta una aplicación al caso del mercado colombiano y se discuten los resultados. Finalmente, se redondean los resultados y enuncia algunas conclusiones.

1. Pruebas de validación (Backtesting)

Cuando las métricas de riesgo se han estimado sistemáticamente por algún período de tiempo, es posible evaluar el desempeño del modelo de estimación riesgo. A este proceso se le conoce como *backtesting*.¹

Sea L la variable aleatoria (v.a.) de pérdida de la cartera y supóngase que para cada período t se tienen la pérdida aleatoria L_t y estimaciones para VaR y ES a un nivel de confianza α , denotados $VaR(\alpha, t)$ y $ES(\alpha, t)$, respectivamente. Defínanse las v.a. indicadora de exceso y pérdida en exceso como

$$\begin{aligned}\hat{1}_\alpha(L_{t+1}) &:= 1_{(VaR(\alpha, t), +\infty)}(L_{t+1}) \text{ y} \\ \hat{M}_{\alpha, t+1}(L_{t+1}) &:= (L_{t+1} - ES(\alpha, t))\hat{1}_\alpha(L_{t+1}).\end{aligned}\tag{1.1}$$

¹ Aunque es posible traducir *backtesting* como prueba de validación, prueba de adecuación o prueba retrospectiva, se mantendrá el anglicismo dado su uso extendido.

Para el caso del VaR, se esperaría que el número de excesos después de n estimaciones siga una distribución binomial con parámetros n y $1 - \alpha$, donde $1 - \alpha$ es la probabilidad de que la pérdida del período $t+1$ exceda el VaR estimado en el período t , para cualquier valor de t . Haciendo $p=1 - \alpha$, Kupiec (1995) construye una prueba para

$$H_0: p = p_0 \text{ vs } H_A: p \neq p_0 \quad (1.2)$$

basada en el cociente de verosimilitudes como estadístico de prueba. Asintóticamente, este estadístico sigue una distribución χ_1^2 , pero para un tamaño de muestra fijo Casella y Berger (2002) calculan la región de rechazo exacta para la distribución binomial.

Con respecto al ES, se puede esperar que las pérdidas en exceso del VaR se comporten como realizaciones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que siguen una distribución con media cero y tienen masa de probabilidad de tamaño α en cero. Realizar una prueba de esta segunda propiedad es equivalente al *backtesting* del VaR, por lo que nos concentraremos en probar el comportamiento de media cero:

$$H_0: E[\widehat{M}_{\alpha,t+1}(L_{t+1})] = 0 \text{ vs } H_A: E[\widehat{M}_{\alpha,t+1}(L_{t+1})] \neq 0 \quad (1.3)$$

Dado que la prueba se realiza sobre la media de una distribución, el estadístico de prueba por excelencia es de la forma

$$t(\mathbf{m}) = \frac{\bar{m} - m_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}, \quad (1.4)$$

donde \bar{m} es la media de las pérdidas en exceso observadas $\{\widehat{m}_{\alpha,t}(l_t)\}_{t=1}^n$, n es el tamaño de la muestra, $m_0=0$ y $\hat{\sigma}$ es la desviación estándar de la muestra de excesos.

La hipótesis alternativa en (1.3) se puede plantear tanto para validar igualdad (dos colas) como la falta de simetría (una cola). En este caso se usará la hipótesis alternativa de antisimetría positiva $H_A: E[\widehat{M}_{\alpha,t+1}(L_{t+1})] > 0$.

Dowd (2005) propone hacer una prueba t "de libro de texto", pero ello no es evidente porque la distribución del estadístico depende de la distribu-

ción de pérdidas. Por ello, Efron y Tibshirani (1994) proponen una prueba de hipótesis *bootstrap* no paramétrica basada en la distribución empírica del estadístico de prueba bajo la hipótesis nula.

Si la distribución de la v.a. de pérdida L es la empírica, se puede usar el *bootstrap* no paramétrico, muestreando con reemplazo de $\{\hat{m}_{\alpha,t}(l_t)\}_{t=1}^n$; mientras que si se ha supuesto una distribución específica para L , se puede usar una versión paramétrica del *bootstrap*, muestreando de la distribución ajustada. Sólo en el caso que se suponga la distribución normal para L es que se puede realizar una prueba t de libro de texto.

En cualquier caso, si sólo se tiene un exceso sobre el VaR, no es posible estimar σ y, por tanto, tampoco es posible probar H_0 usando el estadístico de la ecuación (1.4).

El *bootstrap* no produce una región de rechazo o —su equivalente— un valor crítico, sino un nivel de significancia asintótico (ASL, por sus siglas en inglés) para la hipótesis alternativa, el cual se estima como

$$\widehat{ASL}_{boot} = \#\{t(\mathbf{m}) > t_{obs}\}/N, \quad (1.5)$$

donde $t_{obs} = t(\hat{\mathbf{m}}_\alpha)$ es el valor del estadístico (1.4) observado en la muestra original y N es el número de repeticiones *bootstrap*.

Como lo hacen notar Efron y Tibshirani, el estimador \widehat{ASL}_{boot} no se interpreta como una probabilidad exacta, sino que, como todos los estimadores *bootstrap*, su precisión crece con el tamaño de la muestra.

2. Intervalos de confianza

2.1 Notación y fundamentos

Igual que antes, sea L la v.a. —absolutamente continua— de pérdida de la cartera, con función de distribución acumulada F_L . L_1, \dots, L_n denota una muestra aleatoria de L y $L_{(1)} < \dots < L_{(n)}$ los estadísticos de orden.

Siempre que la función de distribución F_L se suponga conocida, el vector $\boldsymbol{\theta}$ representará los parámetros y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}$ el estimador de Máxima Verosimilitud (MV). Por otra parte, Φ denotará la función de distribución de la Normal estándar, ϕ su función de densidad y z_α su cuantil α , i.e., $\Phi(z_\alpha) = \alpha$, para cualquier $\alpha \in [0,1]$.

Bajo el supuesto de normalidad de la pérdida L , el único estimador insesgado de varianza mínima (UMVUE por sus siglas en inglés) de la varianza σ_L^2 es la varianza muestral $S^2 = \sum_{j=1}^n (L_j - \bar{L})^2 / (n - 1)$ y la variable aleatoria $(n - 1)S^2 / \sigma_L^2$ se distribuye χ_{n-1}^2 . En particular, $E[(n - 1)S^2 / \sigma_L^2] = n - 1$, esto es, $ES^2 = \sigma_L^2$ y además (ver Lehmann y Casella (1998) sección 1.2):

$$E\left(\sqrt{n-1} \frac{S}{\sigma_L}\right) = E[(\chi_{n-1}^2)^{1/2}] = \frac{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} = \frac{\sqrt{n-1}}{K_{n-1}}, \quad (2.1)$$

lo que implica que $ES = \sigma_L / K_{n-1}$, con $K_{n-1} = \frac{\sqrt{n-1} \Gamma[(n-1)/2]}{\sqrt{2} \Gamma(n/2)}$. Dicho de otra forma, $\widehat{\sigma}_L = K_{n-1} S$ (y no S) es el UMVUE de la desviación estándar. Luego calculamos

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= E(S^2) - (ES)^2 = \sigma_L^2 - (\sigma_L / K_{n-1})^2 \\ &= \sigma_L^2 (1 - K_{n-1}^{-2}) = \sigma_L^2 V_{n-1} / (n - 1) \\ &\approx \sigma_L^2 / [2(n - 1)], \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $V_{n-1} = (n - 1)(1 - K_{n-1}^{-2})$ es la varianza de una variable aleatoria con distribución χ_{n-1} y la última aproximación se obtiene de $\text{Var}[g(Y)] \approx \sigma_Y^2 [g'(\mu_Y)]^2$ con $g(y) = \sqrt{y}$. Finalmente, se sigue que

$$\text{Var}(\widehat{\sigma}_L) = K_{n-1}^2 \text{Var}(S) = K_{n-1}^2 V_{n-1} \frac{\sigma_L^2}{n - 1}. \quad (2.3)$$

Cuando n es suficientemente grande, se puede usar la expresión

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4(n-1) + O(n^{-2})}\right) \quad (2.4)$$

para obtener la aproximación $K_{n-1}^2 V_{n-1} \rightarrow 1/2$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\text{Var}(\widehat{\sigma}_L) \approx \frac{\sigma_L^2}{2(n-1)}. \quad (2.5)$$

Sea ahora $h(\boldsymbol{\theta})$ la métrica de riesgo (VaR o ES) expresada como función de los parámetros de la distribución de pérdida de la cartera. En el caso del $\text{VaR}_\alpha(\boldsymbol{\theta})$, McNeil, *et al.*, (2005) define $h(\boldsymbol{\theta})$ mediante la función cuantil de la pérdida:

$$h(\boldsymbol{\theta}) := Q(\alpha, \boldsymbol{\theta}) = F_L^{-1}(\alpha; \boldsymbol{\theta}) \quad (2.6)$$

mientras que para $\text{ES}_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ los mismos autores definen

$$h(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 Q(\beta, \boldsymbol{\theta}) d\beta. \quad (2.7)$$

En ambas instancias $h(\boldsymbol{\theta})$ es una función continua de $(\boldsymbol{\theta})$ y también es diferenciable.

La propiedad de invarianza de los estimadores MV garantiza que $h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MV})$ es también un estimador MV (ver por ejemplo Casella y Berger (2002)) y, bajo las condiciones usuales de regularidad, se tiene:

$$[h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}) - h(\boldsymbol{\theta})] \xrightarrow{d} N\left(0, \text{Var}\left(h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MV})\right)\right), \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Se usará en forma reiterada este resultado, que puede ser consultado, junto con el significado de *condiciones usuales de regularidad* en Casella y Berger (2002), Sección 9.4.

Aun cuando este es un resultado asintótico, es importante aclarar que aquí n se refiere al tamaño de muestra usado para estimar $(\boldsymbol{\theta})$ (conocida como la *ventana temporal*), a diferencia del número de períodos con métricas de riesgo calculadas, como se requiere en los procedimientos usuales de *backtesting*. Así, (2.8) es válida desde la primera estimación de las métricas de riesgo, siempre que la ventana temporal sea suficientemente larga.

Basta con calcular o aproximar $\text{Var}\left(h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{MV})\right)$, la varianza de la métrica de riesgo, para construir un intervalo de confianza para $h(\boldsymbol{\theta})$. Dado que $h(\cdot)$

en general no es una función sencilla de sus argumentos (θ), se puede usar la aproximación lineal dada por la expansión en series de Taylor de primer orden:

$$h(\hat{\theta}) = h(\theta) + \nabla h(\theta)'(\hat{\theta} - \theta) + Res, \quad (2.9)$$

donde

$$(\nabla h(\theta))_j = \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta_j}, j = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Nuevamente, estas derivadas parciales pueden ser calculadas en forma cerrada o bien numéricamente, dependiendo de la complejidad de la función $h(\cdot)$. Al ignorar el residuo se obtiene la aproximación

$$h(\hat{\theta}) - h(\theta) \approx \nabla h(\theta)'(\hat{\theta} - \theta). \quad (2.11)$$

Es claro que la varianza del estimador de la métrica dependerá de la covarianza de los parámetros, $cov(\hat{\theta}_{MV})$, estimados por máxima verosimilitud.

Se sabe que la matriz de covarianza de estos estimadores es asintóticamente igual a la inversa de la matriz de información esperada. Efron y Hinkley (1978) proveen una justificación para usar la matriz de información observada en lugar de la esperada, ya que no involucra el cálculo de la esperanza. Sin embargo, calcular el Hessiano de la log-verosimilitud puede no ser sencillo, por lo que Meilijson (1989) propone usar lo que llama la matriz de información observada *empírica*, como aproximación (I_e^{-1} , ver McLachlan y Krishnan (2008)). Así, se obtiene

$$\begin{aligned} Var(h(\hat{\theta}_{MV})) &\approx [\nabla h(\theta)' I_e^{-1}(\theta) \nabla h(\theta)]|_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} \\ &= \widehat{\sigma_{h(\hat{\theta})}^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalmente, el intervalo de confianza asintótico con un nivel de confianza δ para el estimador de $h(\boldsymbol{\theta})$ está dado por

$$\left[h(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}) - z_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{\sigma}_{h(\boldsymbol{\theta})}^2}, h(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}) + z_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{\sigma}_{h(\boldsymbol{\theta})}^2} \right]. \quad (2.13)$$

2.2. Intervalos de confianza para VaR

2.2.1 Simulación histórica

El estimador no paramétrico usual para VaR_α es $L_{\lfloor n\alpha \rfloor}$, donde $\lfloor x \rfloor$ representa el mayor entero que es menor o igual que x . Se puede construir un intervalo de confianza que no dependa de la distribución de L , a partir de la distribución del k -ésimo estadístico de orden:

$$F_{L^{(k)}}(u) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [F_L(u)]^j [1 - F_L(u)]^{n-j} \quad (2.14)$$

y de la siguiente propiedad (con $i < j$):

$$\begin{aligned} & \Pr(L_{(i)} \leq F_L^{-1}(\alpha) \leq L_{(j)}) \\ &= \Pr(L_{(i)} \leq F_L^{-1}(\alpha)) - \Pr(L_{(j)} < F_L^{-1}(\alpha)) \quad (2.15) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k} = \delta(i, j). \end{aligned}$$

donde la continuidad absoluta de F_L se ha usado en la segunda igualdad. Dados α y el nivel de confianza deseado para el intervalo (δ), escójense i y j tales que $\delta(i, j) \geq \delta$. Como $\delta(i, j)$ es una función de escalón, el intervalo de confianza obtenido tiende a ser conservador.

Para n y α dados, el mapeo $k \mapsto \Pr(L_{(k)} \leq F_L^{-1}(\alpha))$ es creciente si $k < [n\alpha]$ y decreciente cuando $k > [n\alpha]$. Así, se inicia con un intervalo pequeño escogiendo valores de i y j cercanos a $[n\alpha]$ y se continúa alejándose de este valor hasta que se alcanza el nivel de confianza deseado para el intervalo.

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 100 $\delta\%$ para VaR_α es

$$[L_{(i)}, L_{(j)}]. \quad (2.16)$$

donde $i < [n\alpha] < j$ se escogen según el proceso anterior tales que $\delta(i, j) \geq \delta$.

Obsérvese que no existe una manera única de escoger el intervalo y que éste no tiene por qué ser simétrico respecto del estimador de VaR. Por ejemplo, Dowd (2005) propone un proceso *bootstrap* equivalente a escoger i y j de modo que $\delta(1, i) \approx \delta(j, n) \approx \delta/2$.

2.2.2 Delta-Normal

Supóngase ahora que L tiene una distribución Normal con parámetros $\boldsymbol{\theta} = (\mu_L, \sigma_L^2)'$. Sean $\hat{\mu}_{MV} = \bar{L}$ y $\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (L_j - \bar{L})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ los estimadores MV usuales.

En este caso $\text{VaR}_\alpha = h(\boldsymbol{\theta}) = \mu_L + z_\alpha \sigma_L$. De la teoría de inferencia estadística (ver por ejemplo, Lehmann y Casella (1998) sección 2.2) sabemos que

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = h(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\mu}_{MV} + z_\alpha \hat{\sigma}_L \quad (2.17)$$

es el UMVUE para VaR_α . Este estimador se puede escribir en términos del estimador MV como $\widehat{\text{VaR}}_\alpha = \hat{\mu}_{MV} + z_\alpha K_{n-1} \sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2} \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ y por la propiedad de invarianza es él mismo un estimador MV de VaR_α .

Se puede entonces usar la normalidad asintótica de los estimadores MV (2.8) para obtener: $[\widehat{\text{VaR}}_\alpha - \text{VaR}_\alpha] \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha))$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, basta con calcular la varianza del estimador MV, $\text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha)$ ya sea mediante (2.12) o directamente —como en este caso—, para construir un intervalo de confianza para VaR_α . En efecto, a partir de

$$\text{Var}(\hat{\mu}_{MV}) = \frac{\sigma_L^2}{n} \text{ y } \text{Var}(\hat{\sigma}_L) = \frac{\sigma_L^2}{n-1} K_{n-1}^2 V_{n-1} \approx \frac{\sigma_L^2}{2(n-1)}, \quad (2.18)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha) &= \text{Var}(\hat{\mu}_{MV} + z_\alpha \hat{\sigma}_L) \\ &= \text{Var}(\hat{\mu}_{MV}) + z_\alpha^2 \text{Var}(\hat{\sigma}_L), \end{aligned} \quad (2.19)$$

ya que \bar{L} y S son independientes y, por lo tanto, $\text{cov}(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_L) = 0$. Luego, de las igualdades (2.18) se sigue

$$\text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha) = \frac{\sigma_L^2}{n} + z_\alpha^2 \frac{\sigma_L^2}{n-1} K_{n-1}^2 V_{n-1} \approx \frac{\sigma_L^2}{n} + z_\alpha^2 \frac{\sigma_L^2}{2(n-1)}. \quad (2.20)$$

Como $\text{Var}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha)$ depende de σ_L^2 , es necesario estimarla mediante

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{\text{VaR}}_\alpha) = \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n} + z_\alpha^2 \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{2(n-1)} = \hat{\sigma}_{\widehat{\text{VaR}}_\alpha}^2 \quad (2.21)$$

o su simplificación $\hat{\sigma}_{\widehat{\text{VaR}}_\alpha}^2 = \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n} \left(1 + \frac{z_\alpha^2}{2}\right)$. En cualquier caso, el intervalo de confianza al $100\delta\%$ para VaR_α está dado por

$$\left[\widehat{\text{VaR}}_\alpha - \frac{z_{1+\delta}}{2} \hat{\sigma}_{\widehat{\text{VaR}}_\alpha}, \widehat{\text{VaR}}_\alpha + \frac{z_{1+\delta}}{2} \hat{\sigma}_{\widehat{\text{VaR}}_\alpha} \right], \quad (2.22)$$

donde el estimador $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$ se obtiene según la ecuación (2.17), $\hat{\sigma}_{\widehat{\text{VaR}}_\alpha}^2$ se calcula mediante (2.21) o su simplificación y z_δ es el cuantil δ de la distribución Normal estándar.

2.3. Intervalos de confianza para ES

2.3.1. Simulación histórica

El estimador no paramétrico de ES_α está dado por

$$\widehat{ES}_\alpha = \frac{1}{n - [n\alpha]} \sum_{j=[n\alpha]+1}^n L_{(j)} \quad (2.23)$$

Para aproximar la distribución de \widehat{ES}_α se usará el siguiente resultado asintótico de David y Nagaraja (2003):

$$\sqrt{n}[\widehat{ES}_\alpha - ES_\alpha] \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\alpha^2 + \alpha(ES_\alpha - VaR_\alpha)^2) \quad (2.24)$$

donde $\sigma_\alpha^2 = Var(L|L > VaR_\alpha)$. De esta manera, el intervalo de confianza al nivel $100\delta\%$ para ES_α es

$$\left[\widehat{ES}_\alpha - \frac{z_{1+\delta}}{2} \hat{\sigma}_{\widehat{ES}_\alpha}, \widehat{ES}_\alpha + \frac{z_{1+\delta}}{2} \hat{\sigma}_{\widehat{ES}_\alpha} \right] \quad (2.25)$$

donde \widehat{ES}_α está dado por la ecuación (2.23), $\hat{\sigma}_{\widehat{ES}_\alpha}^2$ es la varianza de la distribución Normal en (2.24) y z_δ es el cuantil δ de la distribución Normal estándar.

2.3.2. Delta-Normal

Sean $\widehat{\mu}_L = \bar{L}$ y $\widehat{\sigma}_L = K_{n-1}S$ y los estimadores descritos anteriormente, basados en los estimadores MV, con varianzas dadas por (2.18). McNeil *et al.*, (2005) muestran que, bajo el supuesto de normalidad, $ES_\alpha = h(\boldsymbol{\theta}) = \mu_L + c_\alpha \sigma_L$, donde $c_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha))$. Su estimador es

$$\widehat{ES}_\alpha = h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \widehat{\mu}_L + c_\alpha \widehat{\sigma}_L \quad (2.26)$$

el cual se puede escribir en términos del estimador MV tal como en la Sección 2.2.2 y es por tanto un estimador MV en sí mismo para ES_α debido a la propiedad de invarianza de los estimadores MV.

De la linealidad de la ecuación (2.26) y el hecho de que $\widehat{\mu}_L$ y $\widehat{\sigma}_L$ son insesgados, se sigue que \widehat{ES}_α es un estimador insesgado de ES_α . Entonces, por (2.8) basta con encontrar la varianza de \widehat{ES}_α para construir un intervalo de confianza para ES_α :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{ES}_\alpha) &= \text{Var}(\widehat{\mu}_L + c_\alpha \widehat{\sigma}_L) \\ &= \text{Var}(\widehat{\mu}_L) + c_\alpha^2 \text{Var}(\widehat{\sigma}_L), \end{aligned} \quad (2.27)$$

dado que \bar{L} y S son independientes y, por lo tanto, $\text{cov}(\widehat{\mu}_L, \widehat{\sigma}_L) = 0$. Siguiendo un desarrollo análogo a la Sección 2.2.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}(\widehat{ES}_\alpha) &= \frac{\sigma_L^2}{n} + c_\alpha^2 \frac{\sigma_L^2}{n-1} K_{n-1}^2 V_{n-1} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \\ &= \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n} + c_\alpha^2 \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n-1} K_{n-1}^2 V_{n-1} \\ &\approx \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n} \left[1 + \frac{n}{n-1} \frac{c_\alpha^2}{2} \right] = \widehat{\sigma}_{ES_\alpha}^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

lo cual se puede simplificar a $\widehat{\sigma}_{ES_\alpha}^2 = \frac{\widehat{\sigma}_L^2}{n} \left[1 + \frac{c_\alpha^2}{2} \right]$ para n grande. El intervalo de confianza al nivel $100\delta\%$ para ES_α es entonces

$$\left[\widehat{ES}_\alpha - \frac{z_{1+\delta}}{2} \widehat{\sigma}_{ES_\alpha}, \widehat{ES}_\alpha + \frac{z_{1+\delta}}{2} \widehat{\sigma}_{ES_\alpha} \right], \quad (2.29)$$

donde \widehat{ES}_α está dado por la ecuación (2.26), $\widehat{\sigma}_{ES_\alpha}^2$ está dado por (2.28) y Z_δ es el cuantil δ de la distribución Normal estándar.

3. Equivalencia entre Backtesting e Intervalos de Confianza

En la Sección 1 se establecieron las hipótesis de los procedimientos de *backtesting* para VaR y ES. Por otro lado, de la teoría de inferencia estadística sabemos que existe una correspondencia entre un intervalo de confianza y una prueba de hipótesis (ver por ejemplo Casella y Berger (2002), Teorema 9.2.1). Así, la prueba de hipótesis que está asociada al intervalo (2.13) es

$$H_0: h(\boldsymbol{\theta}) = h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \text{ vs } H_A: h(\boldsymbol{\theta}) \neq h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.1)$$

En el resto de esta sección enunciamos y probamos, con base en la propiedad anterior, los resultados que permiten establecer una equivalencia entre las pruebas de hipótesis de la Sección 1 y los intervalos de confianza de la Sección 2.

Proposición 1. Sea $h(\cdot)$ como en la ecuación (2.6). Entonces, la región de no rechazo de la prueba de hipótesis (1.2) es igual al intervalo de confianza (2.13).

Demostración. Basta probar que la prueba de hipótesis (1.2) corresponde a (3.1). En efecto, partiendo de la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \\ \Leftrightarrow E \left[1_{\{L > \widehat{\text{VaR}}_\alpha\}} \right] &= p_0 \\ \Leftrightarrow P(L > \widehat{\text{VaR}}_\alpha) &= p_0 \\ \Leftrightarrow P(L \leq \widehat{\text{VaR}}_\alpha) &= 1 - p_0 = \alpha \\ \Leftrightarrow \widehat{\text{VaR}}_\alpha &= Q(\alpha, \boldsymbol{\theta}) \\ \Leftrightarrow h(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= h(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Así, por ejemplo, sean $n = 250$, $p = 1\%$ y $\delta = 99\%$, el intervalo para np usando (2.16) arriba, es $[L_{(1)}, L_{(6)}]$. Dicho de otra manera, el modelo se considera adecuado si se observan entre 0 y 6 excesos en 250 días hábiles, tal como ocurre con la prueba de Kupiec.

Por lo tanto, se tiene una alerta temprana cuando una observación excede el límite superior del intervalo de confianza; mientras que el modelo está siendo demasiado conservador cuando no existen observaciones por encima del límite inferior de dicho intervalo.

Obsérvese que no ocurre la limitante de la prueba de Kupiec discutida en la Sección 1, ya que es factible observar pérdidas tanto por abajo de $L_{(1)}$ como por arriba de $L_{(6)}$.

La siguiente Proposición establece la equivalencia entre el proceso de *backtesting* y la construcción del intervalo de confianza para ES.

Proposición 2. Sea $h(\cdot)$ como en la ecuación (2.7). Entonces, la región de no rechazo de la prueba de hipótesis (1.3) es igual al intervalo de confianza (2.13).

Demostración. Claramente, la prueba de hipótesis (1.3) corresponde exactamente a (3.1), debido a que:

$$\begin{aligned} E[\widehat{M}_{\alpha,t+1}(L)] &= E[(L_{t+1} - \widehat{ES}_{\alpha})1_{\{L > \widehat{VaR}_{\alpha}\}}] \\ &= E(L|L > \widehat{VaR}_{\alpha}) - E[\widehat{ES}_{\alpha} 1_{\{L > \widehat{VaR}_{\alpha}\}}] \quad (3.3) \\ &= ES_{\alpha} - E(\widehat{ES}_{\alpha}) \\ \therefore E[\widehat{M}_{\alpha,t+1}] = 0 &\Leftrightarrow ES_{\alpha} = E(\widehat{ES}_{\alpha}). \end{aligned}$$

Se concluye entonces que es equivalente hacer el *backtesting* para ES (respecto de la propiedad de media cero) y construir el intervalo de confianza, con la ventaja de que no se requiere esperar para acumular la muestra que permita probar H_0 .

4. Resultados empíricos

En esta sección se propone una cartera de activos, a la cual se le calculan las métricas de riesgo, se aplican las pruebas de validación y se construyen los intervalos de confianza descritos, comparando las conclusiones obtenidas con cada estrategia.

La cartera propuesta (ver Cuadro 1) se compone de posiciones largas en seis acciones del mercado colombiano y una posición corta en dólares.

El período de vigencia de la cartera incluye desde julio de 2001 hasta junio de 2015. Cuando no existe precio para una acción, se ha usado su beta respecto del índice de la bolsa de valores de Colombia (IGBC) y el rendimiento de éste.

Cuadro 1. Descripción de la cartera

Instrumento	PFBCOLO	ECOPETL	ISAGEN	PREC	CNEC	ISA	USDCOP
Acciones o Nominal	1 800	30 000	18 000	5 000	8 500	7 000	-20 000

Fuente: Elaboración propia.

Todos los cálculos de VaR se han realizado al 99% con una ventana histórica de 1 000 días hábiles y un horizonte de tenencia de un día hábil. Los intervalos de confianza para el VaR también se han calculado al 99% de confianza. Para el ES, los cálculos y los intervalos se han hecho al 97.5% de confianza, según lo propone el BIS (2013), con la misma ventana histórica y horizonte. Así, tanto VaR como ES se han calculado desde agosto 2005 hasta junio 2015. El Cuadro 2 muestra un resumen de las métricas de riesgo individuales y para la cartera durante los 10 años considerados por ambos métodos de cálculo.

Cuadro 2. VaR(99%) para la Cartera Considerada (MXN mln)

Métrica	VaR(99%)		ES(97.5%)	
	SH	Delta-Normal	SH	Delta-Normal
PFBCOLO	1.955	1.654	2.006	1.662
ECOPETL	4.317	3.552	4.364	3.570
ISAGEN	1.389	1.149	1.426	1.155
PREC	16.439	12.821	18.084	12.885
CNEC	8.115	6.116	8.498	6.146
ISA	3.205	2.502	3.19	2.515
USDCOP	0.839	0.661	0.853	0.665
Cartera	32.424	24.09	34.217	24.211

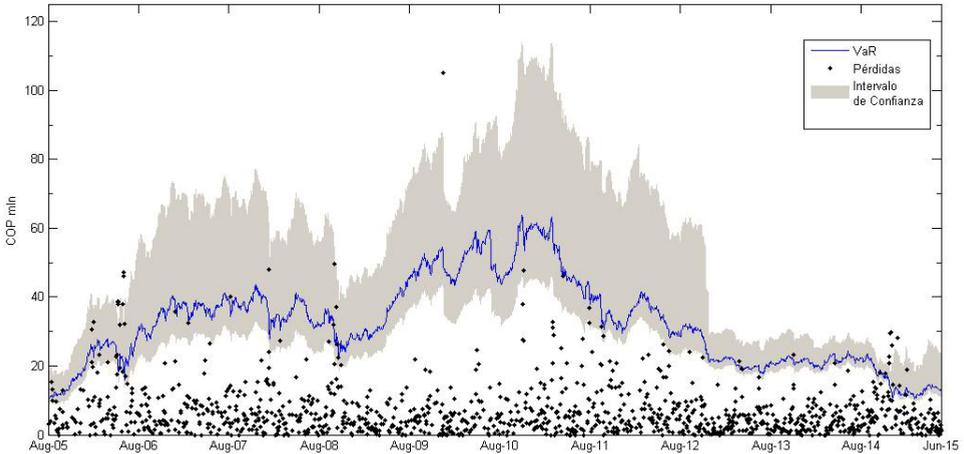
Fuente: Elaboración propia.

La Figura 1 muestra el VaR al 99% estimado por SH con los intervalos de confianza y las pérdidas del día siguiente, mientras que el Cuadro 3 despliega los datos agrupados por año y magnitud: la columna [Var, LimSup) muestra los excesos sobre el VaR pero no sobre el límite superior del intervalo, la

columna $[\text{LimSup}, +\infty)$ muestra los excesos sobre el límite superior del intervalo y la columna *Excesos* es igual a la suma de las dos columnas previas.

Es clara la consistencia de metodologías para los años 2006 y 2014 en los que ambas rechazan la adecuación del modelo, así como para los años 2005, 2007 y 2013, en los que ninguna rechaza la hipótesis nula.

Figura 1. VaR(99%) SH e Intervalo de confianza



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 3. Backtesting e Intervalos de Confianza para VaR(99%) SH

Año	Datos	(LimInf, VaR]	(VaR, LimSup]	(LimSup, +∞)	Excesos
2005	99	2	3	0	3
2006	242	9	3	7	10
2007	243	2	1	0	1
2008	244	6	2	1	3
2009	242	0	0	1	1
2010	245	1	0	0	0
2011	246	5	0	0	0
2012	244	2	0	0	0
2013	244	1	2	0	2
2014	244	2	2	5	7
2015	118	0	2	1	3
2014-15	242	1	4	6	10

Fuente: Elaboración propia.

Del 2010 al 2012 la prueba de Kupiec no es capaz de indicar si el modelo es demasiado conservador. Existen, sin embargo, 1, 5 y 2 observaciones sobre el límite inferior del intervalo, lo que apunta a que el modelo no está siendo conservador. En estos casos, la metodología de intervalos de confianza provee información adicional que la prueba de hipótesis no puede.

Los años 2008, 2009 y 2015 presentan discrepancias. En 2008 y 2009 se tienen pocos excesos (3 y 1) pero de tal magnitud que uno de ellos en cada año supera el límite superior del intervalo de confianza. Ambos constituyen observaciones atípicas: Lehmann Brothers en 2008 y una pérdida de 30% en Pacific Rubiales en 2009.

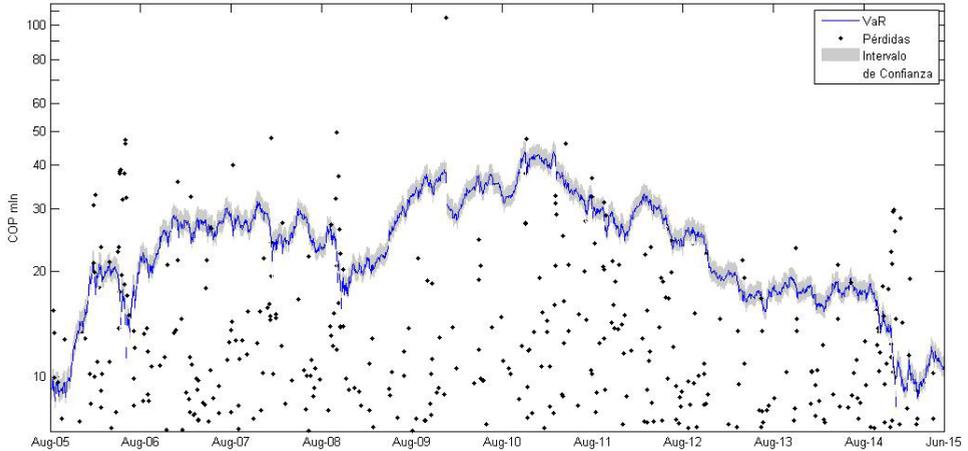
Finalmente, en 2015 se han presentado 3 excesos sobre el VaR, que es el límite superior de la región de aceptación, pero uno de ellos excede el intervalo. Esto hace suponer que el modelo es demasiado agresivo (como en 2006 y 2014) pero falta un exceso más para confirmarlo. Sin embargo, si se completa una muestra de un año desde julio 2014, desaparece la inconsistencia y ambas metodologías rechazan la bondad del modelo. En situaciones como ésta, los intervalos de confianza proveen una alerta temprana.

Los resultados correspondientes para el modelo Normal se encuentran en la Figura 2 y en el Cuadro 4. Al comparar las metodologías de *backtesting* e intervalos de confianza para este modelo se obtienen las mismas conclusiones que con SH para 2006, 2009, 2012 y 2014. Para 2005, 2008 y 2015, el modelo Normal sería rechazado ya sea mediante pruebas de hipótesis o intervalos de confianza.

En contraste, las metodologías discrepan para los años 2007, 2010, 2011 y 2013, ya que prácticamente cualquier exceso sobre el VaR sobrepasó también el intervalo de confianza. Es decir, la metodología de intervalos se habría rechazado la bondad del modelo para los cuatro años, mientras que no habría sido así mediante pruebas de hipótesis.

La razón de esta discrepancia es que el intervalo de confianza es muy angosto, pues la dispersión estimada del VaR es muy pequeña. Está ya bien documentado, desde el trabajo seminal de Fama (1965), que la distribución Normal no modela adecuadamente los retornos de los factores de riesgo de mercado y los activos usados en este ejercicio dejan ver claramente esa debilidad.

Figura 2. VaR(99%) Normal e Intervalo de Confianza



Fuente: Elaboración propia.

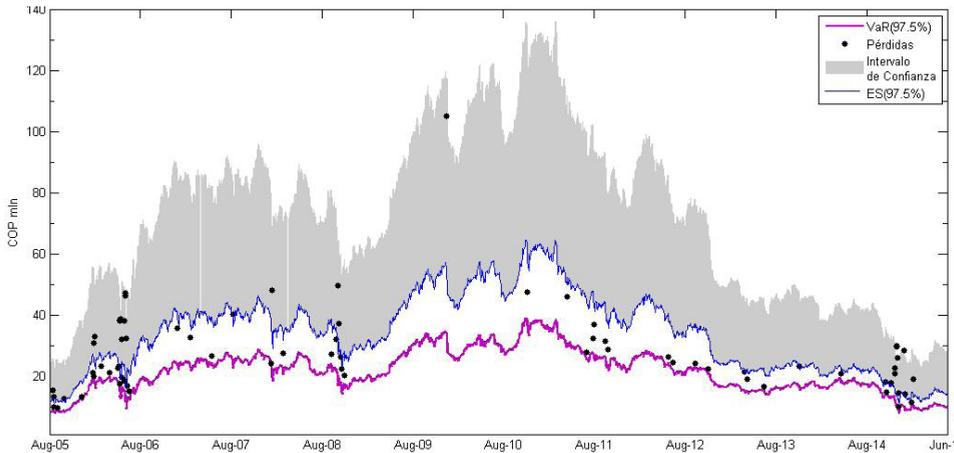
Cuadro 4. Backtesting e Intervalos de Confianza para VaR(99%) Normal

Año	Datos	(LimInf,VaR]	(VaR,LimSup]	(LimSup,+∞)	Excesos
2005	99	1	2	3	5
2006	242	1	4	16	20
2007	243	1	0	3	3
2008	244	1	1	8	9
2009	242	0	0	1	1
2010	245	0	0	1	1
2011	246	0	1	4	5
2012	244	2	0	0	0
2013	244	1	0	3	3
2014	244	2	1	10	11
2015	118	1	1	3	4

Fuente: Elaboración propia.

Respecto al ES(97.5%), el intervalo de confianza de una cola y el *backtesting* para el modelo de SH se muestran en la Figura 3 y en el Cuadro 5.

Figura 3. ES(97.5%) SH e Intervalo de Confianza



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 5. Backtesting e Intervalos de Confianza para ES(97.5%) SH

Año	Datos	(VaR,ES]	(ES,LimSup]	(LimSup,+∞)	ASL
2005	99	3	3	0	0.714
2006	242	11	8	2	0.017
2007	243	3	1	0	0.966
2008	244	7	3	0	0.502
2009	242	0	1	0	ND
2010	245	1	0	0	ND
2011	246	6	0	0	0.999
2012	244	4	0	0	0.936
2013	244	4	0	0	0.972
2014	244	4	4	3	0.019
2015	118	1	2	1	0.143

Fuente: Elaboración propia.

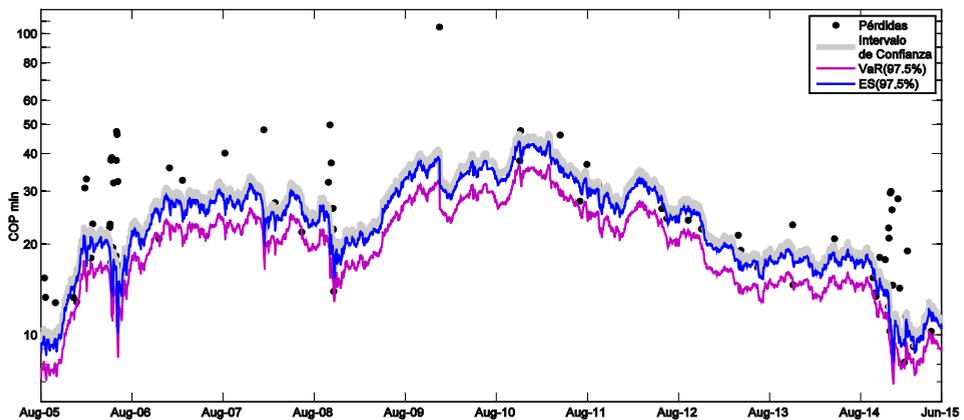
En la Figura 3 se visualizan líneas para el VaR(97.5%), el ES(97.5%) y el extremo superior del intervalo de confianza al 97.5% para este último. También se grafican como puntos los excesos sobre el VaR(97.5%).

De ellos, seis caen por arriba de la cota superior del intervalo de confianza: 2 en el año 2006, 3 en 2014 y 1 en 2015 (ver la quinta columna del Cuadro 5). El nivel de significancia asintótico, calculado mediante un proceso *bootstrap* de 10 mil repeticiones, rechaza la hipótesis nula para 2006 y 2014, no así para 2015. Adicionalmente, este método no pudo pronunciarse para los años 2009 y 2010, ya que, al existir un único exceso, no es posible estimar la dispersión de los excesos sobre el VaR. El intervalo de confianza para estos años permite concluir que el modelo es adecuado, entregando nuevamente más información que el *backtesting*.

La única discrepancia entre los métodos reside entonces en 2015. Como se indicó en la sección 2 la precisión del ASL depende del tamaño de la muestra, que en este caso es demasiado pequeña (sólo 118 datos y 4 excesos).

Para el modelo Normal, los intervalos de confianza de una cola y el *backtesting* para el ES(97.5%) se observan en la Figura 4 y en el Cuadro 6. Esta Figura tiene escala logarítmica para su mejor visualización.

Figura 4. ES(97.5%) Normal e Intervalo de Confianza



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 6. Backtesting e Intervalos de Confianza para ES(97.5%) Normal

Año	Datos	(VaR,ES]	(ES,LimSup]	(LimSup,+∞)	ASL
2005	99	2	2	3	0.110
2006	242	3	4	16	0.000
2007	243	1	0	3	0.091
2008	244	4	1	8	0.007
2009	242	0	0	1	ND
2010	245	1	0	1	0.252
2011	246	1	1	4	0.069
2012	244	4	0	0	0.942
2013	244	2	0	3	0.173
2014	244	7	0	10	0.003
2015	118	3	1	3	0.045

Fuente: Elaboración propia.

Los años 2006, 2008, 2012 y 2014 proveen la misma conclusión mediante pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Los años 2005, 2007, 2011 y 2015 generan la misma conclusión si se reduce el nivel de confianza (entre 96.5% para 2015 y hasta 88% para 2005). Igual que antes, no es posible probar la hipótesis para 2009 pero el intervalo de confianza indica un modelo no válido para ese año. Existen discrepancias entre los métodos para los años 2010 y 2013, en que el método de intervalos de confianza rechaza la validez del modelo mientras la prueba de hipótesis no encuentra evidencia suficiente para hacerlo. Igual que antes, esto se debe a la combinación de dos factores: *a*) una muestra de excesos muy pequeña y *b*) la distribución Normal no describe adecuadamente el comportamiento de los factores de riesgo.

La primera dificultad se puede subsanar realizando la prueba de hipótesis con los excesos combinados de 2, 3 o hasta 4 años, lo cual le otorgaría mayor precisión, pero con el inconveniente de tomar decisiones sobre el modelo de forma potencialmente tardía.

En el caso de SH, por ejemplo, tomando los excesos de períodos de dos años no existen discrepancias entre intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para ningún período.

Conclusiones

El resultado más importante de este trabajo es la equivalencia entre el *backtesting* y el intervalo de confianza para cualquier métrica basada en el estimador máximo verosímil de los factores de riesgo. En particular, se demostraron resultados específicos para VaR y ES y se aplicaron empíricamente bajo las metodologías Simulación Histórica y Normal, con resultados generalmente consistentes y discrepancias que pueden depender de observaciones atípicas, de la bondad del modelo de estimación o del hecho que en diversos momentos se han usado aproximaciones.

La estrategia de intervalos de confianza tiene dos ventajas evidentes: 1) no se requiere acumular una muestra de métricas que permita probar la hipótesis nula, ya que el intervalo se construye con la misma muestra que se estima la métrica y 2) permite decidir, a diferencia de la prueba de hipótesis, si el modelo está siendo demasiado conservador, aun cuando el número de estimaciones de riesgo sea “pequeño”. Gracias a esta combinación de propiedades la metodología podría establecerse como un *sistema de alertas tempranas*.

Una tercera propiedad, sobre la cual el Comité de Basilea está poniendo énfasis, es que las metodologías tradicionales de validación de modelos no toman en cuenta la magnitud de los excesos. El BIS se basa en ello —entre otros motivos— para proponer el cambio de VaR a ES como métrica de riesgo, pero aquí se observa que la metodología de intervalos de confianza permite incorporar la magnitud del exceso de forma natural, por lo que es posible poner a revisión un modelo aún desde el primer exceso observado, dependiendo si éste superó el límite superior del intervalo de confianza.

Por último, la asimetría de los intervalos es un punto a destacar. Si bien el intervalo (2.13) es simétrico por construcción, ello se debe a que se basa en la distribución asintótica de los estimadores MV, que es simétrica. Cuando la distribución supuesta de los parámetros es tratable, como es el caso de la distribución Empírica, los intervalos no necesariamente son simétricos, como se aprecia en la Figura 1.

Referencias bibliográficas

- Acerbi, C. y Székely, B (2014). "Back-Testing Expected Shortfall". *Risk* (21), pp. 76-81.
- Acerbi, C. y Tasche, D (2002). "On the Coherence of Expected Shortfall". *Journal of Banking and Finance*, 26(7), pp. 1487-1503.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., y Heath, D. (1999). "Coherent Measures of Risk". *Math Finance* 9(3), pp. 203-228.
- BIS (2013). "Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework". Disponible en www.bis.org/publ/bcbs265.pdf.
- Campbell, S. D. (2006). "A Review of Backtesting and Backtesting Procedures". *Journal of Risk*, 9(2), pp. 1-17.
- Candelon, B., Colletaz, G., Hurlin, C., y Tokpavi, S. (2011). "Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-Based Test". *Journal of Financial Econometrics*, 9(2), pp. 314-343.
- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference*. Pacific Groove, CA: Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software.
- Christoffersen, P. y Pelletier, D. (2004). "Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach". *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), pp. 84-108.
- Christoffersen, P. F. (1998). "Evaluating Interval Forecasts". *International Economic Review* 39(4), pp. 841-862.
- Cotter, J. y Dowd, K. (2007). "Evaluating the Precision of Estimators of Quantile-Based Risk Measures". *Working paper 200743*, Geary Institute, University College Dublin.
- David, H. A. y Nagaraja, H. N. (2003). *Order statistics*. Hoboken, NJ: J Wiley and sons.
- Dowd, K. (2005). "Measuring Market Risk". Hoboken, NJ: John Wiley and sons.
- Dowd, K. (2006). "Using Order Statistics to Estimate Confidence Intervals for Probabilistic Risk Measures". *Journal of Derivatives*, 14(2), pp. 77-81.
- Efron, B. y Hinkley, D. V. (1978). "Assessing the Accuracy of the Maximum Likelihood Estimator: Observed Versus Expected Fisher Information". *Biometrika*, 65, pp. 457-487.
- Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1994). *An introduction to the bootstrap*. New York, NY: Chapman and Hall.
- Engle, R. F. y Manganelli, S. (2004). "Caviar: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles". *Journal of Business and Economic Statistics*, 22(4), pp. 367-381.
- Fama, E. (1965). "The Behavior of Stock-Market Prices". *Journal of Business*, 38(1), pp. 34-105.

- Gao, F. y Song, F. (2008). "Estimation risk in GARCH VaR and ES estimates". *Econometric Theory*, 24(5), pp. 1404–1424.
- Jorion, P. (1996). "Risk2: Measuring the Risk in Value at Risk". *Financial Analysts Journal*, 52(6), pp. 47–56.
- Kerkhof, J. y Melenberg, B. (2004). "Backtesting for Risk-Based Regulatory Capital". *Journal of Banking and Finance*, 28(8), pp. 1845–1865.
- Kupiec, P. H. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models". *The Journal of Derivatives*, 3(2), pp. 73–84.
- Lehmann, E. y Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer Verlag.
- McLachlan G. y Krishnan, T. (2008). *The EM Algorithm and Extensions*, 2nd edition. Hoboken, NJ: John Wiley and sons.
- McNeil, A. J. y Frey, R. (2000). "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach". *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4), pp. 271–300.
- McNeil, A.J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Meilijson, I. (1989). "A Fast Improvement to the EM Algorithm on its Own Terms". *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, 51(1), pp. 127–138.
- Morau, F. (2011). "How Valuable is your VaR? Large Sample Confidence Intervals for Normal VaR". *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 4(2), pp. 189–200.
- Pelletier, D. y Wei, W. (2015). "The Geometric-Var Backtesting Method". *Journal of Financial Econometrics*.
- Spierdijk, L. (2014). "Confidence Intervals for ARMA–GARCH Value-at-Risk: The Case of Heavy Tails and Skewness". *Computational Statistics & Data Analysis*. En prensa.

Valor en riesgo anual de los mercados accionarios de México y Estados Unidos: VaR tradicional vs VaR cópulas elípticas

Yearly Value at Risk of the Mexican and USA Stock Markets: Traditional VaR vs Elliptic Copulas VaR

Christian Bucio
Raúl De Jesús
Alejandra Cabello

Fecha de recepción: 27 de enero de 2016
Fecha de aceptación: 26 de febrero de 2016

Unidad Académica Profesional Huehuetoca,
Universidad Autónoma del Estado de México,
Huehuetoca, Estado de México, México,
cbuciop@uaemex.mx

Facultad de Economía,
Universidad Autónoma del Estado de México,
Toluca, Estado de México, México
rjg2005mx@yahoo.com.mx

Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración,
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México,
acr2001mx@yahoo.com.mx

RESUMEN

Los vínculos económico financieros entre países vecinos son indiscutibles, en este sentido, es de primordial importancia analizar los riesgos implícitos para una mejor toma de decisiones. En la presente investigación el riesgo se mide mediante las pérdidas potenciales del Valor en Riesgo (VaR) entre los mercados accionarios de México y Estados Unidos. Se utilizan diversas metodologías tradicionales del VaR: VaR Delta-Normal, VaR Simulación Histórica, y VaR Simulación Monte Carlo; a su vez, se contrastan con la metodología del VaR Cópulas Elípticas, que dadas sus características, estima de manera más precisa los eventos extremos inherentes de los rendimientos de los precios de los mercados accionarios. El período de análisis comprende 40 años (1975-2014) de series de tiempo diarias, las cuales son segmentadas para su análisis en periodos anuales. La muestra de estudio de los mercados accionarios comprende a los índices bursátiles de México (IPC) y Estados Unidos (S&P 500). La evidencia empírica identifica cómo varían, a través del tiempo, los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados accionarios bajo análisis. Asimismo, comprueba la precisión y robustez de la medición del VaR mediante la metodología de cópula, la cual está dirigida a capturar la no linealidad y por ende a no subestimar las pérdidas.

Clasificación JEL: C02, C15, C52, G11, G15.

Palabras Clave: Valor en Riesgo, mercados de capitales, cópulas.

ABSTRACT

Economical and financial links between neighboring countries are undeniable, in this sense, it is of paramount importance to analyze the implied risks to improve the decision making process. In this research risk is measured through the potential loss of Value-at-Risk (VaR) between Mexican and USA stock markets. Different traditional VaR methodologies are used, such as Delta-Normal VaR, Historical Simulation VaR, and Monte Carlo Simulation VaR, these in turn are verified against the Elliptic Copulas VaR methodology, which estimates more accurately inherent extreme events of the stock market prices returns. The analysis considers daily time series data during 40 years, from 1975 to 2014; these are divided into segments to carry out a yearly analysis. The stock markets sample includes the Mexican (IPC) and USA (S&P 500) stock indexes. The empirical evidence identifies the variation over time of potential losses patterns of the stock markets being analyzed. Additionally, it verifies the precision and robustness of VaR measurement through the copula methodology which aims to capture the non-linearity and therefore avoids the underestimation of the losses.

JEL Classification: C02, C15, C52, G11, G15.

Keywords: Value at Risk, Stock Markets, Copulas.

Introducción

La creciente globalización económico financiera ha conllevado a que se creen diversos bloques económico financieros no sólo regionales sino que también bloques entre países relativamente distantes; en lo que respecta a los bloques regionales estos se caracterizan por relacionar países que comparten fronteras. Se puede afirmar que los vínculos económico financieros entre países vecinos se han incrementado a través de la globalización. Estos vínculos económico financieros involucran diversos riesgos, por ende es de primordial importancia analizar los riesgos para una mejor toma de decisiones.

La administración de riesgos es esencial para un proceso de toma de decisiones consciente, ya sea que el tomador de riesgos pertenezca a una institución financiera, del sector público o del sector privado. La administración de riesgos tiene como principal encomienda evitar pérdidas económicas inaceptables; particularmente analizando y ponderando los riesgos con la finalidad de mejorar el desempeño económico financiero. Es necesario aplicar una distribución óptima del riesgo para de este modo lograr una asignación más eficiente del capital y en este sentido obtener inversiones más productivas que en consecuencia impulsen el crecimiento económico financiero.

El Valor en Riesgo es una de las herramientas más empleadas para la medición de riesgo. La principal razón de su popularidad es la sencillez y versatilidad al aplicarse a todas las posiciones de riesgo o carteras de inversión en cualquier nivel de una institución financiera, del sector público o del sector privado. Jorion (2007) y Crouhy, Galai y Mark (2001) definen el valor en riesgo (VaR) como la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo en un intervalo de confianza dado.

El análisis del riesgo en esta investigación se mide mediante las pérdidas potenciales obtenidas a través del Valor en Riesgo (VaR) entre los mercados accionarios de México y Estados Unidos, la muestra de estudio de los mercados accionarios comprende a sus principales índices bursátiles: IPC de México y S&P 500 de Estados Unidos. La estimación del VaR es realizada con ponderaciones iguales (ponderación naive) entre estos dos mercados y mediante varias metodologías: VaR Simulación Histórica, VaR Delta-Normal,

VaR Simulación Monte Carlo y VaR Cópulas Elípticas. El período de análisis comprende 40 años (1975-2014) de series de tiempo diarias, las cuales son segmentadas en períodos anuales. El objetivo de este trabajo es identificar los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados accionarios bajo análisis, y discernir cual o cuales metodologías del VaR son más precisas.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: primeramente se hace una revisión de la literatura mencionando trabajos seminales y recientes, en la siguiente sección se presenta el marco teórico, definiendo las diferentes metodologías utilizadas para el cálculo del VaR así como la metodología empleada para validar las estimaciones obtenidas; en la penúltima sección se discuten los resultados; y finalmente se presentan las conclusiones.

1. Revisión de la literatura

En la actualidad existe un sinnúmero de estudios que analizan el VaR; hay estudios que analizan mercados locales (activos del mismo país) y estudios de VaR de mercados internacionales; asimismo hay estudios que investigan la interrelación de activos locales con activos internacionales. Con el avance tecnológico y metodológico los estudios de VaR que logran capturar de mejor manera el comportamiento del mercado son cada vez más difundidos y usados por los administradores de riesgos. Por la pertinencia de esta investigación nombramos sólo algunos.

Reyes y Ortiz (2013) analizan el VaR de los mercados accionarios del TLCAN, dicho análisis del VaR es realizado mediante un modelo multivariado de la familia GARCH. En Benavides (2007) se realiza un análisis de VaR con futuros sobre tasas de interés mexicanas utilizando modelos GARCH. López *et al.* (2012) analizan el VaR de la bolsa mexicana de valores complementando el análisis del VaR a través de econometría fraccional para determinar memoria larga en los mercados del TLCAN.

Por su parte De Jesús y Ortiz (2013) analizan el efecto de la volatilidad y los rendimientos del peso y la bolsa mexicana a través de la implementación del VaR de valores extremos, y Aguirre *et al.* (2013) estiman el VaR de la bolsa mexicana también a través de la teoría de valores extremos pero con implementaciones de diversos modelos de la familia GARCH.

En Cortez *et al.* (2009) se analiza el VaR paramétrico de un portafolio compuesto por los tipos de cambio de México y Argentina seccionando el análisis en época de crisis y en época de estabilidad cambiaría.

Respecto al análisis de riesgo vía la implementación del Valor en Riesgo con cópulas, Torres y Olarte (2009) analizan esta aplicación del VaR con cópulas elípticas y arquimedianas. Embrechts, *et al.* (2005) aplican el método de cópula para crear diversos escenarios de valor en riesgo para el peor de los casos. Rank (2007) muestra la fiabilidad del uso de cópulas en uno de los dos métodos principales de la valuación del VaR, el método de Monte Carlo.

Cabe recalcar que estos estudios analizan el caso de los mercados financieros desarrollados; los estudios con cópulas sobre mercados emergentes son escasos. Debe, no obstante resaltarse las investigaciones de Ozun y Cifter (2007), y Hotta, *et al.* (2008) quienes utilizan a la teoría de cópulas en la valuación del VaR de portafolios de mercados emergentes de Latinoamérica; y Bucio y Ortiz (2013) analizan dependencia y VaR entre mercados accionarios desarrollados y emergentes del continente americano.

2. Metodología

Valor en Riesgo

El Valor en Riesgo (Value at Risk, VaR; por sus siglas en inglés) es un concepto desarrollado en el ámbito financiero de la administración de riesgos. El Valor en Riesgo (o en otras palabras, valoración del riesgo), proviene de la necesidad de cuantificar con un determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo (Jorion 2007, Penza y Bansal 2001, Best 1998, y Dowd 1998).

El VaR es una medida de riesgo de mercado creada por JP Morgan y recomendada en la medición de riesgos por el Comité de Basilea.¹ La principal característica del porqué el VaR se ha convertido en la metodología estándar en la medición del riesgo de mercado, es su aparentemente fácil implementación, flexibilidad y sencilla lectura.

Sin embargo, el VaR es un concepto controvertido, debido principalmente a los diversos métodos utilizados en la obtención de su estimación, los valores divergentes así obtenidos y el temor de que la administración de riesgos esté en algunos casos basada en gran medida en la estimación del VaR; teniendo por ende poca consideración para otros tipos de riesgos. Lo ideal sería que el VaR exprese con precisión la exposición al riesgo, sin embargo, la complejidad e inestabilidad de los mercados hace que sean ne-

¹ Basel Committee on Banking Supervision, Basel I, Basel II and Basel III, www.bis.org

cesarios modelos refinados que logren capturar las características de los mercados.

El concepto de VaR incorpora tres factores:

1. Un horizonte temporal dado. Es decir, un administrador de riesgos podría estar preocupado por las posibles pérdidas ya sea para un día, una semana, etcétera.
2. El VaR está asociado a una probabilidad. El VaR representa la posible pérdida durante un período determinado de tiempo con una determinada probabilidad.
3. El monto de dinero invertido.

En síntesis, la definición de VaR es la siguiente:

Valor en Riesgo.- El VaR resume la pérdida máxima esperada "o peor pérdida" a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza establecido.

En esencia el VaR no es más que una cifra, expresada en unidades monetarias (o términos porcentuales), que indica la máxima pérdida esperada para un horizonte temporal y nivel de confianza determinado. Dicha cifra tiene la característica de que puede ser especificada mediante diversas metodologías, es por ende que no sólo es necesario especificar los parámetros referidos sino también el método de estimación empleado en su cálculo.

Para el cálculo del VaR, previamente se requiere modelar los rendimientos del portafolio y hallar la distribución de pérdidas que los describe, tradicionalmente y por simplicidad se han supuesto rendimientos normalmente distribuidos, pero la evidencia empírica muestra que éstos no se comportan así. De este modo es que se han creado modelos más refinados para medir de una mejor manera las pérdidas de portafolio.

Las metodologías tradicionales de estimación del VaR aprobadas por el Comité de Basilea son: VaR Paramétrico, VaR Histórico y VaR Monte Carlo con un nivel de confianza de 95% y más restrictivamente de 99% tomando en cuenta series de datos diarias de por lo menos un año.

En este trabajo se pondrá énfasis por ende en las metodologías de VaR especificadas por el Comité de Basilea, que asimismo son las metodologías con mayor popularidad en el entorno económico financiero: el modelo delta-normal (modelo de VaR paramétrico), el modelo de simulación histórica (modelo de VaR Histórico) y el modelo de simulación Monte Carlo (modelo de

VaR Monte Carlo). Posteriormente se contrastarán estas metodologías tradicionales contra el modelo de VaR con cópulas elípticas, el cual es un modelo perfeccionado de VaR Monte Carlo que incluye la metodología de cópulas.

VaR Delta-Normal

J.P. Morgan en el año de 1994 mediante su destacada metodología llamada RiskMetrics introduce lo que se conoce como el método de valor en riesgo delta-normal. Esta metodología está fundamentada en la teoría de portafolio de Markowitz (1952, 1959) de varianza-covarianza.

La metodología delta-normal dada su fácil implementación es la más usual en el entorno financiero, este método está basado en el supuesto de normalidad de los datos, es decir para su cálculo se supone que los precios o rendimientos de los activos financieros son independientes e idénticamente distribuidos, suponiendo que se distribuyen de manera normal (gaussiana). Al suponer linealidad se sobre entiende que las volatilidades y correlaciones son estables a través del horizonte temporal pactado.

El valor en riesgo delta-normal se determina,

$$VaR = Z_c \sqrt{w^T \Sigma w} * \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

donde

Z_c = Nivel de significancia (valor critico) asociado a la distribución normal.

w = Vector de posiciones de los activos.

w^T = Transpuesta de w .

Σ = Matriz de varianza-covarianza del activo o portafolio de activos.

Δt = Horizonte temporal.

La semejanza hacia la distribución normal hace que el mecanismo de medir las pérdidas de portafolio sea más fácil, ya que sólo se necesita estimar el valor del percentil previamente escogido. Cabe resaltar que los cambios en el portafolio pueden interpretarse, ya sea como pérdidas, o como ganancias dependiendo si se mantiene una posición larga o corta, esto es de qué lado de la distribución sé este ubicado. Para el caso del VaR es común ubicarse del lado izquierdo de la distribución, i.e., en el lado de las pérdidas.

VaR de simulación histórica

Los modelos VaR de simulación tienen propiedades más atractivas que el modelo VaR delta-normal, la propiedad más significativa de estos modelos es que no se asume ningún supuesto sobre la estructura de la distribución de probabilidad de los rendimientos de los activos.

El modelo VaR de simulación histórica consiste en generar escenarios de los factores de riesgo (activos financieros) mediante la información observada en un período determinado. En la actualidad existen diversas metodologías para el VaR de simulación histórica, son semejantes en su mecanismo de implementación, y la evidencia empírica ha comprobado que llevan a resultados similares, De Lara (2009).

El algoritmo de la simulación histórica utilizado en esta investigación es:

- i) Recopilación de los datos de los activos que conformaran el portafolio.

$$P_k = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde P_k es el vector de precios de los activos (o vector de factor de riesgo).

- ii) Mediante el vector de precios se obtiene el vector de rendimientos,

$$R_k = \begin{bmatrix} \ln \frac{P_1}{P_0} \\ \ln \frac{P_2}{P_1} \\ \vdots \\ \ln \frac{P_n}{P_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde R_k es el vector de los rendimientos de los precios de los activos.

- iii) Se obtiene el último precio y se fija como semilla, P_n . Mediante el precio último se simulan nuevos precios, P_k^* . El precio semilla se multiplica por el exponencial de cada uno de los rendimientos y de esta manera se obtiene una nueva serie de datos, i.e.,

$$P_k^* = \begin{bmatrix} P_n^* e^{R_1} \\ P_n^* e^{R_2} \\ \vdots \\ P_n^* e^{R_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde P_k^* es el vector de precios simulados de los activos.

- iv) Para obtener el vector de pérdidas y ganancias se requieren tres pasos. Primeramente se toma el valor de la posición inicial, (si es que se tiene un portafolio de un activo) o posiciones iniciales, (si es que se tiene un portafolio comprendido por más de un activo). Se obtiene el vector de precios y ponderaciones, para ello se realiza el cociente entre el valor de la posición inicial y el precio último, y se multiplica por cada uno de los precios simulados. Si se tiene un portafolio de más de un activo para llegar al vector de precios y ponderaciones se hace la suma de cada uno de los cocientes de las posiciones iniciales con sus respectivos precios últimos, multiplicadas por sus correspondientes precios simulados.

$$v_k = \begin{bmatrix} \frac{W}{P_n} * P_1^* \\ \frac{W}{P_n} * P_2^* \\ \vdots \\ \frac{W}{P_n} * P_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde v_k es el vector de precios y ponderaciones simulados de los activos.

- v) El segundo paso a seguir en la obtención del vector de pérdidas y ganancias, es obtener el residuo entre el vector de precios y ponderaciones y el valor de posición inicial, o valores de posición inicial para el caso de más un activo. Para el caso de más de un activo se hace la suma de los residuos de los vectores de precios y ponderaciones versus sus respectivos valores de posición inicial, para así obtener un vector de pérdidas y ganancias conjunto.

$$V_k = \begin{bmatrix} v_1 - W \\ v_2 - W \\ \vdots \\ v_n - W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde V_k es el vector de pérdidas y ganancias simulados de los activos, sin orden.

vi) Finalmente, los valores del vector de pérdidas y ganancias sin orden V_k son ordenados de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias V_k^* . Mediante el vector de pérdidas y ganancias V_k^* se hace el cálculo del valor en riesgo; en otras palabras, la estimación del VaR se obtiene a través del percentil $c\%$ del vector de pérdidas y ganancias.

VaR de simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo data del año 1942 y está basada en la utilización de números aleatorios para crear escenarios futuros. La simulación de escenarios consiste en crear una secuencia de valores que conjuntamente formen una trayectoria de la variable de interés (variable a analizar), i.e., la trayectoria se forma mediante la simulación de escenarios que es vista a través de un amplio rango de situaciones posibles.

En lo que respecta al VaR, la simulación Monte Carlo sirve para simular escenarios sobre el probable valor de un portafolio en una fecha específica, en otras palabras, el valor del VaR es el que se obtiene mediante la distribución de valores del portafolio simulado. Esta metodología no toma en cuenta linealidad; incorpora variaciones a través del tiempo, i.e., volatilidad; captura colas amplias y valores extremos.

La implementación de la metodología del VaR de simulación Monte Carlo es la siguiente:

1) Primeramente se necesita seleccionar un modelo estocástico que describa el comportamiento de los precios (factores de riesgo) y especificar los parámetros que intervienen. El modelo más común en la literatura económico-financiera y el que utilizaremos en este trabajo, es el movimiento browniano geométrico,

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz_t \quad (7)$$

donde, S_t representa el precio del activo financiero, dz_t es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza dt ; y los parámetros μ_t y σ_t representan a la tendencia instantánea y la volatilidad en el

momento t , por simplicidad se asumen en adelante que estos parámetros son constantes.

Para la simulación de las trayectorias, es necesario previamente encontrar la solución única de la anterior ecuación estocástica, la cual puede expresarse como,

$$S_t = S_{t-1} \exp(\mu dt + \sigma dz_t) \quad (8)$$

Esta última ecuación, caracteriza movimientos infinitesimales en el precio del activo financiero. Por cuestiones prácticas esta última ecuación se transforma a términos discretos, teniendo un intervalo de tiempo pequeño Δt , que comprende el momento actual t y el momento objetivo T . La transformación queda,

$$S_t = S_{t-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) \quad (9)$$

donde, ε_t es ruido blanco, i.e., es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza 1.

II) Como segundo paso, se necesita generar una sucesión de números aleatorios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t$ para simular la trayectoria de precios. De este modo, el conjunto de precios simulados a través del horizonte objetivo es,

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t}) \\ S_{t+1} &= S_t \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t}) \\ S_{t+2} &= S_{t+1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_3 \sqrt{\Delta t}) \\ &\vdots \\ S_{t+n} &= S_{t+n-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_n \sqrt{\Delta t}) \end{aligned} \quad (10)$$

Ampliando la metodología anterior, para el caso de un portafolio con más de un activo se requiere de lo siguiente:

i) Inicialmente se necesita descomponer la matriz de varianza-covarianza del precio de los activos, para ello se lleva a cabo el mecanismo de descomposición de Cholesky. Mediante la descomposición de Cholesky se obtiene la matriz A , la cual cumple la obtención de una matriz triangular inferior, i.e.,

$$\Sigma = AA^T \quad (11)$$

donde A representa una matriz triangular cuadrada de dimensión $n \times n$.

- ii) A continuación, se crea un vector de dimensión $n \times 1$ de números aleatorios, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, con media cero y varianza 1. Para el caso específico de esta investigación se generan 100,000 números aleatorios.
- iii) Paso siguiente, se genera un conjunto de rendimientos que se distribuya de manera normal,

$$Y = A^T \varepsilon \quad (12)$$

donde Y representa un vector de dimensión $n \times 1$, de variables normales transformadas.

- iv) A continuación, se generan los precios que se distribuyen de manera log-normal,

$$Z = S_t e^Y \quad (13)$$

donde S_t representa el vector de dimensión $n \times 1$, de los precios futuros esperados.

- v) Una vez obtenido el vector de precios Z , este se utiliza para crear el vector de pérdidas y ganancias V_k , mediante $V_k = Z - W$, donde W es la posición total del portafolio.
- vi) Y como en el caso de la simulación histórica; los valores del vector de pérdidas y ganancias sin orden V_k son ordenados de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias V_k^* . Y finalmente, mediante el vector de pérdidas y ganancias V_k^* se hace el cálculo del valor en riesgo; en otras palabras, la estimación del VaR se obtiene a través del percentil $c\%$ del vector de pérdidas y ganancias.

Valor en Riesgo con cópulas

En los últimos años, se ha tenido un gran auge en investigaciones e implementaciones para el cálculo del VaR utilizando cópulas,² determinando la estructura de dependencia del portafolio y de los activos riesgosos que lo conforman, sin partir de supuestos sobre sus distribuciones y con la esperanza de estimar las colas gruesas de estas distribuciones, obteniendo resultados más realistas y evitando así la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.

Siguiendo a Romano (2002), Rank (2007), Fantazzini (2008), y Bucio y Ortiz (2013) en este trabajo se hace el uso de la estimación del VaR vía Monte Carlo con una adaptación a la teoría de cópulas.

Inicialmente se tiene que encontrar la función distribución conjunta más adecuada, i.e., la que mejor describa los datos. Esto se hace seleccionando las funciones de distribución marginales específicas para los rendimientos de riesgo individual y una función cópula para unir las marginales en una sola función de distribución conjunta.

Sean x_t y y_t los log-rendimientos de los activos en el tiempo t , y sea $\beta \in (0,1)$ el peso de la asignación, por tanto el rendimiento del portafolio está dado por

$$z_t = \beta x_t + (1 - \beta)y_t \quad (14)$$

La función de distribución condicional conjunta estimada en el tiempo $t-1$ está dada como,

$$H_t(x, y | \Phi_{t-1}) = C_t(F_t(x | \Phi_{t-1}), G_t(y | \Phi_{t-1}) | \Phi_{t-1}) \quad (15)$$

de este modo, la función de densidad está dada como,

$$h_t(x, y | \Phi_{t-1}) = c_t(F_t(x | \Phi_{t-1}), G_t(y | \Phi_{t-1}) | \Phi_{t-1}) \quad (16)$$

Los pasos detallados del procedimiento para la estimación de los p -ésimos niveles de confianza del VaR-Cópula durante un período de tenencia de un día son los siguientes:

² Para un estudio a detalle de la teoría de cópulas véase, Nelsen (2006) y Cherubini et al. (2004).

1. Sea un portafolio de dos activos z , el cual contiene una posición para cada uno de los dos factores de riesgo (o activos), cuyo valor en el tiempo $t - 1$ es:

$$P_{z,t-1} = P_{x,t-1} + P_{y,t-1} \quad (17)$$

donde $P_{x,t-1}$ y $P_{y,t-1}$ son los precios de mercado de los dos activos en el tiempo $t - 1$.

2. Simular $j = 100,000$ escenarios Monte Carlo para cada log-rendimiento de los activos, $\{x_{j,t}, y_{j,t}\}$, sobre el horizonte temporal $[t - 1, t]$, usando la función de distribución condicional conjunta.

- a) En primer lugar, se tienen que simular j variables aleatorias $(u_{j,x}, v_{j,y})'$ de la cópula $C_t(\cdot)$.
- i) Si se emplea una cópula normal 2-dimensional, se tiene el siguiente algoritmo:
 - Encontrar mediante la descomposición de Cholesky A a la matriz de correlación Σ , i.e.,

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_t \\ \hat{\rho}_t & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\rho}_t$ es la correlación condicional pronosticada, estimada mediante la copula.

- Simular dos variables aleatorias independientes distribuidas normal estándar $z_j = (z_{j,1}, z_{j,2})'$.
 - Establecer el vector $b_j = Az_j$.
 - Determinar los componentes $(u_{j,x}, v_{j,y})' = (\Phi(b_{j,1}), \Phi(b_{j,2}))'$, donde $\Phi(\cdot)$ es la cdf normal estándar. El vector $(u_{j,x}, v_{j,y})'$ es una j variable aleatoria de la 2-dimensional Cópula Normal $C_{\text{Normal}}(\cdot; \hat{\rho}_t | \Phi_{t-1})$.
- ii) Si se aplica una cópula t-Student 2-dimensional, se emplea el siguiente algoritmo:
 - Encontrar mediante la descomposición de Cholesky A a la matriz de correlación Σ , i.e.,

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_t \\ \hat{\rho}_t & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\rho}_t$ es la correlación condicional pronosticada, estimada mediante la copula.

- Simular dos variables aleatorias independientes distribuidas normal estándar $z_j = (z_{j,1}, z_{j,2})'$.
 - Simular una variable aleatoria s_j , de una distribución $\chi_{\hat{v}_t}^2$, independiente de z_j , donde \hat{v}_t es el parámetro de los grados de libertad estimado mediante la copula.
 - Establecer el vector $b_j = Az_j$.
 - Construir el vector $c_j = \frac{\sqrt{\hat{v}_t}}{\sqrt{s_j}} b_j$.
 - Determinar los componentes $(u_{j,x}, v_{j,y})' = (t_{\hat{v}_t}(c_{j,1}), t_{\hat{v}_t}(c_{j,2}))'$, donde $t_{\hat{v}_t}(\cdot)$ es la cdf t-Student, con grados de libertad iguales a \hat{v}_t . El vector $(u_{j,x}, v_{j,y})$ es una j variable aleatoria de la 2-dimensional Cópula t-Student $C_{t\text{-Student}}(\cdot; \hat{\rho}_t, \hat{v}_t | \Phi_{t-1})$.
- b) El paso siguiente consiste en obtener el registro de los log-rendimientos de los activos estandarizados mediante el uso de las funciones inversas de las marginales estimadas, las cuales pueden ser Normales o t-Student,

$$Q_j = (q_{j,x}, q_{j,y})' = (\hat{F}_t^{-1}(u_{j,x}), \hat{G}_t^{-1}(v_{j,y})) \quad (18)$$

- c) Finalmente, se repite este procedimiento para $j = 1, \dots, 100,000$.
3. Mediante el uso de estos 100,000 casos, el portafolio será reevaluado en el tiempo t , es decir,

$$P_{z,t}^j = P_{x,t-1} \exp(x_{j,t}) + P_{y,t-1} \exp(y_{j,t}), \quad j = 1, \dots, 100,000 \quad (19)$$

4. Las pérdidas del portafolio en cada escenario j , son calculadas mediante,

$$L_j = P_{z,t}^j - P_{z,t-1}, \quad j = 1, \dots, 100,000 \quad (20)$$

5. El cálculo del VaR a diferentes niveles de confianza es muy simple:

Se toma en cuenta el vector de pérdidas y ganancias sin orden, entonces como en los casos anteriores de simulación de VaR, i.e., simulación histórica y simulación Monte Carlo; este vector es ordenado de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias con el cual se hace el cálculo del valor en riesgo vía el $c\%$ percentil.

Prueba de Kupiec

Para llevar a cabo el proceso de verificación de las estimaciones del VaR se precisa de un mecanismo de contraste estadístico. Para ello se utiliza una prueba de Backtesting, la prueba de Kupiec,³ dicha prueba está basada en la aplicación estadística de una prueba de contraste. La prueba de Kupiec es la tradicionalmente utilizada para probar la validez del VaR.

La prueba de Kupiec (prueba de proporción de fallas de Kupiec), consiste en medir si el nivel de significancia propuesto por el VaR es consistente con la proporción de fallas que presenta el modelo. Es decir, se compara el VaR estimado respecto a las pérdidas y ganancias reales, de este modo lo que se mide es la eficiencia del VaR a través del número de fallos observados. Asimismo, la prueba de Kupiec busca observar si el nivel de significancia propuesto por el modelo VaR, es consistente con el nivel de significancia observado en la realidad, es decir se busca determinar la hipótesis nula de que la probabilidad de falla sea igual a $1-\alpha$.

Se considera como un *fracaso* si las pérdidas son inferiores al VaR, a dicho evento se le atribuye la probabilidad (p^*). Por otro lado cuando el VaR es inferior a las ganancias o pérdidas, se tiene un evento de *éxito* con probabilidad $(1- p^*)$.

Si se estima el VaR con un nivel de confianza de 95%, entonces se propone la hipótesis nula sea $H_0: p = 0.05$.

La hipótesis nula se contrasta a través de una prueba de razón de verosimilitud de la forma,

$$LR = -2 \ln \left(\frac{(p^*)^x (1 - p^*)^{n-x}}{(p^\blacksquare)^x (1 - p^\blacksquare)^{n-x}} \right) \quad (21)$$

³ Para un análisis a detalle véase, Kupiec (1995).

El criterio para aceptar o rechazar la hipótesis nula, es el siguiente:

- Si $p_{tablas} > p^*$ se acepta la hipótesis nula, es decir $p^* = p^{\blacksquare}$.
- Si $p_{tablas} > p^*$ se rechaza la hipótesis nula, es decir $p^* \neq p^{\blacksquare}$.

En este caso p_{tablas} corresponde al valor asociado a LR en tablas de la distribución χ^2 con un grado de libertad. El resultado obtenido nos permite discernir si el nivel de confianza del VaR es el correcto.

3. Evidencia empírica

La estimación de pérdidas potenciales vía el Valor en Riesgo haciendo uso de diversas metodologías de VaR serán realizadas para un portafolio compuesto por los mercados accionarios de México y Estados Unidos. Los mercados accionarios son analizados a través de sus principales índices bursátiles: IPC por México y S&P 500 por Estados Unidos. En este sentido se enfatiza que el análisis realizado en este trabajo es bivariado, i.e., un análisis a dos activos (o factores de riesgo). El período abarca 1975-2014, tomando en cuenta datos de series de tiempo diarias, siendo un total de 9,736 observaciones, las cuales son segmentadas en períodos anuales.

Con el fin de contar con una muestra similar dado el disímil funcionamiento de los mercados accionarios las series de datos fueron previamente homogenizadas tomando sólo días en común. Además, para una mejor homogenización se convierten los índices bursátiles a una sola moneda; en este caso el dólar estadounidense. La Gráfica 1 da cuenta del comportamiento de los mercados accionarios de México y Estados Unidos, tanto en moneda local como en dólares estadounidenses.

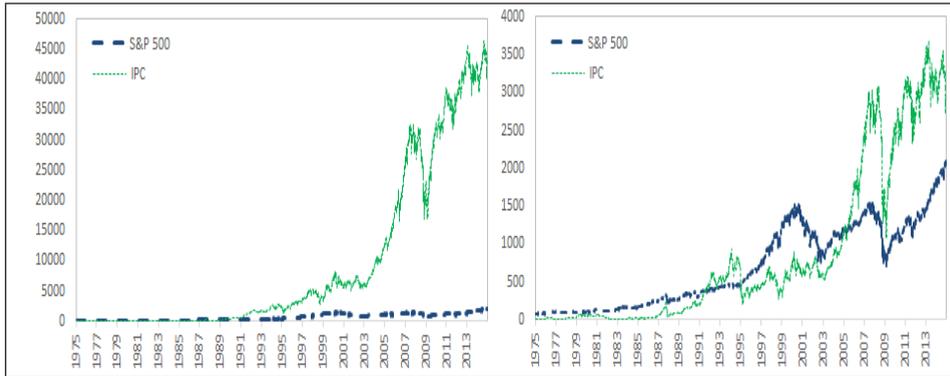
Cabe mencionar que las estimaciones de las pérdidas potenciales entre estos mercados accionarios, serán realizadas mediante el uso de los rendimientos de sus principales índices bursátiles. Los rendimientos a utilizar son por tanto los homogenizados en una sola moneda para obtener un mejor comparativo. La Gráfica 2 exhibe los rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos.

A través de la Gráfica 2 se puede constatar que los rendimientos de estos dos mercados que no son estables, ya que presentan *clusters* de volatilidad durante el período bajo análisis. Estos *clusters* de volatilidad exhibidos por los rendimientos de los mercados accionarios conllevan a que se tenga un comportamiento heteroscedástico y por consecuente que el análisis con el

Gráfica 1. Mercados accionarios de México y Estados Unidos

Panel A. Moneda local

Panel B. Dólares estadounidenses

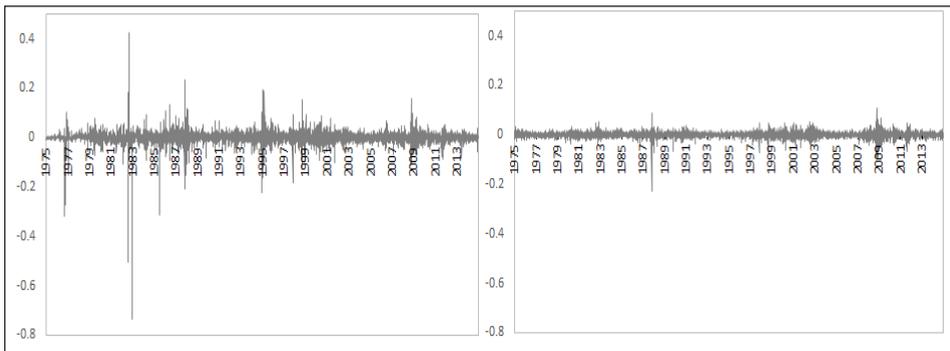


Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la página web de yahoo finanzas.

Gráfica 2. Rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos

Panel A. IPC (México)

Panel B. S&P 500 (Estados Unidos)



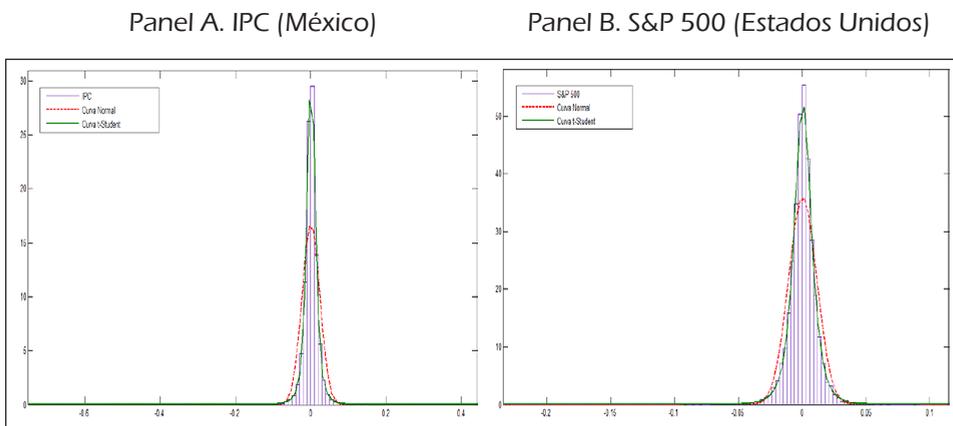
Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la pagina web de yahoo finanzas.

supuesto de normalidad en la serie de los índices bursátiles sea erróneo. Por ende cualquier metodología que haga uso de este supuesto de normalidad conllevará a estimaciones espurias.

Para constatar que no se cumple el supuesto de linealidad, se hacen diversos análisis a los rendimientos de los índices bursátiles de los mercados

de capitales de México y Estados Unidos. Primeramente se genera el histograma de los rendimientos de cada uno de los mercados de capitales bajo análisis, y sobre cada uno de estos histogramas se sobrepone el ajuste mediante la curva de la distribución normal y el ajuste mediante una curva de la distribución t-student; siendo las curvas de ambas distribuciones las que más se asemejan a los datos de los rendimientos de los índices bursátiles de cada mercado de capitales. La Gráfica 3 muestra el histograma de los rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos con sus respectivas curvas de las distribuciones normal y t-student.

Gráfica 3. Histogramas con curvas Normal y t-Student de los rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos



Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la pagina web de yahoo finanzas.

Mediante la Gráfica 3 se vuelve a comprobar que no se cumple la linealidad de los rendimientos de los mercados accionarios bajo análisis, ya que se observa claramente que el comportamiento de la curva normal difiere en gran medida del comportamiento del histograma de los rendimientos. Sin embargo, se puede afirmar se tiene un mejor ajuste mediante la curva t-student siendo ésta similar al histograma de los rendimientos de los mercados accionarios analizados. Cabe decir, que el comportamiento de los rendimientos presenta leptocurtosis y colas pesadas.

Se ha analizado gráficamente el período completo 1975-2014, sin embargo el estipulado en esta investigación es un análisis anual. El análisis gráfico del período completo nos sirve para identificar visualmente como es el

comportamiento durante todos estos años de estudio. Por síntesis se omite realizar un análisis gráfico anual. No obstante para identificar comportamientos característicos de estos períodos de análisis se opta por utilizar algunos estadísticos descriptivos que ayuden a identificar patrones en cada período bajo análisis.

Por ende para continuar con el análisis de la no linealidad de los rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos segmentados anualmente se realiza la estimación de diversos estadísticos descriptivos; cabe decir, mediante algunos de estos estadísticos descriptivos propuestos nos apoyamos para determinar si se confirma o rechaza la linealidad en el comportamiento de los rendimientos. La Tabla 1 muestra los estadísticos descriptivos de los rendimientos de los mercados accionarios bajo análisis.

Los estadísticos descriptivos de los rendimientos de los mercados accionarios de México y Estados Unidos revelan para la mayor parte de los períodos analizados que se está lejos de un comportamiento normal, esta aseveración se observa a través de los coeficientes de asimetría y curtosis, los cuales en su mayoría muestran valores significativos de asimetría y altos grados de curtosis. La Tabla 1 resalta la estimación del estadístico de normalidad Jarque-Bera, a través de este estadístico es evidente que en la mayor parte de los períodos los rendimientos, de los mercados accionarios bajo análisis, no cumplen con el supuesto de linealidad.

Comprobada la no linealidad de los rendimientos de los índices bursátiles de los mercados accionarios de México y Estados Unidos, se opta por mecanismos que estimen de mejor manera situaciones disímiles a la distribución normal. Para ello, se requiere de modelos más precisos. Por ende en este trabajo se propone el uso de la teoría de cópulas elípticas en la estimación de pérdidas potenciales a través del VaR para de este modo obtener estimaciones más robustas.

La estimación del Valor en Riesgo es realizada para portafolios compuestos por dos activos, siendo los activos los diferentes índices bursátiles de los mercados accionarios de México y Estados Unidos. Se utiliza la serie temporal diaria que comprende el período de análisis 1975-2014 de los rendimientos de cada índice bursátil. Dicha estimación del Valor en Riesgo es llevada a cabo mediante las metodologías: VaR Delta-Normal, VaR Simulación Histórica, VaR Simulación Monte Carlo y VaR-Cópulas Elípticas.

Antes que nada, en la estimación del valor en riesgo se deben estipular los supuestos mediante los cuales se cimientan las estimaciones, los cuales

son: horizonte temporal de un día, probabilidad de ocurrencia (nivel de significancia) al 99%, 95% y 90%, y la cantidad de 100 mil dólares por invertir.

En lo que respecta al monto de inversión por tratarse de un portafolio compuesto por un par de activos es necesario asignar un monto por cada uno de ellos, es decir, es necesario otorgar un porcentaje (cantidad) a invertir de cada índice bursátil de los mercados accionarios de México y Estados Unidos. Ante tal situación, se opta por una diversificación naive, la cual consiste en otorgar el mismo porcentaje a cada activo. Es decir, cada portafolio conformado por los dos activos bajo análisis y para cada período analizado se tiene una asignación (ponderación) de 50% para cada activo, en otras palabras a cada mercado de capital se le asignan 50 mil dólares; así al tomar montos de inversión idénticos, la estimación de Valor en Riesgo sirve como un comparativo más de las características de los mercados accionarios de México y Estados Unidos.

La Tabla 2 muestra los resultados de las diversas metodologías de Valor en Riesgo propuestas para cada uno de los portafolios compuestos entre los mercados accionarios de México y Estados Unidos. Las pérdidas potenciales son reportadas en términos porcentuales para una mejor identificación.

Mediante la Tabla 2 podemos constatar que las estimaciones de Valor en Riesgo vía las metodologías Delta-Normal y Simulación Histórica son las que indican estimaciones más conservadoras, les siguen las estimaciones vía la metodología de Monte Carlo dado que estas muestran un umbral de pérdida más alto con respecto al VaR Delta-Normal y VaR Simulación Histórica; y se resalta que las estimaciones vía el VaR Cópulas Elípticas son las de mayor umbral de pérdida, destacando las estimaciones obtenidas a través del VaR Cópula t-Student. Aunque, cabe decir, depende del período analizado se cumpla lo anteriormente dicho. Se puede estipular, se tiene en su mayoría el siguiente orden referente al mayor umbral de pérdida: primeramente con mayores pérdidas estimadas el VaR Cópula t-Student, continuando el VaR Cópula Normal, siguiéndole muy de cerca dadas sus características metodológicas y de supuesto lineal el VaR Simulación Monte Carlo, aunque cabe hacer mención en algunos períodos la pérdida estimada es ligeramente mayor vía Simulación Monte Carlo que vía VaR Cópula Normal, y por último con menores proporciones de pérdidas están el VaR Delta-Normal y el VaR Simulación Histórica.

Estas estimaciones muestran que el VaR-Cópula es un modelo robusto ya que captura mejor los comportamientos leptocurticos y asimétricos de los rendimientos de los índices bursátiles, conformando un umbral de riesgo

Tabla 1. Estadísticos Descriptivos de los Rendimientos de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos

	1975		1976		1977		1978	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	0.00010	0.00099	-0.00089	0.00066	0.00089	-0.00049	0.00331	0.00010
Mediana	0.00000	0.00093	0.00017	0.00044	0.00099	-0.00021	0.00267	0.00035
Máximo	0.01582	0.03222	0.10140	0.01919	0.04504	0.01844	0.05911	0.02220
Mínimo	-0.01416	-0.02654	-0.31788	-0.02433	-0.15416	-0.01639	-0.05641	-0.02003
Varianza	0.00002	0.00010	0.00094	0.00005	0.00015	0.00003	0.00010	0.00006
Dev. Est.	0.00392	0.00985	0.03064	0.00716	0.01243	0.00590	0.01013	0.00756
Asimetría	-0.15680	0.15333	-7.30385	-0.01059	-7.77716	-0.13910	0.18855	0.01973
Curtosis	5.62199	2.91746	73.96781	3.06111	101.642	3.07580	12.30320	2.98453
Jarque Bera	69.73	1.01	53373.12	0.04	100968.5	0.84	852.47	0.02
Probabilidad	0.00003	0.57672	0.00000	0.97848	0.000000	0.634655	0.000000	0.991027
Correlación	0.00881		-0.06089		-0.00565		-0.038354	

	1985		1986		1987		1988	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	0.00110	0.00100	0.00302	0.00061	-0.00035	0.00002	0.00291	0.00037
Mediana	0.00278	0.00063	-0.00002	0.00146	0.00672	0.00170	0.00163	0.00074
Máximo	0.07152	0.02257	0.13231	0.03392	0.23284	0.08709	0.11714	0.03391
Mínimo	-0.31231	-0.01466	-0.09072	-0.04928	-0.20569	-0.22900	-0.10552	-0.07008
Varianza	0.00074	0.00004	0.00061	0.00009	0.00219	0.00047	0.00075	0.00012
Dev. Est.	0.02725	0.00647	0.02471	0.00952	0.04684	0.02164	0.02732	0.01073
Asimetría	-6.38906	0.47350	0.55735	-0.82005	-1.27363	-4.93816	0.14678	-1.26057
Curtosis	74.34420	3.30222	8.06705	6.68336	9.785	55.20660	7.59042	11.25268
Jarque Bera	52751.63	9.92	272.54	164.60	529.6	28465.96	211.58	744.63
Probabilidad	0.00000	0.01469	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Correlación	-0.002382621		-0.04471		0.25649		0.017530	

	1995		1996		1997		1998	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	-0.00059	0.00121	0.00047	0.00072	0.00173	0.00113	-0.00197	0.00095
Mediana	-0.00080	0.00078	0.00021	0.00079	0.00269	0.00211	-0.00254	0.00154
Máximo	0.19464	0.01858	0.05422	0.01925	0.09149	0.04989	0.15217	0.04965
Mínimo	-0.16268	-0.02108	-0.04005	-0.03131	-0.18232	-0.07113	-0.12090	-0.07044
Varianza	0.00145	0.00003	0.00022	0.00006	0.00043	0.00014	0.00074	0.00017
Dev. Est.	0.03804	0.00522	0.01469	0.00756	0.02065	0.01175	0.02715	0.01301
Asimetría	0.49806	-0.08577	0.37251	-0.57320	-2.78632	-0.83872	0.48125	-0.59828
Curtosis	9.65425	5.03044	3.88223	4.64473	29.532	9.54986	8.36727	7.49061
Jarque Bera	458.37	42.04	13.72	41.37	7472.7	464.76	301.06	218.67
Probabilidad	0.00000	0.00018	0.00668	0.00019	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Correlación	0.320621391		0.37175		0.67847		0.618826	

	2005		2006		2007		2008	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	0.00148	0.00015	0.00046	0.00046	0.00037	0.00015	-0.00199	-0.00192
Mediana	0.00195	0.00069	0.00100	0.00100	0.00186	0.00081	0.00036	-0.00033
Máximo	0.03351	0.01910	0.02133	0.02133	0.04906	0.02879	0.16038	0.10957
Mínimo	-0.03586	-0.01687	-0.01850	-0.01850	-0.06610	-0.03534	-0.11210	-0.09470
Varianza	0.00014	0.00004	0.00004	0.00004	0.00025	0.00011	0.00089	0.00068
Dev. Est.	0.01187	0.00652	0.00628	0.00628	0.01581	0.01026	0.02980	0.02611
Asimetría	-0.18426	-0.06830	0.05939	0.05939	-0.44622	-0.45997	0.26959	-0.02470
Curtosis	3.31506	2.88129	4.19585	4.19585	4.170	4.30081	8.37352	6.58710
Jarque Bera	2.42	0.34	41.58	14.56	21.9	25.70	297.73	131.38
Probabilidad	0.25240	0.83827	0.00022	0.00551	0.00162	0.00107	0.00000	0.00000
Correlación	0.490499653		0.65775		0.79054		0.739649	

Tabla 1. Estadísticos Descriptivos de los Rendimientos de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos (continuación)

1979		1980		1981		1982		1983		1984	
IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
0.00188	0.00046	0.00005	0.00102	-0.00217	-0.00045	-0.00890	0.00058	0.00502	0.00072	0.00109	0.00006
0.00226	0.00060	0.00057	0.00208	-0.00243	-0.00024	-0.00516	-0.00094	0.00442	0.00072	0.00277	-0.00083
0.07967	0.02039	0.05536	0.03573	0.05208	0.02463	0.42597	0.05318	0.04883	0.02676	0.09592	0.02722
-0.07076	-0.03002	-0.05868	-0.03795	-0.06370	-0.02929	-0.73670	-0.04050	-0.03944	-0.02734	-0.08984	-0.01837
0.00036	0.00005	0.00023	0.00011	0.00019	0.00008	0.00592	0.00014	0.00020	0.00007	0.00046	0.00007
0.01886	0.00714	0.01530	0.01072	0.01365	0.00881	0.07694	0.01196	0.01423	0.00851	0.02142	0.00827
-0.02105	-0.28106	-0.18343	-0.28880	0.81586	-0.02397	-4.58673	0.80294	0.28176	0.03449	-0.33215	0.83613
5.00705	4.47298	5.82401	3.63163	7.66826	3.46369	50.83186	5.33211	3.69392	3.31051	5.89885	4.11258
39.63	24.44	81.43	7.36	245.57	2.18	22929.71	77.50	8.09	1.02	89.18	40.68
0.000250	0.001075	0.000000	0.029113	0.000000	0.289203	0.000000	0.000008	0.023614	0.571766	0.000025	0.000142
0.010726		-0.031171		0.007315		0.124409		-0.093863		0.065007	

1989		1990		1991		1992		1993		1994	
IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
0.00229	0.00100	0.00131	-0.00037	0.00323	0.00099	0.00075	0.00021	0.00158	0.00030	-0.00218	-0.00006
0.00152	0.00153	0.00088	0.00068	0.00263	-0.00010	0.00059	0.00017	0.00154	0.00013	-0.00087	0.00013
0.05150	0.02720	0.06789	0.03424	0.06660	0.03664	0.04661	0.01636	0.04240	0.01909	0.10594	0.02112
-0.08434	-0.06762	-0.05855	-0.03071	-0.05256	-0.03727	-0.06099	-0.01874	-0.03793	-0.02429	-0.22399	-0.02294
0.00019	0.00007	0.00018	0.00011	0.00020	0.00009	0.00026	0.00004	0.00018	0.00003	0.00081	0.00004
0.01387	0.00856	0.01347	0.01044	0.01411	0.00924	0.01624	0.00614	0.01326	0.00548	0.02851	0.00632
-0.84836	-2.11413	-0.00360	0.02425	-0.06050	0.24029	-0.36866	0.05880	0.18604	-0.21255	-2.34933	-0.34773
9.74205	19.43119	6.99685	3.82458	5.53970	4.86435	3.97884	3.35418	3.28034	5.26789	22.23114	4.29112
485.35	2890.62	161.08	6.88	65.46	37.53	15.27	1.42	2.21	54.13	3951.80	21.69
0.00000	0.00000	0.00000	0.03378	0.000067	0.000233	0.004829	0.455758	0.285626	0.000083	0.00000	0.001850
-0.003112		0.295935		0.464462		0.313338		0.239561		0.095713	

1999		2000		2001		2002		2003		2004	
IPC	S&P 500										
0.00268	0.00072	-0.00102	-0.00040	0.00081	-0.00046	-0.00075	-0.00111	0.00108	0.00083	0.00152	0.00036
0.00255	0.00008	-0.00083	-0.00034	0.00040	-0.00029	-0.00219	-0.00189	0.00187	0.00127	0.00185	0.00063
0.09311	0.03466	0.08810	0.04654	0.07641	0.04888	0.04531	0.05570	0.02906	0.03481	0.03683	0.01623
-0.09694	-0.02846	-0.09172	-0.06005	-0.10473	-0.05047	-0.05947	-0.04242	-0.03852	-0.02967	-0.04557	-0.01645
0.00046	0.00013	0.00058	0.00020	0.00030	0.00019	0.00027	0.00028	0.00012	0.00011	0.00012	0.00005
0.02153	0.01150	0.02401	0.01420	0.01727	0.01368	0.01634	0.01672	0.01105	0.01037	0.01089	0.00706
0.02339	0.08737	0.16737	0.01019	-0.66784	0.02199	0.09690	0.46416	-0.42945	0.09652	-0.57578	-0.10277
5.46831	2.87866	4.35914	4.33104	9.81828	4.38895	3.96516	3.60147	3.56319	3.37281	5.29821	2.82503
61.96	0.46	19.84	17.94	484.741	19.39	9.85	12.44	10.72	1.79	68.28	0.75
0.00010	0.78436	0.00223	0.00309	0.00000	0.00243	0.015027	0.008410	0.012219	0.364928	0.00003	0.667584
0.516996		0.649946		0.575914		0.669259		0.512779		0.602388	

2009		2010		2011		2012		2013		2014	
IPC	S&P 500										
0.00154	0.00074	0.00085	0.00043	-0.00069	-0.00005	0.00087	0.00046	-0.00026	0.00096	-0.00041	0.00049
0.00354	0.00187	0.00211	0.00075	0.00013	0.00097	0.00043	0.00021	-0.00092	0.00132	-0.00004	0.00062
0.08603	0.06837	0.05523	0.04303	0.05584	0.04632	0.03455	0.02461	0.03414	0.02160	0.03756	0.02373
-0.07279	-0.05426	-0.04853	-0.03976	-0.08505	-0.06896	-0.03391	-0.02495	-0.08042	-0.02533	-0.05521	-0.02271
0.00052	0.00030	0.00018	0.00014	0.00031	0.00023	0.00013	0.00007	0.00017	0.00005	0.00009	0.00005
0.02281	0.01738	0.01336	0.01163	0.01753	0.01505	0.01157	0.00810	0.01309	0.00681	0.00958	0.00735
0.07823	-0.04833	-0.41665	-0.15658	-0.60652	-0.47096	-0.03233	0.03727	-0.77903	-0.53268	-0.73944	-0.37228
4.49113	4.79207	5.06669	4.80180	6.30575	5.65332	3.35068	3.80584	8.03709	4.26001	7.91482	4.14334
22.85	32.75	50.48	34.00	126.06	80.59	1.28	6.60	282.63	27.68	263.43	18.62
0.00162	0.00048	0.00006	0.00042	0.00000	0.000017	0.492518	0.036805	0.00000	0.000817	0.00000	0.002783
0.776388		0.803148		0.805715		0.702870		0.595583		0.609606	

Tabla 2. Medidas de VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos

	VaR	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t		VaR	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975	99%	1.080111	1.182337	4.346969	4.389886	6.127009	1993	99%	1.738664	1.709899	5.013192	5.039033	6.966523
	95%	0.744676	0.819877	2.211939	2.216892	3.050557		95%	1.050863	1.181463	2.540710	2.552256	3.505642
	90%	0.603122	0.626651	1.356819	1.347548	1.853513		90%	0.922951	0.899755	1.552181	1.559693	2.119163
1976	99%	5.078914	3.622067	3.479949	4.262683	4.872269	1994	99%	5.466669	3.576078	8.220387	8.605568	11.020190
	95%	0.943199	2.564334	1.761756	2.176296	2.456895		95%	1.887880	2.561156	4.211306	4.438528	5.713325
	90%	0.587905	2.000460	1.074761	1.328317	1.483222		90%	1.467974	2.020106	2.585942	2.730943	3.487841
1977	99%	1.254316	1.576852	2.820069	3.024812	3.923610	1995	99%	5.734523	4.624370	10.738259	10.863217	14.053021
	95%	0.714777	1.108970	1.425072	1.523323	1.962373		95%	2.634667	3.260599	5.565075	5.610365	7.380903
	90%	0.545207	0.859544	0.870171	0.927585	1.187881		90%	1.906368	2.533578	3.481270	3.452987	4.467649
1978	99%	1.054837	1.271920	3.178171	3.313351	4.459224	1996	99%	2.565297	2.134151	5.076911	5.108377	6.973914
	95%	0.801315	0.849338	1.597209	1.651320	2.234406		95%	1.444928	1.491658	2.588794	2.585024	3.515577
	90%	0.635924	0.624062	0.978067	1.000377	1.347154		90%	1.038966	1.149147	1.573211	1.567135	2.120712
1979	99%	2.675480	2.236458	4.271958	4.352495	5.985383	1997	99%	3.491459	3.334634	8.259050	8.168999	11.069757
	95%	1.455508	1.546960	2.184495	2.206607	3.031593		95%	1.971257	2.315930	4.243364	4.140117	5.654753
	90%	1.134363	1.179391	1.333947	1.342873	1.833132		90%	1.273403	1.772862	2.590420	2.533826	3.437941
1980	99%	2.653000	2.086744	4.489750	4.514819	6.265957	1998	99%	5.658764	4.314457	10.495540	10.590773	13.896277
	95%	1.356843	1.459687	2.285991	2.269332	3.151563		95%	3.000417	3.065445	5.369827	5.411034	7.119900
	90%	1.028704	1.125405	1.390468	1.383282	1.909589		90%	2.137176	2.399601	3.296298	3.316093	4.332581
1981	99%	1.864649	2.026739	3.926311	3.946394	5.518129	1999	99%	3.523920	3.224913	8.050583	8.169574	10.945975
	95%	1.269456	1.471370	1.998624	1.984115	2.796969		95%	2.054816	2.230301	4.139732	4.158091	5.517782
	90%	0.981061	1.175305	1.222606	1.205574	1.695258		90%	1.619375	1.700078	2.518753	2.543216	3.351883
1982	99%	18.223031	9.642124	8.364083	6.364193	10.953614	2000	99%	4.390940	4.135719	9.841954	9.860989	13.211221
	95%	2.455671	6.939412	4.306449	3.224981	5.548959		95%	2.799077	2.944962	5.024028	5.067997	6.730674
	90%	1.874675	5.498606	2.642851	1.966870	3.347427		90%	2.035230	2.310175	3.095763	3.106089	4.107824
1983	99%	1.557064	1.559947	4.148665	4.164282	5.804079	2001	99%	3.618102	3.183641	7.374978	7.415821	10.138651
	95%	0.955367	1.018914	2.087171	2.098795	2.917288		95%	2.209759	2.245943	3.782051	3.767932	5.090515
	90%	0.739689	0.730491	1.269280	1.282399	1.766716		90%	1.384446	1.746059	2.305431	2.300758	3.098559
1984	99%	3.172877	2.671181	4.298417	4.251079	6.003932	2002	99%	3.437159	3.605455	7.878597	7.884934	10.624252
	95%	1.901458	1.871942	2.174385	2.141859	3.019220		95%	2.300321	2.576499	3.985942	4.027069	5.395502
	90%	1.296040	1.445871	1.315868	1.306766	1.821047		90%	1.804902	2.027966	2.452010	2.466650	3.274238
1985	99%	2.796610	3.150293	3.394637	3.456944	4.755933	2003	99%	2.065319	2.071667	4.988238	5.010658	6.794232
	95%	1.654036	2.196608	1.707479	1.726953	2.387858		95%	1.594093	1.436806	2.529582	2.533728	3.432734
	90%	0.979321	1.688202	1.047418	1.047913	1.447419		90%	1.114737	1.098363	1.545655	1.547459	2.074409
1986	99%	3.267735	2.851650	4.473051	4.517897	6.309799	2004	99%	2.153800	1.784987	4.439374	4.465559	6.040839
	95%	1.589122	1.963057	2.270039	2.274059	3.161100		95%	1.181933	1.234587	2.259208	2.255347	3.030884
	90%	1.177886	1.489351	1.379650	1.383708	1.928345		90%	0.936752	0.941171	1.370836	1.373977	1.846341
1987	99%	9.416053	6.577751	12.511768	10.600710	16.821299	2005	99%	1.966886	1.791220	4.645769	4.712679	6.426529
	95%	4.309998	4.655548	6.503165	5.450382	8.733828		95%	1.294174	1.242636	2.357014	2.367387	3.209796
	90%	2.019294	3.630829	4.007040	3.343065	5.328615		90%	0.937997	0.950187	1.433411	1.444396	1.934946
1988	99%	4.868424	3.270077	5.564616	5.466340	7.682512	2006	99%	2.624867	2.363243	6.298627	6.384266	8.472170
	95%	1.752395	2.264127	2.829414	2.775409	3.884333		95%	1.677465	1.643505	3.193960	3.225617	4.311601
	90%	1.145967	1.727859	1.732213	1.692608	2.370300		90%	1.150813	1.259815	1.948894	1.970539	2.603453
1989	99%	2.493569	1.728666	3.865819	3.983731	5.386137	2007	99%	3.054193	2.851113	5.885168	5.917870	7.975184
	95%	1.146049	1.173952	1.953144	2.012000	2.697832		95%	2.368520	2.008266	2.986383	3.022002	4.036555
	90%	0.731401	0.878237	1.189227	1.230403	1.639383		90%	1.570670	1.558947	1.822203	1.843394	2.445482
1990	99%	2.601485	2.201487	5.112944	5.062962	7.063546	2008	99%	8.058893	6.262968	11.564243	11.689677	15.387101
	95%	1.693039	1.542769	2.595666	2.540564	3.550574		95%	4.652922	4.485564	6.002815	6.004149	8.004558
	90%	0.949901	1.191609	1.584967	1.549977	2.161911		90%	2.678374	3.538036	3.670177	3.676515	4.903798
1991	99%	2.543988	2.131669	5.565437	5.574120	7.656102	2009	99%	4.955804	4.296829	8.439133	8.459369	11.361897
	95%	1.286465	1.445481	2.831529	2.793354	3.826244		95%	3.022024	3.004770	4.329645	4.303007	5.790561
	90%	0.880235	1.079676	1.735952	1.700608	2.329846		90%	2.276853	2.315979	2.660969	2.641642	3.528890
1992	99%	2.310018	2.172024	5.840792	5.896784	8.021415	2010	99%	3.172887	2.696616	4.948563	5.079725	6.721594
	95%	1.722448	1.521773	2.989137	2.977021	4.082755		95%	2.289867	1.887892	2.503836	2.553364	3.367890
	90%	1.101719	1.175126	1.821731	1.816689	2.473377		90%	1.438803	1.456763	1.531634	1.561718	2.039974

Tabla 2. Medidas de VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos (continuación)

	VaR	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t		VaR	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
2011	99%	4.570178	3.639127	6.473920	6.534285	8.815237	2013	99%	2.581529	2.058298	5.169337	5.212425	7.048023
	95%	2.477942	2.583916	3.318234	3.319486	4.493701		95%	1.270522	1.445004	2.625590	2.645121	3.559124
	90%	1.849784	2.021387	2.032526	2.026043	2.734740		90%	1.061439	1.118059	1.603329	1.615388	2.155084
2012	99%	2.195566	2.050108	4.497240	4.510819	6.157742	2014	99%	1.943283	1.766124	4.015358	4.033509	5.414335
	95%	1.338457	1.430115	2.289518	2.276265	3.098138		95%	1.270677	1.247569	2.008585	2.025273	2.721330
	90%	1.107762	1.099598	1.391620	1.388322	1.867042		90%	0.838733	0.971130	1.221740	1.229665	1.636682

más amplio. De las estimaciones efectuadas se destaca la cópula t-student la cual, dada su estructura, estima las mayores pérdidas.

Referente a las menores y mayores pérdidas potenciales estimadas, se puede decir que el portafolio conformado por los mercados accionarios de México y Estados Unidos presenta, a través del tiempo y dependiendo del período analizado, un menor o mayor umbral de pérdidas potenciales.

El período que presentó el mayor umbral de pérdidas es el comprendido por el año 1987. Las pérdidas de este período están vinculadas al desplome bursátil del lunes negro, cabe recordar este acontecimiento originó una de las mayores crisis financieras. Sin embargo, siendo coherentes se puede afirmar que son varios los períodos que presentan umbrales de pérdidas por arriba del resto, los cuales en orden de mayor a menor pérdida son: 1987, 2008, 1995, y 1998. Se observa los períodos que presentan mayores pérdidas tienen la particularidad de pertenecer a un período de crisis financiera que por ende se caracteriza por la presencia de altos niveles de inestabilidad financiera. Asimismo, debe resaltarse la estimación vía simulación histórica del año 1982, la cual muestra el umbral de pérdida más alto. En este año se llevó a cabo una gran devaluación en México que implicó una de las grandes crisis financieras de este país. De este modo, se confirma que la estimación de pérdidas potenciales es mayor en períodos de inestabilidad financiera.

Cabe destacarse que no todos los modelos de VaR son viables en condiciones inestables del mercado (e.g. volatilidad extrema, asimetría y leptocurtosis). Cada metodología tiene sus pros y contras, sin embargo, la eficiencia de cada una de ellas depende de sus supuestos estadísticos y del comportamiento del mercado.

Finalmente, para verificar la validez en las estimaciones de las metodologías de Valor en Riesgo propuestas, y que éstas a su vez sean robustas y precisas, se utiliza la prueba de Backtesting de Kupiec. La Tabla 3 muestra

los resultados de la prueba de Kupiec aplicada a las metodologías de Valor en Riesgo propuestas para cada uno de los portafolios compuestos entre los mercados accionarios de México y Estados Unidos.

La Tabla 3 confirma que son más robustas las estimaciones más restrictivas; se observa que en su mayoría las estimaciones al 99% son las de mejor desempeño. Asimismo, se comprueba que las estimaciones de VaR a través del VaR-Cópula t-Student también cumplen en su mayoría con el supuesto del mejor desempeño.

Tabla 3. Backtesting al VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos*

		S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975	99%	0.0000 (26)	0.0000 (20)	0.7419 (2)	0.7419 (2)	0.7419 (2)
	95%	0.0000 (49)	0.0000 (43)	0.0366 (6)	0.0366 (6)	0.0042 (4)
	90%	0.0000 (70)	0.0000 (67)	0.0237 (15)	0.0237 (15)	0.0000 (7)
1976	99%	0.2781 (1)	0.2781 (1)	0.2781 (1)	0.2781 (1)	0.2781 (1)
	95%	0.4812 (15)	0.0000 (1)	0.0002 (2)	0.0000 (1)	0.0000 (1)
	90%	0.0237 (15)	0.0000 (1)	0.0000 (2)	0.0000 (1)	0.0000 (1)
1977	99%	0.0000 (13)	0.0014 (9)	0.7580 (3)	0.7580 (3)	0.2781 (1)
	95%	0.0000 (52)	0.2146 (17)	0.8839 (12)	0.2860 (9)	0.0366 (6)
	90%	0.0000 (76)	0.0018 (41)	0.0033 (40)	0.0704 (34)	0.2764 (20)
1978	99%	0.0000 (74)	0.0000 (60)	0.0594 (6)	0.1619 (5)	0.2781 (1)
	95%	0.0000 (105)	0.0000 (99)	0.0000 (40)	0.0000 (33)	0.6691 (14)
	90%	0.0000 (123)	0.0000 (123)	0.0000 (84)	0.0000 (83)	0.0000 (59)
1979	99%	0.3895(4)	0.0054(8)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0013(25)	0.0788(19)	0.1632(8)	0.1632(8)	0.0002(2)
	90%	0.0003(44)	0.0033(40)	0.3052(30)	0.3052(30)	0.043600
1980	99%	0.7419(2)	0.1619(5)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0788(19)	0.3294(16)	0.0042(49)	0.0042(4)	0.0002(2)
	90%	0.0284(36)	0.5341(28)	0.1222(18)	0.1222(18)	0.0000(7)

* La tabla reporta los valores-p de la prueba de Kupiec. Los valores-p se determinan dependiendo del VaR estimado, i.e., los valores-p mayores o iguales al 10% se contrastan con el VaR estimado al 90%, los valores-p mayores o iguales al 5% se contrastan con el VaR estimado al 95% y los valores-p mayores o iguales al 1% se contrastan con el VaR estimado al 99%, dichos valores estimados establecen la confiabilidad del VaR. Los valores en negritas indican el modelo con mejor desempeño y los valores en paréntesis indican el número de fallos reales.

Tabla 3. Backtesting al VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos (continuación)

1981	99%	0.0000(28)	0.0000(25)	0.0003(10)	0.0003(10)	0.1619(5)
	95%	0.0000(58)	0.0000(46)	0.0013(25)	0.0006(26)	0.3294(16)
	90%	0.0000(82)	0.0000(64)	0.0000(60)	0.0000(63)	0.1553(32)
1982	99%	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	95%	0.0828(7)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	90%	0.0751(17)	0.0000 (0)	0.0000(0)	0.0058(13)	0.0000 (0)
1983	99%	0.0000(47)	0.0000(46)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.2781(1)
	95%	0.0000(88)	0.0000(84)	0.0239(21)	0.0444(20)	0.2860(9)
	90%	0.0000(118)	0.0000(119)	0.0000(66)	0.0000(64)	0.2209(31)
1984	99%	0.7579(39)	0.1619(5)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)
	95%	0.2146(17)	0.1331(18)	0.1632(8)	0.1632(8)	0.0042(4)
	90%	0.0000(118)	0.0000(119)	0.0000(66)	0.0000(64)	0.2209(31)
1985	99%	0.0000(12)	0.0014(9)	0.0191(7)	0.0191(7)	0.7419(2)
	95%	0.0000(41)	0.2146(17)	0.0000(40)	0.0000(40)	0.3294(16)
	90%	0.0000(95)	0.0033(40)	0.0000(87)	0.0000(87)	0.0000(56)
1986	99%	0.0000(29)	0.0000(35)	0.0000(19)	0.0000(19)	0.0000(12)
	95%	0.0000(84)	0.0000(60)	0.0000(52)	0.0000(52)	0.0000(29)
	90%	0.0000(118)	0.0000(91)	0.0000(99)	0.0000(99)	0.0000(63)
1987	99%	0.2781(1)	0.7580(3)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0828(7)	0.0828(7)	0.0042(4)	0.0042(4)	0.0000(1)
	90%	0.0005(43)	0.0025(12)	0.0000(8)	0.0121(14)	0.0000(7)
1988	99%	0.2781(1)	0.7419(2)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.6691(14)	0.1632(8)	0.0042(4)	0.0042(4)	0.0002(2)
	90%	0.0103(38)	0.0436(16)	0.0436(16)	0.0436(16)	0.0001(9)
1989	99%	0.2781(1)	0.0000(21)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.0000(0)
	95%	0.0000(41)	0.0000(40)	0.4812(15)	0.4812(15)	0.0042(4)
	90%	0.0000(83)	0.0000(70)	0.0033(40)	0.0059(39)	0.8320(24)
1990	99%	0.0594(6)	0.0000(11)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	95%	0.0029(24)	0.0000(30)	0.0366(6)	0.0366(6)	0.0002(2)
	90%	0.0000(102)	0.0000(47)	0.5341(28)	0.3052(30)	0.0025(12)
1991	99%	0.7580(3)	0.0000(11)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	95%	0.0000(38)	0.0000(31)	0.0002(2)	0.0002(2)	0.0000(1)
	90%	0.0000(84)	0.0000(59)	0.3872(21)	0.3872(21)	0.0000(8)
1992	99%	0.7419(2)	0.7580(3)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	95%	0.1632(8)	0.6571(11)	0.0000 (0)	0.0000 (0)	0.0000 (0)
	90%	0.0704(34)	0.8340(26)	0.0000(6)	0.0000(6)	0.0000(1)

Tabla 3. Backtesting al VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos (continuación)

		S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1993	99%	0.0000(26)	0.0000(28)	0.3805(49)	0.3805(4)	0.7419(2)
	95%	0.0000(81)	0.0000(58)	0.6571(11)	0.6571(11)	0.0137(5)
	90%	0.0000(88)	0.0000(89)	0.0284(36)	0.0454(35)	0.0058(13)
1994	99%	0.1619(5)	0.0054(8)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
	95%	0.0000(36)	0.3294(16)	0.1632(8)	0.0828(7)	0.0137(5)
	90%	0.0000(54)	0.1553(32)	0.0436(16)	0.0237(15)	0.0000(8)
1995	99%	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
	95%	0.0137(5)	0.0000(1)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
	90%	0.0121(14)	0.0000(5)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
1996	99%	0.0000(14)	0.0000(19)	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7419(2)
	95%	0.0000(44)	0.0000(41)	0.8854(13)	0.8854(13)	0.1632(8)
	90%	0.0000(83)	0.0000(74)	0.0173(73)	0.0173(37)	0.2764(20)
1997	99%	0.0000(12)	0.0000(16)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0000(44)	0.0000(30)	0.4529(10)	0.6571(11)	0.0010(3)
	90%	0.0000(81)	0.0000(54)	0.5194(22)	0.6695(23)	0.0121(14)
1998	99%	0.2781(1)	0.3805(4)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.8839(12)	0.6571(119)	0.0000(1)	0.0000(1)	0.0000(1)
	90%	0.1061(33)	0.8320(24)	0.0004(10)	0.0004(10)	0.0000(4)
1999	99%	0.0000(13)	0.0000(19)	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7419(2)
	95%	0.0000(50)	0.0000(37)	0.2860(9)	0.2860(9)	0.0010(3)
	90%	0.0000(81)	0.0000(74)	0.1061(33)	0.1061(33)	0.0237(15)
2000	99%	0.3805(49)	0.0594(6)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)
	95%	0.4812(15)	0.6691(14)	0.0010(3)	0.0010(3)	0.0010(3)
	90%	0.3052(30)	1.0000(25)	0.0025(12)	0.0025(12)	0.0000(6)
2001	99%	0.0191(7)	0.0000(11)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0000(34)	0.0000(32)	0.0828(7)	0.0828(7)	0.0000(1)
	90%	0.0000(81)	0.0000(57)	0.5341(28)	0.4096(29)	0.0025(12)
2002	99%	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0042(4)	0.0002(2)	0.0000(1)	0.0000(1)	0.0000(1)
	90%	0.0121(14)	0.0000(7)	0.0000(3)	0.0000(3)	0.0000(1)
2003	99%	0.0594(6)	0.0594(6)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
	95%	0.8839(12)	0.0445(20)	0.0010(3)	0.0010(3)	0.0000(0)
	90%	0.0010(42)	0.0003(44)	0.0751(17)	0.0751(17)	0.0000(6)
2004	99%	0.7419(2)	0.0003(10)	0.0000(0)	0.0000(0)	0.0000(0)
	95%	0.0000(33)	0.0000(33)	0.0000(1)	0.0000(1)	0.0000(0)
	90%	0.0000(60)	0.0000(58)	0.6768(27)	0.6768(27)	0.0001(9)

Tabla 3. Backtesting al VaR de los Mercados Accionarios de México y Estados Unidos (continuación)

		S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
2005	99%	0.0000(14)	0.0000(20)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0000(44)	0.0000(47)	0.6571(11)	0.6571(11)	0.0042(4)
	90%	0.0000(75)	0.0000(72)	0.0103(38)	0.0173(37)	0.0237(15)
2006	99%	0.0000(15)	0.0000(20)	0.2781(1)	0.2781(1)	0.2781(1)
	95%	0.0000(36)	0.0000(39)	0.0137(5)	0.0137(5)	0.0002(2)
	90%	0.0000(77)	0.0000(64)	0.5341(28)	0.5341(28)	0.0237(15)
2007	99%	0.0000(37)	0.0000(41)	0.0000(14)	0.0000(14)	0.0054(8)
	95%	0.0000(54)	0.0000(64)	0.0000(38)	0.0000(37)	0.0000(30)
	90%	0.0000(86)	0.0000(88)	0.0000(74)	0.0000(72)	0.0000(52)
2008	99%	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)
	95%	0.4529(10)	0.6571(11)	0.0010(3)	0.0010(3)	0.0002(2)
	90%	0.0009(42)	0.1884(19)	0.1884(19)	0.1884(19)	0.0001(9)
2009	99%	0.7419(2)	0.7580(3)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)
	95%	0.4529(10)	0.4529(10)	0.0010(3)	0.0010(3)	0.0002(2)
	90%	0.3872(21)	0.3872(21)	0.0436(16)	0.0436(16)	0.0000(5)
2010	99%	0.0000(14)	0.0000(20)	0.3805(4)	0.3805(4)	0.7580(3)
	95%	0.0000(33)	0.0000(46)	0.0000(29)	0.0002(27)	0.8854(13)
	90%	0.0000(66)	0.0000(65)	0.0000(62)	0.0000(59)	0.0059(39)
2011	99%	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7580(3)
	95%	0.0137(5)	0.0042(4)	0.0010(3)	0.0010(3)	0.0010(3)
	90%	0.1222(18)	0.0121(14)	0.0121(14)	0.0121(14)	0.0000(4)
2012	99%	0.0594(6)	0.0594(6)	0.7580(3)	0.7580(3)	0.7419(2)
	95%	0.0124(22)	0.0445(20)	0.0137(5)	0.0137(5)	0.0010(3)
	90%	0.0001(42)	0.0003(44)	0.3872(21)	0.3872(21)	0.0000(8)
2013	99%	0.3805(4)	0.3805(4)	0.7419(2)	0.7419(2)	0.7419(2)
	95%	0.0124(22)	0.2146(17)	0.0042(4)	0.0042(4)	0.0010(3)
	90%	0.4096(29)	0.6768(27)	0.0121(14)	0.0121(14)	0.0000(4)

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue estimar e identificar los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados accionarios de México y Estados Unidos y con base en las estimaciones discernir cual o cuales metodologías del VaR son más precisas. En este sentido se comprueba y enfatiza las estimaciones obtenidas mediante la metodología VaR Cópula t-Student resultaron ser las más restrictivas, ponderando mayores pérdidas.

Mediante la investigación realizada fue posible determinar que el uso de la teoría de cópulas en la estimación de pérdidas potenciales a través del Valor en Riesgo es más viable que las metodologías utilizadas por la teoría económico-financiera convencional, conllevando a estimaciones más robustas.

En síntesis, se puede concluir que las estimaciones con metodologías más acordes al comportamiento de los activos financieros generan estimaciones más sensatas siendo el tomador de decisiones el que implementara la decisión óptima de la toma de riesgos. En este sentido, los resultados aquí expuestos recaen en la visión del académico y regulador, la cual busca estimaciones más acordes al comportamiento de los datos. Sin embargo, no es necesariamente ésta la visión de un inversionista o banquero, dado que el uso de una reserva mayor de capital implica menor disponibilidad de recursos para invertir. Sea cual sea la decisión que tome el tomador de decisiones se tiene como finalidad se conlleve a lograr una asignación más eficiente del capital y en este sentido obtener inversiones más productivas que en consecuencia impulsen el crecimiento económico financiero.

Referencias bibliográficas

- Aguirre, Alejandro I.; Vaquera, Humberto; Ramírez, Martha E.; Valdez, José R. y Aguirre, Carlos (2013). "Estimación del valor en riesgo en la Bolsa Mexicana de Valores usando modelos de heteroscedasticidad condicional y teoría de valores extremos". *Economía Mexicana*, Nueva Época, vol. XXII, núm. 1, pp. 177-205.
- Benavides, Guillermo (2007). "Procesos GARCH y valor en riesgo: un análisis empírico de futuros". *Panorama Socioeconómico*, núm. 35, pp. 92-105.
- Bucio, Christian y Ortiz, Edgar (2013). "Mercados Accionarios Desarrollados y Emergentes del Continente Americano: Dependencia y Valor en Riesgo". En

- Fronteras en Economía Financiera*, vol. 1, Ortiz, Francisco; López, Francisco y Venegas, Francisco (coords.), Universidad Panamericana, pp. 1-32.
- Best, Philip (1998). *Implementing Value at Risk*. John Wiley and Sons, England.
- Cherubini, Umberto; Luciano, Elisa y Vecchiato, Walter (2004). *Copula methods in finance*, John Wiley and Sons, England.
- Crouhy, Michel; Galai, Dan y Mark, Robert (2001). *Risk Management*. McGraw-Hill Education, Estados Unidos.
- Cortez, K.A.; Rodríguez, M.P. y Salazar, R. (2009). "Análisis del VaR en crisis y estabilidad: El caso de México y Argentina". *Innovaciones de Negocios*, 5(2), pp. 209-218.
- De Jesús, Raúl y Ortiz, Edgar (2013). "El efecto de la volatilidad del peso mexicano en los rendimientos y riesgo de la Bolsa Mexicana de Valores". *Contaduría y Administración*, 58 (3), pp. 89-119.
- De Lara, Alfonso (2009). *Medición y control de riesgos financieros*. Limusa, México.
- Dowd, Kevin (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, *Frontiers in Finance Series*, John Wiley and Sons. England.
- Embrechts, Paul; Höing, Andrea y Puccetti, Giovanni (2005). "Worst VaR Scenarios Insurance". *Mathematics and Economics*, 37(1), pp. 115-134.
- Fantazzini, Dean (2008). "Dynamic Copula Modelling for Value at Risk". *Frontiers in Finance and Economics*, vol. 5, no. 2, pp. 72-108.
- Hotta, Luiz K.; Lucas, Edimilson C. y Palaro, Helder P. (2008). "Estimation of VaR using Copula and Extreme Value Theory". *Multinational Finance Journal*, 12 (3/4), pp. 205-218.
- Jorion, Philippe (2007). *Valor en Riesgo*. Limusa. México.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models". *Journal of Derivatives* 2, pp. 73-84.
- López, Francisco; Ortiz, Edgar y De Jesús, Raúl (2012). "Long Memory Behavior in the Returns of the Mexican Stock Market: Arfima Models and Value at Risk Estimation". *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*, vol. 2, no. 10, pp. 113-133.
- Markowitz, Harry M. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, 7(1), pp. 77-91.
- Markowitz, Harry M. (1959). "Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments", *John Wiley and Sons*, New York.
- Nelsen, Roger B. (2006). "An Introduction to Copulas". *Springer*, Estados Unidos.
- Ozun, Alper y Cifter, Atilla (2007). "Portfolio Value-at-Risk with Time-Varying Copula: Evidence from the Americas". *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany.

- Penza, Pietro y Bansal, Vipul K. (2001). "Measuring Market Risk With Value at Risk", *John Wiley and Sons*, New York.
- Rank, Jörn (2007). *Copulas: From Theory to Application in Finance*. Risk Books, United Kingdom.
- Reyes, Francisco y Ortiz, Edgar (2013). "Modelos VaR-GARCH y portafolios de inversión trinacionales en los mercados accionarios del TLCAN". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, vol. 8, no. 2, pp. 129-155.
- Romano, Claudio (2002). "Applying Copula Function to Risk Management". *Working Paper*, University of Rome, La Sapienza.
- Torres, Gabriel y Olarte Ana (2009). "Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas". *AD-MINISTER Universidad EAFIT* 15, pp. 113-136.

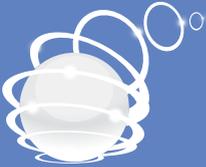
La revista **Estocástica: finanzas y riesgo**
está incluida en:



CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

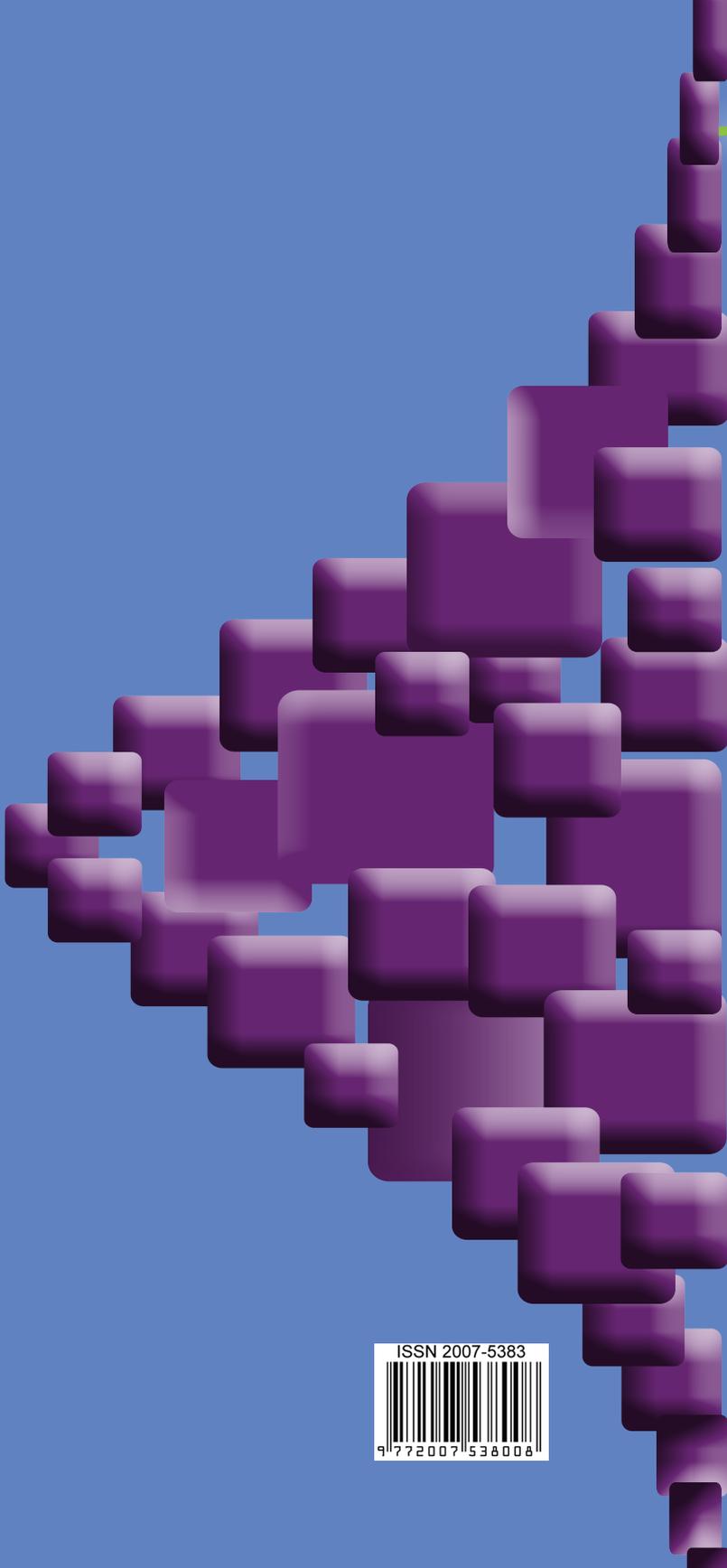
Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros



ISSN 2007-5383



9 772007 538008