

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

**Modelo binomial borroso,
el valor de la firma apalancada
y los efectos de la deuda**

Gastón Silverio Milanesi

**Análisis del efecto apalancamiento
en los rendimientos del IPC mediante una
Cadena de Markov Monte Carlo antes,
durante y después de la crisis subprime**

Ignacio Francisco Hernández Ángeles
Francisco López-Herrera
Luis Fernando Hoyos Reyes

**Escenarios Monte Carlo para
estrategias con expectativas de
baja volatilidad cambiante
mediante opciones europeas
de compra y venta**

Héctor Alonso Olivares Aguayo
Ambrosio Ortiz-Ramírez
Christian Bucio Pacheco

**Estimación restringida de la
distribución hiperbólica generalizada
de los tipos de cambio del Euro, Yen,
Libra esterlina y Dólar canadiense (2000-2014)**

Martha Beatriz Mota Aragón
José Antonio Núñez Mora

**VOLUMEN 5, NÚMERO 1
ENERO - JUNIO 2015**

Universidad
Autónoma
Metropolitana 
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Volumen 5, número 1
Enero - junio 2015

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Directorio

Rector General

Dr. Salvador Vega y León

Secretario General

M. en C. O. Norberto Manjarrez Álvarez

Rector de la Unidad Azcapotzalco

Dr. Romualdo López Zárate

Secretario de la Unidad

Mtro. Abelardo González Aragón

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Secretario Académico

Lic. Miguel Pérez López

Jefa del Departamento de Administración

Dra. María Teresa Magallón Díez

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Dr. Saúl Jerónimo Romero

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández-Lerma

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, IPN

Dr. Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía, IPN

Dr. Edgar Ortiz

Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, UNAM

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

Departamento de Ingeniería Eléctrica,

UAM-Iztapalapa

Dra. Patricia Saavedra Barrera

Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa

Dr. Francisco López Herrera

Facultad de Contaduría y Administración, UNAM

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine Abed

Editora

Dra. Marissa R. Martínez Preece

Coeditores

Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Dr. José Antonio Climent Hernández

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Vol 5, número 1, Enero - junio 2015, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200. México, Ciudad de México; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 16 de febrero de 2015, Tamaño del archivo: 6.16 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Modelo binomial borroso,
el valor de la firma apalancada
y los efectos de la deuda

Gastón Silverio Milanesi

9

Análisis del efecto apalancamiento
en los rendimientos del IPC mediante
una Cadena de Markov Monte Carlo:
antes, durante y después de la crisis subprime

Ignacio Francisco Hernández Ángeles
Francisco López-Herrera
Luis Fernando Hoyos Reyes

43

Escenarios Monte Carlo para
estrategias con expectativas de baja
volatilidad cambiante mediante
opciones europeas de compra y venta

Héctor Alonso Olivares Aguayo
Ambrosio Ortiz-Ramírez
Christian Bucio Pacheco

65

Estimación restringida de la
distribución hiperbólica generalizada
de los tipos de cambio del Euro, Yen,
Libra esterlina y Dólar canadiense
(2000-2014)

Martha Beatriz Mota Aragón
José Antonio Núñez Mora

95

PRESENTACIÓN

En el último semestre de 2014, la situación política y económica del país ha enfrentado momentos poco alentadores, dentro de un ambiente internacional pleno de retos. La caída de los precios del petróleo, la depreciación del peso frente al dólar y la decisión del gobierno de intervenir para evitar una depreciación más aguda, aunado a severos cuestionamientos del sistema económico, legal y político del país, hacen muy difícil vislumbrar una salida a corto plazo que lleve al crecimiento económico de la nación.

Dentro de este contexto, el sistema financiero ha jugado un papel importante. El esquema de coberturas contratado por el gobierno, en un intento de proteger la tercera parte de sus ingresos del exterior, los cuales provienen del petróleo, hizo posible que se fijara un piso de US\$76 por barril para una cuarta parte de la producción del hidrocarburo durante 2015. Sin embargo, este alivio para la economía es sólo a corto plazo, y es muy posible que ésta enfrente una situación poco favorable provocada por una disminución en la producción del petróleo y por una baja en la inversión extranjera esperada, desalentada por la caída de los precios del petróleo. Esto aunado a una reducción en el gasto público, consecuencia de la disminución de los ingresos derivados de las exportaciones de petróleo y un descenso en la actividad económica por el encarecimiento de las importaciones, han provocado que los pronósticos de crecimiento tanto para 2015, como para 2016 sean mucho más conservadores que los realizados a principios de 2014. Sin embargo, algunas de estas circunstancias han provocado un crecimiento más acelerado en la economía de Estados Unidos y han impulsado los mercados bursátiles de este país. Dado lo anterior, surgen algunas preguntas: ¿podrá el crecimiento de la economía de Estados Unidos influir en la reactivación de la economía mexicana?, ¿la depreciación del peso podrá provocar un aumento en las exportaciones no petroleras para compensar la baja en los ingresos derivados de la venta del hidrocarburo? ¿Se podrán desarrollar y ofrecer instrumentos financieros que ayuden a enfrentar las crisis de una mejor for-

ma?, entre muchas otras. Ante estas interrogantes, continúa el compromiso asumido de difundir los avances que se alcancen en finanzas, control y modelado de los riesgos financieros.

Se debe recordar que la crisis hipotecaria subprime surgió, entre otros factores, de un exceso de apalancamiento financiero, así como de una mala administración de riesgos que se asumieron mediante el uso de instrumentos derivados. Sin embargo, por otra parte, el apalancamiento puede ser motor para el crecimiento de las empresas, de ahí que su estudio resulta relevante en las finanzas.

En esta ocasión presentamos cuatro artículos que nos proponen distintas metodologías para abordar el estudio de los riesgos financieros. En primer lugar tenemos el artículo “Modelo binomial borroso, el valor de la firma apalancada y los efectos de la deuda” en donde Gastón Silverio Milanesi propone un modelo binomial borroso que mejora las estimaciones sobre los modelos Binomial tradicional y de Flujos de efectivo.

En el segundo artículo “Análisis del efecto apalancamiento en los rendimientos del IPC mediante una Cadena de Markov Monte Carlo: antes, durante y después de la crisis subprime”, Ignacio Francisco Hernández Ángeles, Francisco López-Herrera y Luis Fernando Hoyos Reyes, mediante un modelo de volatilidad estocástica asimétrica, estudian la persistencia de la volatilidad y encuentran que sólo se detecta presencia del efecto de apalancamiento en el último período analizado.

En el tercer artículo “Escenarios Monte Carlo para estrategias con expectativas de baja volatilidad cambiante mediante opciones europeas de compra y venta” Héctor Alonso Olivares Aguayo, Ambrosio Ortiz-Ramírez y Christian Bucio Pacheco, nos muestran cómo con estrategias de volatilidad construidas con los precios de las opciones simuladas se determina que la estrategia con corto es adecuada al realizar operaciones en el mercado mexicano (IPC) para plazos entre 45 y 60 días pero no para plazos de 90 días.

Por último, se presenta el artículo “Estimación restringida de la distribución hiperbólica generalizada de los tipos de cambio del Euro, Yen, Libra esterlina y Dólar canadiense (2000-2014)” de Martha Beatriz Mota Aragón y José Antonio Núñez Mora, en éste, se estudian las variaciones de los tipos de cambio de las monedas seleccionadas respecto al Dólar americano y se confirma, mediante dos pruebas de bondad de ajuste, que los resultados se ajustan razonablemente.

Como en otros números, el deseo de los/as editores/as es que los artículos aquí incluidos contribuyan al avance de las ciencias financieras, en espe-

cial, en aquellas áreas especializadas en riesgo y que éstos puedan resultar un referente en la toma de decisiones financieras.

Siempre es importante mencionar que esta publicación ha llegado a su quinto año ininterrumpido gracias a la colaboración de la comunidad especializada que aceptó la invitación para participar en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en las disciplinas objeto de esta revista, por ello, agradecemos el interés mostrado en este proyecto y se reitera la invitación para que los/as investigadores/as en estas áreas de conocimiento, continúen formando parte del espacio de colaboración que representa esta publicación.

Comité Editorial

Modelo binomial borroso, el valor de la firma apalancada y los efectos de la deuda

Fuzzy binomial model, the value of levered firms
and the debt effects

Gastón Silverio Milanesi*

Fecha de recepción: 22 de octubre de 2014

Fecha de aceptación: 12 de diciembre de 2014

* Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina,
Departamento Ciencias de la Administración
milanesi@uns.edu.ar

RESUMEN

El trabajo propone un modelo de valuación de empresa, binomial borroso proyectando y condicionando escenarios de continuidad o liquidación de la firma. El modelo se basa en la Teoría de Opciones Reales y la Lógica Borrosa para estimar el valor de la firma, que resulta de un balance explícito de las ventajas y riesgos de tomar deuda, convirtiéndose en una propuesta que supera al *Descuento de flujos de fondos (DFF)* y al *Modelo binomial de valoración de opciones* clásico. El trabajo se estructura de la siguiente manera: se introducen las debilidades que presenta el DFF y el modelo binomial. A continuación se desarrolla el marco teórico que sirve de base al modelo: el modelo binomial clásico, su versión borrosa y el modelo propuesto. Luego se ilustra mediante un caso de aplicación comparando los resultados obtenidos mediante el modelo de descuento de flujos de fondos (valor presente ajustado) con el modelo binomial tradicional. Finalmente se concluye sobre las ventajas del modelo propuesto.

Clasificación JEL: G13-G32

Palabras claves: Opciones Reales, Binomial, Borroso, Deuda, Valuación.

ABSTRACT

This paper proposes a fuzzy binomial model for company valuation, considering continuity or liquidation scenarios. The Real Option Theory and the Fuzzy Logic are used for estimating the value of the firm which results from an explicit trade-off between the advantages and the risk of acquiring debts, resulting in a better proposal than the Discounted Cash Flow (DCF) and the traditional real option valuation binomial model. The structure of this paper is as follows: First, the weaknesses of the DCF and the binomial models are introduced. Next, the theoretical framework that serves as a basis for the model is developed: The traditional Binomial Model, its fuzzy version and the proposed model. The discounting cash flow model (adjusted present value) and the traditional binomial model are applied to a set of data comparing the results obtained. Finally, the advantages of the proposed model are discussed.

JEL Classification: G13-G3

Keywords: Real Options, Binomial, Fuzzy, Debt, Valuation.

Introducción

La primer referencia explícita al valor teórico o intrínseco de una acción corresponde a las ideas de Williams (1938) quien lo define como el valor actual de la corriente esperada de dividendos (Williams, 1938).¹ La formalización y popularización del modelo correspondió a Duran (1957) y Gordon (1962), dando origen al conocido modelo de valuación de descuento de dividendos (MDD), (Duran, 1957); (Gordon, 1962).² Como una adaptación del MDD a la valoración de empresas, nace el modelo de Descuento de Flujos de Fondos (DFF) (Pratt y Grabowski, 2008).³ Éste se caracteriza por ser uno de los métodos de valoración de mayor difusión (Fornero, 2011) y su formulación original reconoce variantes,⁴ específicamente por

-
- 1 Además el autor establece las premisas vinculadas a proyecciones financieras y a una primera clasificación de empresas de crecimiento y valor. Se agrupan como empresas de valor aquellas cuya razón VM/VL (valor de mercado o valor en libros) es inferior a la unidad y generalmente contienen altos valores en la razón PER (precio-rendimientos), mientras que las firmas de crecimiento tienen un VM/VL superior a la unidad y bajos PER. La presente clasificación es empleada a menudo en la administración de carteras de acciones.
 - 2 El tradicional modelo de descuento de dividendos ha sufrido variantes en función a la progresión del crecimiento (aritmética-geométrica), las etapas de crecimiento (una sola etapa-múltiples etapas), el comportamiento de la corriente esperada de dividendos (determinístico-estocástico) (Hurley y Fabozzi, 1998); (Hurley y Johnson, 1998); (Hurley, 2013).
 - 3 Los modelos de valuación de empresas pueden clasificarse en: a) valuación por múltiplos y comparables donde se encuentra la razón precio-ganancia (PER); valor de mercado-valor de libros (VM/VL) el valor de la firma (enterprise value) o razón ganancias antes de intereses y después de impuestos-valor de mercado de la firma, entre otros múltiplos; b) valuación en base a flujos de fondos agrupando al modelo de descuento de dividendos (con sus variantes de crecimiento determinísticas y estocásticas) y descuento de flujos de fondos (flujos de fondos a capital (FFC); valor presente ajustado (VPA); costo promedio ponderado del capital (CPPC)); c) modelos basados en el concepto de beneficio económico como las ganancias residuales (residual income) y valor económico añadido (EVA®); d) teoría de pagos contingentes (opciones reales) (Fernández, 2012).
 - 4 El método de descuento de flujos de fondos puede clasificarse en tres grandes grupos: a) Costo promedio ponderado: el valor de la empresa surge de actualizar la corriente de flujos de fondos libres a la tasa del costo promedio ponderado del capital, éste incorpora los efectos del ahorro fiscal producto de la deuda; b) Valor presente ajustado: el valor de la firma surge de la suma del valor de la empresa sin deuda más

el tratamiento asignado a la estructura de capital y el efecto del escudo fiscal, para estimar el valor de la firma (Booth, 2007). Ahora bien, una de sus principales debilidades reside en que la valuación no considera los posibles estados contingentes a los que se encuentra expuesta la empresa (Dixit y Pindyck 1994). Por lo general el analista parte del supuesto de “*empresa en marcha o continuidad*” como único estado contingente para la proyección de los flujos de fondos. Esto tiene consecuencias respecto al efecto deuda sobre el valor de la firma: si el estado “*empresa en marcha*” supone que los flujos de fondos libres proyectados superan al flujo de fondos de la deuda, entonces el efecto del escudo fiscal en relación al valor de la firma es positivo y variable linealmente en función al nivel de endeudamiento. Existen otros estados que pueden poner en riesgo la continuidad de la empresa como consecuencia de la probable insuficiencia de los flujos de fondos para atender los servicios de deuda, como el “*estado de liquidación*”. Para valuar una firma en marcha conjugando estados de “*empresa en marcha*” o “*liquidación*” requiere de adecuar el DFF con herramientas analíticas propias de un modelo dinámico de valoración, aplicando la Teoría de Opciones Reales y el uso de modelos de valuación binomiales (Trigeorgis, 1997).

El objetivo del presente trabajo consiste en desarrollar, basado en la Teoría de Opciones Reales, un modelo binomial borroso de valuación de empresas condicionando su resultado⁵ a los posibles estados de “*continuidad*” o “*liquidación*” a los que se enfrenta la firma. En la literatura especializada existen modelos numéricos binomiales para determinar el valor de la firma considerando estados de “*continuidad-liquidación*” (Broadie y Kaya, 2007); (Milanesi, 2014 (a)), éstos aplican la lógica del clásico modelo binomial de valuación de opciones (Cox y Ross, 1976); (Cox, Ross y Rubinstein, 1979); (Rendleman y Bartter, 1979); (Jarrow y Rudd, 1982). El trabajo adapta los modelos binomiales borrosos de valoración, (Muzzioli y Torricelli, 2004);

el valor actual de los beneficios netos del endeudamiento; c) Flujos de capital: el valor de la firma surge de actualizar la corriente de flujos de fondos libres más el efecto de la deuda a la tasa del costo promedio ponderado del capital sin considerar el ahorro fiscal.

⁵ La decisión de financiamiento condiciona el valor estimado de los activos de la firma y el capital propio a la generación estocástica de flujo de fondos libres para atender los pagos originados por la deuda. La idea precedente es consistente con asimilar al valor del patrimonio neto de la empresa como una opción de compra a favor del propietario (Black y Scholes, 1973); suponiendo dos escenarios: (a) flujos de fondos libres superiores a los pagos de deuda, cuya consecuencia es la continuidad de la firma, (b) insuficiencia de flujos de fondos libres que deriva en la liquidación automática de la empresa y cancelación de los pasivos con los activos disponibles.

(Zdnek, 2010); (Shin-Yung y Cheng Fee, 2010); (Calle Fernández y Tamayo Bustamante, 2011); (Milanesi, 2013 (a) (Milanesi, 2014 (b), a las situaciones contingentes de suficiencia-insuficiencia de flujos de fondos libres para atender los pagos de deuda. Se supone la existencia de dos imperfecciones determinísticas de mercado vinculadas a las decisiones de financiamiento y con impacto en el valor de la empresa: impuestos corporativos a la renta y costos de liquidación.

El modelo binomial borroso propuesto describe y cuantifica la incertidumbre-ambigüedad utilizando la Teoría de Conjuntos Borrosos (*fuzzy set*) (Zadeh, 1965); (Dubois y Prade, 1980). El modelo propuesto constituye una importante mejora respecto del binomial tradicional ya que: *a*) explicita la gama de posibles valores intrínsecos de la firma a partir del rango de resultados bajo la forma de número borroso, *b*) captura el sesgo positivo de los pagos asimétricos borrosos correspondientes al activo (Carlsson y Fuller, 2003); para el caso bajo examen la opcionalidad está dada por la continuidad siempre que los flujos de fondos libres superen el valor de los servicios de deuda o su liquidación; *c*) presenta un valor medio borroso distinto al obtenido por el modelo binomial clásico, a partir de la media del número borroso y de considerar aspectos subjetivos del analista, mediante el uso de índices pesimismo-optimismo. Cabe destacar que si bien existe una rica literatura vinculada a los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma, éstas escapan del objetivo del presente trabajo.⁶

⁶ Desde los trabajos seminales (Modigliani, F. y Miller, M., 1958) (Modigliani, F y Miller M., 1963) se han desarrollado un conjunto de investigaciones tendientes a explicar los efectos de las decisiones de estructura de capital sobre el valor de la firma. Los trabajos avanzaron sobre la compatibilidad de los postulados y el enfoque del modelo CAPM (Capital Assets Pricing Model) (Rubinstein, 1973); la existencia de impuestos a la renta personal de los tenedores de bonos (Miller, D., 1977). Éstos no afectaron las clásicas proposiciones sobre el comportamiento de la estructura de capital y el valor de la firma. No obstante los estudios sobre la existencia de asimetría de información revisan los clásicos postulados. Éstos se pueden clasificar entre aquellos que estudian la existencia de asimetría de información antes y después del contrato. Antes del contrato constitutivo se tiene: (1) señalización: (a) rol de señalización de la deuda (Ross, 1977), (b) jerarquía financiera (Leland, H, y Pyle D, 1977) (Myers, S., 1984) (Myers, S. y Majluf, N., 1984) y (2) detección (Stiglitz, J. y Weiss, A., 1981). Después del contrato: (1) Problemas de Agencia; algunos de sus modelos: (a) costos de agencia de las acciones y las deudas (Jensen, M. y Meckling, W., 1976); (b) costos de agencia de los flujos de fondos libres (Jensen, M., 1986); (c) teoría de coacción de los stakeholders (Titman, 1984) y (2) enfoque del ciclo de vida de la firma (Berger, A. y Udell, G., 1998). Paralelamente se puede citar los estudios sobre la teoría de la estrategia corporativa y sus efectos en las decisiones de financiamiento de la firma (Brander, J. y Lewis T, 1986). Existen trabajos que resumen las diferentes teorías sobre la estructura de capital, asimetría de información y costos de agencia, (Copeland, T., Weston, F. y Shastri, K., 2004).

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la primera sección se desarrollan formalmente los modelos de valuación de opciones reales binomial tradicional y borroso. A continuación se desarrolla el conjunto de ecuaciones que integran el modelo binomial borroso condicionado a los estados de continuidad-liquidación propuesto. En la tercera sección se ilustra su funcionamiento empleando un caso hipotético sobre un contrato de concesión de explotación petrolera. Se analizan y comparan los resultados obtenidos de aplicar el tradicional método Valor Presente Ajustado, el modelo binomial y el binomial borroso. Finalmente se presentan las principales conclusiones.

1. El modelo binomial probabilístico y borroso

A continuación serán expuestos los principales conceptos y ecuaciones de los modelos de valoración de opciones binomial tradicional y borroso, ya que luego serán adaptados y utilizadas en el modelo propuesto en el presente trabajo.⁷

1.1 El modelo binomial probabilístico

El supuesto base del modelo binomial consiste en que éste se desarrolla en un ambiente neutral al riesgo. Asumir dicha neutralidad implica que la tasa ajustada por riesgo o de crecimiento, a la cual evoluciona el valor subyacente no afecta el valor de la opción. No obstante, uno de los principales determinantes del valor de la opción está dado por la volatilidad relacionada con los rendimientos del subyacente.⁸ En las opciones, la valuación neutral al riesgo requiere de la existencia de perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción y del activo subyacente, debido a que el único factor de riesgo que explica el valor de la opción está dado por las variaciones del precio correspondiente al subyacente. Por ejemplo, una cartera compuesta por una posición larga en la opción y la adecuada posición corta en el subyacente no debería tener ningún tipo de fluctuación aleatoria, ya que las variaciones en el precio de la acción (posición corta) se balancean con las variaciones en la opción de compra. El resultado de la estrategia precedente es una cartera

⁷ Su tratamiento y análisis comparativo se pueden encontrar en Milanesi (2013 (a)); Milanesi (2014 (b)).

⁸ En la práctica es más complejo estimar la tasa de crecimiento que la volatilidad (Wilmott, 2009).

que genera un rendimiento equivalente al tipo libre de riesgo y la clave para su construcción consistió en determinar la cantidad de acciones a ser vendidas en corto.⁹ Esta cantidad se conoce como “Delta” y se estima a partir de un modelo financiero.¹⁰

Trabajar con valuación neutral al riesgo permite valorar utilizando proyecciones o simulaciones de recorridos neutrales al riesgo del subyacente, con el fin de calcular los flujos de fondos correspondientes a la opción. Seguidamente son recursivamente actualizados a la fecha de valoración y finalmente, promediados con el fin de obtener el valor intrínseco del derivado. Por lo tanto, el valor promedio de los flujos de fondos esperados actualizados de la opción constituye el valor teórico de la opción.¹¹

Valorar las opciones reales correspondientes a una inversión utilizando el modelo binomial, requiere primero estimar los coeficientes de ascenso (u) y descenso (d). Estos parámetros son los insumos base para: proyectar el proceso estocástico binomial del subyacente, la rejilla binomial con los flujos de fondos de la opción y los coeficientes equivalentes ciertos empleados en el proceso recursivo de valuación. Los coeficientes u , d son cuantificados a

⁹ Se denominan ventas en corto a la operación de apalancamiento donde se obtienen en calidad de préstamo acciones que son vendidas en el mercado para hacerse de liquidez, con la condición de devolver el mismo activo en la fecha de vencimiento estipulada.

¹⁰ Como usualmente se necesita un modelo matemático para calcular la letra griega Delta y los modelos financieros son aproximaciones no réplicas exactas de la compleja realidad, la eliminación total teórica del riesgo es un ideal difícil de verificar en la práctica. Las principales limitaciones instrumentales de la valuación neutral al riesgo son: (a) requiere un continuo balance de la cobertura, ya que Delta continuamente (no discretamente) cambia, por ende se debe vender-comprar acciones para mantener la posición libre de riesgo; (b) se deben cumplir ciertos supuestos vinculados al proceso estocástico del activo (seguir un movimiento geométrico browniano, sin saltos y con volatilidad conocida y finita).

¹¹ El ejemplo ilustra la idea detrás de la valuación neutral al riesgo; una acción tiene un precio de mercado de \$10,55 creciendo en promedio el 12% por año. Su volatilidad es de 23% y la tasa libre de riesgo es de 4% anual. Se quiere valorar una opción de compra con precio de ejercicio de \$11 con fecha de expiración dentro de dos meses. La tasa de 15% de crecimiento es totalmente irrelevante ya que el crecimiento promedio de la acción no afecta el precio de la opción. En realidad para valorar el derivado se deben simular recorridos del subyacente desde la fecha de valuación al vencimiento de la opción con crecimiento al tipo libre de riesgo de 4% y volatilidad de 22%. Luego se debe calcular el flujo de fondos correspondientes a los recorridos proyectados, actualizar los flujos al presente y calcular su valor promedio para obtener el valor teórico de la opción (en el modelo binomial no se necesitan todas las simulaciones, se proyectan los recorridos a partir de coeficientes de ascenso y descenso, calculados desde la volatilidad, los flujos son actualizados al tipo libre de riesgo y ponderados por coeficientes equivalentes ciertos).

partir de la volatilidad (σ) precio, obtenida de una cartera de activos financieros gemelos o réplica de los flujos de fondos del proyecto o activo real (subyacente). El modelo supone que los flujos de fondos correspondientes al activo siguen un proceso estocástico geométrico browniano modelado en tiempo discreto. Las ecuaciones correspondientes a los coeficientes y el recorrido aleatorio en la rejilla binomial del subyacente son:

$$u = e^{(\sigma \times \sqrt{t})} \quad (1)$$

$$d = e^{(-\sigma \times \sqrt{t})} \quad (2)$$

$$V_t = [V_{t-1} \times u ; V_{t-1} \times d] \quad (3)$$

El valor expandido del proyecto, al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente menos el precio de ejercicio (X), $V_t = \max(V_t - X; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de compra financieras y $V_t = \max(X - V_t; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos ($p_u; p_d$). Los coeficientes y el valor actual se calculan con las siguientes expresiones:

$$p_u = \frac{(1+rf)-d}{u-d} \quad (4)$$

$$p_d = 1 - p_u \quad (5)$$

$$V_t = [V_{i(t+1)} \times p_u + V_{j(t+1)} \times p_d] \times e^{-rf} \quad (6)$$

Donde (rf) representa la tasa libre de riesgo o valor tiempo del dinero, $V_{i(t+1)}; V_{j(t+1)}$ el valor expandido en los nodos inmediatos posteriores.

La volatilidad actual o presente es el parámetro σ en la ecuación parcial diferencial de Black-Scholes (BS); (Black y Scholes, 1972); (Black y Scholes, 1973), siendo uno de los principales insumos del modelo BS y del binomial. La volatilidad es un dato imposible de obtener través de la observación di-

recta de una variable de mercado, consecuentemente debe ser calculada empleando algún modelo estadístico. Las medidas de volatilidad pueden clasificarse en función al instante espacial en el tiempo de los datos empleados en su estimación: (a) volatilidad histórica o realizada, obtenida de las observaciones de precios del subyacente; (b) volatilidad implícita, el número en la fórmula de BMS que hace coincidir el valor teórico con el precio actual de mercado; (c) volatilidad proyectada (a partir de la implícita) corresponde a un momento futuro del tiempo, (d) volatilidad de cobertura (*hedging volatility*) es el parámetro a introducir en la estimación de la letra griega delta con el fin de calcular las unidades de subyacente a vender en corto plazo, con propósitos de cobertura (Wilmott, 2009).

En los modelos de opciones reales, las tres primeras medidas de volatilidad sirven de insumo a los modelos de valoración, siendo menester que exista un activo financiero o cartera correlacionada con los flujos del proyecto. Para que ello ocurra los mercados deben ser completos, siendo éste uno de los supuestos básicos y principal debilidad en la Teoría de Opciones Reales (Wang y Halal, 2010). En el caso de que dicha condición no se cumpla, es decir, la no disponibilidad de activos financieros réplicas y mercados incompletos, alternativamente se aplica el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) (Copeland y Antikarov, 2001); (Copeland y Tufano, 2004)¹² para estimar la volatilidad.

No obstante donde el mercado no es completo, predominando la vaguedad o ambigüedad en los datos (por ejemplo, proyectos de inversión en contextos financieros poco desarrollados, valoración de estrategias de in-

¹² El enfoque supone que el precio de mercado al cual se negociaría el proyecto es su valor actual neto. Por lo tanto su volatilidad (σ) se infiere de la siguiente manera (Smith, 2005):

- a) Los flujos de fondos del proyecto se someten a simulación Monte Carlo. Por cada iteración se obtiene una tasa de rendimiento (z) producto del logaritmo del cociente entre el valor actual neto del proyecto en el primer periodo (VAN_1) y el momento inicial (VAN_0); $z = \ln \left(\frac{VAN_1}{VAN_0} - 1 \right)$.
- b) La simulación arroja como resultado una muestra de valores (z_i), por iteración. A partir de éste se obtiene el rendimiento medio ($\bar{z} = E(z)$) y su desvío estándar (s), correspondientes al momento 0 y 1.
- c) La volatilidad del proyecto es igual a $(\sigma) = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$. Si el intervalo de tiempo en el que se encuentran expresados los flujos de caja del proyecto es igual a 1, entonces $(\sigma) = s$.

versión en activos reales producto de innovaciones, empresas de base tecnológica o empresas cerradas sin comparables), los modelos de valoración de opciones bajo la lógica borrosa (*fuzzy*) constituyen un complemento y alternativa superadora a la metodología binomial tradicional, en la próxima sección se introducirán sus principales conceptos.

1.2 El modelo binomial borroso

La lógica borrosa aplicada a los modelos de opciones permite complementar el enfoque de valuación probabilística trabajando en un marco de posibilidades. Estos modelos articulan con técnicas como escenarios y simulación, permitiendo capturar el sesgo positivo en la distribución de los posibles valores de la inversión, rasgo característico de las opciones reales contenidas en el activo (valor del potencial beneficio de la inversión limitando el riesgo de las posibles pérdidas).

Igual que el modelo binomial probabilístico, se requiere estimar los coeficientes de ascenso y descenso, en este caso borrosos, dando un área de posibles valores (Ecuaciones 7 y 8).

$$\mathbf{u}' = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [e^{((1-CV)\times\sigma)\times\sqrt{t}}, e^{(\sigma\times\sqrt{t})}, e^{((1+CV)\times\sigma)\times\sqrt{t}}] \quad (7)$$

$$\mathbf{d}' = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3] = \left[\frac{1}{\mathbf{u}_1}, \frac{1}{\mathbf{u}_2}, \frac{1}{\mathbf{u}_3} \right] \quad (8)$$

Los valores extremos son $\mathbf{u}'=[u_1, u_2, u_3]$ (ascenso) y $\mathbf{d}'=[d_1, d_2, d_3]$ (descenso). Los escenarios representados son: u_1, d_1 menor amplitud de movimiento, u_3, d_3 mayor amplitud de movimiento y u_2, d_2 caso base. El resultado correspondiente al caso base (u_2, d_2) se estima con la volatilidad (σ) y el coeficiente de variación (CV), como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor de variación (Liao y Ho, 2010). El CV puede construirse a partir de opinión y juicios de los analistas. Si el mercado es incompleto, es decir no existen activos financieros réplica, la medida de volatilidad se obtiene aplicando el enfoque MAD.

Debido al sesgo positivo en la distribución de posibilidad triangular, el factor de ascenso genera mayor valor que el descenso, siendo el último el que los revierte a cero y el caso base arroja el mismo resultado que el obtenido en el modelo binomial. Con los tres resultados (ascenso-medio-descenso) se genera un número borroso triangular para cada uno de los nodos de la rejilla

binomial (Ecuación 9), siendo ésta la diferencia con el modelo binomial tradicional. En éste cada nodo está representado por el caso base (u_2, d_2) .

$$V'_t = [V'_{t-1} \times u'; V'_{t-1} \times d'] \quad (9)$$

Igual que en el modelo binomial, el valor expandido borroso del proyecto al vencimiento, es el máximo valor entre el activo subyacente borroso menos el precio de ejercicio (X), $VE'_t = \max(V'_t - X; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de compra financieras y $VE'_t = \max(X - V'_t; 0)$ para opciones reales asimilables a opciones de venta financieras. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos borrosos $(p'_u; p'_d)$.

$$p'_u = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} \quad (10)$$

$$p'_d = 1 - p'_u \quad (11)$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza el área de posibles valores correspondientes al activo real subyacente. Los pares de coeficientes equivalentes ciertos a ser utilizados en el proceso recursivo son combinados de la siguiente manera (Liao y Ho, 2010): (a) el escenario de menor amplitud combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de mínimo valor; (b) el escenario de mayor amplitud de movimiento combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de máximo.¹³ El caso base se resuelve de manera similar al tradicional modelo binomial. Así se logra la asimetría en la estimación de los posibles valores. Suponiendo un número borroso triangular con coeficientes de ascenso $u' = (1 \text{ menor}, 2$

¹³ El valor de las opciones reales es función directa de la volatilidad y los movimientos de ascenso y descenso están en función directa con ésta. Por lo tanto, a mayor amplitud de movimientos, mayor valor de la opción y viceversa. Esto conduce a suponer que escenarios optimistas (pesimistas) vinculados al proyecto se relacionan con volatilidad respecto del caso base mayor (menor) y con movimientos respecto del caso base de mayor (menor) amplitud.

base, 3 mayor), las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos a utilizar en el proceso recursivo quedan planteadas de la siguiente manera:

$$p'_u, p'_d = [(p'_{u3}, p'_{d1}); (p'_{u2}, p'_{d2}); (p'_{u1}, p'_{d3})] \quad (12)$$

El sesgo positivo, asimetría, correspondiente al número borroso (valor intrínseco de la opción) es capturado, reordenando los pares de coeficientes equivalentes ciertos (Ecuación 12). La justificación de la aseveración anterior obedece a que: la mayor (menor) ponderación es asignada a los valores del escenario de mayor (menor) amplitud. El coeficiente equivalente cierto borroso (p') es resultado del cociente entre la diferencia del factor de crecimiento al tipo sin riesgo ($1+r$), menos el movimiento de descenso (d') (numerador) y la diferencia entre el factor de ascenso y descenso ($u'-d'$) (denominador). Al ser el tipo sin riesgo constante, la variación es provocada por los valores de los movimientos. El coeficiente equivalente cierto obtenido del movimiento de mayor (menor) amplitud, presenta menor (mayor) numerador y mayor (menor) denominador. Por lo tanto es utilizado en la ponderación del ascenso para el valor de menor (mayor) amplitud y su complemento en el descenso de mayor (menor) amplitud (Ecuación 12). Luego, $u'_3 > u'_2 > u'_1 \rightarrow d'_3 < d'_2 < d'_1 \rightarrow p'_3 < p'_2 < p'_1 \rightarrow (1 - p'_3) > (1 - p'_2) > (1 - p'_1)$. El valor intrínseco expandido se determina recursivamente mediante la siguiente expresión:

$$V'_t = [V'_{i(t+1)} \times p'_u + V'_{j(t+1)} \times p'_d] \times e^{-rf} \quad (13)$$

Puede presentar confusión el modelo binomial borroso y las rejillas trinómicas. En el primero cada nodo de la rejilla binomial se compone por un número borroso triangular (V'_i). En cambio, la rejilla trinomial agrega al modelo binomial un nodo más, el intermedio, (Boyle, 1988); (Kamrad y Ritchken, 1991); (Derman, Kani y Chriss, 1996); (Mun, 2004); (Whaley, 2006).¹⁴

¹⁴ Las rejillas trinómicas proveen una representación alternativa y análoga al método binomial. Tiene tres parámetros de movimientos u , m , d y tres probabilidades de transición asociadas p_u , p_m y p_d . La manera de estimar los movimientos ascendentes y descendentes es similar a su contraparte binomial. La restricción propuesta por Boyle, (1988) y Kamrad y Ritchken, (1991) es suponer que el coeficiente de ascenso tiene la forma funcional $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ donde $\lambda \geq 1$, dándose la siguiente

Se podría pensar en un modelo trinomial borroso donde el nodo intermedio también sea un número borroso triangular añadiendo mayor granularidad al proceso estocástico proyectado del subyacente.

El valor central del número borroso triangular (Ecuación 13) se ve alterado por el sesgo hacia la derecha que tiene la distribución de posibles valores del proyecto (Carlsson, C-Fuller, R, 2001). Dado $VE' = [VE_1(\alpha); VE_3(\alpha)]$ número borroso y $\lambda \in [0,1]$, el valor actual neto esperado borroso (VA-NEB), $E(VE')$ se define:

$$E(V') = \int_0^1 [(1 - \lambda)V_1(\alpha) + \lambda V_3(\alpha)] d\alpha \quad (14)$$

Donde λ representa el índice ponderado de “pesimismo-optimismo” (Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006) es estimado mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{AD}{AI+AD} \quad (15)$$

Obtenido el índice se sustituye en la Ecuación 15 y se obtiene el valor actual neto esperado borroso de la opción (Ecuación 16):

$$E(V') = \frac{[(1-\lambda)V_1+V_2+\lambda V_3]}{2} \quad (16)$$

igualdad $p_u + p_d = 1/\lambda^2$. El coeficiente equivalente cierto intermedio es igual a $p_m = 1 - 1/\lambda^2$. Los coeficientes equivalentes ciertos de ascenso y descenso son: y $p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t}$ y $p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t}$. Si el coeficiente λ es igual a 1 el modelo colapsa a la modelo CRR, debido que la probabilidad de transición del nodo intermedio es igual a 0. Esto provoca la eliminación de los nodos del medio, el coeficiente de ascenso se resume a $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes quedan iguales al modelo binomial. El valor del coeficiente λ es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, mayor el valor del coeficiente mayor la probabilidad de movimientos laterales (Milanesi, 2013(b)).

2. El modelo numérico binomial borroso y el impacto de la deuda en el valor del proyecto. Los estados de continuidad-liquidación

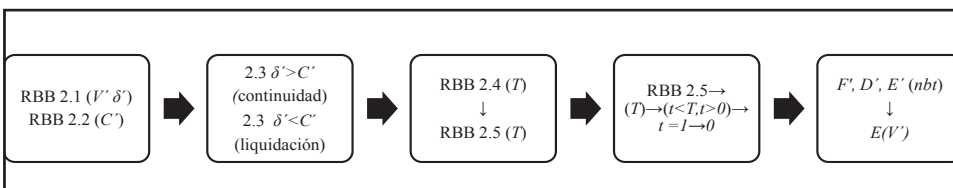
En la presente sección se desarrollará el modelo binomial borroso contemplando los posibles estados de continuidad y liquidación a la luz de la existencia de suficientes flujos de fondos libres para atender los servicios de la deuda. El modelo primero requiere de tres rejillas binomiales borrosas (RBB) con valores no condicionados a estados de continuidad-liquidación y una variable condicionante para estimar estados de continuidad-liquidación.

- a) RBB valor no apalancado de la firma y flujos de fondos (2.1).
- b) RBB flujo de fondos de la deuda (2.2).
- c) Flujo de fondos residual o del propietario (2.3).
- d) RBB valor de la firma, pasivo y capital propio no condicionada a escenarios continuidad-liquidación. (2.4).

Finalmente la cuarta rejilla que colecta los valores de las tres anteriores condicionada por el estado de continuidad-liquidación.

- e) RBB valor de los activos, pasivo y capital propio condicionada a escenarios de continuidad-liquidación (2.5). Esta última se divide en: ecuaciones para estimar valor en horizonte final (T); ecuaciones para estimar el valor en periodo intermedio ($t < T; t > 0$); ecuaciones para estimar el valor al inicio condicionado de la firma, pasivos y capital propio.

Figura 1. Secuencia correspondiente al método: V' valor borroso de la firma sin deuda, δ' flujos de fondos borrosos, C' intereses borrosos, F' valor de la firma con deuda y condicionado, D' valor de la deuda; E' valor capital propio condicionado; $E(V')$ VANEB



Fuente: Elaboración propia.

Las RBB a, b y la estimación de c, son el insumo para construir la RBB d. A partir de ésta se construye la RBB e, condicionada a c, y aplicando el conjunto de ecuaciones según el momento del tiempo (T ; $(t < T, t > 0)$, $t = 1 \rightarrow 0$). A continuación se desarrolla el conjunto de ecuaciones correspondientes a cada RBB.

2.1 RBB valor no apalancado de la firma y flujos de fondos

El modelo numérico propuesto se desarrolla a partir del binomial borroso, incorporando una tasa de crecimiento del valor de la empresa (a) que surge de la diferencia entre la tasa libre de riesgo (r) y la tasa de pago de flujos de fondos (q);

$$a = e^{(r-q)\Delta t} \quad (17)$$

Los coeficientes neutrales al riesgo borrosos (p') son obtenidos con la siguiente expresión

$$p_u' = \frac{a-d'}{u'-d'} \quad (18)$$

Los coeficientes u' , d' , p_u' , p_d' , se obtienen utilizando las ecuaciones 10, 11 y 12. Con los parámetros básicos se está en condiciones de proyectar las RBB. Cabe desatacar que aquí se derivan dos rejillas: a) RBB valor no apalancado de la firma y b) Obtenida a; RBB correspondientes a los flujos de fondos libres borrosos. Para estimar la RBB del valor no apalancado de la firma se toma como punto de partida el valor inicial de los activos de la firma sin apalancamiento (V_u),¹⁵ aplicando la ecuación 13. Obtenida ésta, se construye la RBB correspondiente al flujo de fondos libre borroso (δ_t') de la empresa. Para ello por cada nodo, se estima el flujo de fondos libres borroso como el producto entre el valor de la firma obtenida en la RBB anterior (ecuación 13); y la tasa de pago después de impuestos ($q = q_{at} \times (1 - \tau)$); siendo la expresión $V_i' \times q$. Alternativamente el flujo de fondos borroso puede estimarse de acuerdo a la siguiente expresión;

$$\delta_t' = V_i' e^{q\Delta t} - V_i' \quad (19)$$

¹⁵ Valor de los activos operativos totales de la empresa independientemente de su estructura de capital en el momento $t=0$.

2.2 RBB flujo de deuda

Para estimar la presente rejilla se calcula en cada nodo el flujo de la deuda. Se supone que la empresa emite un bono con pagos periódicos borrosos (C_t') compuesto por intereses y cancelación del capital (P) al final de la vida del bono. El valor del capital es determinístico, los intereses se suponen borrosos, explicitados por la tasa i' .¹⁶

$$C_t' = i' \times P \quad (20)$$

En un modelo con impuestos a la renta, el flujo de la deuda queda expresado como: $(1 - \tau)C_t'$. Siendo τ la tasa de impuesto a las ganancias, $\Delta'\tau = i' \times \tau$ el valor borroso correspondiente al ahorro fiscal.

2.3 Flujo de fondo residual o para el propietario

El flujo de fondo borroso residual o para el propietario surge por diferencia entre el flujo fondos libres borroso (RBB 2.1) y el flujo de fondos borroso de la deuda $\delta_t' - C_t'$ (RBB 2.2). Ésta es la variable condicionante de continuidad o liquidación, a saber: a) $\delta_t' > C_t'$ continuidad; b) $\delta_t' < C_t'$ procede a la cancelación de la deuda y liquidación del patrimonio neto. Estos escenarios son los que definen los valores finales del capital propio en T (RBB 2.4) y los que condicionan para los diferentes momentos (T ; ($t < T, t > 0$), $t = 1 \rightarrow 0$) los valores de la empresa, deuda y capital propio en la RBB 2.5.

2.4 RBB valor del capital propio, deuda y valor de los activos no condicionados a estados continuidad-liquidación

Aquí se estiman los valores borrosos *no condicionados* correspondientes al capital propio (E'), deuda (D') y valor total de la firma (F'). El valor final (T) correspondiente a capital propio (E'_T) surge de la suma entre el valor final de la firma sin deuda (ecuación 13) (RBB 2.1), más el valor de los flujos de fondos libres (ecuación 19) (RBB 2.1); menos el valor del flujo de fondos de la deuda (ecuación 20) (RBB 2.2).¹⁷ La expresión es:

$$E'_{T,(u',d')} = V'_{T,(u',d')} + \delta'_{T,(u',d')} - C'_{T,(u',d')} \cdot$$

¹⁶ Se supone un valor i y extremos mínimo y máximos $i-\alpha$; $i+\beta$.

¹⁷ Esto es así en tanto se active la condición de continuidad de la RBB 2.5, punto a.1; caso contrario los valores son los correspondientes a la RBB 2.5, punto a.2.

Definidos los valores borrosos en T , se obtienen recursivamente los valores intermedios no condicionados por los estados de continuación-liquidación de la firma mediante las siguientes ecuaciones;

$$E' = e^{-r\Delta t}(p'E'_{u'} + 1 - p'E'_{d'}) \quad (21)$$

$$D' = e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) \quad (22)$$

$$F' = e^{-r\Delta t}(p'F'_{u'} + 1 - p'F'_{d'}) \quad (23)$$

2.5 RBB valor del capital propio, deuda y valor de los activos **condicionados** a escenarios de insolvencia o continuidad

A continuación, se desarrollan los pasos para estimar el valor total de la firma con deuda, deuda y capital de los propietarios condicionados a la suficiencia de flujos de fondos libres para atender pago de deuda y consecuentemente a la continuidad o liquidación de la empresa. Existen dos estados contingentes que condicionan a nodos borrosos proyectados conforme fue indicado en 2.3:¹⁸ a) $\delta'_t > C'_t$ continuidad con repago de deuda, b) $\delta'_t < C'_t$ insuficiencia de fondos procediéndose a cancelar pasivo y liquidar patrimonio neto. Para ello es menester segregar el periodo total de proyección en tres momentos: (a) horizonte final de proyección de la rejilla (T); (b) nodos intermedios ($0 < t < T$) y (c) momento inicial ($t=1 \rightarrow 0$):

(a) Conjunto de ecuaciones para estimar los valores condicionados en el horizonte final (T):

a.1) Continuidad de la empresa (T): En este caso el valor borroso de la firma más el flujo de fondos libres borroso es superior o igual al pago de la deuda (interés borroso más capital). La expresión que condiciona y activa

¹⁸ Al considerar los estados contingentes liquidación-continuidad sobre los nodos borrosos posteriores, el valor de los nodos borrosos precedentes se condiciona por los estados contingentes indicados.

el estado de continuidad es: $V'_T + \delta'_T \geq (1 - \tau)C'_t + P$. Verificado dicho estado, el conjunto de ecuaciones para estimar los valores en T son:

$$E'_T = V'_T + \delta'_T - (1 - \tau)C'_t - P \quad (24)$$

$$D'_T = C'_t + P \quad (25)$$

$$F'_T = V'_T + \delta'_T + \Delta't \quad (26)$$

a.2) Liquidación (T): El valor de la firma borroso más el flujo de fondos libres borroso es insuficiente para el pago de la deuda (interés más capital). La expresión que condiciona y activa el estado de liquidación es $V'_T + \delta'_T < (1 - \tau)C'\Delta't + P$. En este caso se suponen costos de transacción producto de la liquidación, representados por α . Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones para estimar el valor de liquidación en T es:

$$E'_T = 0 \quad (27)$$

$$D'_T = (1 - \alpha)(V'_T + \delta'_T) \quad (28)$$

$$F'_T = (1 - \alpha)(V'_T + \delta'_T) \quad (29)$$

(b) Conjunto de ecuaciones para estimar el valor de los nodos intermedios condicionados ($t < T$; $t > 0$):

Para estimar el valor correspondiente a los nodos borrosos condicionados a los estados de continuación-liquidación se toma como punto de partida al valor del valor del patrimonio neto borroso no condicionado (ecuación 21) (RBB 2.4) denotado como $\tilde{E}' = e^{-r\Delta t}(p'E'_u + 1 - p'E'_d)$. Los posibles escenarios son:

b.1) Continuidad de la empresa ($t < T$; $t \geq I$): No existe riesgo de liquidación de la firma, en tanto la suma de flujo de fondos libres borroso y en cuanto

el valor presente del patrimonio neto borroso sea suficiente para atender los servicios corrientes borrosos de la deuda. La expresión que condiciona y activa el estado de continuidad es $\tilde{E}'_t + \delta'_t \geq (1 - \tau)C'\Delta't$. Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones utilizadas para valorar los nodos intermedios son:

$$E'_t = \tilde{E}'_t + \delta'_t - (1 - \tau)C'_t \quad (30)$$

$$D'_t = C'_t + e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) \quad (31)$$

$$F'_t = \delta'_t + \Delta't + e^{-r\Delta t}(p'F'_{u'} + 1 - p'F'_{d'}) \quad (32)$$

b.2) Liquidación ($t < T$; $t > 0$): Se produce la liquidación de la firma si la suma del flujo de fondos libres borrosos más el valor presente del patrimonio neto borroso es insuficiente para atender los servicios corrientes de la deuda. La expresión que condiciona y activa el estado de liquidación es $\tilde{E}'_t + \delta'_t < (1 - \tau)C'\Delta't$. Verificado dicho estado el conjunto de ecuaciones es:

$$E'_t = 0 \quad (33)$$

$$D'_t = (1 - \alpha)(V'_t + \delta'_t) \quad (34)$$

$$F'_t = (1 - \alpha)(V'_t + \delta'_t) \quad (35)$$

(c) Conjunto de ecuaciones para estimar el valor inicial condicionado ($t=1 \rightarrow 0$):

Finalmente el valor intrínseco, en $t=0$ se obtiene una vez calculados los valores finales (T , punto $(a1, a2)$) y los valores intermedios ($t < T$; $t >$ punto $(b1, b2)$) condicionados por los escenarios (continuación-liquidación) de los

nodos borrosos precedentes. En esta etapa simplemente se deben estimar recursivamente los valores iniciales a partir el período de tiempo $t=1$ hasta $t=0$; ($t=1 \rightarrow 0$). El conjunto de ecuaciones es:

$$E'_0 = e^{-rt}(p'(E'_{u'} + \delta'_{tu'} - (1 - \tau)C'_t) + 1 - p'(E'_{d'} + \delta'_{td'} - (1 - \tau)C'_t)) \quad (36)$$

$$D'_0 = e^{-r\Delta t}(p'D'_{u'} + 1 - p'D'_{d'}) - \Delta t \quad (37)$$

$$F'_0 = e^{-r\Delta t}(p'(F'_{u'} + \delta'_{tu'}) + 1 - p'(F'_{d'} + \delta'_{td'})) \quad (38)$$

El resultado obtenido está dado por los valores (E'_0, D'_0, F'_0) . Éstos representan las expresiones borrosas correspondientes a los valores mínimo, máximo y más probable respectivamente del número borroso triangular para el valor de la firma apalancada, deuda y capital propio. Luego resta estimar el valor esperado medio borroso de la firma a partir de las ecuaciones 14, 15 y 16.

3. Desarrollo de un caso de aplicación: modelo binomial borroso y los estados de continuidad-liquidación

A continuación se procede a ilustrar el funcionamiento del modelo empleando como ejemplo un caso adaptado por Smith (2005). Se pretende determinar el valor de un proyecto de inversión de un contrato de concesión para la explotación de un yacimiento de petróleo por un período de 3 años. Los estudios técnicos y de factibilidad indican que las reservas totales son de cien millones (100 millones) de barriles. Al inicio se espera producir diez millones (10 millones) de barriles proyectándose una tasa de decrecimiento de la producción de 15% anual y una tendencia al aumento del precio del crudo a razón de un 3% anual partiendo de un precio en $t=0$ de US\$69 el barril.¹⁹ Los costos variables crecen a razón de 2% anual y

¹⁹ Western Texas Intermediate precio al 1/12/2014 <http://finance.yahoo.com/q?s=WTI>

representan 80% del precio de venta. Los costos fijos ascienden a US\$10 millones. El proyecto se financia con una estructura de capital integrada por 70% de deuda y 30% de capital propio. Las magnitudes de los componentes de la mezcla son determinados sobre el valor del proyecto desapalancado (V_u). Este último determinado por el método del Valor Actual Ajustado (VAA) (APV, *Adjusted Present Value*) como variante del método de descuento de flujos de fondos, con la siguiente expresión

$$V_l = V_u + ED \quad (39)$$

En la ecuación anterior el VAA o valor de la firma apalancada (V_l) es la suma del valor de la empresa sin deuda (V_u) más los efectos producidos por ésta. En este caso se consideran solamente los efectos derivados del ahorro fiscal de intereses, en donde la alícuota del impuesto t es del 35%. V_u se estima con la siguiente expresión:

$$V_u = \sum_{t=1}^n \frac{FFL_t}{(1+k_u)^t} \quad (40)$$

Siendo, FFL_t los flujos de fondos del proyecto y k_u la tasa del costo de capital desapalancado. Esta última se obtiene quitando el efecto de la estructura de capital de la tasa de costo de capital propio k_e (Fernández, P., 2012). Suponiendo que no existe riesgo en la tasa de la deuda la expresión utilizada es la siguiente;

$$\beta_u = \frac{\beta_l}{1+(1-\tau)W^d/W^e} \quad (41)$$

La tasa k_u es determinada aplicando el modelo CAPM (*Capital Assets Pricing Model*). El efecto del endeudamiento (ED) sobre el valor de la firma surge del ahorro fiscal producto del endeudamiento, (txC). La deuda se estructura con un bono tipo americano devengando cupón del 5% sobre el 70% de V_u , con rescate de capital al final del tercer año.

En la Tabla 1 se presentan los datos correspondientes a las proyecciones del flujo de fondos libres, valor actual de los flujos de fondos y valor de la firma sin deuda (ecuación 40); este último asciende a US\$455, 40 millones.

Tabla 1. Proyecciones de variables, flujos de fondos libres y estimación del valor actual de la firma sin deuda

Proyecciones	0	1	2	3
Reservas de petróleo (millones)	100,00	90,00	80,00	71,50
Nivel de producción (millones)	10,00	10,00	8,50	7,23
Tasa de costo variable operativo (millones) por millón	\$ 55,20	\$ 56,30	\$ 57,43	\$ 58,58
Precio de crudo (por barril)	\$ 69,00	\$ 71,07	\$ 73,20	\$ 75,40
Ingresos por ventas (millones)		\$ 710,07	\$ 622,02	\$ 544,08
Costos de producción (millones)		\$ -563,00	\$ -488,02	\$ -423,02
Costo Fijo (millones)		\$ -10,00	\$ -10,0	\$ -10,00
Flujo de Fondos Libres después de impuestos (millones)		\$ 137,07	\$ 124,1	\$ 111,5
Valor Actual Flujos de Fondos (VA@ku)		\$ 112,05	\$ 82,19	\$ 60,14
Valor del Proyecto sin deuda Vu (VA@ku)	\$ 254,38			

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 2 presenta los insumos utilizados para la determinación de la tasa de costo del capital sin deuda, a partir de la ecuación 41, que asciende a 10,92%.²⁰

El valor inicial del proyecto sin deuda (Vu) asciende a US\$254,38 millones, siendo el valor nominal de la deuda emitida (D) de 70% del valor indicado.

²⁰ Se supone que el proyecto de inversión en cuestión genera flujos de fondos correlacionados perfectamente con el precio del petróleo, cuya cotización y comercialización global se expresa en dólares estadounidenses. Los datos utilizados para estimar las variables que integran la tasa de costo de capital fueron obtenidos del sitio web de Aswath Damodaran: <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>. Los coeficientes betas apalancados y estructura de capital sectorial (oil/gas production and exploration) fueron obtenidos del cuadro "levered and unlevered betas by sector". El adicional por riesgo de mercado en dólares para Argentina surge del cuadro "Country default spread and risk premium-Risk premium for other markets: Total Equity Risk Premium.". Finalmente la tasa libre de riesgo de Estados Unidos 10 Y T-bonds media aritmética 2004-2014 del cuadro "Annual Returns on Stock, T.Bonds and T.Bills: 1928 - Current"

Tabla 2. Variables utilizadas para calcular la tasa de costo de capital sin deuda

Tasa de costo de capital	Valores
Tasa libre de riesgo (1) ver nota 20	4,27%
Rendimiento esperado de mercado (2) ver nota 20	26,41%
β apalancado observado comparable ver nota 20	1,68
Estructura de capital empresa comparable (W_d/W_e) ver nota 20	1,54
β desapalancado del proyecto (3) (ec.41)	0,83958021
K_u del proyecto $(1)+((2)-(1))*(3)$	22,86%

(Fuente sitio web de Aswath Damodaran:
<http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>)Fuente: Elaboración propia.

Consecuentemente D asciende a US\$178,06 millones con un cupón de 5%. El modelo numérico binomial borroso propuesto permite estimar un valor condicionado a los escenarios de continuidad-liquidación producto del apalancamiento financiero de la firma. Las variables de entrada del modelo binomial se exponen en la Tabla 3:

La tasa de pago de flujos de fondos (q) es del 5% y el ratio de apalancamiento D/V de 70%. La ambigüedad o incertidumbre del modelo es explicada en dos variables: a) los posibles valores del proyecto y flujos de fondos para los nodos borrosos, $(V'_i; \delta'_t)$ ecuaciones 13 y 19 b) la tasa de interés del préstamo (i') ecuación 20. Conforme se expuso en el punto 2.3, la volatilidad se determina aplicando el enfoque MAD (Copeland, T- Antikarov, V, 2001).

Tabla 3. Variables iniciales

V_0 (firma sin deuda)	\$ 254,38
σ (desvío flujos)	30%
q (tasa pago flujos)	5%
r (tasa libre de riesgo)	6,00%
D (principal deuda)	\$ 178,06
i (tasa cupón deuda)	5%
t (tasa marginal impuestos)	35%
α (costos de liquidación)	1%

Fuente: Elaboración propia.

El intervalo para la construcción del número borroso triangular mínimo y máximo valor con el coeficiente de variación (CV) (Liao y Ho, 2010). La volatilidad según el enfoque MAD, asciende a 30% anual y la tasa de interés de la deuda actual es de 5%. El CV (coeficiente de variación) para volatilidad es de 15% y 30%; para la tasa de interés de la deuda conforme se expone en la Tabla 4;

Los valores de las tablas precedentes permiten estimar los coeficientes de ascenso, descenso y equivalentes ciertos borrosos (ecuaciones 7, 8, 10 y 11). En la tercera sección de la Tabla 5 se encuentran los pares de coeficientes equivalentes ciertos correspondientes a cada escenario (ecuación 12).

Tabla 4. Volatilidad, interés y extremos NBT

Extremos NBT (σ', i')	Fuzzy σ	CV (15%)	Fuzzy i	CV (30)
a, $\varepsilon(1)$ (base)	Σ	30,00%	i	5,00%
a- α , $\varepsilon(0)$ (extremo negativo)	$(1-CV)*\sigma$	25,50%	$(1-CV)*i$	6,50%
a+ β , $\varepsilon(0)$ (extremo positivo)	$(1+CV)*\sigma$	34,50%	$(1+CV)*i$	3,50%

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Parámetros del modelo binomial borroso

Ascenso-Descenso	u'		d'	
Pesimista	$u'1$	1,290461621	$d'1$	0,774916498
Base	$u'2$	1,349858808	$d'2$	0,740818221
Optimista	$u'3$	1,41198992	$d'3$	0,708220353
Equivalentes ciertos borrosos	p'		$1-p'$	
Pesimista	$p'1$	0,456087467	$1-p'1$	0,543912533
Base	$p'2$	0,442059121	$1-p'2$	0,557940879
Optimista	$p'3$	0,428875911	$1-p'3$	0,571124089
Combinaciones coeficientes	p'		$1-p'$	
Pesimista	$p'3$	0,428875911	$1-p'1$	0,543912533
Base	$p'2$	0,442059121	$1-p'2$	0,557940879
Optimista	$p'1$	0,456087467	$1-p'3$	0,571124089

Fuente: Elaboración propia.

Los datos de las Tablas 4 y 5 permiten proyectar las rejillas para calcular el valor condicionado a escenarios de continuidad-liquidación. La secuencia de cálculo es la siguiente:

a) *Rejilla binomial proyección V' , δ' , C' (RBB 2.1, 2,2):* Para su construcción se utilizan las ecuaciones 13, 19 y 20. Cada nodo de la RBB expone: Valor de firma (V') (primer fila), flujo de fondos libres netos de impuestos (δ') (segunda fila) y los pagos de deuda sin considerar los escudos fiscales (C') (tercera fila). El valor que arroja el modelo binomial tradicional el cual coincide con el valor del NBT a, $\varepsilon(1)$. En el extremo superior de cada nodo se ordena el valor mínimo; $a-\alpha$, $\varepsilon(0)$ y en el inferior el valor máximo; $a+\beta$, $\varepsilon(0)$.

b) *Rejilla binomial proyección (E'), (D'), (F') no condicionados (RBB 2.4):* como segundo paso se debe proyectar la RBB para estimar el capital propio (E'); deuda (D') y valor total de los activos operativos (F') no condicionados por la probabilidad de liquidación de la firma en los nodos intermedios ($t < T$), (ecuaciones 21 a 23).

Solamente los nodos finales borrosos ($T=3$) condicionan el valor a los estados de continuidad-liquidación, los nodos intermedios e inicial son calculados recursivamente por lo tanto no se condicionan con los posibles estados contingentes que pueda acontecer en $T < 3$.

c) *Rejilla binomial proyección (E'), (D'), (F') condicionados (RBB 2.5):* Obtenidos las RBB expuestas en las Tablas 6 y 7, a continuación son proyectados los valores intermedios ($T < t$; $t > 0$) e inicial ($t=1 \rightarrow 0$) condicionados a estados de continuidad (solvencia)-liquidación (insolvencia). El conjunto de ecuaciones a utilizar es el siguiente: (a) nodos finales ($t=T$) (ecuaciones 24 a 29); (b) nodos intermedios ($T < t$; $t > 0$) (ecuaciones 30 a 35); (c) nodo inicial valor actual ($t=1 \rightarrow 0$) (ecuaciones 36 a 38);

Como resultado se obtiene el valor teórico de la firma condicionado por los posibles estados. En efecto para $t=0$ se expone los valores teóricos borroso de la empresa (F') deuda (D') y capital propio (E'). El valor actual medio esperado borroso (ecuaciones 14, 15 y 16) correspondiente a los valores precedentes se presenta en la última columna de la Tabla 9.

Con el fin de comparar las diferencias entre el método de valor actual ajustado (ecuación 39), binomial tradicional y binomial borroso, la Tabla 10 expone los valores obtenidos.

Tabla 6. Rejilla binomial borrosa valores V' (valor de la firma sin deuda); δ' (flujos de fondos libres después de impuestos); C' (flujo de la deuda antes de impuestos)

0	1	2	3	
\$ 254,38	\$ 328,26	\$ 423,61	\$ 546,65	V
	\$ 343,37	\$ 463,51	\$ 625,67	V
	\$ 359,18	\$ 507,16	\$ 716,10	V
	\$ 16,83	\$ 21,72	\$ 28,03	δ
	\$ 17,61	\$ 23,76	\$ 32,08	δ
	\$ 18,42	\$ 26,00	\$ 36,72	δ
	\$ 11,57	\$ 11,57	\$ 11,57	C
	\$ 8,90	\$ 8,90	\$ 8,90	C
	\$ 6,23	\$ 6,23	\$ 6,23	C
	\$ 197,12	\$ 254,38	\$ 328,26	V
	\$ 188,45	\$ 254,38	\$ 343,37	V
	\$ 180,15	\$ 254,38	\$ 359,18	V
	\$ 10,11	\$ 13,04	\$ 16,83	δ
	\$ 9,66	\$ 13,04	\$ 17,61	δ
	\$ 9,24	\$ 13,04	\$ 18,42	δ
	\$ 11,57	\$ 11,57	\$ 11,57	C
	\$ 8,90	\$ 8,90	\$ 8,90	C
	\$ 6,23	\$ 6,23	\$ 6,23	C
		\$ 152,75	\$ 197,12	V
		\$ 139,61	\$ 188,45	V
		\$ 127,59	\$ 180,15	V
		\$ 7,83	\$ 10,11	δ
		\$ 7,16	\$ 9,66	δ
		\$ 6,54	\$ 9,24	δ
		\$ 11,57	\$ 11,57	C
		\$ 8,90	\$ 8,90	C
		\$ 6,23	\$ 6,23	C
			\$ 118,37	V
			\$ 103,42	V
			\$ 90,36	V
			\$ 6,07	δ
			\$ 5,30	δ
			\$ 4,63	δ
			\$ 11,57	C
			\$ 8,90	C
			\$ 6,23	C

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Rejilla binomial sin condicionar valores en nodos intermedios E´ (valor patrimonio neto); D´ (valor de la deuda); F´ (valor de la firma apalancada)

0	1	2	3	
\$ 72,51	\$ 135,16	\$ 238,86	\$ 389,10	<i>E</i>
\$ 87,50	\$ 163,57	\$ 290,36	\$ 473,89	
\$ 106,13	\$ 197,72	\$ 350,27	\$ 570,70	
\$ 136,89	\$ 159,16	\$ 173,73	\$ 189,64	<i>D</i>
\$ 144,66	\$ 165,82	\$ 176,08	\$ 186,97	
\$ 152,81	\$ 172,47	\$ 178,29	\$ 184,30	
\$ 209,39	\$ 294,32	\$ 412,60	\$ 578,73	<i>F</i>
\$ 232,16	\$ 329,39	\$ 466,44	\$ 660,86	
\$ 258,94	\$ 370,19	\$ 528,56	\$ 754,99	
	\$ 34,98	\$ 75,51	\$ 159,51	<i>E</i>
	\$ 36,94	\$ 81,23	\$ 177,13	
	\$ 39,43	\$ 87,88	\$ 195,48	
	\$ 141,73	\$ 173,73	\$ 189,64	<i>D</i>
	\$ 143,92	\$ 176,08	\$ 186,97	
	\$ 146,36	\$ 178,29	\$ 184,30	
	\$ 176,71	\$ 249,24	\$ 349,15	<i>F</i>
	\$ 180,86	\$ 257,31	\$ 364,09	
	\$ 185,79	\$ 266,16	\$ 379,77	
		\$ 8,74	\$ 21,64	<i>E</i>
		\$ 5,94	\$ 14,26	
		\$ 3,13	\$ 7,28	
		\$ 139,70	\$ 189,64	<i>D</i>
		\$ 134,40	\$ 186,97	
		\$ 129,74	\$ 184,30	
	\$ 148,44	\$ 211,28	<i>F</i>	
	\$ 140,33	\$ 201,23		
	\$ 132,87	\$ 191,57		
	\$ -	\$ -	<i>E</i>	
	\$ -	\$ -		
	\$ -	\$ -		
	\$ 123,19	\$ 107,64	<i>D</i>	
	\$ 94,04	\$ 94,04		
	\$ 123,19	\$ 107,64		
	\$ 123,19	\$ 107,64	<i>F</i>	
	\$ 107,64	\$ 94,04		
	\$ 94,04	\$ 94,04		

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Rejilla binomial borrosa condicionando valores en nodos intermedios E' (valor patrimonio neto); D' (valor de la deuda); F' (valor de la firma apalancada)

$t=0$	$1 < t < T$			T	
0	1	2	3		
<i>E</i>	\$ 82,67 \$ 101,42 \$ 124,05	\$ 144,46 \$ 175,38 \$ 212,08	\$ 253,06 \$ 308,34 \$ 372,22	\$ 389,10 \$ 473,89 \$ 570,70	<i>E</i>
<i>D</i>	\$ 154,04 \$ 158,31 \$ 162,68	\$ 170,74 \$ 174,73 \$ 178,71	\$ 185,31 \$ 184,98 \$ 184,52	\$ 189,64 \$ 186,97 \$ 184,30	<i>D</i>
<i>F</i>	\$ 237,05 \$ 259,91 \$ 307,60	\$ 315,20 \$ 350,11 \$ 390,79	\$ 438,37 \$ 493,32 \$ 556,74	\$ 578,73 \$ 660,86 \$ 754,99	<i>F</i>
		\$ 37,56 \$ 40,81 \$ 44,61	\$ 81,03 \$ 88,49 \$ 96,87	\$ 159,51 \$ 177,13 \$ 195,48	<i>E</i>
		\$ 153,31 \$ 152,83 \$ 152,60	\$ 185,31 \$ 184,98 \$ 184,52	\$ 189,64 \$ 186,97 \$ 184,30	<i>D</i>
		\$ 190,86 \$ 193,64 \$ 197,21	\$ 266,34 \$ 273,47 \$ 281,39	\$ 349,15 \$ 364,09 \$ 379,77	<i>F</i>
			\$ 9,05 \$ 7,31 \$ 5,62	\$ 21,64 \$ 14,26 \$ 7,28	<i>E</i>
			\$ 151,27 \$ 143,30 \$ 135,98	\$ 189,64 \$ 186,97 \$ 184,30	<i>D</i>
			\$ 160,32 \$ 150,60 \$ 141,59	\$ 211,28 \$ 201,23 \$ 191,57	<i>F</i>
			\$ - \$ - \$ -	\$ - \$ - \$ -	<i>E</i>
			\$ 123,19 \$ 107,64 \$ 94,04	\$ 123,19 \$ 107,64 \$ 94,04	<i>D</i>
			\$ 123,19 \$ 107,64 \$ 94,04	\$ 123,19 \$ 107,64 \$ 94,04	<i>F</i>

Fuente: Elaboración propia.

El método del Valor Actual Ajustado (VAA) (ecuación 39) arroja un valor de US\$316,70 millones. Este surge de la suma entre el valor de la firma sin deuda y no condicionado a escenarios de solvencia-liquidación (V_u); US\$254,38 millones más el valor del ahorro fiscal (ED), US\$62,31 millones. La diferencia de US\$56,79 millones entre VAA –binomial y de US\$44,37 con el binomial borroso se explica debido a que los modelos binomiales capturan el impacto negativo en el valor de la firma, producto de la probabilidad de liquidación frente a un estado de insuficiencia de los flujos de fondos libres para atender los pagos de la deuda, situación no contemplada por el valor actual ajustado. La diferencia entre el modelo binomial borroso y el tradicional de US\$12,42 millones a favor del primero surge del sesgo positivo correspondiente al NBT del valor. Esta asimetría positiva se pone de manifiesto mediante el coeficiente λ de 0,6759, conforme fue calculado en la Tabla 9.

Tabla 9. Valor actual esperado borroso E' (valor patrimonio neto); D' (valor de la deuda); F' (valor de la firma apalancada)

Valores	$C1$	$C2$	$C3$	$VAEB$
E'	\$ 82,67	\$ 101,42	\$ 124,05	\$ 106,03
D'	\$ 154,04	\$ 158,31	\$ 162,68	\$ 159,10
F'	\$ 237,05	\$ 259,91	\$ 307,60	\$ 272,33
$\lambda/1-\lambda$	0,32401		0,67599	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Valor de la empresa (V) Valor Presenta Ajustado, Binomial, Binomial Borroso

Modelo	V	VPA	Binomial	Binomial F
V Binomial	\$ 259,91	\$ 56,79	-	\$ 12,42
V Fuzzy	\$ 272,33	\$ 44,37	\$ -12,42	\$ -44,37
$VMMAPV$	\$ 316,70	-	\$ -56,79	-

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

El modelo propuesto en el presente trabajo conjuga las características del binomial borroso y el modelo numérico para determinar un valor que contemple los estados de continuidad-liquidación de la firma apalancada (Broadie y Kaya, 2007); (Milanesi, 2014 (a)). Como resultado, arroja un valor de la empresa en marcha condicionado por los posibles estados de solvencia-insolvencia producto de su grado de endeudamiento y generación de flujos de fondos. Básicamente se apoya en el clásico concepto de asimilar el capital propio de la empresa a una opción de compra, en donde el pasivo de la firma el precio de ejercicio y el valor total de la firma el subyacente de la opción. El aporte del modelo reside en que el concepto se instrumenta a través de un modelo numérico dinámico, en tiempo discreto, utilizando rejillas binomiales y tratando la incertidumbre (ambigüedad) mediante lógica borrosa.

Conforme a los resultados obtenidos el modelo propuesto supera al clásico VAA y binomial. El VAA, en su clásica concepción, estima un valor de la empresa en marcha sin tener en cuenta los posibles estados donde los flujos de fondos operativos no son suficientes para atender los servicios de la deuda. Estas situaciones activan la “*opción de compra*” a favor de los propietarios. Con relación al modelo binomial, el presente método presenta los siguientes atributos: a) introduce el comportamiento *fuzzy* a variables como valor de la empresa, flujos de fondos y posibles valores de la tasa de interés de la deuda, brindando mayor granularidad en la descripción de los posibles valores; b) captura el sesgo positivo del NBT arrojando un mayor valor al obtenido mediante un modelo binomial, al estimar el VAEB, c) El resultado correspondiente al nodo intermedio del modelo binomial borroso es coincidente con el modelo tradicional. Conforme fue explicado no debe confundirse esta propuesta con las rejillas trinomiales. Éstas son una derivación del modelo binomial donde, al coeficiente de ascenso y descenso se le incorpora un coeficiente intermedio dando mayor granularidad al proceso estocástico pero colapsando al binomial cuando el coeficiente $\lambda=1$.

Bibliografía

- Berger, A y Udell, G. (1998). "The economics of small business finance: the roles of private equity and debt market in financial growth cycles". *Journal of Banking and Finance*, 22, 613-673.
- Black, F y Scholes, M. (1972). "The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency". *Journal of Finance*, 399-418.
- _____. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Booth, L. (2007). "Capital Cash Flow, APV and Valuation". *European Financial Management*, 13(1), 29-48.
- Boyle, P. (1988). "A lattice framework for option pricing with two state variables". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 23, 1-12.
- Brander, J y Lewis T. (1986). "Oligopoly and financial structure: The limited liability effect". *American Economics Review*, 76, 956-970.
- Broadie, M y Kaya, O. (2007). "A Binomial Lattice Method for Pricing Corporate Debt and Modelling Chapter 11 Proceedings". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 42(2), 279-312.
- Calle Fernández, A. y Tamayo Bustamante, V. (2011). *Decisiones de Inversión a través de Opciones Reales*. Estudios Gerenciales (25), 107-126.
- Carlsson, C y Fuller, R. (2001). "On Possibilistic Mean Value and Variance Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*(122), 772-777.
- _____. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*(139), 315-326.
- Copeland, T y Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.), New York: Texere LLC.
- Copeland, T y Tufano, P. (2004). "A Real World to Manage Real Options". *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- _____, Weston, F y Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy* (4 ed.). Estados Unidos, Pearson Addison Wesley.
- Cox, J, Ross, S y Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Cox, J y Ross, S. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*(3), 145-166.
- Derman, E, Kani, I y Chriss, N. (1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". (Goldman-Sachs, Ed.) *Quantitative strategies research notes*.
- Dixit, A y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.

- Dubois, D y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. New York: Academic Press.
- Duran, D. (1957). "Growth Stock and The San Petesburgo Paradox". *Journal of Finance*, 12, 348-363.
- Fernández, P. (27 de junio de 2012). *Valoración de empresas por descuento de flujos de fondos: lo fundamental y las complicaciones innecesarias*. Obtenido de Social Science Research Network (SSRN): <http://ssrn.com/abstrac=2089397>
- Fornero, R. (2011). "Las prácticas en las decisiones de inversión: sus características según los estudios empíricos". *XXX Jornadas Nacionales de Docentes en Administración Financiera SADAF*, 30, 83-165.
- Gordon, M. J. (1962). *The Investment, Financing and Valuation of the Corporation*. Illinois, Irwin Homewood.
- Hurley, W. (2013). "Calculating First Moments and Confidence Intervals for Generalized Stochastic Dividend Discount Models". *Journal of Mathematical Finance*, 3, 275-279.
- _____, y Fabozzi, F. (1998). Dividend Discount Models. En F. Fabozzi (Ed.), *Selected Topics in Equity Portfolio Management* (1 ed., págs. 107,124). Pennsylvania: New Hope.
- _____, y Johnson, L. (1998). "Generalized Markov Dividend Discount Models". *Journal of Portfolio Management*, 25(1), 27-31.
- Jarrow, R y Rudd, A. (1982). "Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes". *Journal of Financial Economics*, 10, 347-369.
- Jensen, M. (1986). "Agency Costs of the Free Cash Flow, Corporate Finance and Takeover". *American Economic Review Paper and Proceedings*, 76(2), 323-329.
- _____, y Meckilng, W. (1976). "Theory of teh Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure". *Journal of Financial Economics*, 305-360.
- Kamrad, B y Ritchken, P. (1991). "Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables". *Management Science*, 37(12), 1640-1653.
- Leland, H y Pyle D. (1977). "Informational Asymmetries, Financial Structure and Financial Intermediation". *Journal of Finance*, 371-388.
- Liao, S y Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Bionomial Approach". *Information Sciences* (180), 2124-2133.
- Milanesi, G. (2013) (a). "El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de conseción para la explotación petrolera". *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, 3(2), 95-118.
- _____. (b). "Opciones Reales: Variantes del modelo binomial y trinomial incorporando volatilidad cambiante". *XXXIII Jornadas Nacionales de Docentes*

- en *Administración Financiera*, http://www.sadaf.com.ar/espanol/publicaciones/publicacion_individual.php?id=34, 200-217.
- _____. (2014) (a). "Modelo Binomial para la Valoración de Empresas y los efectos de la Deuda: Escudo Fiscal y Liquidación de la Firma". *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 19(36), 2-10.
- _____. (b). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*(30), 211-219.
- Miller, D. (1977). "Debt and Taxes". *Journal of Finance*, 261-275.
- Modigliani, F y Miller M. (1963). "Corporate Taxes and Cost of Capital". *American Economic Review*, 433-443.
- _____. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review*, 261-297.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions* (1 ed.), New York, Wiley.
- Muzzioli, S y Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*(28), 861-867.
- Myers, S. (1984). "The Capital Structure Puzzle". *Journal of Finance*, 575-592.
- _____. y Majluf, N. (1984). "Corporate Financing and Investment Decisions when Firms have Informarion that Investors do not Have". *Journal of Financial Economics*, 187-221.
- Pratt; S y Grabowski; R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples*. (3 ed.), New Jersey, John Wiley & Sons.
- Rendleman, R y Bartter, B. (1979). "Two-state Option Pricing". *Journal of Finance*(34), 1092-1110.
- Ross, S. (1977). "The Determination of Financial Structure: The Incentive of Signalling Approach". *Bell Journal of Economics*, 8, 23-40.
- Rubinstein, M. (1973). "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory". *Journal of Finance*, 167-181.
- Shing-Yun, W y Cheng-Few, L (2010). "A Fuzzy Real Option Valuation approach to Capital Budgeting under Uncertainty Environment". *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 5 (9), 695-713
- Smith, J. (2005). "Alternative Approach for Solving Real Options Problems". *Decision Analysis*(2), 89-102.
- Stiglitz, J y Weiss, A. (1981). "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information". *American Economics Review*, 71(3), 393-409.

- Titman, S. (1984). "The Effects of Capital Structure on a Firm's Liquidation Decisions". *Journal of Financial Economics*, 137-151.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.), Cambridge, MIT Press.
- Wang, A y Halal, W. (2010). "Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review". *International Journal of Business and Management*(5), 14-24.
- Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Williams, J. B. (1938). *Theory of Investment*. New York, Fraser Publishing Company (reprint).
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.), United Kingdom, John Wiley & Sons.
- Yoshida, Y, Yasuda, M, Nakagami, J y Kurano, M. (2006). "A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty". *Fuzzy Sets and Systems*(157), 2614-2626.
- Zadeh, L. (1965). "Fuzzy Sets". *Information Control*, 3(8), 338-353.
- Zdnek, Z. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*(207), 1096-1103.

Análisis del efecto apalancamiento en los rendimientos del IPC mediante una Cadena de Markov Monte Carlo antes, durante y después de la crisis subprime

Analysis of the leverage effect on the IPC returns by means of a Markov Chain Monte Carlo before, during and after the subprime crisis

Ignacio Francisco Hernández Ángeles*

Francisco López-Herrera**

Luis Fernando Hoyos Reyes***

Fecha de recepción: 8 de diciembre de 2014

Fecha de aceptación: 29 de enero de 2015

-
- * Universidad Nacional Autónoma de México, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración
 - ** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería
francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx
 - *** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería
hrlf@correo.azc.uam.mx

RESUMEN

Este artículo se ocupa del estudio de los efectos asimétricos de la volatilidad de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones del mercado accionario mexicano para verificar si existe evidencia del *efecto leverage* (apalancamiento), una de las razones teóricas por las cuales puede observarse asimetría en la volatilidad de los rendimientos accionarios. Mediante simulación de Cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC) se estima un modelo de volatilidad estocástica asimétrica para tres periodos que caracterizan, respectivamente el prelude de la crisis subprime, la crisis misma y las secuelas posteriores. Se encuentra que los niveles de la persistencia de la volatilidad así como la volatilidad de la volatilidad son prácticamente los mismos en cualquiera de los periodos; no obstante sólo se detecta presencia del *efecto leverage* en el último periodo, el posterior a la crisis financiera *subprime*.

JClasificación JEL: G01, G10, G17

Palabras clave: Cadenas de Markov de Monte Carlo, volatilidad estocástica asimétrica, efecto apalancamiento

ABSTRACT

This paper deals with the study of the volatility's asymmetric effects of the returns of the Índice de Precios y Cotizaciones of the Mexican Stock Exchange in order to assess if there is evidence of the leverage effect, one of the theoretical premises by which asymmetry is observed in the volatility of the equities' returns. By means of Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation, an asymmetric stochastic volatility model is estimated for three periods characterizing, respectively, the prelude of the subprime crisis, the crisis itself and its aftermath. We find that the levels of the persistence of the volatility, and the volatility of the volatility are, for practical purposes, the same in any period; nevertheless, the presence of the leverage effect is only detected in the last period, after the subprime financial crisis.

JEL Classification: G01, G10, G17

Keyword: *Markov Chain Monte Carlo, asymmetric stochastic volatility, leverage effect*

Introducción

En la volatilidad de índices de diversas bolsas de valores del mundo se ha documentado la presencia de asimetrías, a las cuales se les ha denominado como *efecto apalancamiento (leverage)* o *efecto feedback*, según sea la explicación que se ha tratado de dar a la presencia de tales asimetrías.

En este trabajo de investigación se analiza la volatilidad asimétrica en el mercado accionario mexicano mediante un modelo de volatilidad estocástica asimétrica. Considerando que actualmente existe un debate sobre cuál es la principal explicación para los fenómenos asimétricos reportados en la varianza de los rendimientos accionarios de las principales bolsas de valores del mundo y para la misma Bolsa Mexicana de Valores, es necesario retomar el estudio para tratar de profundizar en el análisis de la volatilidad. Por ello parece oportuno profundizar en el análisis de la volatilidad asimétrica mediante los métodos de la econometría bayesiana para la estimación de los parámetros relevantes de una especificación de volatilidad estocástica que permite la presencia de efectos asimétricos. Dicha estimación se lleva a cabo por medios de Cadenas de Markov de Monte Carlo (*Markov Chain Monte Carlo*), denominado comúnmente en forma simple como MCMC. Debido a que nos interesa también entender si los efectos asimétricos en la Bolsa Mexicana de Valores se comportaron de igual forma durante el periodo de la crisis financiera mundial de fines de la década pasada que antes y después de dicho periodo, el análisis que se presenta páginas más adelante estudia las características de la volatilidad de los rendimientos bursátiles mexicanos en los tres periodos.

Además de que este análisis de la volatilidad asimétrica es importante para entender mejor el funcionamiento del mercado accionario mexicano, también es relevante para los administradores de portafolios de inversión respecto al riesgo que deben asumir y para las diversas entidades financieras que cotizan en las bolsas de valores; desde la perspectiva del inversionista (tenedor de la acción) el análisis permite cuantificar el riesgo, tomar posiciones en el mercado y formar expectativas sobre los rendimientos futuros ante efectos asimétricos en la volatilidad. Desde el punto de vista de

la empresa, el análisis de volatilidad asimétrica permite generar (bajo cierto grado de ocurrencia) expectativas de financiamiento ante noticias negativas y positivas que se generen en un periodo determinado. Así, el riesgo y el costo del capital pueden incrementarse más ante choques negativos (caídas inesperadas en los precios) que ante choques positivos (incrementos inesperados) de igual magnitud, Bekaert y Wu (2000).

El trabajo se estructura de la forma que se enuncia a continuación. En la sección siguiente se presenta una breve revisión de literatura relevante. Después se dedica otra sección a los aspectos metodológicos en que se sustenta el análisis de la volatilidad de los rendimientos accionarios mexicanos. Posteriormente se presentan los resultados del análisis empírico. Finalmente se presentan nuestras conclusiones.

1. Revisión de literatura

Así como se ha encontrado que la volatilidad en acciones no es constante en el transcurso del tiempo, se ha documentado evidencia estadística de asimetría en la volatilidad futura ante efectos negativos y positivos de igual magnitud. Por ejemplo, Black (1976), Christie (1982), Schwert (1989), Bessembinder y Seguin (1993), Bekaert y Wu (2000), Fernández y Aragón, (2002), Johnson y Soriano (2004) y Yu (2005), por mencionar algunos, han documentado que la volatilidad en acciones cambia en el transcurso del tiempo, coexistiendo en forma simultánea con fenómenos asimétricos.

Estos fenómenos de volatilidad dinámica tienen diversas vertientes para su explicación, por ejemplo la Hipótesis de los Mercados Eficientes sugiere que la excesiva volatilidad podría ser indicativa de irracionalidad e ineficiencia del mercado. Bajo este criterio, la volatilidad es considerada como una reacción ante la incertidumbre generada por la insuficiencia de información, es decir, los temores excesivos por lo que la concentración de la información pública y privada son factores que pueden producir fluctuaciones en los precios de las acciones.

Una explicación macroeconómica de la varianza variante sostiene que la interacción entre los mercados financieros internacionales pueden ser motivos suficientes para cambios inesperados en la volatilidad. La transmisión de la información, el proceso de creciente liberalización financiera ha originado un incremento en los contagios de los movimientos de los mercados desarrollados hacia el resto del mundo. En este sentido, la existencia de factores en la valoración de los activos entre varios mercados, la asimetría y

la aparición de la información en oleadas son algunos factores que motivan la transmisión y la persistencia de la volatilidad en los mercados bursátiles. De acuerdo con Fernández y Aragón (2002), existe una relación positiva entre el grado de liberalización de la economía y la transmisión de la volatilidad originada por el proceso generador de la información. De esta manera, la volatilidad de un mercado bursátil puede ser explicada por la volatilidad retardada (volatilidad pasada) de otro mercado. Adicionalmente existe un efecto asimétrico en la volatilidad en el que las innovaciones negativas aumentan la volatilidad en mayor proporción que las innovaciones positivas de igual magnitud. Por su parte, Lanteri (2004) explica que la firma con tecnología que le permite generar rendimientos que en promedio son mayores que lo normal será susceptible a ser más riesgosa. De esta forma, las elecciones tecnológicas, al considerar un menú más amplio de posibilidades, haría que las tasas promedio de rendimientos y sus tasas promedios de las volatilidades estarían positivamente correlacionadas.

Por otro lado, Schwert (1989) argumenta que algunas de las principales explicaciones para la volatilidad inestable en acciones pueden ser los cambios en los rendimientos esperados, tasas de interés, dividendos, tasas de descuento, flujos de dinero, inflación, circulación del dinero, producción industrial, entre otras variables de la actividad económica. Si la varianza condicional de la acción depende de las expectativas futuras del flujo de dinero y de la tasa de descuento, la varianza condicional de los precios es proporcional a la varianza condicional de los flujos futuros esperados. Es decir, si el valor de la acción corporativa en nivel agregado depende de la riqueza de la economía, la volatilidad puede ser afectada por la incertidumbre macroeconómica. Así, los cambios en el nivel de incertidumbre sobre las condiciones macroeconómicas futuras podrían causar cambios proporcionales en la volatilidad de los rendimientos. Por ejemplo, si el banco central modifica la posición de las curvas de portafolios al realizar subastas de los “activos libres de riesgo”, podría generar nuevas expectativas sobre los precios de todos los activos. Luego entonces el inversionista debería analizar las curvas de portafolios eficientes en el corto plazo, y de acuerdo con su conveniencia de inversión, tomar una posición estratégica en el mercado.

Otros estudios han relacionado los cambios en la volatilidad de los precios accionarios con el volumen operado. Bessembinder y Seguin (1993) encuentran que la volatilidad de algunos activos del mercado de futuros es asimétrica. Estos autores consideran que los *shocks* positivos en el volumen del mercado repercuten más del doble en los precios que los *shocks* negati-

vos de igual magnitud. Johnson y Soriano (2004) consideran que es posible establecer una correlación negativa entre los requerimientos de márgenes de utilidad y la volatilidad del precio de las acciones. Bajo este argumento, los márgenes de utilidad son determinantes en la reducción de la volatilidad, ya que son mecanismos para disminuir la especulación y el riesgo que toman los operadores de mesas de dinero.

Una explicación de la volatilidad de carácter microeconómico introducida por Black Fischer en 1976, sostiene que los cambios en la varianza futura de las acciones son explicadas o gran parte explicada por el efecto del apalancamiento (*leverage*) financiero. De acuerdo con esta hipótesis, cuando el precio de la acción cae (malas noticias), el riesgo del patrimonio de la firma emisora debería incrementarse debido a la pérdida de valor del capital accionario en relación con el valor de la deuda y, por lo tanto, también es de esperar que se observe un incremento en la volatilidad futura de esa acción. De esta forma se produce un efecto asimétrico en la volatilidad, es decir, una caída en el precio de la acción repercute en mayor proporción en la volatilidad futura en comparación a un incremento en el precio de igual magnitud, lo cual se manifiesta como una correlación negativa entre los rendimientos accionarios y su varianza futura.

Otra explicación microeconómica para la asimetría de la volatilidad es conocida como la hipótesis de la variación en el tiempo de la prima del riesgo o *volatility feedback effect*, la cual sostiene que los incrementos anticipados en la volatilidad futura, *ceteris paribus*, inducen cambios en los rendimientos requeridos (tasa de descuento) sobre la acción. Permaneciendo constantes los dividendos, el incremento de los rendimientos requeridos conduce inmediatamente a un declive del precio de la acción (volatilidad persistente). Esto se refiere a que las noticias, positivas o negativas, incrementan la volatilidad presente y futura.

Christie (1982) encuentra una relación positiva entre la varianza y el nivel de apalancamiento financiero y sostiene que la política de dividendos de la empresa también puede afectar su nivel de apalancamiento financiero. Suponiendo que el valor de la empresa y la tasa de descuento son constantes, y no tiene esta última relación con la volatilidad futura anticipada, cualquier decremento no anticipado en los flujos futuros de dinero causará una disminución del precio de la acción.¹ También argumenta que los cambios en las

¹ Si el valor de la empresa es constante, una caída del precio de la acción debe incrementar el valor del bono en la estructura de capital, de manera que el apalancamiento financiero debe incrementarse.

tasas de interés tienen efectos en el nivel de apalancamiento financiero de la firma; así como el valor de la firma decrece cuando la tasa de interés se incrementa, el valor del bono y de la acción se reduce, sin embargo, el valor de la acción se reduce más que proporcionalmente en relación con la deuda, de tal forma, que aumenta la relación deuda/patrimonio.² Christie (1982) y Black (1976) han encontrado una relación negativa entre la volatilidad y el valor de la acción y relacionan esta particularidad de la volatilidad asimétrica de los rendimientos accionarios con los cambios en el nivel de apalancamiento financiero de la firma. Diversos trabajos realizados sobre el análisis de volatilidad de los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores han documentado evidencia significativa sobre la presencia de efectos asimétricos en la volatilidad, por ejemplo, López (2004), Johnson y Soriano (2004), Selçuk (2005), Mota y Ludlow (2006), y Hernández, Morales y Rodríguez (2007).

2. Aspectos metodológicos

En términos generales, un modelo de volatilidad estocástica (modelos SV) es usado para describir series financieras de tiempo como una alternativa a los modelos tipos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). Al contener un proceso de ruido para las observaciones y otro para las volatilidades latentes, son más realistas y flexibles que los modelos ARCH, [Meyer y Yu, (2000)]. Los modelos SV contienen un componente de varianza no observada, cuyo logaritmo se modela directamente como un proceso estocástico lineal, tal como una regresión, véase Harvey *et al.* (1994). Sin embargo, la estimación mediante el método de máxima verisimilitud es difícil. Una alternativa para estudiar los modelos SV es el uso de otros métodos: momentos generalizados, cuasi-máxima verisimilitud, métodos eficientes de momentos, máxima verisimilitud aproximada, máxima verisimilitud simulada y mediante la inferencia bayesiana utilizando las técnicas de muestreo de Gibbs.

El *efecto apalancamiento (leverage) financiero* propone una relación negativa entre la volatilidad y el valor de la acción atribuida por el nivel de apalancamiento financiero de la firma. Es una explicación de un caso particular de la asimetría, de manera que arguye que las noticias negativas (caídas en los precios de las acciones) afectan en mayor medida a la volatilidad futura

² Consistente con la idea que el valor de la firma es una función inversa de la tasa de interés.

que las noticias positivas (incrementos en los precios) de igual magnitud. El modelo estocástico de volatilidad asimétrica incorpora la correlación (ρ) entre el error de los rendimientos u_t y el logaritmo de la volatilidad v_{t+1} : $\rho = \text{corr}(u_t, v_{t+1})$. Como afirman Meyer y Yu (2000), una correlación negativa implica que un rendimiento negativo está asociado con un shock de varianza positiva v_{t+1} . Selçuk (2005) considera que este coeficiente de correlación juega un papel fundamental en el espacio gaussiano no lineal de los estados. Considerando dicho coeficiente en el modelo del espacio de los estados de los rendimientos y su volatilidad, de acuerdo con Yu (2005) tenemos:

$$r_t = \sigma_t u_t \quad (1)$$

$$\ln \sigma_{t+1}^2 = \alpha + \phi \ln \sigma_t^2 + \sigma_v \sigma_t^{-1} \rho r_t + \sigma_v \sqrt{1 - \rho^2} w_{t+1} \quad (2)$$

$$w_{t+1} = \frac{(v_{t+1} - \rho u_t)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (3)$$

Selçuk (2005) muestra que el producto de los coeficientes σ_v , σ_t^{-1} y ρ determinan el efecto que tiene sobre la volatilidad un cambio en el rendimiento de la acción. El efecto asimétrico de los choques de los rendimientos sobre la volatilidad implica un sesgo negativo en la serie de rendimientos y el sesgo debe incrementarse con dicho cambio. Si ρ es negativo, entonces una caída en el rendimiento de la acción en el periodo actual resultará en un incremento $e^{\sigma_v \sigma_t^{-1} \rho}$ de unidad en la varianza del periodo inmediatamente siguiente, de tal forma, que el efecto es mayor que cuando ρ es positivo. Dado que $-\rho \sigma_v$ determina el cambio en la volatilidad como consecuencia de un *shock* en los rendimientos, Selçuk lo llama “efecto apalancamiento combinado”.

Siguiendo a Meyer y Yu (2000) podemos representar el modelo de la volatilidad asimétrica mediante la especificación de las ecuaciones de estado y de observación de la siguiente forma:

$$r_t | h_t, \rho = \exp\left(\frac{1}{2} h_t\right) u_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$h_{t+1} \mid h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2, \rho = \alpha + \varphi(h_t - \alpha) + \sigma_v u_t \quad t = 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_{t+1} \end{pmatrix} \sim N \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6)$$

Esta especificación implica una distribución normal bivariada tanto para $r_t \mid h_t, \rho$ como para $h_{t+1} \mid h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2, \rho$. Reescribiendo la densidad normal bivariada como el producto de la densidad de $h_{t+1} \mid h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2$ y la densidad de $r_t \mid h_{t+1}, h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2, \rho$, entonces el modelo puede especificarse como:

$$h_{t+1} \mid h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2 \sim N \left\{ \alpha + \varphi(h_t - \alpha), \sigma_v^2 \right\} \quad (7)$$

$$r_t \mid h_{t+1}, h_t, \alpha, \varphi, \sigma_v^2, \rho \sim N \left[\frac{\rho}{\sigma_v} e^{h_t/2} \{ h_{t+1} - \alpha - \varphi(h_t - \alpha) \}, e^{h_t} (1 - \rho^2) \right]. \quad (8)$$

De acuerdo con el método de máxima verosimilitud aplicado para el enfoque de estimación bayesiana, la función que debe maximizarse para poder hacer inferencia sobre los parámetros, condicionados por los valores observados de los rendimientos, resulta ser:

$$\ell(\Theta \mid r) = \prod_{t=1}^T f(r_t \mid h_1, \dots, h_T) f(h_1, \dots, h_T \mid \Theta) dh_1 \dots dh_T, \quad (9)$$

donde Θ es el espacio de parámetros. La expresión en (9), es la expresión de la función de verosimilitud como una integral de dimensión T , evidentemente no manejable en forma analítica, pues dicha función no está disponible en forma cerrada para el modelo de volatilidad estocástica debido a que h_1, \dots, h_T son variables latentes (no observables). De hecho este problema ha obstaculizado la generalización del uso de los modelos de volatilidad estocástica pero en la literatura se han propuesto diferentes alternativas para estimar los parámetros de los modelos de volatilidad estocástica, como el método general de momentos o el de cuasi-máxima verosimilitud, destacan-

do el uso de métodos de simulación basados en Cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC) que se cuentan entre las mejores opciones para obtener la información que la función de verosimilitud proporciona sobre los parámetros cuando se cuenta con muestras finitas.

Si se incrementa el espacio de los parámetros tomando en consideración $\Theta = (\alpha, \varphi, \sigma_v^2, \rho)$ y $h = (h_1, \dots, h_T)$, mediante el Teorema de Bayes se tiene:

$$p(\Theta, h|r) \propto p(y|\Theta, h) p(h|\Theta) p(\Theta). \quad (10)$$

Se puede efectuar inferencia de tipo bayesiana sobre los parámetros del modelo y los estados de volatilidad con base en la distribución posterior

$$p(r_t|\theta, h_t) = f_N(0, \exp(h_t)) \propto \frac{1}{\exp(h_t/2)} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\exp(h_t)}\right). \quad (11)$$

El problema se convierte, entonces, en efectuar un muestreo del espacio aumentado de los parámetros $\theta \in \Theta$ y de h , para lo cual pueden ser útiles los métodos MCMC, en particular el Algoritmo Metropolis-Hastings y el Muestreador de Gibbs. Los métodos MCMC permiten generar muestras adecuadas de la probabilidad de un espacio de alta dimensión mediante el diseño de una Cadena de Markov cuya probabilidad es estacionaria o invariante basándose en los datos observados, $r = (r_1, \dots, r_T)$, y una función de densidad previa $f(\theta)$ del conjunto de parámetros para encontrar la función de densidad posterior $f(\sigma|r)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_T)$, y $f(\theta|r)$ a partir de la función de densidad conjunta posterior $f(\sigma, \theta|r)$.

La Cadena de Markov $\{X_k\}$ puede generarse por medio de métodos de simulación de Monte Carlo, obteniendo como resultado $X_{k+1} = (\sigma^{(k+1)}, \theta^{(k+1)})$ a partir de X_k y una función de densidad de transición $f(X_{k+1}|X_k)$. El estimador puntual de θ está dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{\theta^{(M+1)} + \dots + \theta^{(N)}}{N - M}, \quad (12)$$

donde los primeros M resultados se descartan para eliminar la influencia del valor inicial X_1 , denominándose periodo de *burn-in*.

El Muestreador de Gibbs, algoritmo propuesto por Geman y Geman (1984) como caso especial del Algoritmo Metropolis-Hastings, supone que dado un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_k)$ es posible generar valores de sus distribuciones condicionales completas π_i , es decir:

$$X_i | X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k \sim \pi_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k$$

Con base en ese supuesto se generan y actualizan valores del vector en forma iterativa según el algoritmo:

$$\text{Dado } \mathbf{x}^n = (x_1^n, \dots, x_k^n)$$

1.- Repetir para $n = 1, 2, \dots, M$:

2.- Generar:

$$X_1^{n+1} \sim \pi_1(x_1 | x_2^n, \dots, x_k^n)$$

$$X_2^{n+1} \sim \pi_2(x_2 | x_1^{n+1}, x_3^n, \dots, x_k^n)$$

$$X_3^{n+1} \sim \pi_3(x_3 | x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, x_4^n, \dots, x_k^n)$$

⋮

$$X_k^{n+1} \sim \pi_k(x_k | x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_{k-1}^{n+1})$$

3.- Incrementar n .

3. Análisis empírico

En esta sección se describe el comportamiento de los rendimientos del mercado bursátil mexicano y se muestran los resultados del análisis de su volatilidad que se llevó a cabo mediante la metodología reseñada en la sección anterior. La muestra total analizada, la cual comprende las observaciones del primer día hábil de enero de 2000 al 25 de marzo de 2014, se dividió en tres periodos: el primero con las observaciones desde el lunes tres de enero de 2000 hasta el 30 de diciembre de 2005, el segundo periodo comprende los rendimientos

del dos de enero de 2006 hasta el 31 de diciembre de 2010 y el último periodo cubre los rendimientos observados del 3 de enero de 2011 hasta el final de la muestra total. Los rendimientos diarios se calcularon como:

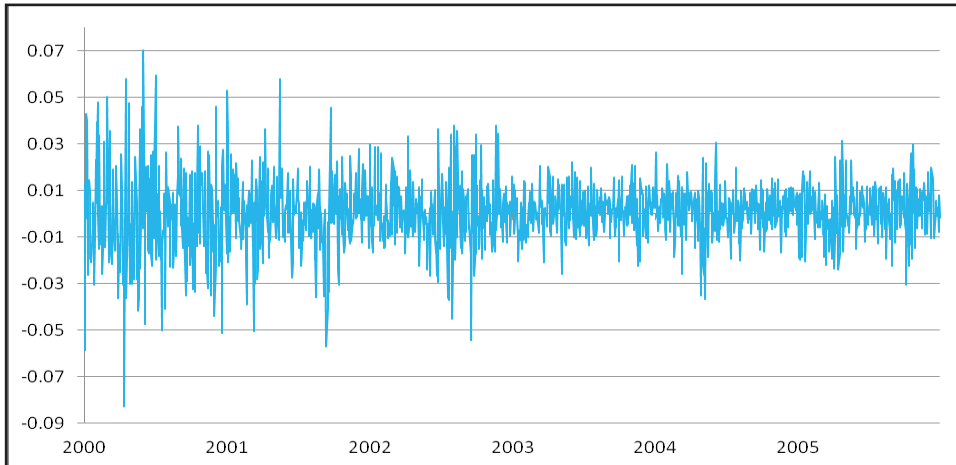
$$r_t = \ln \left(\frac{IPC_t}{IPC_{t-1}} \right)$$

donde r_t es el rendimiento diario del IPC en el día t , IPC_t es el valor del Índice de precios y Cotizaciones al cierre del día t y IPC_{t-1} es el valor de ese índice al cierre del día $t-1$.

La crisis Argentina en 2000, los sucesos del 11 de septiembre del 2001, la guerra en Irak, la incertidumbre sobre los mercados financieros emergentes, la recesión de la economía norteamericana y mundial, y las quiebras corporativas de Enron y WorldCom en el 2002, mitigaron el optimismo en los mercados financieros nacionales e internacionales. Algunos de los principales índices accionarios del mundo perdieron gran parte de su valor, por ejemplo, en septiembre de 2002 el índice Nikkei registró su 19 pérdida del año, el NASDAQ, Germany's Neuer Market y Switzerland's New Market registraron importantes pérdidas en esas fechas. Sin embargo, el comportamiento y dinamismo del IPC fue relativamente favorable durante 2001 y 2002, motivado por los mayores niveles de certidumbre generados por la nueva política monetaria y fiscal, las cuales han permitido bajas tasas de interés, aumentos significativos en las reservas internacionales, niveles bajos del riesgo país e inflación. Como lo muestra la Figura 1, en todo el periodo comprendido, los rendimientos diarios del IPC tuvieron su mayor pérdida el 14 de mayo del año 2000 con un retroceso del 8%, no obstante, también puede verse grandes caídas en ese mismo año como el 4 de enero (-5.8%) y 19 de septiembre (-5%). Durante el año 2001, el único desplome mayor al 5% fue el 11 de septiembre, de tal manera que, en términos generales durante ese año se mantuvo una relativa estabilidad. Inmediatamente después del 11 de septiembre de 2001 sólo hubo un cambio superior a 5%, el cual sucedió el 19 de septiembre del 2002 (-5.4%).

Durante 2004 y 2005, la disminución de las tasas de interés internas, la baja de los rendimientos de los bonos del Tesoro de EUA, el menor riesgo país, una moneda relativamente estable, el crecimiento económico mundial, las menores presiones inflacionarias y el crecimiento de las utilidades de las principales empresas mexicanas, coadyuvaron a menores niveles de volatilidad.

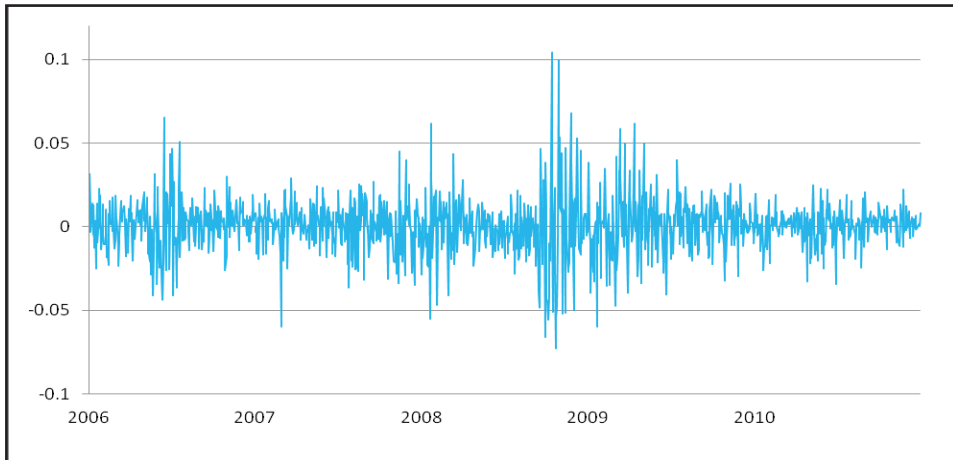
Figura 1. Rendimientos diarios del IPC: (2000-2005)



Durante el año 2005, a pesar del incremento del precio del petróleo, las condiciones del mercado accionario mexicano se mantuvieron estables. De acuerdo con diversos analistas financieros, las condiciones favorables de los mercados internacionales, el menor riesgo país cercano a niveles históricos de 100 puntos, el incremento de las reservas internacionales, una moneda relativamente estable, una política monetaria más relajada y la solidez de las emisoras de triple A fueron factores fundamentales para sólidas trayectorias alcistas de la BMV nunca vistas desde 1986. Debido a ello, en 2005 la BMV se incluyó en la lista de las diez primeras bolsas del mundo con el mayor incremento de emisoras extranjeras y una de las mejores opciones de inversión del sistema financiero mexicano. En términos generales, como lo muestra la Figura 1, los mayores niveles de volatilidad en el mercado accionario acontecieron durante el año 2000, sin embargo, puede observarse que se presentaron ciertos agrupamientos como en el año 2004 y finales del 2005.

Durante el año de 2006 la economía mundial registró un importante crecimiento, que se caracterizó por ser más dinámico y generalizado en relación a otros años, así mismo, existieron condiciones favorables en los mercados financieros internacionales. El crecimiento global y la inflación moderada contribuyeron al mantenimiento de condiciones favorables para las economías emergentes en los mercados financieros internacionales. En la Figura 2, se muestra que durante la mitad del año, el IPC tuvo considerables niveles de volatilidad.

Figura 2. Rendimientos diarios del IPC: 2006-2010



En el año 2007 la economía mundial mostró un ritmo de crecimiento importante. Sin embargo, el agravamiento de los instrumentos financieros respaldados por hipotecas de baja calidad en los Estados Unidos ocasionó una crisis en los mercados financieros internacionales afectando de manera significativa a diversas instituciones relacionadas como bancos comerciales, aseguradoras de bonos y agencias calificadoras. Durante el segundo semestre la crisis afectó de manera significativa en un aumento de la aversión al riesgo en los mercados crediticios derivando una crisis de liquidez y ampliación de las primas al riesgo. Los mercados accionarios internacionales tuvieron una importante volatilidad durante ese año, principalmente en las empresas de los sectores financieros de los países desarrollados. De acuerdo con el informe anual del Banco de México de ese año, las economías emergentes tuvieron poco impacto debido principalmente a las condiciones económicas fundamentales en años anteriores así como a la trayectoria de sus términos de intercambio. En el caso de México el IPC tuvo niveles considerables de volatilidad, como se observa también en la Figura 2, el 27 de febrero sufrió una pérdida de alrededor del 5.9%.

El desempeño de la economía mundial en el año 2008 fue considerablemente afectado por los altos niveles de volatilidad en los mercados financieros. La tasa de crecimiento del PIB mundial cayó de 5.2% en 2007 a 3.8 en 2008. Los mercados financieros internacionales estuvieron marcados por condiciones desfavorables. La incertidumbre, restricción de liquidez, caída de

los precios de los activos observadas en los mercados estadounidenses, así como la quiebra de Lehman Brothers, repercutieron en otros segmentos de los mercados financieros y en otros países del mundo, de tal manera, que aumentó el riesgo de colapso del sistema financiero internacional. Los flujos de capital hacia las economías emergentes se contrajeron importantemente de tal manera que afectó los mercados cambiarios, accionarios y de deuda de muchos países. La Bolsa Mexicana de Valores fue severamente afectada por los mercados financieros internacionales, el IPC presentó movimientos bruscos como el 21 de enero de 2008 al caer 6.6%. Durante el segundo trimestre de 2009, la actividad económica mundial empezó a recuperarse. Los mercados financieros internacionales a partir del segundo semestre mostraron un proceso de recuperación pero sin llegar a lograrlo, sin embargo, durante el año se observaron varios cambios en la confianza de los mercados debido a la percepción de las condiciones económicas mundiales, y a la situación de Grecia al final del año. Por ejemplo, el 20 de enero el IPC registró una pérdida del 5.9% como se muestra en la Gráfica 1. La economía mundial durante 2010 continuó con la recuperación que inició en la segunda mitad del año 2009.

De acuerdo con el informe anual del Banco de México, durante 2010, México consolidó el proceso de reactivación de la actividad que inició en el segundo semestre de 2009, consecuencia del crecimiento por la economía mundial, particularmente por la actividad industrial en Estados Unidos. Por otro lado, la sostenibilidad fiscal y la solvencia del sistema bancario de algunos países europeos incrementaron considerablemente la incertidumbre en los mercados financieros. Las bolsas de valores de las economías emergentes tuvieron ganancias importantes particularmente en la segunda mitad del año, por ejemplo, el IPC registró el 10 de mayo un rendimiento diario de 2.5%. En términos generales, el año 2010 presentó niveles de volatilidad relativamente menores que los años anteriores.

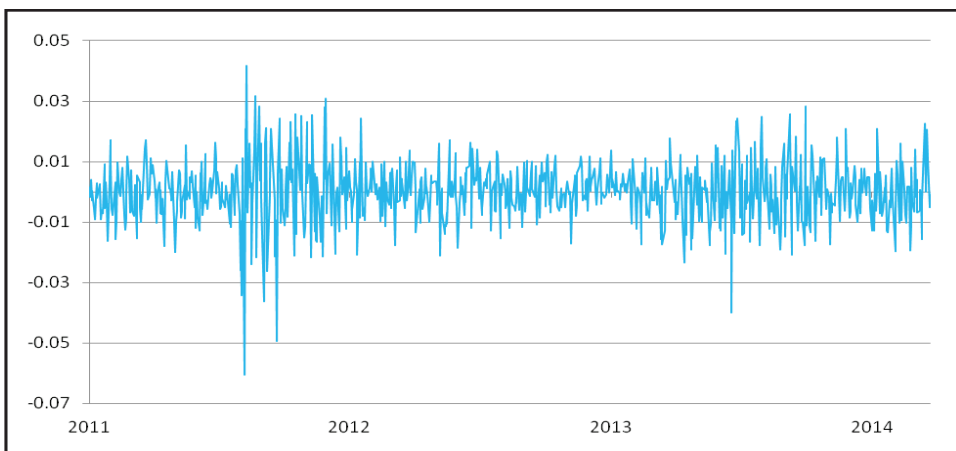
La recuperación económica mundial perdió vigor en 2011 que se había iniciado en la segunda parte de 2009. Durante la segunda mitad del año, disminuyó la confianza a nivel global, provocando una retroalimentación negativa entre la actividad económica y la debilidad de los mercados financieros. El aumento del riesgo de contagio debido a los problemas fiscales y financieros de algunos países de la zona del euro deterioró las condiciones en los mercados financieros internacionales al elevar la incertidumbre en los mercados financieros. De acuerdo con el informe anual del Banco de México, en la segunda mitad del año, el riesgo provocado por la crisis en la zona del euro tuvo un impacto negativo en los mercados financieros de las economías emergentes.

Como se muestra en la Figura 3, el IPC registró altos niveles de volatilidad a finales del año, por ejemplo, el 8 y 11 de agosto los rendimientos exhibieron una pérdida de 6% y una ganancia de 4.2%, respectivamente.

El proceso de desendeudamiento en los principales países avanzados, los problemas en la zona euro y la incertidumbre sobre la magnitud del ajuste fiscal previsto para 2013 en Estados Unidos, redujeron el ritmo del crecimiento de la economía mundial durante el 2012. La desaceleración del crecimiento económico mundial repercutió tanto a las economías avanzadas como a las emergentes, de manera, que hubo una menor expansión del comercio internacional. En los mercados financieros internacionales se observó una elevada volatilidad durante el segundo trimestre de 2012 y la mayor parte del tercero, debido, principalmente, a las dificultades de refinanciamiento de diversos países de la zona del euro. Sin embargo, en los últimos meses del año los mercados financieros tuvieron una mejoría significativa de manera que mejoró los flujos de capital hacia los mercados emergentes repercutiendo en la apreciación de las monedas y en las alzas de los índices accionarios de la mayoría de las economías emergentes. En el caso del IPC, se observan en la Figura 3, niveles significativos de volatilidad sobre todo en la primera mitad del año, pero en general niveles de volatilidad menores al año previo.

En el primer trimestre del 2013 los mercados financieros internacionales tuvieron un mejor desempeño motivado por las medidas que adoptaron las autoridades de las principales economías avanzadas para fortalecer la recuperación económica. No obstante, se siguieron registrando

Figura 3. Rendimientos diarios del IPC: 2011-2014



ciertos niveles de volatilidad debido fundamentalmente a los problemas fiscales y financieros de varias economías de la zona euro, y a la incertidumbre derivada de eventos de tipo político en algunos países. En el segundo trimestre, de acuerdo al informe anual del Banco de México, todos los mercados emergentes se vieron afectados por la referida volatilidad, sin embargo, para el caso de México el impacto fue de menor intensidad. Durante el tercer trimestre, los mercados financieros internacionales registraron una elevada volatilidad, debido a la expectativa de un cambio en la política monetaria en EUA. Durante el cuarto trimestre de 2013, la actividad económica en México continuó a un menor ritmo de crecimiento que inició en el tercer trimestre. Finalmente, en el cuarto trimestre, con lo que respecta a los flujos de capital hacia México, éstos mostraron altos niveles de volatilidad y particularmente en las primeras semanas de 2014. En términos generales en ese trimestre, los mercados financieros internacionales registraron mayor volatilidad ante la reducción en la compra de activos por parte de la Reserva Federal, principalmente en el caso de las economías emergentes. En la Figura 3, de manera general se puede ver que el IPC, durante el 2013 e inicios del 2014, tuvo mayores niveles de volatilidad respecto al año previo y menores respecto al año 2011.

En el Cuadro 1 se presentan las estadísticas descriptivas de los rendimientos en cada uno de los dos periodos. Los rendimientos de los tres periodos descritos anteriormente, presentan en todos los casos media negativa y muy cercana a cero, su distribución es asimétrica con sesgo negativo en el primer y el tercer periodos, en tanto que en el segundo se observa el sesgo con signo positivo. En los tres periodos se observa que los rendimientos siguen una distribución leptocúrtica que no está distribuida de forma normal, según el valor de la curtosis y el valor del estadístico de Jarque y Bera.

La estimación del modelo asimétrico de volatilidad estocástica se llevó a cabo en el paquete OpenBUGS Versión 3.2.3,³ empleando la misma especificación de las distribuciones previas propuestas por Yu (2005) y Selçuk (2005), considerando los rendimientos diarios estimados. Se asume que $\sigma_v^2 \sim IG(2.5, 0.025)$, de manera, que se asegura que la variabilidad de la volatilidad es positiva y relativamente baja. Por otra parte, el proceso de volatilidad puede tener un término constante normalmente distribuido, y como

³ OpenBUGS es un paquete computacional para realizar la inferencia bayesiana usando muestreo de Gibbs al igual que el paquete BUGS cuyo nombre se derivó a partir de Bayesian Analysis Using Gibbs Sampling.

Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de los rendimientos diarios del IPC

<i>Periodo</i>	<i>n</i>	<i>Media</i>	<i>Desviación estándar</i>	<i>Curtosis</i>	<i>Sesgo</i>	<i>Valor máximo</i>	<i>Valor mínimo</i>	<i>Estadístico Jarque- Bera</i>
2000-2005	1513	-2.84E-12	0.013951	6.044849	-0.110639	0.069594	-0.083278	587.5526
2006-2010	1256	-3.66E-12	0.016088	7.719213	0.166671	0.103792	-0.073276	1171.329
2011-2014	812	-5.90E-12	0.009994	6.065683	-0.317099	0.041633	-0.060659	331.5876

no existe información previa se asume que tiene media cero $\alpha \sim N(0, 0.04)$ Dado que se acepta como supuesto que el parámetro de la persistencia de la volatilidad φ^* es cercano y menor a la unidad, se emplea una distribución previa $\varphi^* \sim \beta(20, 1.5)$, donde $\varphi = 2\varphi^* - 1$, lo cual implica una media previa φ de 0.86, así tenemos una alta probabilidad de estacionariedad. Por último, se supone que $\rho \sim U(-1, 1)$ ya que no hay información previa sobre este parámetro.

En el Cuadro 2 se presentan los resultados de las estimaciones. Una forma de evaluar la precisión de las estimaciones de las distribuciones posteriores de los parámetros, es calculando el error de Monte Carlo correspondiente a cada parámetro estimado, dicho error es una estimación de la variabilidad de las simulaciones que se calcula como la diferencia entre la media de los valores muestreados (que usamos como nuestra estimación de la media posterior de cada parámetro) y la media real posterior; como regla general, la simulación se debe ejecutar hasta que el error de Monte Carlo para cada parámetro de interés es menor que aproximadamente el 5% de la desviación estándar de la muestra, lo cual evidentemente se cumple ampliamente en las estimaciones efectuadas. Como puede verse en los parámetros estimados, los valores de las medias del parámetro que da cuenta de la persistencia de la volatilidad, ϕ , cambian muy poco en los tres periodos, siendo iguales los valores estimados en los dos primeros. Algo similar se puede decir en relación con el valor estimado del parámetro correspondiente a la volatilidad de la volatilidad, σ_v , el cual a pesar de ser distinto en los tres periodos, únicamente cambia en forma marginal. Se observa también que en los periodos de 2000 a 2005 y de 2006 a 2010 los valores de los parámetros ρ , φ y σ_v indican que no hay evidencia contundente del llamado “efecto leverage” puesto que el valor de la media posterior que resulta en la estimación efectuada tiene signo positivo. Sin embargo, el valor estimado para dicho parámetro en el periodo que comprende de 2010 a 2014 sí se encuentra

Cuadro 2. Estimación del modelo de Volatilidad Estocástica Asimétrico de los rendimientos diarios del IPC

Medias posteriores de los parámetros con 110,000 iteraciones ^b				
Periodo	$\hat{\rho}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\sigma}_v$	$\hat{\rho} \hat{\sigma}_v$
2000-2005	0.001235 (-0.9501, 0.9501) [0.001827] {0.5771}	0.8609 (0.5898, 0.989) [0.0003526] {0.107}	0.1187 (0.0623, 0.2435) [0.0001553] {0.04965}	0.00015
2006-2010	0.001094 (-0.9508, 0.9496) [0.1191] {0.5771}	0.8609 (0.5897, 0.9894) [0.0003392] {0.107}	[0.00191] (0.06241, 0.2467) [0.0001422] {0.05061}	0.00013
2011-2014	-0.001571 (-0.9491, 0.9482) [0.001746] {0.5772}	0.8604 (0.587, 0.9894) [0.0003499] {0.1076}	0.1189 (0.06243, 0.2439) [0.0001567] {0.0494}	-0.00019

^a El modelo se estimó en OpenBUGS con el código para WinBUGS⁴ utilizado por Meyer y Yu (2000), se agradece al Dr. Yu por haber facilitado dicho código.

^b Se efectuaron 10,000 iteraciones como periodo de *burn-in* las que fueron descartadas y la inferencia se basa sólo en 100,000 iteraciones.

Los números entre paréntesis redondos son los intervalos de credibilidad posteriores al 95%, los números entre paréntesis cuadrados son los errores de Monte Carlo y los números entre llaves son las desviaciones estándar de las distribuciones posteriores de los parámetros.

evidencia suficientemente clara de la presencia de dicho efecto dado que el valor estimado de la media posterior de ρ es negativo (-0.001571).

Dada la magnitud pequeña del valor estimado para ρ en el último de los periodos analizados, el valor de la estimación del efecto apalancamiento combinado también resulta muy pequeño. Lo anterior sugiere que la asimetría propia del efecto apalancamiento únicamente será considerable ante caídas muy fuertes en los rendimientos, siendo sólo marginal el impacto que tendrá en la volatilidad del día siguiente la ocurrencia de un *shock* negativo moderado en los rendimientos en un día dado.

⁴ Tanto WinBUGS como OpenBUGS permiten realizar la inferencia bayesiana usando el muestreo de Gibbs, la diferencia es que OpenBUGS es el último desarrollo para BUGS.

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado la volatilidad del mercado bursátil mexicano en tres periodos, el preámbulo de la crisis financiera mundial de fines del siglo pasado, el periodo de efervescencia de la misma y el periodo posterior.

Para llevar a cabo dicho análisis se recurrió a la estimación de un modelo de volatilidad estocástica asimétrica mediante el método de Cadenas de Markov de Monte Carlo. Una cuestión importante a considerar es el comportamiento de la persistencia de la volatilidad, medida por el parámetro ϕ y la volatilidad de la misma volatilidad recogida por medio del parámetro σ_v . Además de significativa, la persistencia de la volatilidad en los dos periodos de estudio se comporta en forma bastante similar, prácticamente sin diferencia distinguible, pero notoriamente por debajo de los valores que normalmente se han estimado mediante modelos de la familia GARCH. De la misma forma encontramos que los valores estimados de la volatilidad de la volatilidad son prácticamente indistinguibles en los dos periodos. No obstante es conveniente destacar que para el periodo del seis de junio de 1996 al 29 de diciembre de 2000, Selçuk (2005) estima un valor de 0.86 para ϕ , es decir, el mismo que se reporta en el presente estudio. En el caso de σ_v , la estimación presentada anteriormente difiere considerablemente del valor de 0.5 que presenta Selçuk en dicho estudio.

La estimación del modelo asimétrico de volatilidad estocástica permitió capturar la asimetría de los *shocks* en la volatilidad y respecto al “efecto leverage” es de destacarse que únicamente se encontró evidencia de su presencia en los rendimientos del IPC durante el periodo de 2011 hasta el fin de la muestra. Sin embargo, es necesario destacar que la magnitud estimada de dicho efecto resulta pequeña en relación con las estimaciones previas presentadas por otros estudiosos, como Selçuk (2005) quien encuentra un valor de -0.32 para ρ durante el periodo antes mencionado, valor que resulta notoriamente mayor al que hemos reportado en el cuadro 2 de este documento.

Los hallazgos aquí reportados sugieren que si bien la persistencia de la volatilidad se ha mantenido bastante estable a lo largo de casi 20 años, considerando el periodo analizado en Selçuk (2005) y los resultados del presente estudio, tanto la volatilidad de la volatilidad como el efecto apalancamiento (cuando exhibe su presencia) han disminuido en forma ostensible. Naturalmente, es conveniente profundizar en el análisis de los rendimientos del mercado accionario mexicano para consolidar los conocimientos sobre

los efectos asimétricos, en particular sobre el llamado efecto apalancamiento que ha nutrido parte importante de la literatura respectiva.

Bibliografía

- Bekaert, G. y Wu, G. (2000). "Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets". *The Review of Financial Studies* 13(1): 1-42.
- Bessembinder, H. y Seguin, P. J. (1993). "Price Volatility, Trading Volume, and Market Depth: Evidence from Futures Markets". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28(1): 21-39.
- Black, F. (1976). "Studies of Stock Price Volatility Changes". Proceedings of the 1976 *Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section American Statistical Association*: 177-181.
- Christie, A. A. (1982). "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances. Value, Leverage and Interest Rate Effects". *Journal of Financial Economics* 10(4): 407-432.
- Fernández Izquierdo, M. A. y Aragón Manzana, V. (2002). "Transmisión de la Volatilidad entre los Mercados Bursátiles desde la Perspectiva de la Bolsa Española". Ponencia, V Encuentro de Economía Aplicada, Oviedo, España.
- Geman, Stuart y Geman, D. (1984). "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6(6): 721-741.
- Harvey, A. C., Ruiz, E. y Sheppard, N. (1994). "Multivariate Stochastic Variance Models". *Review of Economics Studies* 61(2): 247-264.
- Hernández Ángeles, I. F., Morales Castro, A. y Rodríguez Benavides, D. (2007). "Eficiencia y Volatilidad del Mercado Accionario en México, 1988-2005". *Revista de Análisis Económico y Social* 57(11): 898-905.
- Johnson, Christian A. y Soriano, F. A. (2004). "Volatilidad del Mercado Accionario y la Crisis Asiática, Evidencia Internacional de Asimetrías". *El Trimestre Económico* 71 (2): 355-388.
- Lanteri, L. (2004). "Efectos Asimétricos de la Incertidumbre en la Inflación y en la Actividad Económica Real: El Caso Argentino". Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos, IX Reunión de la Red de Investigadores de Bancos Centrales, San José, Costa Rica
- López Herrera, F. (2004). "Modelado de la Volatilidad y Pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores". *Contaduría y Administración* 49(2): 43-72.

- Meyer R., y Yu, J. (2000). "BUGS for a Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models". *Econometrics Journal* 3: 198-215.
- Mota, B. y Ludlow J. (2006). "Volatilidad del IPC, Nasdaq y SP&500: un modelo Garch multivariado". *Análisis Económico* 21(48): 215-227.
- Schwert, W. (1989). "Why Does Market Volatility Change Over Time?" *Journal of Finance* 44(5):1115-1153.
- Selçuk, F. (2005). "Asymmetric Stochastic in Emerging Stock Markets". *Applied Financial Economics* 15(12): 867-874.
- Yu, J. (2005). "On Leverage in a Stochastic Volatility Model". *Journal of Econometrics* 127: 165-178.

Escenarios Monte Carlo para estrategias con expectativas de baja volatilidad cambiante mediante opciones europeas de compra y venta

Monte Carlo scenarios for strategies with expectations of changing low volatility using European call and put options

Héctor Alonso Olivares Aguayo*

Ambrosio Ortiz-Ramírez**

Christian Bucio Pacheco***

Fecha de recepción: 1° de noviembre de 2014

Fecha de aceptación: 28 de enero de 2015

* Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía
hectorlivares@hotmail.com

** Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía
amortiz@ipn.mx

*** Universidad Autónoma del Estado de México,
Unidad Académica Profesional Huehuetoca
cbuciop@uaemex.mx

RESUMEN

En este trabajo se generan estrategias especulativas en volatilidad con opciones europeas sobre veintiún componentes del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y sobre este mismo índice, bajo el supuesto de que la volatilidad del activo subyacente es conducida por un proceso GARCH-M (1,1) calibrado con datos históricos, el precio de la opción se obtiene por simulación Monte Carlo. Con las estrategias de volatilidad construidas con los precios de las opciones simuladas se determinó que la estrategia *cono corto* es adecuada al realizar operaciones en el mercado mexicano (IPC) para plazos de 45 y 60 días, pero no para aquellas a 90 días. Asimismo se observó una relación directa entre el plazo y la estrategia cono corto en cuanto a ganancias al emplear ésta en el componente KIMBERA en el corto plazo, es decir, al aumentar el plazo, se obtuvo una mayor ganancia generada por dicha estrategia.

Clasificación JEL: C15, C58, G13, G17

Palabras clave: Monte Carlo, GARCH, valoración de opciones, volatilidad

ABSTRACT

In this paper speculative volatility strategies are generated with European options on twenty one components of the Mexican Stock Exchange (IPC) and on this same index, under the assumption that the volatility of the underlying asset is driven by a GARCH-M (1,1) process calibrated with historical data, the option price is obtained by Monte Carlo simulation. With volatility strategies built with simulated option prices, it was determined that the short cone strategy is adequate to trade in the Mexican market (IPC) for periods of 45 to 60 days, but not for 90 days periods. Moreover, a direct relationship between the term and the short cone strategy in terms of profits was observed when using this strategy in the KIMBERA component in the short term, i.e. by increasing the length a higher profit generated by such a strategy was obtained.

Clasificación JEL: C15, C58, G13, G17

Keywords: Monte Carlo, GARCH, option pricing, volatility.

Introducción

En esta investigación se distingue una parte del proceso de toma de decisiones de un agente racional que requiere invertir en un activo a saber: una opción. Para esto se considera que el agente tiene un perfil de riesgo de inversión agresivo, es decir, el objetivo es obtener ganancias al destinar parte de su riqueza a la compra de una opción. Sin embargo debe considerar el riesgo al que está expuesto al implementar estrategias para disminuir las pérdidas potenciales que pudiera tener, esto es, generando una cantidad determinada de posibles escenarios previos a su decisión de inversión. Las estrategias son generadas al comprar o vender opciones, o por las posibles combinaciones de al menos dos de éstas, de acuerdo a la expectativa del agente sobre la dinámica del mercado. Las estrategias de inversión son útiles porque el agente puede protegerse, tanto de los cambios del precio del subyacente y por supuesto de la volatilidad, es por ello que las estrategias pueden clasificarse en cinco clases: alcistas, bajistas, neutrales, de arbitraje y de volatilidad McMillan (2002). Sin embargo el factor más importante para determinar el precio de una opción es la incertidumbre asociada a la dinámica del activo subyacente, cuya fuente son los cambios abruptos en precio y del mercado, dicha incertidumbre usualmente es medida por su volatilidad. La volatilidad es una variable clave que está implícita en la mayoría de los instrumentos financieros y juega un papel central en muchas áreas de finanzas cuantitativas. Por ejemplo, la volatilidad es fundamental en los modelos de valuación de activos y en estrategias de cobertura dinámica, así como en la determinación de los precios de las opciones. De acuerdo con Cont (2001) una de las características de los rendimientos de las series de tiempo financieras es que su media parece ser constante mientras su varianza cambia con el tiempo. Además los rendimientos muestran *clusters* de volatilidad; grandes cambios en los rendimientos son seguidos por otros grandes cambios, tal fenómeno fue estudiado por primera vez en Mandelbrot (1963). Otra característica es que la distribución de los rendimientos tiende a tener colas más gordas en comparación con la distribución normal. Uno de los primeros economistas que trabajo sobre estos fenómenos, también conocidos como

hechos estilizados, fue Engle (1982) con el modelo autorregresivo de heterocedasticidad condicional (ARCH). Bollerslev (1986) lo extendió al modelo generalizado (GARCH).

La fórmula de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) basada en el supuesto de que el precio del activo subyacente sigue un proceso de difusión lognormal con volatilidad constante es la referencia usual para calcular precios de opciones sobre un subyacente sin pago de dividendos. No obstante, desde el punto de vista del mercado, este supuesto no se cumple, por ejemplo: las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Black y Scholes para diferentes plazos y precios de ejercicio no son constantes y tienden a ser en forma de sonrisa. Durante las últimas décadas múltiples trabajos han propuesto extensiones al modelo Black y Scholes para explicar este hecho estilizado. Un enfoque propuesto por Merton (1973) es que la volatilidad sea una función determinista del tiempo. Otros modelos que tratan con la heterocedasticidad incluyen, el modelo de elasticidad constante en la varianza (*constant-elasticity-of-variance model*) de Cox (1975), Christoffersen, Elkhami, Feunou y Jacobs (2010), Hao y Zhang (2013), entre otros.

Los modelos GARCH han resultado ser herramientas muy efectivas en la resolución de problemas que involucran a la volatilidad como variable de interés. La fortaleza más grande de los modelos GARCH es su capacidad para describir las propiedades de la varianza de los series de tiempo de los rendimientos de las variables financieras. Varias extensiones del modelo básico son capaces de describir hechos más atípicos de datos financieros, tales como los diferentes impactos de perturbaciones positivas y negativas en la volatilidad futura (véase Bollerslev, 2008, para una tentativa pero no lista exhaustiva sobre los modelos GARCH). Algunos trabajos relacionados con la valuación de opciones y otros temas son, por ejemplo, la caracterización de la medida de neutral al riesgo en el caso GARCH para valorar una opción basada en la función de utilidad de un agente representativo está en Duan (1995). Heston y Nandi (2000) proporciona una fórmula cerrada para el precio de la opción con un con un modelo GARCH para la volatilidad, aunque tiene implícito el cálculo de una integral compleja por métodos numéricos. En Angelidis, Benos y Degiannakis (2004) aplican los modelos GARCH al cálculo del Valor en Riesgo (VaR) y muestran que el uso de la distribución t-Student en lugar de una distribución normal mejora notablemente los pronósticos de VaR.

Este trabajo propone la construcción de estrategias especulativas de volatilidad con opciones europeas con el supuesto de que la volatilidad de la opción es conducida por un modelo GARCH-M calibrado con datos his-

tóricos y el precio de la opción se obtiene por simulación Monte Carlo. La hipótesis es que dicho modelo es viable cuando el inversionista tiene una expectativa de que el precio del subyacente se mantenga en el corto plazo, es decir, cuando se espera una volatilidad baja en tal componente. La metodología propuesta se aplica en la valuación de opciones europeas sobre 21 componentes del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y sobre el mismo IPC. El desarrollo del presente trabajo es como sigue. En la primera sección se presenta una breve descripción del modelo ARCH-M, en la sección 2 se desarrolla la metodología propuesta, en la sección 3 se presentan y analizan los resultados obtenidos, y por último, se presentan las conclusiones.

1. Modelo ARCH-M

El modelo ARCH de Engle (1982) es extendido en Engle, Lilien y Robins (1987) en el modelo ARCH-M con el supuesto que la media dependa de los movimientos de la varianza condicional. Enders (2009) explica que una clase particular de los modelos ARCH-M se pueden aplicar a series históricas de precios de activos, dado que una característica fundamental de estos mercados es que los inversionistas adversos al riesgo requieren una compensación para retener un activo riesgoso. Puesto que el riesgo de un activo puede ser medido por la varianza del rendimiento, el premio al riesgo puede incrementarse en función de la varianza condicional del rendimiento.

Engle *et al* (1987) expresan la idea anterior formulando el rendimiento en exceso del activo riesgoso por retener como sigue:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde:

y_t : rendimiento en exceso del activo que se desea retener,

μ_t : premio al riesgo necesario para inducir al inversionista a retener el activo

ε_t : "shock" no estimable del rendimiento en exceso de los activos

Esta ecuación explica que el exceso de rendimiento para retener el activo debe ser igual al premio al riesgo:

$$E_{t-1}(y_t) = \mu_t \quad (2)$$

Engle *et al* (1987) suponen que el premio al riesgo se incrementa en función de la varianza condicional de ε_t , es decir, el incremento de la varianza condicional de los rendimientos aumenta la compensación necesaria para inducir a los inversionistas a retener el activo a largo plazo. Formalmente, si σ_t^2 es la varianza condicional del premio al riesgo éste puede ser expresado como:

$$\mu_t = \beta + \delta\sigma_t^2, \quad (3)$$

donde σ_t^2 es un proceso ARCH(q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (4)$$

Una generalización del modelo ARCH-M(q) es el modelo ARCH-M(p,q) que considera a la varianza condicional como un modelo GARCH y está dado como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \mu_{t-j}^2. \quad (5)$$

Las ecuaciones anteriores constituyen la idea básica del modelo ARCH-M. De las dos primeras ecuaciones observamos que la media de y_t depende de la varianza condicional σ_t^2 . De las dos últimas ecuaciones, se observa que la varianza condicional es un proceso ARCH(q) y ARCH(p,q), respectivamente. Si la varianza condicional es constante $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_q = 0$ y el modelo ARCH-M degenera dentro del caso tradicional con premio al riesgo constante. La importancia del modelo ARCH-M es que incorpora la varianza condicional no constante al exceso de rendimiento necesario para retener el activo a largo plazo.

2. Modelo GARCH de valuación de opciones

El modelo de Black y Scholes, no obstante su renombre, exhibe algunos sesgos sistemáticos. Puesto que la volatilidad del subyacente es uno de los pa-

rámetros clave del modelo, el problema radica en si el proceso asumido es consistente con las características de la serie de tiempo del activo subyacente. Dado el hecho de que los modelos GARCH proporcionan una descripción eficiente de la dinámica del precio de un activo, en Duan (1995) se desarrolla un modelo para valorar opciones europeas que combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, se supone que la volatilidad es conducida por un proceso GARCH calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción se basa en argumentos de no arbitraje condicional a la volatilidad del proceso GARCH. Con esos supuestos, el modelo es capaz de reflejar los cambios en la volatilidad condicional del activo subyacente en una forma sencilla. No obstante, el modelo no tiene una solución en forma cerrada, para lo cual se recurre a la simulación Monte Carlo para obtener el precio de la opción. En seguida se plantea el modelo.

Suponga que los rendimientos diarios de un activo son independientes e idénticamente distribuidos como una normal:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim (\mu, \sigma). \quad (6)$$

El rendimiento agregado en T días se distribuye también normal con media μ y varianza σ^2 escaladas de la siguiente manera:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{S_{t+T}}{S_t}\right) \sim N(T\mu, T\sigma^2), \quad (7)$$

y el precio futuro del activo es:

$$S_{t+T} = S_t e^{R_{t+1:t+T}}. \quad (8)$$

En el modelo se supone que el rendimiento esperado del activo subyacente es igual a la tasa libre de riesgo, r , más un premio al riesgo por volatilidad, λ y un término de normalización. El rendimiento diario observado es igual al rendimiento esperado más un término de perturbación. La distribución condicional de este término se distribuye normal con media cero y la varianza sigue un proceso GARCH-M (1,1) con apalancamiento. Al hacer que el rendimiento pasado entre en la varianza con la magnitud del signo del rendimiento, el efecto de apalancamiento crea una asimetría en la distribución

de los rendimientos. Esta asimetría es importante para capturar el sesgo implícito observado en precios de opciones. Específicamente, se supone que el proceso de rendimientos del subyacente satisface:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}, \text{ con } z_{t+1} \sim N(0,1), \quad (9)$$

y

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2. \quad (10)$$

Note que el valor esperado y la varianza del rendimiento del periodo siguiente condicional a toda la información disponible al tiempo t son:

$$\begin{aligned} E[R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= r + \lambda\sigma_{t+1}, \\ \text{Var}[R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= \sigma_{t+1}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Para una variable $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, se sabe que $E(e^x) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, por lo que la esperanza condicional del proceso anterior es:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathfrak{F}_t\right] &= E\left[\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}\right) \mid \mathfrak{F}_t\right] \\ &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} E\left[e^{\sigma_{t+1}z_{t+1}} \mid \mathfrak{F}_t\right] \\ &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} \\ &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Donde se ha usado $\sigma_{t+1}z_{t+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$. La ecuación del rendimiento esperado en la ecuación (12) destaca el papel de λ como la prima al riesgo de la volatilidad. De esta manera se obtiene el precio de la opción bajo neutralidad al riesgo como:

$$c = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max(S_{t+T} - K, 0) \mid \mathfrak{F}_t \right],$$

de donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathfrak{F}_t \right] &= e^r, \\ \text{Var} [R_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] &= \sigma_{t+1}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

De modo que la tasa esperada de rendimiento en el activo con riesgo es igual a la tasa libre de riesgo y la varianza condicional bajo neutralidad al riesgo es la misma que bajo el proceso original. Considere el proceso siguiente:

$$R_{t+1} = \ln \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = r + \lambda \sigma_{t+1} - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1}, \quad \text{con } z_{t+1} \sim N(0, 1) \quad (14)$$

donde:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (15)$$

En este caso, se puede comprobar que la esperanza condicional es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathfrak{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1} \right) \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &= e^{r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2} \mathbb{E} \left[(\sigma_{t+1} z_{t+1}) \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &= e^{r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2} e^{\frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2} \\ &= e^r, \end{aligned} \quad (16)$$

lo cual satisface la primera condición en la ecuación (13). Además, la varianza condicional bajo el proceso neutral al riesgo es:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 | \mathfrak{F}_t \right] \\
 &= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(R_t - r + \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t \right)^2 + \beta \sigma_t^2 | \mathfrak{F}_t \right] \\
 &= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 | \mathfrak{F}_t \right] \\
 &= \sigma_{t+1}^2, \tag{17}
 \end{aligned}$$

Donde la última igualdad resulta de la varianza del periodo $t + 1$, que es conocida a final del periodo t en el modelo GARCH-M (1,1). Por lo tanto, se puede concluir que las condiciones para un proceso neutral al riesgo se cumplen.

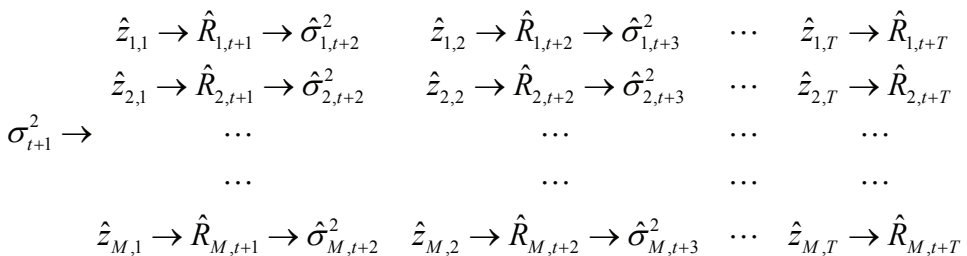
3.1 Aplicación del modelo por simulación Monte Carlo

Hasta este punto se ha desarrollado un procedimiento para valuar una opción europea bajo neutralidad al riesgo, pero como no se cuenta con una fórmula cerrada, se utiliza la simulación Monte Carlo para calcular el precio de la opción como el valor presente del valor intrínseco de una opción de compra:

$$c = e^{-rT} E \left[\max(S_{t+T} - K, 0 | \mathfrak{F}_t) \right] \tag{18}$$

En la Figura 1 se representa el proceso de simulación de rendimientos desde el periodo $t + 1$ hasta el periodo $t + T$, las $\hat{z}_{i,j}$ son variables aleatorias de una distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y M es el número de trayectorias de los rendimientos

Figura 1. Simulación de los rendimientos $t + 1$ a $t + T$



Fuente: Elaboración propia.

simulados. Observe que al final del periodo t obtenemos R_t por lo que se puede calcular σ_{t+1}^2 que es la varianza del periodo $t + 1$ en el modelo GARCH.

Para ejecutar la simulación observe que se puede eliminar un parámetro al reescribir la ecuación (15):

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 \\ \sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \delta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2.\end{aligned}\quad (19)$$

Con $\delta = \lambda + \theta$. Ahora, para una varianza condicional dada σ_{t+1}^2 , y parámetros, $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta$ dados, se puede utilizar simulación Monte Carlo para crear trayectorias de los rendimientos del activo.

Es necesario calcular la esperanza en la ecuación (18) usando el proceso neutral al riesgo. Primero se calcula el rendimiento simulado neutral al riesgo en el periodo $t + j$ para la trayectoria i de la simulación como:

$$\hat{R}_{i,t+j} = r - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i,t+j}^2 + \hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j} \quad (20)$$

y la varianza es actualizada por:

$$\hat{\sigma}_{i,t+j+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j} - \delta \hat{\sigma}_{i,t+j})^2 + \beta \hat{\sigma}_{i,t+j}^2. \quad (21)$$

En una primera instancia las trayectorias simuladas empiezan con σ_{t+1}^2 por lo que:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{i,t+1} &= r - \frac{1}{2} \sigma_{i,t+1}^2 + \sigma_{i,t+1} \hat{z}_{i,1} \\ \sigma_{i,t+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_{i,t+1} \hat{z}_{i,1} - \delta \sigma_{i,t+1})^2 + \beta \sigma_{i,t+1}^2\end{aligned}$$

Una vez que se han simulado por ejemplo 1,000,000 trayectorias ($M = 1,000,000$) cada día hasta la fecha de vencimiento T , es posible calcular los precios estimados del activo neutral al riesgo en el vencimiento como:

$$S_{i,t+T} = S_i e^{\sum_{j=1}^T \hat{R}_{i,t+j}}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

El precio de la opción de compra (*call*) se calcula como el valor presente del promedio de los pagos futuros estimados:

$$c_{\text{GARCH}} = e^{-rT} E \left[\max(S_{t+T} - K, 0 | \mathfrak{F}_t) \right] \approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{i,t+T} - K, 0). \quad (23)$$

Para el caso de la opción de venta (*put*) se tiene:

$$p_{\text{GARCH}} = e^{-rT} E \left[\max(K - S_{t+T}, 0 | \mathfrak{F}_t) \right] \approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(K - S_{i,t+T}, 0). \quad (24)$$

De esta manera se utiliza la simulación para calcular el precio de la opción, que es usado como una estimación del valor esperado en las ecuaciones (23) y (24). En estas condiciones a mayor número de realizaciones del proceso considerado el promedio converge a la esperanza.

3. Aplicación y análisis de resultados

En esta sección se muestra la valuación de opciones europeas de compra y venta sobre veintidós componentes del IPC y sobre este mismo índice; con la metodología propuesta en la sección anterior. La muestra comprende del primero de febrero de 2008 hasta el veintidós de marzo de 2013 (1294 observaciones). Para cada serie histórica de los componentes seleccionados se calibró un modelo GARCH-M(1,1) por máxima verosimilitud, en el Apéndice A se muestra una tabla con la significancia de los parámetros. Posteriormente se diseñó y ejecutó un algoritmo para simular trayectorias y precios de opciones para cada componente por simulación Monte Carlo con Matlab® (véase Apéndice B), con los cuales se conforma la estrategia *cono corto*¹ (baja expectativa de volatilidad). Se realizaron 100,000 simulaciones para cada opción de compra y de venta.

¹ Un cono corto (*short straddle*) consiste en una posición corta en una opción de compra y en una opción de venta con el mismo precio de ejercicio y vencimiento (Cohen, 2005).

En la distribución por sectores se observa que el sector económico que predomina es el de alimentos y bebidas integrado por los componentes: AC, GRUMAB, BIMBOA, ALSEA y KOFL, como se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 1. Distribución de los componentes que conforman el IPC

Acción	Sector (eco)	Subsector (NAICS tercera clasificación)
GAPB	Servicios de transporte	Servicios relacionados con el transporte aéreo
AC	Alimentos y bebidas	Industria de bebidas
URBI	Construcción	Construcción de edificios residenciales
GRUMAB	Alimentos y bebidas	Molienda de granos y de semillas oleaginosas
GEOB	Construcción	Construcción de edificios residenciales
ELEKTRA	Comercio	Tienda de mercancías diversas
BIMBOA	Alimentos y bebidas	Elaboración de productos de panadería y tortillas
ALSEA	Alimentos y bebidas	Industria alimentaria
HOMEX	Construcción	Construcción de edificios residenciales
AMXL	Telecomunicación	Otras telecomunicaciones
GFNORTEO	Finanzas y seguros	Bancos
WALMEXV	Comercio	Tienda de mercancías diversas
ALFAA	Siderurgia y metalurgia	Fabricación de productos metálicos forjados y troquelados
KOFL	Alimentos y bebidas	Industria de bebidas
GMEXICOB	Minería	Minería de minerales metálicos y no metálicos
CEMEXCPO	Minerales no metálicos	Fabricación de cemento y productos de concreto
GFINBURO	Finanzas y seguros	Actividades bursátiles cambiarias y de inversión financiera
MEXCHEM	Química	Fabricación de productos químicos
KIMBERA	Papel y celulosa	Fabricación de productos de papel y cartón
ICHB	Siderurgia y metalurgia	Fabricación de herramientas de mano sin motor y utensilios de cocina metálicos
ASURB	Servicios de transporte	Servicios relacionados con el transporte aéreo
IPC	Indice de precios y cotizaciones	

Fuente: Elaboración propia con datos de Economatica.

A continuación se muestran los resultados de los valores de las primas de las opciones europeas de compra (*call*) y de venta (*put*) para los componentes del IPC que fueron consistentes en ganancias con la estrategia *cono corto* a plazos de 45, 60 y 90 días.

Tabla 2. Precio de la opción call sobre BIMBOA, con precio inicial de 36.6

K	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
34	2.9808	3.1646	3.5137
35	2.2596	2.4841	2.8883
36	1.6541	1.905	2.3453
37	1.1706	1.4302	1.8835
38	0.8036	1.0545	1.4989
39	0.5385	0.7658	1.1842

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3. Precio de la opción put sobre BIMBOA, con precio inicial de 36.6

K	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 60 días	Put GARCH a 90 días
34	0.3947	0.5831	0.9414
35	0.6682	0.8955	1.3054
36	1.0574	1.3093	1.7517
37	1.5685	1.8273	2.2792
38	2.1961	2.4446	2.884
39	2.9257	3.1487	3.5586

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4. Precio de la opción call sobre AMXL, con precio inicial de 12.58

K	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
10	2.6080	2.6370	2.7002
11	1.7332	1.8026	1.9236
12	1.0301	1.1341	1.3021
13	0.5494	0.6636	0.8463
14	0.2692	0.3683	0.5361
15	0.1255	0.1976	0.3355

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Precio de la opción put sobre AMXL, con precio inicial de 12.58

K	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 60 días	Put GARCH a 90 días
10	0.0418	0.0753	0.1477
11	0.1617	0.2338	0.3604
12	0.4532	0.5583	0.7283
13	0.9671	1.0807	1.2618
14	1.6816	1.7781	1.9409
15	2.5326	2.6004	2.7297

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6. Precio de la opción call sobre KIMBERA, con precio inicial de 39.77

K	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
37	3.3977	3.6197	4.0058
38	2.7097	2.9632	3.3922
39	2.1150	2.3890	2.8470
40	1.6165	1.8992	2.3695
41	1.2120	1.4914	1.9578
42	0.8946	1.1591	1.6076

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7. Precio de la opción put sobre KIMBERA, con precio inicial de 39.77

K	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 60 días	Put GARCH a 90 días
37	0.6425	0.8695	1.2654
38	0.9492	1.2058	1.6411
39	1.3491	1.6245	2.0852
40	1.8453	2.1276	2.5970
41	2.4354	2.7126	3.1747
42	3.1127	3.3732	3.8138

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Precio de la opción call sobre IPC, con precio inicial de 42,686.68 puntos

K	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
41000	1945.2000	2065.1000	2288.2000
42000	1247.7000	1402.1000	1671.6000
43000	731.7023	896.2864	1181.2000
44000	395.2637	544.3217	812.2133
45000	201.2439	317.4673	547.8110
46000	99.0778	180.1104	365.2833

Fuente: Elaboración propia.

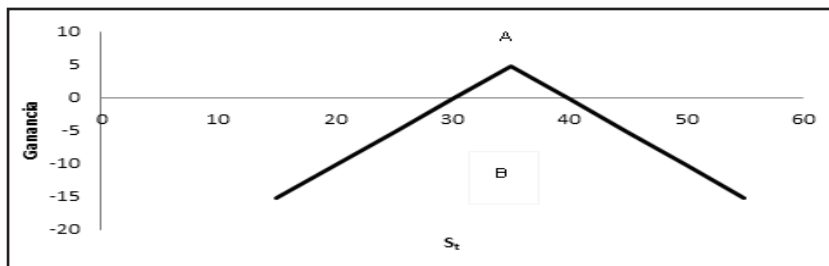
Tabla 9. Precio de la opción put sobre IPC, con precio inicial de 42,686.68 puntos

K	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 60 días	Put GARCH a 90 días
41000	267.5245	390.4266	619.4986
42000	564.7368	720.3271	992.2546
43000	1043.3000	1207.4000	1491.2000
44000	1701.6000	1848.3000	2111.5000
45000	2502.2000	2614.3000	2836.4000
46000	3394.7000	3469.8000	3643.2000

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la obtención de los precios de las opciones europeas de compra y venta anteriormente descritos, se construyen 396 estrategias como corto las cuales se dividen en 2 zonas como se muestra en la Figura 2:

Figura 2. Representación por zona de la estrategia como corto



Fuente: Elaboración propia.

La estrategia se compone por dos zonas. La **zona B**, representa pérdidas y la **zona A** las ganancias, por lo cual con la estrategia como corto la expectativa del inversionista es de baja volatilidad, es decir, se espera que el valor del activo subyacente no tenga una alta variación, ya que de permanecer el mercado estable se ganarían las primas cobradas, mientras que se incurriría en fuertes pérdidas si el mercado muestra fuertes ascensos o descensos.

En las siguientes tablas se observan los resultados obtenidos mediante la estrategia como corto a plazos de 45, 60 y 90 días.

Tabla 10. Distribución de las 132 estrategias como corto con plazo a 45 días

Componente	P	G	Componente	P	G
GAPB	0	6	ALFAA	2	4
AC	6	0	KOFL	2	4
URBI	5	1	GMEXICOB	6	0
GRUMAB	4	2	CEMEXCPO	4	2
GEOB	4	2	GFINBURO	3	3
ELEKTRA	3	3	MEXCHEM	6	0
BIMBOA	2	4	KIMBERA	0	6
ALSEA	4	2	ICHB	5	1
HOMEX	6	0	ASURB	4	2
AMXL	1	5	Total	74	52
GFNORTEO	4	2	IPC	1	5
WALMEXV	3	3			

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla anterior se observa que en la distribución de los componentes del IPC se obtuvieron 74 estrategias como corto con pérdidas, mientras que en 52 ganancias y en el IPC de las seis estrategias elaboradas sólo en una se obtuvieron pérdidas.

En la Tabla 11 se observa que en la distribución de los componentes del IPC se obtuvieron 77 estrategias como corto con pérdidas, mientras que en 49 ganancias y en el IPC de las seis estrategias elaboradas en dos se obtuvieron ganancias.

Tabla 11. Distribución de las 132 estrategias como corto con plazo a 60 días

Componente	P	G	Componente	P	G
GAPB	3	3	ALFAA	5	1
AC	0	6	KOFL	3	3
URBI	5	1	GMEXICOB	6	0
GRUMAB	4	2	CEMEXCPO	4	2
GEOB	5	1	GFINBURO	6	0
ELEKTRA	4	2	MEXCHEM	6	0
BIMBOA	0	6	KIMBERA	0	6
ALSEA	2	4	ICHB	5	1
HOMEX	6	0	ASURB	4	2
AMXL	0	6	Total	77	49
GFNORTEO	6	0	IPC	4	2
WALMEXV	3	3			

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 12 se observa que en la distribución de los componentes del IPC se obtuvieron 83 estrategias como corto con pérdidas, mientras que en 43 ganancias y en el IPC en las seis estrategias elaboradas se obtuvieron pérdidas.

Tabla 12. Distribución de las 132 estrategias como corto con plazo a 90 días

Componente	P	G	Componente	P	G
GAPB	6	0	ALFAA	6	0
AC	0	6	KOFL	4	2
URBI	5	1	GMEXICOB	6	0
GRUMAB	0	6	CEMEXCPO	4	2
GEOB	5	1	GFINBURO	6	0
ELEKTRA	4	2	MEXCHEM	6	0
BIMBOA	0	6	KIMBERA	0	6
ALSEA	6	0	ICHB	6	0
HOMEX	6	0	ASURB	4	2
AMXL	0	6	Total	83	43
GFNORTEO	6	0	IPC	6	0
WALMEXV	3	3			

Fuente: Elaboración propia.

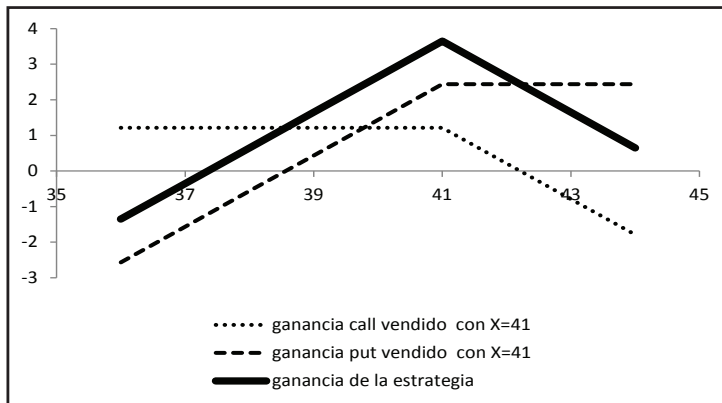
En el análisis realizado se observó que la empresa Kimberly-Clark no solo es la más consistente en ganancias con la estrategia como corto, es también la empresa que muestra las mayores ganancias al emplear dicha estrategia, las cuales se muestran en la Tabla 13:

Tabla 13. Estrategia como corto para el componente KIMBERA a 45 días

S	ganancia call corto con X=41	ganancia put corto con X=41	ganancia de la estrategia
36	1.212	-2.5646	-1.3526
37	1.212	-1.5646	-0.3526
38	1.212	-0.5646	0.6474
39	1.212	0.4354	1.6474
40	1.212	1.4354	2.6474
41	1.212	2.4354	3.6474
42	0.212	2.4354	2.6474
43	-0.788	2.4354	1.6474
44	-1.788	2.4354	0.6474
41.29	0.922	2.4354	3.3574

Fuente: Elaboración propia.

Figura 3. Representación gráfica de la estrategia como corto para el componente KIMBERA a 45 días



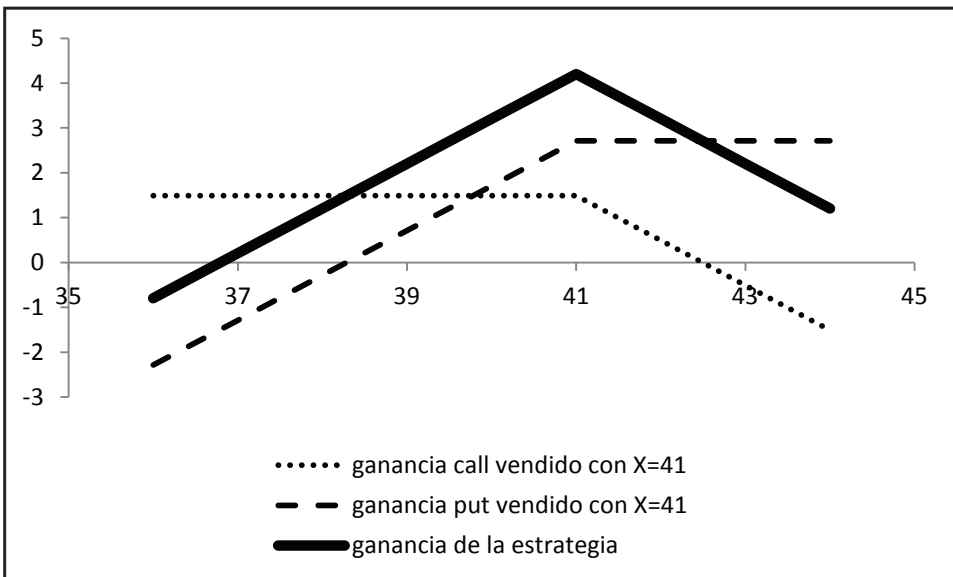
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 14. Estrategia como corto para el componente KIMBERA a 60 días

S	ganancia call corto con X=41	ganancia put corto con X=41	ganancia de la estrategia
36	1.4914	-2.2874	-0.7960
37	1.4914	-1.2874	0.2040
38	1.4914	-0.2874	1.2040
39	1.4914	0.7126	2.2040
40	1.4914	1.7126	3.2040
41	1.4914	2.7126	4.2040
42	0.4914	2.7126	3.2040
43	-0.5086	2.7126	2.2040
44	-1.5086	2.7126	1.2040
40.66	1.4900	2.3700	3.8640

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Representación gráfica de la estrategia como corto para el componente KIMBERA a 60 días



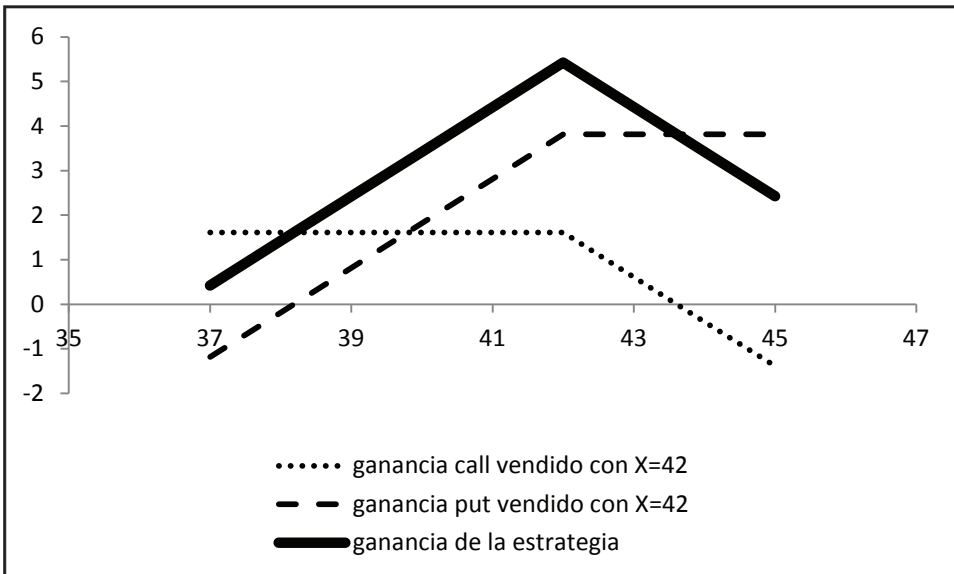
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 15. Estrategia como corto para el componente KIMBERA a 90 días

S	ganancia call corto con X=42	ganancia put corto con X=42	ganancia de la estrategia
37	1.6076	-1.1862	0.4214
38	1.6076	-0.1862	1.4214
39	1.6076	0.8138	2.4214
40	1.6076	1.8138	3.4214
41	1.6076	2.8138	4.4214
42	1.6076	3.8138	5.4214
43	0.6076	3.8138	4.4214
44	-0.3924	3.8138	3.4214
45	-1.3924	3.8138	2.4214
41.64	1.6076	3.4538	5.0614

Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. Representación gráfica de la estrategia como corto para el componente KIMBERA a 90 días



Fuente: Elaboración propia.

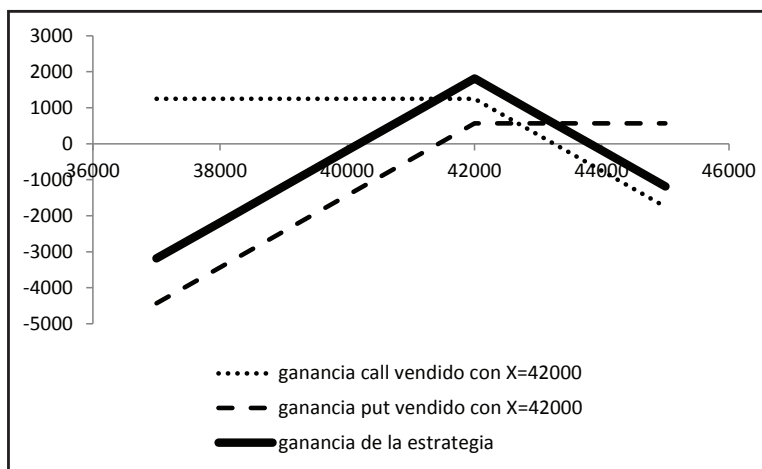
Asimismo se analizaron las mismas estrategias para el mercado mexicano (IPC) donde se observaron ganancias para a temporalidades de 45 y 60 días y pérdidas para 90 días como se muestra en las figuras siguientes:

Tabla 16. Estrategia como corto para el IPC a 45 días

S	ganancia call corto con X=42000	ganancia put corto con X=42000	ganancia de la estrategia
37000	1247.7000	-4435.26	-3187.5632
38000	1247.7000	-3435.26	-2187.5632
39000	1247.7000	-2435.26	-1187.5632
40000	1247.7000	-1435.26	-187.5632
41000	1247.7000	-435.26	812.4368
42000	1247.7000	564.74	1812.4368
43000	247.7000	564.74	812.4368
44000	-752.3000	564.74	-187.5632
45000	-1752.3000	564.74	-1187.5632
42406.7	841.0300	564.74	1405.7668

Fuente: Elaboración propia.

Figura 6. Representación gráfica de la estrategia como corto para el IPC a 45 días



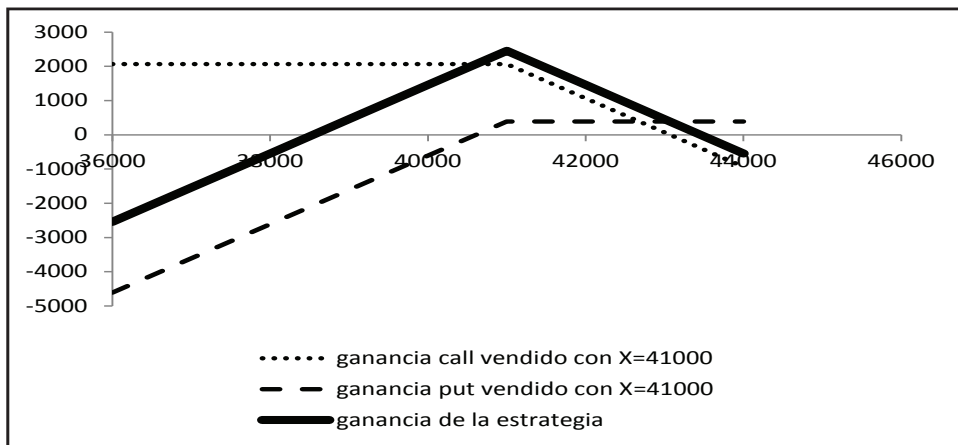
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 17. Estrategia como corto para el IPC a 60 días

S	ganancia call corto con X=41000	ganancia put corto con X=41000	ganancia de la estrategia
36000	2065.1	-4609.57	-2544.4734
37000	2065.1	-3609.57	-1544.4734
38000	2065.1	-2609.57	-544.4734
39000	2065.1	-1609.57	455.5266
40000	2065.1	-609.57	1455.5266
41000	2065.1	390.43	2455.5266
42000	1065.1	390.43	1455.5266
43000	65.1	390.43	455.5266
44000	-934.9	390.43	-544.4734
40119.02	2065.1	-490.55	1574.5466

Fuente: Elaboración propia.

Figura 7. Representación gráfica de la estrategia como corto para el IPC a 60 días



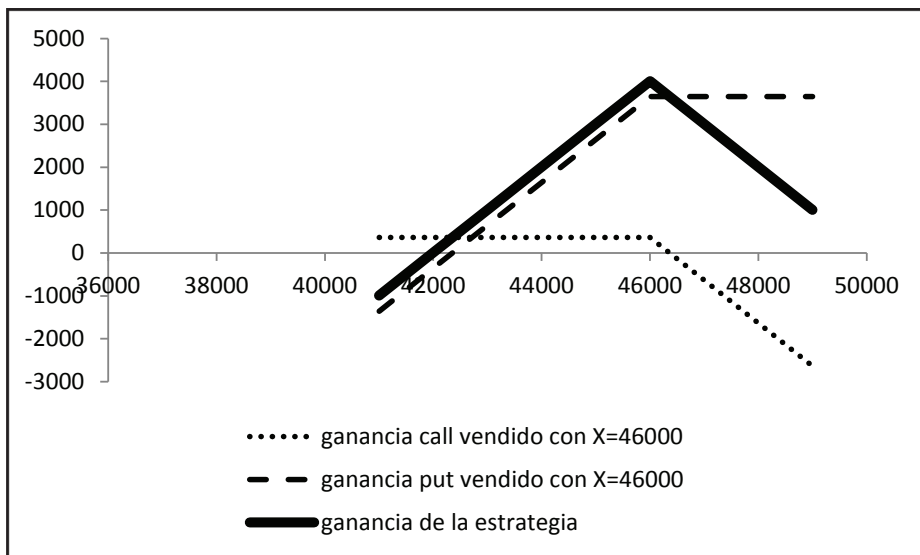
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 18. Estrategia como corto para el IPC a 90 días

S	ganancia call corto con X=46000	ganancia put corto con X=46000	ganancia de la estrategia
41000	365.2800	-1356.8000	-991.5167
42000	365.2800	-356.8000	8.4833
43000	365.2800	643.2000	1008.4833
44000	365.2800	1643.2000	2008.4833
45000	365.2800	2643.2000	3008.4833
46000	365.2800	3643.2000	4008.4833
47000	-634.7200	3643.2000	3008.4833
48000	-1634.7200	3643.2000	2008.4833
49000	-2634.7200	3643.2000	1008.4833
38036.46	365.2800	-4320.3400	-3955.0567

Fuente: Elaboración propia.

Figura 8. Representación gráfica de la estrategia como corto para el IPC a 90 días



Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo ha sido proponer una metodología sustentada en conceptos econométricos, financieros y computacionales, de tal manera que proporcionen a un agente económico herramientas robustas para la toma de decisiones en la conformación de un portafolio de inversión en un contexto de administración de riesgo. En la gran mayoría de temas del análisis de riesgo la medida más utilizada es la volatilidad. Desde un enfoque econométrico la varianza condicional de series de tiempo financieras se utiliza para el cálculo de medidas de riesgo por posiciones en un activo, en la construcción de portafolios y en la valuación de opciones. Para algunos modelos, como el CAPM (Capital Asset Pricing Model) y el modelo de Black y Scholes, se supone que los rendimientos son independientes y siguen una distribución normal con varianza constante. Este supuesto no se verifica empíricamente en series de tiempo financieras. Los modelos GARCH son una alternativa que extiende el supuesto de volatilidad constante del modelo Black y Scholes.

En este trabajo se ha presentado la valuación de opciones europeas de venta sobre veintiún de los treinta y cinco componentes del IPC al igual que del IPC, bajo el supuesto de que la volatilidad en los rendimientos del activo subyacente es conducida por un modelo GARCH-M(1,1) calibrado con datos históricos. Puesto que no se cuenta con una fórmula cerrada para el precio de la opción se diseñó un algoritmo de simulación Monte Carlo para obtener el precio de la opción con los supuestos antes descritos. Con los precios obtenidos se generaron estrategias especulativas de volatilidad para cada componente considerado en el análisis. Una de las ventajas de la simulación Monte Carlo es que permite determinar el valor esperado de las primas de las opciones financieras, es decir, el sustento teórico que hay detrás del método Monte Carlo es la ley de los grandes números, la cual establece que a medida que el número de las simulaciones tiende a infinito, se tendrá una convergencia al valor esperado de la prima de la opción, lo que constituye una metodología robusta al elaborar las estrategias especulativas.

Mediante la estrategia cono corto se determinó que es posible obtener ganancias en el IPC para inversiones a 45 y 60 días, pero ésta estrategia no es adecuada para inversiones a 90 días en el mercado mexicano. Se observó que la estrategia cono corto genera resultados aceptables al invertir en KIMBERA, esto resultó factible, debido a que el precio de la misma no tuvo una gran variación en los diferentes periodos de tiempo analizados, es decir, el

precio de la acción de KIMBERA al 22 de Marzo del 2013 es de \$39.77, 45 días después fue de \$41.29, 60 días después fue de \$40.66 y 90 días después fue de \$41.64. Por lo tanto el precio se mantuvo estable y al no mostrar cambios significativos la estrategia como corto funcionó adecuadamente.

Por último se observó una relación directa entre el plazo y las ganancias obtenidas mediante la estrategia como corto en KIMBERA, ya que se observa una mayor ganancia por estrategia en cada periodo de tiempo analizado.

Bibliografía

- Angelidis, T., A. Benos, y S. Degiannakis (2004). *The use of GARCH models in VaR estimation*. Statistical Methodology, vol. 1, no. 2, pp. 105-128.
- Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, vol. 31, no. 3, pp. 307-327.
- _____ (2008). Glossary to ARCH (GARCH). In T. Bollerslev, J.R. Russell and M. Watson (editores). *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle*, Oxford: Oxford University Press.
- Cohen, G. (2005). *The Bible of Options Strategies, the Definitive Guide for Practical Trading Strategies*. (1a. ed.), Upper Saddle River, New Jersey, USA, Financial Times Prentice Hall.
- Cont, R., (2001). *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues*. Quantitative Finance, vol. 1, pp. 223-236.
- Cox, J. (1975). "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions". *Working Paper*, Stanford University.
- Christoffersen, P., R. Elkamhi, B. Feunou, y K. Jacobs (2010). "Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Non-Normality", *Review of Financial Studies*, vol. 23, no. 5, pp. 2139-2183.
- Duan, J. (1995). *The GARCH Option Pricing Model*. Mathematical Finance, vol. 5, no. 1, pp. 13-32.
- Enders, W. (2009). *Applied Econometrics Time Series*, Third edition, John-Wiley & Sons.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987-1008.

- Engle, R. F., Lilien, D. M. y Robins, R. P. (1987). "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model". *Econometrica*, vol. 55, no. 2, pp. 391- 407.
- Hao, Jinji y Zhang, Jin E. (2013). "GARCH Option Pricing Models, the CBOE VIX, and Variance Risk Premium". *Journal of Financial Econometrics*, vol. 11, no. 3, pp. 556-580.
- McMillan, Lawrence G. (2002). *Options as a Strategic Investment*. (4a. ed.). Prentice Hall.
- Mandelbrot, B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices". *The Journal of Business*, vol. 36, no. 4, pp. 394-419.
- Merton, C. R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*. vol. 4, no. 1, pp. 141-183.

Apéndice A

Comp	Parámetro	Coef.	Error St.	Est. t	p-value	Comp	Parámetro	Coef.	Error St.	Est. t	p-value
GAPB	α_0	0.0176	0.0185	0.9532	0.3407*	WALMEXV	α_0	0.0953	0.0431	2.2101	0.0273
	α_1	0.9454	0.0292	32.4045	0.0000		α_1	0.9000	0.0211	42.7280	0.0000
	Δ	0.0215	0.0210	1.0245	0.3058*		δ	0.0105	0.0332	0.3162	0.7519*
	B	0.0506	0.0261	1.9375	0.0529		β	0.0695	0.0153	4.5583	0.0000
AC	α_0	0.2276	0.0803	2.8359	0.0046	ALFAA	α_0	0.8545	0.2145	3.9836	0.0001
	α_1	0.5884	0.0797	7.3803	0.0000		α_1	0.0070	0.0023	2.9880	0.0029
	Δ	0.0411	0.0316	1.3019	0.1932*		δ	0.0800	0.7622	0.1050	0.9164
	B	0.3387	0.0875	3.8691	0.0001		β	0.6932	0.0736	9.4242	0.0000
URBI	α_0	0.9899	0.1547	6.3986	0.0000	KOFL	α_0	0.0518	0.0264	1.9572	0.0500
	α_1	0.0022	0.0009	2.5671	0.0104		α_1	0.9170	0.0228	40.2052	0.0000
	Δ	0.0750	1.3078	0.0574	0.9543		δ	-0.0202	0.0210	-0.9629	0.3358*
	B	0.8036	0.0410	19.5891	0.0000		β	0.0711	0.0222	3.2004	0.0014
GRUMAB	α_0	0.0094	0.0034	2.7503	0.0060	GMEXICOB	α_0	0.3146	0.0706	4.4564	0.0000
	α_1	0.5320	0.1135	4.6858	0.0000		α_1	0.0018	0.0005	3.3463	0.0008
	Δ	0.0840	0.0223	3.7639	0.0002		δ	0.0800	1.0903	0.0734	0.9415*
	B	0.4277	0.1458	2.9326	0.0034		β	0.8886	0.0244	36.4715	0.0000
GEOB	α_0	0.8016	0.2015	3.9774	0.0001	CEMEXCPO	α_0	0.4211	0.1688	2.4943	0.0127
	α_1	0.0029	0.0011	2.6376	0.0084		α_1	0.0009	0.0004	2.2519	0.0245
	Δ	0.0801	0.8246	0.0971	0.9227*		δ	0.0817	1.8915	0.0432	0.9656*
	B	0.7956	0.0502	15.8641	0.0000		β	0.9020	0.0415	21.7231	0.0000
ELEKTRA	α_0	0.7502	0.1428	5.2552	0.0000	GFINBURO	α_0	0.4404	0.1417	3.1075	0.0019
	α_1	0.0033	0.0010	3.3983	0.0007		α_1	0.0018	0.0010	1.8565	0.0636
	Δ	0.0800	0.7944	0.1007	0.9198*		δ	0.0801	1.5287	0.0524	0.9582*
	B	0.7946	0.0367	21.6790	0.0000		β	0.8706	0.0291	29.8950	0.0000
BIMBOA	α_0	0.1995	0.1037	1.9234	0.0546	MEXCHEM	α_0	0.0006	0.0003	2.0794	0.0378
	α_1	0.0028	0.0015	1.8882	0.0592		α_1	0.9168	0.0239	38.3305	0.0000
	Δ	0.0813	1.0170	0.0800	0.9363*		δ	-0.0326	0.1411	-0.2313	0.8171*
	B	0.8936	0.0549	16.2859	0.0000		β	0.0728	0.0226	3.2171	0.0013
ALSEA	α_0	0.4210	0.1348	3.1232	0.0018	KIMBERA	α_0	0.1033	0.0481	2.1463	0.0320
	α_1	0.0022	0.0008	2.8464	0.0045		α_1	0.8636	0.0398	21.6891	0.0000
	Δ	0.0800	0.9959	0.0804	0.9359		δ	0.0041	0.0257	0.1586	0.8740*
	B	0.8524	0.0444	19.1238	0.0000		β	0.1066	0.0321	3.3170	0.0009
HOMEX	α_0	0.6432	0.1972	3.2620	0.0011	ICHB	α_0	0.1997	0.1218	1.6402	0.1012
	α_1	0.0013	0.0004	2.9000	0.0038		α_1	0.0016	0.0007	2.1290	0.0334
	Δ	0.0812	1.4721	0.0552	0.9560*		δ	0.0800	3.9242	0.0204	0.9837*

	B	0.8656	0.0409	21.1670	0.0000		β	0.9184	0.0555	16.5451	0.0000
AMXL	α_0	0.0051	0.0022	2.2946	0.0219	ASURB	α_0	0.0349	0.0228	1.5305	0.1261
	α_1	0.1149	0.0170	6.7368	0.0000		α_1	0.9497	0.0162	58.7433	0.0000
	Δ	0.0800	0.4645	0.1722	0.8633*		δ	-0.0040	0.0288	-0.1401	0.8886
	B	0.8051	0.0711	11.3167	0.0000		β	0.0412	0.0127	3.2329	0.0013
GFNORTEO	α_0	0.0015	0.0007	2.2976	0.0217	IPC	α_0	0.0138	0.0061	2.2549	0.0243
	α_1	0.8183	0.0512	15.9796	0.0000		α_1	0.9079	0.0176	51.7153	0.0000
	Δ	0.1116	0.1221	0.9136	0.3611*		δ	0.0344	0.0282	1.2193	0.2230*
	B	0.1671	0.0520	3.2154	0.0013		β	0.0844	0.0183	4.6041	0.0000

*Parámetros con nivel de significancia mayor a 5%.

Nota: Los parámetros sin * son significativos al 5%.

Apéndice B

En este apéndice se describe el algoritmo utilizado para simular trayectorias y precios de opciones para cada acción por simulación Monte Carlo.

1.- Dar coeficientes y valores del modelo: $\alpha_0, \alpha_1, \delta, \beta$, varianza condicional dada $\sigma^2(t) = h(t)$, $z(1) = 0$: muestras de $\mathcal{N}(0, 1)$, $S(1, \cdot) =$ precio subyacente, $M =$ número de trayectorias a simular, N : plazo al vencimiento de la opción en días, $T = N / 360$, vencimiento en días, K : precio de ejercicio de la opción, r : tasa libre de riesgo;

2.- Simular trayectorias del precio del subyacente con su volatilidad dinámica, obtener el valor final S_T , calcular el precio de la opción (compra y de venta) de acuerdo con:

```
for i = 1 : M;
    for t = 2 : N
        h(t) = alpha_0 + alpha_1 * (e(t-1) - delta * sqrt(h(t-1)))^2 + beta * h(t-1);
        e(t) = sqrt(h(t)) * randn(1);
        S(t,i) = S(t-1,i) * exp(r - 0.5 * h(t) + e(t));
        h(t,i) = alpha_0 + alpha_1 * (e(t-1) - delta * sqrt(h(t-1)))^2 + beta * h(t-1);
    end
    ST(i) = S(end,i);
end

GH_call = exp(-r * T) * mean(max(ST - K, 0));
GH_put = exp(-r * T) * mean(max(K - ST, 0));
fprintf('\n GARCH_call = %+3.6f\n GARCH_put = %+3.6f\n', GH_call, GH_put);
```


Estimación restringida de la distribución hiperbólica generalizada de los tipos de cambio del Euro, Yen, Libra esterlina y Dólar canadiense (2000-2014)

Restricted estimation of the hyperbolic generalized
distribution for the exchange rates of the Euro,
Yen, Sterling Pound and Canadian dollar
(2000-2014)

Martha Beatriz Mota Aragón*

José Antonio Núñez Mora**

Fecha de recepción: 27 de noviembre de 2014

Fecha de aceptación: 10 de febrero de 2015

* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Departamento de Economía
beatrizmota4@gmail.com

** Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey,
Campus Ciudad de México, EGADE Business School
janm@itesm.mx

RESUMEN

En este artículo se estima la distribución de probabilidad hiperbólica generalizada con restricción del parámetro que caracteriza a la función de Bessel de tercer orden, *i.e.* $\lambda = -1/2$. Dicho valor corresponde a la distribución univariada Gaussiana Inversa Normal (NIG), que se estima para las variaciones de los tipos de cambio del euro, yen japonés, libra esterlina y el dólar canadiense con respecto al dólar americano. La estimación se realiza sobre las variaciones del tipo de cambio para el periodo 2000-2014. Los resultados se complementan con la implementación de dos pruebas que permiten valorar la bondad de ajuste y confirmar que el ajuste es razonable.

Clasificación JEL: F31, G11, G15

Palabras clave: algoritmo EM, distribución hiperbólica generalizada, tipo de cambio.

ABSTRACT

*In this paper we estimate the generalized hyperbolic probability distribution with a constrained parameter of the Bessel function of third kind, *i.e.* $\lambda = -1/2$. This value corresponds to the univariate Normal Inverse Gaussian distribution (NIG), which is estimated for variations of the euro, Japanese yen, British pound and Canadian dollar exchange rates with respect to the American dollar. The estimation is respect to the changes of the exchange rates for the period 2000-2014. The goodness of fit is checked with two tests to confirm that the adjustment is reasonable.*

Keywords: EM algorithm, generalized hyperbolic distribution, exchange rate

Introducción

En los últimos años se ha encontrado evidencia de que una gran parte de los rendimientos de activos financieros no se comportan de acuerdo a una variable aleatoria normal, entre ellos los rendimientos de la bolsa de valores mexicana, (Trejo, 2006). Esta situación ha llevado a la búsqueda de nuevas distribuciones de probabilidad, donde sus parámetros permitan capturar los hechos estilizados empíricos de los rendimientos financieros (Cont, 2001). No obstante, las dificultades numéricas que aparecen en las distribuciones no normales han frenado la aplicación de nuevas funciones de densidad de probabilidad en los modelos financieros, (Hu, 2005). (Barndorff-Nielsen, 1977) introdujo la familia hiperbólica generalizada (GH) de distribuciones de probabilidad, las cuales dependen de una gran variedad de parámetros y por tanto la familia consta de funciones de densidad altamente versátiles. La implementación de este tipo de funciones de densidad en economía y finanzas sucedió hasta muchos años después para analizar series de rendimientos de activos, (Prause, 1999) y (Rydberg, 1999).

Mediante algoritmos numéricos (Blæsild, 1992) desarrollaron el programa HYP, que permitía ajustar la familia GH mediante máxima verosimilitud, pero hasta una dimensión menor o igual a tres. En este punto la familia GH había encontrado pocas aplicaciones, dadas las complicaciones para calibrar adecuadamente la distribución de probabilidad, (Prause, 1999).

Concretamente, el ajuste de la distribución hiperbólica univariada en un contexto financiero se llevó a cabo por primera vez por (Eberlein, 1995), quienes estimaron esta distribución de probabilidad a diferentes rendimientos de acciones alemanas, aunque con dificultades de calibración.

Posteriormente, (Protassov, 2004) desarrolló una modificación del algoritmo EM, (Prause, 1999), para estimar la distribución hiperbólica generalizada multivariada para una dimensión menor o igual a cinco. Este autor es el primero en reportar la estimación de un miembro de la familia GH para una dimensión mayor a tres. Específicamente, (Protassov, 2004) calibra la distribución de probabilidad multivariada Gaussiana Inversa Normal para los rendimientos de cinco diferentes tipos de cambio de la OCDE. No obstan-

te, no presenta una prueba formal para valorar la bondad de ajuste, lo cual es señalado en (Hu, 2005).

En este artículo se presentan dos pruebas de bondad de ajuste: la clásica prueba de Kolmogorov-Smirnov y la de (McAssey, 2013), para subsanar la observación realizada por (Hu, 2005). Además es importante señalar que para diversas aplicaciones como el impacto de la volatilidad del tipo de cambio sobre los flujos comerciales, análisis de la media-varianza, o eficiencia del mercado de tipo de cambio, la incertidumbre asociada a las variaciones del tipo de cambio debe medirse de una mejor manera, de ahí que necesitemos una propuesta de distribución de probabilidad —como la que en este trabajo se expone— que se aproxime mejor a la naturaleza de los datos.

El artículo está dividido en tres secciones, en la primera revisamos algunos de los principales trabajos previos alrededor de la estimación de la distribución de las variaciones del tipo de cambio, en la segunda se muestra el análisis de datos, y en la tercera las conclusiones.

1. Tipo de cambio, revisión bibliográfica

El tipo de cambio es una posible fuente de riesgo en diversos portafolios de inversión, así que la valoración de diferentes estrategias de inversión es una actividad apremiante. De la misma manera, es importante profundizar en el entendimiento de la dinámica de los mercados especulativos. En este sentido, el análisis de la distribución de probabilidad de las variaciones de diferentes tipos de cambio, constituye un complemento para concretar medidas para la administración del riesgo de distintos portafolios.

Al día de hoy es aceptado que la distribución de probabilidad de las variaciones en el tipo de cambio no es normal. Diversos estudios proponen distribuciones leptocúrticas como en (Friedman, 1982), quienes centran su trabajo primero en el estudio de la medida de la leptocurtosis reflejada en los datos, con una técnica basada en (Cleveland, 1975), y segundo en la justificación de la hipótesis de variación de parámetros con distribuciones normales sosteniendo el argumento de simetría, (aunque el sesgo calculado por los autores indica asimetría, se atribuye a eventos importantes como una intervención de Fed en un día de *trading*, y no como una característica intrínseca de los datos).

Por otro lado, en (Boothe, 1987) se indica que la distribución t-Student y la mezcla de dos normales son las mejores candidatas para modelar las variaciones diarias del tipo de cambio, calculando los parámetros a través

de máxima verosimilitud. La distribución de Pareto estable simétrica es eliminada en dicho estudio usando las pruebas del radio de verosimilitud y la prueba ji-cuadrada de bondad de ajuste. Además, un inconveniente importante de tomar ésta distribución se encuentra en la parte empírica, pues en aplicaciones como el enfoque media-varianza se requiere de la existencia del segundo momento. Ésta distribución no tiene momentos de orden mayor o igual a dos. También, si la distribución de los errores en regresiones involucrando el tipo de cambio es una mezcla de normales, es conocido que se puede trabajar con la heteroscedasticidad y si la distribución de esos errores es *t* de Student, entonces se puede seguir considerando las pruebas *t* y *F* como válidas.

Otros estudios como el de (McFarland, 1982) confirman el rechazo de que una distribución estable normal o no normal describa las variaciones del tipo de cambio diarias, aunque para el análisis de datos por día de la semana sí pueden concluir la anterior. Para datos semanales, concluyen que un ajuste razonable es dado por una distribución estable no normal.

Más recientemente, como ya se mencionó, (Protassov, 2004) implementó una modificación del algoritmo EM y ajustó la distribución multivariada NIG para cinco tipos de cambio, con una parametrización especial pero sin una prueba de bondad de ajuste.

La diversificación de los portafolios de inversión es un punto relevante para alcanzar altos rendimientos. Sin embargo, no es menos importante la distribución de probabilidad, ya que permite la medición y control de riesgo, (Prause, 1999). En este punto, resulta conveniente comentar que los eventos extremos con alta probabilidad de ocurrencia no son capturados por las colas de la distribución normal, así que se justifica el estudio de los rendimientos mediante una distribución de probabilidad distinta.

2. Análisis de datos

2.1 Rendimiento

En este documento se presenta evidencia estadística sobre la distribución de probabilidad univariada de las variaciones diarias de cuatro distintas series de tipo de cambio para el periodo 2000-2014. La periodicidad de los datos es diaria y la fuente de información son las cifras reportadas por Bloomberg. En cada caso y para cada tipo de cambio se realiza el procedimiento de estimación sin restricción en el parámetro de la función de Bessel

de tercer orden, pues cada uno de los rendimientos de los tipos de cambio pueden mostrar diferentes características según el sesgo y la curtosis existente, (Protassov, 2004).

Los rendimientos diarios de las distintas series de variaciones del tipo de cambio se han calculado bajo un enfoque continuo:

$$r_{it} = \ln(p_{i,t}) - \ln(p_{i,t-1}) \quad (2.1)$$

donde $i = 1, \dots, 4$ son los tipos de cambio del euro, la libra esterlina, el dólar canadiense y el yen japonés con respecto al dólar americano. La variable de tiempo abarca los días durante los años 2000-2014. Bajo esta notación se tiene que;

$p_{i,t}$ precio diario reportado por Bloomberg de la serie de tiempo i en el tiempo t ,

$r_{i,t}$ = variación diaria (rendimiento) de la serie de tiempo i en el tiempo t .

La media μ , la desviación estándar σ , el sesgo y la curtosis son parámetros descriptivos del comportamiento de la serie de rendimientos. El sesgo caracteriza la asimetría de una distribución de probabilidad mientras que la curtosis mide la picudez relativa, ambos parámetros son relevantes para evaluar la normalidad de una serie de datos, (Cont, 2001). Si los rendimientos están muy concentrados alrededor de la media, la distribución de probabilidad se dice leptocúrtica y si los rendimientos presentan una alta dispersión, se dice platicúrtica. En cualquiera de ambos casos las colas de probabilidad son diferentes al caso normal y dan cuenta de eventos poco comunes con altos valores de probabilidad.

2.2 Distribución hiperbólica generalizada

Para estimar la distribución de probabilidad empírica de los rendimientos diarios de los tipos de cambio se emplea una función de densidad versátil, (Paolella, 2007), la cual ha sido útil en diferentes campos de las finanzas. La distribución de probabilidad utilizada es la hiperbólica generalizada (GH) cuyos parámetros permiten una especificación altamente flexible, (Eberlein, 1995).

El rango de variación de los parámetros de GH es sumamente amplio, aunque sobresalen el caso Hiperbólico ($\lambda=1$) y el caso Gaussiano Inverso Normal ($\lambda=-1/2$), (Paolella, 2007). Esta familia de funciones resuelve teóri-

camente diferentes problemas en el área de administración de riesgos, aunque se requieren procedimientos numéricos más complicados para el caso multivariado, (Mata, 2013).

En el Cuadro 1 se presentan algunos de los miembros de la familia GH, donde sobresale la función de densidad Gaussiana Inversa Normal, pues se ha empleado en diferentes contextos financieros exitosamente.

Cuadro 1. Familia hiperbólica generalizada

Nombre	Rango de parámetros			
Varianza Gamma	$\lambda > 0$	$\alpha > 0$	$ \beta < \alpha$	$\delta = 0$
Laplace asimétrica	$\lambda = 1$	$\alpha > 0$	$ \beta < \alpha$	$\delta = 0$
t asimétrica hiperbólica	$\lambda < 0$	$\alpha = \beta$	$\beta \geq 0$	$\delta > 0$
Gaussiana inversa normal	$\lambda = -1/2$	$\alpha > 0$	$ \beta < \alpha$	$\delta > 0$

Fuente: Elaboración propia.

El parámetro más representativo y que determina la forma de la distribución es λ , de ahí que la función de Bessel modificada de tercer orden sea altamente relevante, ya que determina a los elementos de la familia de densidad hiperbólica generalizada.

En este documento se propone la familia GH para analizar algunos de los rendimientos diarios de los tipos de cambio, pues existe evidencia de no-normalidad en diferentes países y contextos, (Prause, 1999). En el caso del mercado accionario mexicano, (Trejo, 2006) muestra que la función Gaussiana Inversa Normal ajusta exitosamente para rendimientos en precios de acciones.

La distribución de probabilidad univariada GH, (Paolella, 2007), presenta la especificación usual:

$$f_{GH}(x; \mu, \alpha, \delta, \beta, \lambda) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \cdot K_{\lambda - \frac{1}{2}}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp(\beta(x - \mu)) \tag{2.2}$$

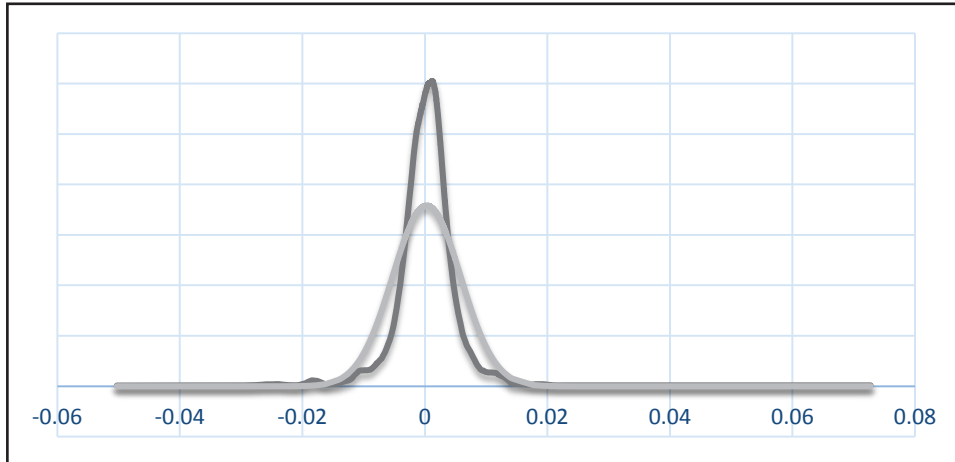
donde K_ν es la función modificada de Bessel de tercer orden,

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty w^{\nu-1} \exp\left[-\frac{1}{2}x(w + w^{-1})\right] dw \quad (2.3)$$

para valores positivos de la variable x , (Abramowitz, 1972).

El procedimiento de estimación trata directamente con máxima verosimilitud para hallar el conjunto de parámetros $\Theta = (\lambda, \alpha, \delta, \beta, \mu)$. Este procedimiento se repite para cada una de las series de tipo de cambio. Posteriormente se realizan tanto la prueba de Kolmogorov como la prueba de (McAssey, 2013) para valorar la bondad de ajuste. En la Figura 1, se presenta una curva representativa de la familia GH, la curva más elevada es Gaussiana Inversa Normal y la curva inferior consta de la distribución normal. El contraste entre estas dos funciones de densidad de probabilidad permite establecer afirmaciones robustas en relación a la existencia o ausencia de sesgo, colas pesadas y alta curtosis.

Figura 1. Distribución Hiperbólica Generalizada para $\lambda = -1/2$ y normal



Fuente: Elaboración propia.

2.3 Bondad de ajuste

La prueba de Kolmogorov, (Johnson, 2007), es una prueba de hipótesis que permite verificar si una distribución de probabilidad específica se ajusta a

los datos observados. La hipótesis base afirma que la distribución de probabilidad propuesta es adecuada, de esa forma, el rechazo de la hipótesis base constituye evidencia a favor de la distribución de probabilidad que se haya propuesto para el conjunto de observaciones.

El estadístico de prueba de cola derecha se define como:

$$D_n^+ = \text{máx}\{F_n(x) - F(x)\} \quad (2.4)$$

mientras que el estadístico de prueba de cola izquierda está dado por

$$D_n^- = \text{máx}\{F(x) - F_n(x)\} \quad (2.5)$$

Bajo este contexto la distribución empírica, $F_n(x)$, según la muestra es

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i) \quad (2.6)$$

donde $I(x_i)$ es una función indicadora sobre los valores menores o iguales que x_i .

En este trabajo, $F(x)$ es la distribución de probabilidad hiperbólica generalizada, así que la prueba de Kolmogorov permite encontrar evidencia a favor o en contra de las estimaciones realizadas. A modo de contraste se realiza también la prueba de (McAssey, 2013) bajo un contexto univariado. El punto es mostrar evidencia para la bondad de ajuste mediante dos pruebas diferentes.

Análogamente, para verificar la presencia de normalidad en las series de tiempo de los rendimientos se emplea la prueba de normalidad de Jarque-Bera, donde el estadístico de prueba es,

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \quad (2.7)$$

donde n es el número de variables, S es el sesgo y K la curtosis muestral. El estadístico JB tiene una distribución ji-cuadrado asintótica con dos grados

de libertad. Concretamente, la hipótesis base asume que la asimetría y el exceso de curtosis son cero, pues una variable aleatoria normal presenta esas características, (Enders, 2009).

En este sentido, también se presenta la prueba Anderson-Darling, (Jhonson, 2007). Esta prueba de hipótesis no paramétrica permite verificar si los datos de una muestra provienen de una población específica, en este caso la normal. El estadístico de prueba es,

$$A^2 = -N - S \quad (2.8)$$

donde:

$$S = \sum_{j=1}^N \frac{2k-1}{N} [\ln(F(X_k) + \ln(1 - F(X_{N+1-k})))] \quad (2.9)$$

sobre las observaciones ordenadas $\{X_1 < X_2 < \dots < X_N\}$ y bajo la distribución de probabilidad acumulada que se haya propuesto. En este trabajo la prueba Anderson-Darling nos permite hallar, como veremos, evidencia de no normalidad.

Para realizar la prueba de (McAssey, 2013) se simula una muestra aleatoria $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iN}$ bajo los parámetros encontrados por máxima verosimilitud para cada una de las variaciones del tipo de cambio $i = 1, 2, \dots, 5$ Las respectivas muestras aleatorias se generan mediante los algoritmos descritos en (Kinderman, 1977) y (Dagpunar, 1989). Ambos procedimientos consideran que si se tiene una variable aleatoria X de la familia GH, se cumple que

$$X|W \sim N(\mu + w\beta\delta, w\delta) \quad (2.10)$$

siendo $W \sim GIG(\lambda, \chi, \varphi)$. Posteriormente se calcula la distancia de Mahalanobis definida, (Mahalanobis, 1936) como

$$\hat{d}_i = \sqrt{(\hat{u}_i - \hat{\mu})^2 \hat{\sigma}^{-2}} \quad (2.11)$$

Luego para cada $t \in (0, 2\max\{\hat{d}_i\})$ se calcula

$$\widehat{g}_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(\hat{d}_i \leq t) \quad (2.12)$$

Después se elige una partición $\{p_j\}$ en el intervalo cero-uno tal que el punto inicial sea cero y el punto final sea igual a uno. De esta forma se calcula $q_j = \min\{t \in \mathbb{R} | \widehat{g}_N(t) \geq p_j\}$ para cada elemento de la partición $\{p_j\}$, (McAssey, 2013).

Finalmente se estima el estadístico de prueba,

$$a = \sum_j \left| \frac{N(p_j - p_{j-1})}{O_j} - 1 \right| \quad (2.13)$$

donde O_j es el número de observaciones \hat{d}_i en el intervalo $(q_{j-1}, q_j]$. Repitiendo el procedimiento m veces se obtiene una muestra a_1, a_2, \dots, a_m que permite estimar un valor de probabilidad para rechazar o no rechazar la hipótesis nula bajo algún nivel de significancia, (McAssey, 2013).

2.4 Estacionariedad

Un aspecto relevante que debe cuidarse también para estimar la distribución de probabilidad empírica sobre los rendimientos diarios de los tipos de cambio es el concepto de estacionariedad. Si una serie de tiempo es estacionaria estrictamente se puede garantizar directamente la existencia de una distribución de probabilidad estable a lo largo del tiempo para el conjunto de datos, (Hamilton, 1994). En el caso de estacionariedad en el sentido débil, se tendría evidencia de parámetros en media, varianza y covarianza estables, lo cual da cuenta de una distribución de probabilidad empírica subyacente y estable, (Enders, 2009).

En este documento se aplica la prueba de Dickey-Fuller aumentada para verificar la estacionariedad de cada una de las series de tiempo. La hipótesis nula es que existe raíz unitaria (no estacionariedad), así que el rechazo de la hipótesis nula bajo diferentes especificaciones, (Hamilton, 1994), arroja evidencia sobre no estacionariedad del conjunto de datos.

En términos generales, la especificación que se sigue para realizar la prueba aumentada de Dickey-Fuller sobre y_t consta de la expresión:

$$\Delta y_{t-1} = \mu + \gamma y_{t-1} + \delta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \delta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (2.14)$$

siendo que la hipótesis nula es $H_0: \gamma = 0$.

2.5 Estimaciones y resultados

En esta sección se presenta la estimación de los parámetros que caracterizan a la distribución hiperbólica generalizada para las diferentes series de rendimientos de los tipos de cambio. En el Cuadro 2 se reportan los estadísticos descriptivos para los distintos conjuntos de información entre enero de 2000 y septiembre de 2014. En este conjunto de estimaciones sobresalen las prueba de normalidad Jarque-Bera, Kolmogorov y Anderson-Darling, (Enders, 2009) donde la hipótesis nula afirma que la serie de tiempo sigue una distribución normal.

En cada caso, se rechaza la hipótesis base y existe evidencia para afirmar que las series de tiempo de los rendimientos de los diferentes tipos de cambio no se comportan según una distribución normal.

Cuadro 2. Estadísticos descriptivos de los tipos de cambio

	GBP	EUR	CAD	JPY
Media	-0.000005	0.000047	0.000067	-0.000022
Mediana	0.000068	0.000077	0.000099	0.000000
Máximo	0.029252	0.034654	0.039981	0.035038
Mínimo	-0.034715	-0.025218	-0.032540	-0.055042
Desviación estándar	0.005612	0.006344	0.005731	0.006404
Sesgo	-0.281615	0.043330	-0.155133	-0.027521
Curtosis	5.414564	4.371458	6.224015	6.809034
Jarque-Bera	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Anderson-Darling	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Kolmogorov	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Fuente: Elaboración propia.

Si se aplica la prueba de hipótesis de raíz unitaria a cada una de las series de rendimientos, Cuadro 3, se puede observar que bajo un nivel de significancia

menor a 5%, las series de datos de los rendimientos diarios provienen de poblaciones estacionarias. En este caso el Cuadro 3 presenta tres pruebas de hipótesis factibles: Dickey-Fuller, Phillips-Perron y Kwiatkowski, (Enders, 2009).

En el caso de las dos primeras pruebas, la hipótesis nula es que la serie de tiempo tiene raíz unitaria, y en el último caso que la serie de tiempo es estacionaria. Estos resultados señalan que la media, la varianza y las covarianzas respectivas son estables a lo largo del periodo 2000-2014.

Cuadro 3. Prueba de raíz unitaria para los tipos de cambio 2000-2014

Tipo de cambio	DickeyFuller Aumentada	Phillips-Perron	Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin
GBP	0.0001	0.0001	0.1090
EUR	0.0001	0.0001	0.1336
CAD	0.0001	0.0001	0.1635
JPY	0.0001	0.0001	0.2043

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro 4 se presentan los parámetros estimados para la distribución de probabilidad Normal Inversa Gaussiana (NIG), se puede apreciar que existe evidencia estadística para afirmar que las variaciones del tipo de cambio diarios no siguen una distribución normal, ya que el valor de probabilidad es menor a un nivel de significancia de 1% para los cinco tipos de cambio.

Más aún, el ajuste de la función de densidad de probabilidad NIG resulta significativo a un nivel superior a 10% para cada uno de los rendimientos diarios. La distribución de probabilidad NIG se ajusta razonablemente, con al menos un nivel de confianza del 90%. Esta afirmación es correcta tanto por la prueba de Kolmogorov como para la prueba de (McAssey, 2013), de tal manera que la distribución de las variaciones del tipo de cambio no son normales, ver las últimas dos columnas del cuadro 4.

En relación a los parámetros estimados, es una medida de la dispersión que tiene el rendimiento diario alrededor de su media. En tanto que el parámetro captura la asimetría existente en la distribución de probabilidad. En un caso extremo, si alcanza el valor de cero, entonces la media coincide con

la mediana y la función de densidad de probabilidad es simétrica alrededor de su valor esperado. En particular para el caso de los rendimientos diarios de los tipos de cambio, la simetría de la distribución es relevante, ya que el peso de la cola izquierda de la función de densidad de probabilidad, indicaría la pérdida potencial atribuible a eventos poco comunes pero con peso sustancial en la distribución de probabilidad.

En el Cuadro 4 se puede observar que el coeficiente de sesgo es negativo para algunos casos, así que existe evidencia de asimetría en la distribución poblacional de los rendimientos. Asimismo, los valores elevados del parámetro α , constituyen una señal de alta curtosis en los cinco tipos de cambio (variaciones).

Cuadro 4. Estimación de la distribución de probabilidad NIG

Tipo de cambio	Parámetros estimados según la familia GH				Probabilidad	
	μ	δ	α	β	Kolmogorov	McAssey
GBP	0.00036	0.00667	213.24500	-11.69874	0.97310	0.21250
EUR	0.00018	0.00788	193.95870	-3.31690	0.53770	0.78971
CAD	0.00025	0.00555	169.91600	-5.49733	0.85970	0.78971
JPY	-0.00013	0.00669	164.66340	2.66094	0.73420	0.22521

Fuente: Elaboración propia.

Los cuatro rendimientos de los tipos de cambio muestran en promedio un rendimiento diario cercano a cero con una dispersión del orden de 0.007 unidades. Se puede ver también que existe sesgo hacia la izquierda y elevada curtosis.

En este trabajo se ha encontrado evidencia de la ausencia de normalidad en los rendimientos de los diferentes tipos de cambio. Este hallazgo implica que la probabilidad de pérdidas potenciales es superior a la probabilidad asumida bajo la normal, lo cual apunta a que se subestime el riesgo de estas pérdidas. En resumen, el punto es emplear en las sugerencias de administración del riesgo de los portafolios, la distribución de probabilidad que mejor se adapte al comportamiento observado en los datos, es decir, a los rendimientos diarios calculados de cada una de las series de tipo de cambio.

Conclusiones

En este trabajo se estima la distribución hiperbólica generalizada univariada para ajustar los rendimientos diarios de las variaciones de cuatro tipos de cambio de la OCDE. Se encuentra evidencia de un ajuste razonable por parte de la distribución univariada Normal Inversa Gaussiana, mediante la prueba clásica de Kolmogorov y una prueba reciente para distribuciones continuas. En cada caso el nivel de significancia es menor a 10%, lo cual nos habla de un ajuste razonable con respecto a la distribución empírica de los rendimientos diarios.

La función de densidad de probabilidad que se ha encontrado captura en cada caso, distintos hechos estilizados de las series financieras. El valor esperado, la varianza, el sesgo y la curtosis que se caracterizan mediante los parámetros estimados de la distribución hiperbólica generalizada señalan claramente colas pesadas y la alta curtosis en los rendimientos diarios de los tipos de cambio.

Este hallazgo nos dice que los rendimientos de los tipos de cambio no siguen una distribución normal, lo cual nos proporciona herramientas para trabajar en diversas aplicaciones como las ya mencionadas de mejor manera. En otras palabras, la no incorporación de la distribución de probabilidad adecuada puede subestimar el riesgo existente, lo cual en momentos de crisis puede resultar en catástrofes en el mundo financiero internacional. El conocimiento de una distribución paramétrica permite por un lado conocer mejor la naturaleza intrínseca de los datos lo cual se puede aplicar empíricamente e incluso puede tener consecuencias teóricas, pues diversas discusiones incluyen supuestos sobre la naturaleza estadística de los datos. Por otro lado, se tiene la oportunidad generar simulaciones que nos permitan valorar instrumentos derivados que dependan de un subyacente con esta distribución, así como escenarios para diversas aplicaciones.

Bibliografía

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. (1a. Ed.), New York, USA: Dover.
- Barndorff-Nielsen, O.E. (1977). "Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of the Particle Size". *Proceedings of the Royal Society, Mathematical and Physical Sciences*. London, serie A, 353, pp. 401-419.

- Blæsild, P. and Sørensen, M. (1992). *Hyp-a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution*. (Research Report 248, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus).
- Boothe P. and Glassman D. (1987). "The Statistical Distribution of Exchange Rates". *Journal of International Economics* 2 (1), pp. 297-319.
- Cleveland, W. and Kleiner B. (1975). "A Graphical Technique for Enhancing Scatterplots with Moving Statistics". *Technometrics* 17 (1), pp. 447-454.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 1 (1), pp. 223-236.
- Dagpunar, J. S. (1989). "An Easily Implemented Generalized Inverse Gaussian Generator". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 18 (2), pp. 703-710.
- Eberlein E. and Keller U. (1995). "Hyperbolic distributions in finance". *Bernoulli*, 12 (1), pp. 281-299.
- Enders, W. (2009). *Applied Econometric Time Series*. (1a. Ed.). New York, USA: Wiley.
- Friedman D. and Vanderstel S. (1982). "Short-Run Fluctuations in Foreign Exchange Rates". *Journal of International Economics* 13, pp. 171-186.
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. (1a. Ed.). New York, USA: Princeton University Press.
- Hu, W. (2005). *Calibration of multivariate generalized hyperbolic distributions using the EM algorithm, with applications in risk management, portfolio optimization and portfolio credit risk*. (Phd Theses, The Florida State University).
- Johnson, R. y Wichern, D. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. (1a. Ed.). New York, USA: Pearson.
- Kinderman, A. J. (1977). Computer Generation of Random Variables Using the Ratio of Uniform Deviates. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 38 (2), pp. 257-260.
- Mahalanobis, P.C. (1936). "On the Generalized Distance in Statistics". *Proceedings of the National Institute of Science of India*, 12, pp. 49-55.
- Mata, L. (2013). *Estudio de la distribución hiperbólica generalizada multivariada: aspectos teóricos y numéricos para aplicaciones financieras*. (Tesis de doctorado, EGADE Business School, México).
- McAssey, M. P. (2013). "An Empirical Goodness-of-fit Test for Multivariate Distributions". *Journal of Applied Statistics* 40 (5), pp. 1120-1131.

- McFarland J., Richardson Pettit R and Sung K.S. (1982). "The Distribution of Foreign Exchange Price Changes: Trading Day Effects and Risk Measurement". *The Journal of Finance* 37 (3), pp. 693-715.
- Paoella, M. S. (2007). *Intermediate Probability*. (1a. Ed.). West Sussex, England: John Wiley & Sons.
- Prause, K. (1999). *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. (PhD thesis, University of Freiburg).
- Protassov, R. (2004). "EM-based maximum likelihood parameter estimation for multivariate generalized hyperbolic distributions with λ fixed". *Statistics and Computing* 14 (1), pp. 67-77.
- Rydberg T. (1999). "Generalized Hyperbolic Diffusion Processes with Applications in Finance". *Mathematical Finance* 9 (2), pp. 183-201.
- Trejo B., Núñez José A. y Lorenzo A. (2006). "Distribución de los rendimientos del mercado mexicano accionario". *Estudios Económicos* 21 (1), pp. 85-118.

Convocatoria abierta

La revista **Estocástica: finanzas y riesgo**, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. Estocástica es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- ❖ Administración y análisis de riesgos financieros.
- ❖ Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- ❖ Diseño de instrumentos financieros.
- ❖ Econometría financiera.
- ❖ Finanzas computacionales.
- ❖ Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- ❖ Finanzas matemáticas.
- ❖ Ingeniería financiera.
- ❖ Innovación financiera.
- ❖ Mercados financieros.
- ❖ Modelado del comportamiento de instrumentos financieros
- ❖ Modelado matemático de riesgos.
- ❖ Modelos de regulación financiera.
- ❖ Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- ❖ Teoría financiera.
- ❖ Teoría del riesgo.
- ❖ Valuación de activos financieros.

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica del departamento de administración de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

CALL FOR PAPERS

Estocástica: finanzas y riesgo will consider for possible publication articles written in Spanish or English, provided they contain unpublished work. *Estocástica* is published twice a year and its objective is to contribute to developing knowledge in the areas of finance, risk management and modeling and financial engineering. *Estocástica* promotes communication of original research results, either theoretical or empirical, related to the study and practice of the above mentioned disciplines and the following research lines:

- ❖ Financial risk analysis and management
- ❖ Financial instruments design
- ❖ Financial and economic analysis and modeling
- ❖ Financial econometrics
- ❖ Computational finance
- ❖ Mathematical finance
- ❖ Behavioral finance applying quantitative methods
- ❖ Financial engineering
- ❖ Financial innovation
- ❖ Financial markets
- ❖ Financial instruments modeling
- ❖ Mathematical risk modeling
- ❖ Financial regulation modeling
- ❖ Stochastic processes applied to finance
- ❖ Financial theory
- ❖ Risk theory
- ❖ Financial asset valuation

In addition to these research lines, closely related original manuscripts will be accepted according to the editorial guidelines published in the web site of the Departamento de Administración, of the Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Research papers will be reviewed by an experts' panel and those accepted will be scheduled for publication.

Manuscripts should be sent to estocastica@azc.uam.mx. Further information may be obtained dialing 5318-9454 ext. 157 or 154.

Authors grant, by sending a research work for review and possible publication, the legal authorization to *Estocástica: finanzas y riesgo* for publishing it in print and electronic formats. In addition, authors will be fully responsible for any legal acts pursued by third parties questioning the authorship and originality of their research work freeing the Universidad Autónoma Metropolitana of any legal or economic responsibility associated to such claims.

CS
H *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco

DEPARTAMENTO
DE SISTEMAS

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros

