

Estocástica:

FINANZAS Y RIESGO

**La profundidad de mercado
y el impacto cruzado de precios**

Erick Treviño Aguilar
Refugio Vallejo Gutiérrez

**Modelación de Medidas
y Norma en finanzas**

Guillermo Sierra Juárez

**Estimación de modelos
multivariados GARCH en los
mercados accionarios
de China y México**

Francisco Javier Reyes-Zárate

**Cobertura dinámica de la reserva
actuarial de una empresa
con pasivos pensionales**

Francisco Venegas-Martínez
Gabriel Alberto Agudelo Torres
Luis Ceferino Franco Arbeláez
Luis Eduardo Franco Ceballos

**VOLUMEN 5, NÚMERO 2
JULIO - DICIEMBRE 2015**

Universidad
Autónoma
Metropolitana 
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Estocástica:

FINANZAS Y RIESGO

Volumen 5, número 2
Julio - diciembre 2015

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Directorio

Rector General

Dr. Salvador Vega y León

Secretario General

M. en C. O. Norberto Manjarrez Álvarez

Rector de la Unidad Azcapotzalco

Dr. Romualdo López Zárate

Secretario de la Unidad

Mtro. Abelardo González Aragón

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Secretario Académico

Lic. Miguel Pérez López

Jefa del Departamento de Administración

Dra. María Teresa Magallón Díez

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Dr. Saúl Jerónimo Romero

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández-Lerma

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, IPN

Dr. Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía, IPN

Dr. Edgar Ortiz

Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, UNAM

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

Departamento de Ingeniería Eléctrica,
UAM-Iztapalapa

Dra. Patricia Saavedra Barrera

Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa

Dr. Francisco López Herrera

Facultad de Contaduría y Administración, UNAM

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine Abed

Departamento de Sistemas, UAM-Azcapotzalco

Editora

Dra. Marissa R. Martínez Preece

Departamento de Administración, UAM-Azcapotzalco

Coeditores

Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco

Dr. José Antonio Climent Hernández

Departamento de Administración, UAM-Azcapotzalco

Coordinación del número

Dra. María G. Henaine Abed

Dra. Marissa R. Martínez Preece

Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Volumen 5, número 2, julio - diciembre 2015, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200. México, Ciudad de México; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 28 de septiembre de 2015, Tamaño del archivo: 8.77 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La profundidad de mercado
y el impacto cruzado de precios

Erick Treviño Aguilar
Refugio Vallejo Gutiérrez

119

Modelación de Medidas
y Norma en finanzas

Guillermo Sierra Juárez

143

Estimación de modelos multivariados
GARCH en los mercados accionarios
de China y México

Francisco Javier Reyes-Zárate

187

Cobertura dinámica de la reserva
actuarial de una empresa con pasivos
pensionales

Francisco Venegas-Martínez
Gabriel Alberto Agudelo Torres
Luis Ceferino Franco Arbeláez
Luis Eduardo Franco Ceballos

211

PRESENTACIÓN

Hace un año los precios del petróleo iniciaron su trayectoria a la baja, asimismo, comenzó un proceso de depreciación del peso con respecto del dólar de más de 17 por ciento en el período de un año, de principios de julio de 2014 a finales de junio de 2015, a pesar de los esfuerzos del gobierno para evitar una depreciación de esta magnitud. A este panorama económico se suman cuestionamientos severos del sistema económico, legal y político del país.

La reducción en el gasto público, provocada por la disminución de los ingresos derivados de las exportaciones de petróleo, y un descenso en la actividad económica por el encarecimiento de las importaciones, han provocado que los pronósticos de crecimiento para México, tanto para 2015, como para 2016 sean mucho más conservadores.

A este escenario poco alentador, en el contexto internacional se añade la desaceleración de la economía China. La devaluación del yuan ha provocado que las importaciones de productos chinos se intensifiquen, sin embargo, las exportaciones hacia ese país se han contraído. Sin embargo, con una visión optimista, el crecimiento más acelerado en la economía de Estados Unidos, considerando los lazos comerciales y económicos que unen a nuestra nación con Estados Unidos, pudiera tener un efecto favorecedor para la economía mexicana. Dado lo anterior, continúan siendo pertinentes algunas preguntas que ya se han formulado en el pasado: ¿podrá el crecimiento de la economía de Estados Unidos reactivar la economía mexicana?, ¿la depreciación del peso y el consecuente incremento de exportaciones distintas a las petroleras podrán compensar la baja en los ingresos derivados de la venta de petróleo?, ¿se podrán desarrollar y ofrecer instrumentos financieros que ayuden a enfrentar la crisis financiera de una mejor forma? Ante estas interrogantes, continúa el compromiso de Estocástica: finanzas y riesgo de difundir investigaciones originales, realizadas por académicos/as especializados/as que buscan contribuir al estudio y debate de las finanzas y la administración de riesgos financieros, tanto dentro como fuera de México.

En esta ocasión se presentan cuatro artículos que proponen distintas metodologías para abordar el estudio de los riesgos financieros. En primer lugar, se ofrece el artículo “La profundidad de mercado y el impacto cruzado de precios” de Erick Treviño Aguilar y Refugio Vallejo Gutiérrez, en donde se explica cómo, utilizando el modelo de Kyle, es posible convertir nociones intuitivas en conceptos precisos. En particular, se demuestra la existencia del impacto cruzado sin correlación de los valores, y recíprocamente, se presenta la existencia de correlación de los valores sin que exista un efecto de impacto cruzado.

Actualmente, resultan indiscutibles las aportaciones que la física ha realizado a los modelos financieros; dentro de este contexto, en el segundo artículo que se presenta titulado “Modelación de Medidas y Norma en Finanzas”, Guillermo Sierra Juárez a partir de las ideas de Teoría de Norma (Gauge Theory) utilizadas en física para conceptos como electromagnetismo y gravitación, y de las definiciones de los conceptos matemáticos involucrados, busca la aplicación de éstas al área de finanzas, en particular a productos derivados (Teoría de Black-Scholes) y a CAPM (Capital Asset Pricing Model) para determinar precios fuera de equilibrio, cuando existe arbitraje aunque se suponga de manera virtual.

Uno de los principales países latinoamericanos afectados por la desaceleración de la economía china y de la devaluación de su moneda, ha sido Brasil, dada su vinculación con el grupo BRIC (Brasil, Rusia, India y China). En este contexto, resulta importante estudiar los posibles efectos de estos sucesos para México. En el tercer artículo que se ofrece; “Estimación de modelos multivariados GARCH en los mercados accionarios de China y México”, de Francisco Javier Reyes Zárate, se muestran asimetrías encontradas en los mercados de China y México y una correlación débil, señal de una nula o escasa transmisión de volatilidad entre estos mercados. Este análisis se efectuó con la aplicación de modelos econométricos multivariados heteroscedásticos de series de índices accionarios de los mercados de Shanghai, Shenzhen y Hang Seng pertenecientes a China, y el índice de precios y cotizaciones de México.

Por último, se aborda el tema de pensiones, el cual tiene una relevancia social significativa, además de su importancia en la profundización de los mercados financieros. En el artículo “Cobertura dinámica de la reserva actuarial de una empresa con pasivos pensionales” Francisco Venegas-Martínez, Gabriel Alberto Agudelo Torres, Luis Ceferino Franco Arbeláez y Luis Eduardo Franco Ceballos, proponen una estrategia para la estimación de la

reserva actuarial de una renta vitalicia, considerando una dinámica estocástica integrada con una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva, mayor o igual al pago a realizar.

Como en otros números, el deseo de los/as editores/as es que los artículos aquí incluidos contribuyan al avance de las ciencias financieras, en especial, en aquellas áreas especializadas en riesgo y que éstos puedan resultar un referente en la toma de decisiones financieras.

Siempre es importante mencionar que esta publicación ha llegado a su quinto año ininterrumpido gracias a la colaboración de la comunidad especializada que aceptó la invitación para participar en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en las disciplinas objeto de esta revista, por ello, agradecemos el interés mostrado en este proyecto y se reitera la invitación para que los/as investigadores/as en estas disciplinas continúen formando parte del espacio de colaboración que representa esta publicación.

Comité Editorial

La profundidad de mercado y el impacto cruzado de precios

Market depth and the cross impact of prices

Erick Treviño Aguilar*

Refugio Vallejo Gutiérrez**

Fecha de recepción: 3 de febrero de 2015

Fecha de aprobación: 22 de junio de 2015

* Universidad de Guanajuato
Departamento Economía y Finanzas
erick.trevino@ugto.mx

** Universidad de Guanajuato
Departamento Economía y Finanzas
cuco@ugto.mx

RESUMEN

En el mundo de las finanzas escuchamos muchas veces hablar de la profundidad de mercado, y de impacto cruzado de precios. Intuitivamente hablando, las ideas son claras, pero pocas veces se hacen precisas. En un contexto multidimensional en el que se realizan transacciones con más de un activo simultáneamente, tiene sentido hablar del impacto cruzado, un parámetro que tiene relación con la correlación de los valores fundamentales de los activos, pero los conceptos no son equivalentes. En esta nota se explica cómo en el modelo de Kyle [1985] es posible aterrizar las nociones intuitivas y convertirlas en conceptos precisos. En particular se demostrará la existencia del impacto cruzado sin correlación de los valores. Recíprocamente, se demostrará la existencia de correlación de los valores fundamentales y aun así no existir un efecto de impacto cruzado.

Clasificación JEL: C10, C13, C60

Palabras clave: correlación, equilibrio, impacto cruzado, modelo de Kyle, profundidad de mercado.

ABSTRACT

In the world of finance we often hear about the depth of the market and the cross impact of prices. Intuitively speaking, the ideas are clear but are seldom precise. In a multidimensional context in which transactions are made simultaneously with more than one asset, it makes sense to talk about cross impact, a parameter that is related to the correlation of the asset's fundamental values, but the concepts are not equivalent. This article explains how it is possible to turn the intuitive notions into precise concepts using the Kyle model [1985]. In particular the existence of cross impact without values correlation will be demonstrated. Conversely, it will be demonstrated that the correlation of the fundamental values exists and yet there is no cross impact effect.

JEL Classification: C10, C13, C60

Key words: *correlation, equilibrium, cross impact, Kyle model, market depth.*

Introducción

Una ley básica en economía es la ley de la oferta y la demanda. Intuitivamente hablando, esta ley dice que los precios se determinan como aquellos en donde la oferta iguala a la demanda y permite entender la forma en que los precios se relacionan con las estrategias de los participantes del mercado. Por ejemplo, si un vendedor llega al mercado ofreciendo una dotación grande de un producto, es decir la oferta aumenta sin que cambie nada más, entonces el mercado “reacciona” bajando el precio al cual se está dispuesto a comprar. La acción del vendedor tiene un *costo de impacto* (price impact) y la idea básica es que existe un cambio de precios observados como consecuencia al flujo de órdenes. Parece evidente que existen mejores alternativas en el interés del vendedor que simplemente llegar al mercado y emitir una orden de venta de gran tamaño. Es mejor dividir la dotación en pequeños lotes y distribuirlos en órdenes de venta a lo largo de una ventana de tiempo. Las posibilidades en que se puede realizar la distribución de lotes son inmensas, más exactamente, son infinitas. Entonces una decisión a la que se enfrenta el vendedor es la de determinar la mejor de las estrategias para disminuir su costo de impacto. Ésta es una pregunta que no se puede responder sin antes entender cuáles son los factores que influyen en la forma que los mercados reaccionan y de ésta, el costo de impacto que tiene la estrategia del vendedor.

Así planteadas las preguntas (¿Cuáles son los factores que influyen en la reacción de los mercados?, ¿Cuál es la mejor estrategia para liquidar una dotación grande?) son muy generales y en formas especiales han ocupado a especialistas en las últimas décadas. Es necesario acotar las preguntas y hacerlas más específicas. En este trabajo se considerarán mercados financieros en los que existe evidencia empírica de que las dotaciones grandes son divididas en lotes pequeños que se van llevando al mercado dinámicamente. Por ejemplo, en un estudio empírico, Chan y Lakonishok [1995] analizan una muestra de 1.2 millones de transacciones y encontraron que más de 53% se completaban en un período de cuatro o más días. En concordancia, Vaglica *et al.* [2008] documentan que el número de transacciones en que un lote se divide es proporcional al valor marcado del mismo. Bouchaud *et al.* [2009]

discuten cómo la ejecución gradual de lotes es un factor que genera memoria larga en la serie de tiempo de transacciones. Este fenómeno de distribuir dinámicamente la ejecución de una dotación, ha llevado a proponer modelos en los que se estudia el problema de ejecución óptima, ver e.g., Bertsimas y Lo [1998], Almgren y Chriss [2001], Obizhaeva y Wang [2013], Bank y Fruth [2014]. Un concepto fundamental que caracteriza la reacción del mercado a un cambio en las curvas de demanda/oferta es la *profundidad del mercado* (depthness) y es el tema central del presente trabajo. Intuitivamente hablando, la profundidad de mercado es la cantidad adicional necesaria que se debe demandar para inducir el incremento de una unidad monetaria en el precio-marcado en el mercado.

En un contexto multidimensional en el que se opera con varios productos simultáneamente surge el fenómeno de *impacto cruzado* (cross impact), y continúa relacionado a la noción de profundidad de mercado. La idea esencial es que existen productos cuyos precios están relacionados, y una transacción de gran magnitud que genera un movimiento significativo del precio del producto, implica también un movimiento del producto relacionado. En analogía con la profundidad de mercado surge la pregunta: ¿Cuál es la cantidad necesaria que se debe demandar del primer producto para generar un aumento de una unidad monetaria en el segundo? La correlación de los valores fundamentales está incorporada en dicho impacto cruzado pero sólo en casos muy especiales se pueden identificar. En general, el impacto cruzado incorpora otros aspectos del mercado. En efecto, los precios observados en mercados financieros presentan varios componentes, ver e.g., Fama y French [1988]. Incorporar explícitamente dicha estructura en procedimientos estadísticos es crucial, ver e.g., Ait-Sahalia y Yu. [2009]. El primer componente incorpora el valor fundamental de la acción, mientras que el segundo captura la actividad transaccional y provisión de liquidez. En este sentido, Underwood [2009] presenta evidencia empírica de la capacidad explicativa del flujo de órdenes en el mercado de bonos en rendimientos de acciones. Harford y Kaul [2005] muestran la existencia de factores comunes entre rendimientos de acciones cotizando en el índice S&P 500 y el volumen de transacciones, siendo el efecto más significativo para acciones que forman parte del índice. Hasbrouck y Seppi [2001] presentan evidencia empírica con datos del mercado de intercambio de acciones de Nueva York (NYSE) en el que el flujo de órdenes y rendimiento de precios tienen factores correlacionados. Resultados análogos aunque con métodos diferentes, son válidos en el mercado financiero de intercambio de futuros en China (CFFEX); ver Wang *et al.* [2013]. Bernhardt

y Taub [2008] desarrollan un modelo teórico en el que demuestran que la covarianza de los precios es determinada por los valores fundamentales de los activos mientras que la covarianza del flujo de órdenes es determinada por efectos de liquidez. En el equilibrio del modelo, se da sustento teórico a los resultados empíricos de Hasbrouck y Seppi [2001]. Chordia *et al.* [2011] documentan empíricamente con datos de mercados financieros en Estados Unidos (NYSE y NASDAQ) la generación de autocorrelación cruzada en rendimientos bajo condiciones de iliquidez. El efecto es transmitido de las acciones de mayor tamaño a las menores. Esto concuerda con los resultados de Pasquariello y Vega [2013] quienes demuestran teóricamente, y verifican empíricamente, que la interacción estratégica de ocultar ventajas informacionales generan en equilibrio, impacto cruzado de precios.

Los trabajos anteriormente citados evidencian (principalmente de manera empírica) que el impacto cruzado incorpora factores comunes de volúmenes transaccionales junto con valores fundamentales, que ante la heterogeneidad de información y motivaciones, generan un mecanismo de acoplamiento. Nuestro objetivo en esta nota es dar evidencia teórica de estos hechos empíricos. Para este fin, se considerará el modelo de Kyle [1985] con dos activos financieros y se darán condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio lineal en el que exista un efecto de impacto cruzado aun cuando los valores fundamentales sean no correlacionados; ver Proposición 3.3. Recíprocamente, se darán condiciones generales para la existencia de correlación de valores fundamentales sin efecto de impacto cruzado; ver Proposición 3.4.

El artículo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 1, se amplía la introducción y se presentan con mayor detalle los elementos necesarios para desarrollar los resultados del trabajo. En la Subsección 1.1, se presenta un breve panorama de los mercados de activos que están organizados mediante un libro electrónico de órdenes (LEO), así como una breve taxonomía de los tres diferentes tipos de participantes que se considerarán. En la Subsección 1.2, se describe el modelo de Kyle [1985] y se identifican las características de profundidad de mercado. Se concluye esta parte con una revisión breve de la literatura cercana al modelo de Kyle y que tiene relación con el presente trabajo. En la Subsección 1.3, se describe la versión bidimensional del modelo de Kyle en el que se identifica el impacto cruzado. En la Sección 2, se presentan los resultados teóricos que sustentan la distinción entre impacto cruzado y correlación de los valores fundamentales. La Sección 3, concluye el trabajo con una discusión.

1. Marco teórico

1.1 Mercados financieros y caracterización de los agentes

Los mercados financieros están conformados por un conjunto de participantes y reglas bajo las cuales interactúan. Hoy en día la gran mayoría de los mercados financieros están organizados mediante libros electrónicos de órdenes (LEO) tal como es el caso de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). El LEO está basado en el Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (SENTRA) y formalizada su operación en la circular 10-237 de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público. Los proveedores de servicios financieros ofrecen diversos canales para interactuar con dicho mecanismo, principalmente sobre Internet. En esta clase de mercados, los participantes emiten órdenes de acuerdo a sus estrategias de inversión, y el libro electrónico lleva un registro y control de toda la actividad. El libro está conformado por dos lados, en el primero se lleva el registro de las órdenes de compra y en el otro el registro de las órdenes de venta. Existen dos tipos de órdenes muy importantes. Las *órdenes pasivas*, también llamadas órdenes de mercado, son aquellas en las que un participante emite una orden de compra (o venta) por un monto de activos sin especificar un precio. Cuando llega una orden del otro lado del libro para el mismo activo, se ejecuta la transacción y ambas órdenes se liquidan total o parcialmente dependiendo del balance de los montos. Las órdenes pasivas aceptan el precio de la contraparte. En contraste, las *órdenes limitadas* no sólo especifican un monto del activo a transaccionar, sino que también el precio al cual se está dispuesto a realizar la operación. En este sentido, estos dos tipos de órdenes ofrecen versatilidad en la implementación de estrategias de inversión a los participantes en función de sus objetivos. El efecto que tienen en el mercado esta clase de órdenes es alto, ver e.g., Hautsch y Huang [2012]. La microestructura de mercados financieros organizados por un LEO ha recibido mucha atención, ver Gould *et al.* [2013] para una revisión bibliográfica sistemática de modelos, observaciones empíricas y hechos estilizados.

En los mercados organizados por un LEO existe una clase muy especial de participante denominado *agente creador de mercado* (market maker). Un creador de mercado es un participante que ha acordado contractualmente que cotizará precios de compra y de venta en forma continua. El creador de mercado está obligado a publicar en todo momento precios a los que está dispuesto a comprar o vender el valor cotizado. Los precios se difunden a través

del sistema del libro electrónico y si llegan otros participantes interesados en “cruzar” dicha cotización, entonces el creador de mercado está obligado a servir la operación. La actividad del creador de mercado involucra el riesgo en todo momento, pero en premio a éste, tiene la oportunidad de generar ganancias debido al diferencial (spread) entre los mejores precios de compra y venta. Su función es fundamental porque garantiza la liquidez del mercado en los dos lados del libro.

Considérese la siguiente situación. Un *agente informado* es un participante del mercado que sistemáticamente monitorea la evolución del mercado así como diversos indicadores del desempeño de las empresas que emiten los activos. El término puede referirse a una persona o a una institución. Al analizar la información determina que es óptimo adquirir acciones de un emisor en particular. Entonces va al mercado y emite una orden de compra. Supóngase que en el mercado todos los participantes son agentes informados con la misma información. Un momento de reflexión permite llegar a la observación de que el agente tendrá el problema de no encontrar una orden del otro lado del libro con la que se pueda liquidar la transacción. Efectivamente, si todos los participantes son racionales y cuentan con la misma información, también querrán comprar. Ni siquiera la existencia del creador de mercado garantiza la operación ya que el precio de venta que ellos publicarán será tan alto que desincentivará al agente informado. Esto sugiere que bajo la situación planteada, habrá una escasa actividad con muy pocos registros en el libro de órdenes, y con una cantidad todavía menor de ellas que se pueden liquidar. Es posible diseñar modelos que capturen el fenómeno de que existe una relación entre la diferenciación de información y el nivel de actividad en el mercado; ver e.g., Batthacharya *et al.* [1995]. Sin embargo, los mercados financieros gozan de gran actividad. Por ejemplo, Nanex una empresa de servicios de información, estima 8 billones de órdenes por día en algunos de los mercados con tecnología de “transacción de alta frecuencia”.

Entonces, en los mercados financieros existen diferentes clases de participantes que cuentan con diferentes niveles de información. La heterogeneidad en la información genera una diversidad de fenómenos que han sido tema de investigación en la literatura especializada. Veamos algunos de ellos. Bajo ciertas condiciones de mercado, la información diferenciada es agregada y en equilibrio integrada en los precios; ver e.g., Ostrovsky [2012]. Así mismo, Boulatov *et al.* [2013] dan evidencia empírica en que información privada de firmas explican autocorrelaciones positivas cruzadas en rendimientos de activos pertenecientes al mismo sector industrial. Información

en la forma de nuevos eventos, particularmente cuando se anuncian ganancias de una firma emisora, impacta precios en otras acciones. Esto es así, aun cuando las emisoras pertenezcan a distintos sectores industriales; ver e.g., Chakrabarty y Moulton [2012]. En mercados financieros integrados, diferencias significativas en información privada son elementos que aunados con la interconectividad, incrementan la probabilidad de un contagio generalizado de una anomalía localizada en un mercado en específico, ver e.g., Pasquariello [2007]. Resulta entonces razonable la propuesta recurrente de la diseminación de información, ver e.g., Andrade *et al.* [2013]. En el otro extremo de homogeneidad informacional, Andrade *et al.* [2008] desarrollan un modelo con datos del mercado financiero de intercambio de acciones en Taiwan (TSE) en el que no hay ventaja informacional y muestran la generación de volatilidad en exceso debido al flujo de órdenes de participantes que tienen diferentes niveles de tolerancia al riesgo.

En el modelo de Kyle [1985] que se presentará en la Subsección 1.2 se distinguen entre dos clases de participantes además de los creadores de mercado. Los agentes informados y los *participantes ruidosos* (Noisy traders). Como ya se mencionó anteriormente, los agentes informados monitorean la evolución del mercado así como diversos indicadores de desempeño. Ésta es información pública pero ciertamente requiere una capacidad de recolección y análisis de datos. También pueden adquirir un mayor nivel de información y efectivamente en una tendencia muy vanguardista existen empresas dedicadas a proveer servicios de información; ver por ejemplo la nota periodística Rothfeld y Patterson [2013]. En el polo opuesto se encuentran los participantes ruidosos. En armonía con la discusión de Black [1986] se puede decir que los participantes ruidosos son los que hacen que los mercados financieros sean factibles, aun cuando los hace imperfectos. Si no existieran los agentes ruidosos existiría un nivel muy bajo de actividad de transacción y no se verían operaciones en forma regular. Un participante ruidoso posee información acerca del precio futuro del activo que sin embargo no es confiable y no representa ninguna ventaja competitiva. Los agentes informados pueden explotar esta falla hasta cierta proporción; ver Bradford De Long *et al.* [1990].

1.2 El modelo de Kyle

En el modelo de Kyle [1985] interaccionan tres tipos de participantes:

- Agentes informados quienes tienen información del valor del activo en una fecha futura.

- Agentes creadores de mercado quienes emiten precios de compra/venta.
- Participantes ruidosos cuya información es incorrecta y en la terminología de Bradford De Long *et al.* [1990] consiste tan sólo de pseudo-señales.

Por cada clase se considera un único representante, y cada uno de ellos emite una orden de compra (o venta) de un único activo. El valor del activo es representado por una variable aleatoria S_1 que tiene distribución normal de media S_1 y varianza $\sigma_{S_1}^2$. La demanda de los participantes ruidosos viene dada por una variable aleatoria Y_1 con distribución normal de media cero y varianza $\sigma_{Y_1}^2$. La cantidad transaccionada por el agente informado es denotada por X_1 . Las variables aleatorias Y_1 y S_1 son independientes.

La transacción del activo ocurre en dos pasos. En el primero, el agente informado elige la cantidad X_1 y emite una orden pasiva. Al momento de tomar su decisión él tiene conocimiento del valor del activo S_1 pero no conoce la demanda del participante ruidoso Y_1 . En el paso dos, el creador de mercado determina el precio P al cual cotizará el activo y emite una orden limitada. Al tomar su decisión, él observa la demanda agregada $X_1 + Y_1$ tanto del agente informado como del participante ruidoso, pero no puede observar en forma aislada ninguna de las cantidades X_1 o Y_1 . Las ganancias del agente informado, denotado $\Pi(X_1, P_1)$, se generan a partir de la divergencia entre el valor del activo y el precio que cotiza el creador de mercado, es decir:

$$\Pi(X_1, P_1) = (S_1 - P_1)X_1. \quad (1)$$

La siguiente definición establece el mecanismo bajo el cual el agente informado determina su demanda al utilizar al máximo su información privada. En la definición, se fija un espacio de probabilidad $(\Omega, \sigma, \mathbf{P})$. El valor esperado de una variable aleatoria Z condicionada a otra variable Y se denotará $E[Z|\sigma(Y)]$.

Definición 1.1 Un equilibrio es un par de variables aleatorias (X_1^*, P_1^*) que determina la demanda del agente informado X_1^* y el precio que cotiza el creador del mercado P_1^* y que satisface la condición de optimalidad

$$E[\Pi(X_1^*, P_1^*) | \sigma(S_1)] \geq E[\Pi(X', P_1^*) | \sigma(S_1)], \quad (2)$$

para X' variable de demanda,

y la condición de eficiencia de mercado

$$P_1^* = E[S_1 | \sigma(X_1 + Y_1)] \quad (3)$$

Esta es la noción de equilibrio que introduce y analiza Kyle [1985]. La ecuación (2) es una condición de optimalidad que quiere decir que el agente informado elegirá su demanda de tal forma que sus ganancias condicionadas al conocimiento del valor de la acción S_1 son máximas. La ecuación (3) es una condición de eficiencia de mercado. Se interpreta como que el creador de mercado genera predicciones correctas del valor del activo dado su conocimiento de la demanda agregada.

Kyle [1985] demuestra que existe un único equilibrio en la clase de vectores de demanda y precio que dependen linealmente de las variables que definen el modelo, es decir el valor del activo S_1 y la demanda del participante ruidoso Y_1 . Para describir la forma de dicho equilibrio necesitaremos introducir la siguiente constante:

$$\lambda = 2 \frac{\sigma_{S_1}}{\sigma_{Y_1}}. \quad (4)$$

La demanda para el agente informado dada por

$$X_1^* = \frac{2}{\lambda} (S_1 - s_1), \quad (5)$$

y el precio que emite el creador de mercado

$$P_1^* = s_1 + \lambda(X_1^* + Y_1), \quad (6)$$

determinan el único equilibrio lineal (X_1^*, P_1^*) .

Veamos las propiedades del equilibrio lineal determinado por las ecuaciones (5) y (6). La demanda X_1^* del agente informado es proporcional a la

realización del precio S_1 menos su valor esperado s_1 . El valor del activo puede tomar valores por arriba o por abajo de su valor esperado. Como consecuencia, la estrategia en equilibrio que sigue el agente informado puede implicar vender o comprar el activo dependiendo de la realización del precio S_1 . Es decir que en equilibrio el agente informado puede transaccionar en ambos lados del libro.

El precio de equilibrio P_1^* cotizado por el creador de mercado es proporcional a la demanda agregada que exhibe el agente informado y el participante ruidoso. Es decir que la constante de proporcionalidad λ se puede interpretar como la elasticidad del precio relativo a la demanda agregada. Si la demanda agregada en equilibrio $X_1^* + Y_1$ aumenta en $\frac{1}{\lambda}$ unidades monetarias, entonces el precio que cotiza el creador de mercado en equilibrio aumenta en una unidad monetaria.

La *profundidad del mercado* en el modelo de Kyle se determina por

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{S_1}},$$

y representa un balance entre la incertidumbre (expresada mediante la desviación estándar σ_{Y_1}) de la estrategia que adoptará el participante ruidoso y la incertidumbre (expresada mediante la desviación estándar σ_{S_1}) del valor del activo. Este resultado es intuitivo. Menor nivel de incertidumbre en el valor del activo, o utilizando el argot financiero menor volatilidad, siempre se asocia con mayor confianza de los participantes y mayor estabilidad del precio. Mayor nivel de incertidumbre en la estrategia del participante ruidoso, es decir mayor nivel en la desviación estándar σ_{Y_1} , aumenta la profundidad del mercado ya que aumenta la probabilidad de que al enviar una cotización al libro de órdenes, habrá un participante ruidoso que esté dispuesto a cruzar la operación, resultando nuevamente en la estabilidad del precio.

1.3 Extensiones y generalizaciones

La literatura en relación de lo que se conoce como microestructura de mercados y en especial la formación de precios, es extensa. De acuerdo a Biais *et al.* [2005] se pueden distinguir grandes temas tales como: costos de transacción, información asimétrica, costo de inventario, finanzas corporativas

y valuación de activos, entre otros. El modelo de Kyle se ubica en el tema de información asimétrica ya que distingue la información que poseen los agentes informados de los creadores de mercado. Una revisión de la literatura especializada motivada por el modelo de Kyle, está fuera del objetivo del presente trabajo. No obstante, en esta sección se mencionan algunas extensiones concretas que se han desarrollado en conexión al modelo de Kyle y con la que es posible situar el objetivo del presente trabajo de diferenciar el impacto cruzado de la correlación. Una revisión sistemática de la literatura en micro-estructura de mercados, y en particular el modelo de Kyle puede consultarse en Biais *et al.* [2005].

En el modelo original de Kyle las variables aleatorias tienen distribución normal. La existencia de equilibrio para distribuciones más generales fue demostrada por Rochet y Vila [1994]. En dicho artículo, los autores formulan una variante al modelo de Kyle en la que los agentes informados conocen de antemano la transacción de los participantes ruidosos y demuestran la existencia y unicidad del equilibrio, sin suponer que las variables del modelo tienen distribución normal.

Trabajos en donde se demuestra la existencia de equilibrio en el que se transacciona un conjunto de activos en el mercado, es decir una formulación multivariada, incluyen Caballè y Krishnan [1994], Lasserre [2004] y Vitale [2012]. La lista no es exhaustiva e incluye diferentes formulaciones. Algo en común en ellos es la hipótesis de distribuciones normales y evidencian que el incremento en la complejidad de una dimensión al caso multivariado es significativo. Otro modelo bien conocido que también incorpora un contexto multivariado es formulado por Admati [1985]. El trabajo de Admati es contemporáneo al artículo de Kyle pero su objetivo es diferente, siendo éste el estudio de la agregación de información. En relación al presente trabajo, son éstos los artículos que tienen la relación más cercana debido a que aquí se considera una versión multivariada del modelo de Kyle. Sin embargo, el objetivo aquí es el de identificar y diferenciar los conceptos de impacto cruzado y correlación, mientras que en las anteriores referencias el objetivo es demostrar la existencia de equilibrio.

Una extensión al modelo de Kyle en la que se incorpora la aversión al riesgo es la obtenida por Cho y El Karoui [2000], quienes consideran distribuciones generales y caracterizan los precios y demanda de equilibrio y dan ejemplos con fórmulas exactas. Un modelo con aversión al riesgo en el que se dispone de un conjunto de activos, es la obtenida por Vitale [2012]. En este trabajo, el autor considera un agente informado adverso al riesgo que

maximiza una función de utilidad perteneciente a la familia exponencial que se conoce como CARA por sus siglas en inglés. Las distribuciones que se consideran en el trabajo son normales.

La primera formulación del modelo de Kyle en un contexto dinámico en tiempo continuo fue desarrollada por Back [1992]. En la extensión de Back se demuestra la existencia de equilibrio y la unicidad en una clase especial de estrategias. Al igual que en el modelo de Kyle, se considera un agente informado neutral al riesgo. Una versión del modelo de Back en la que el agente informado es adverso al riesgo y maximiza una función de utilidad es la desarrollada por Lasserre [2004].

Un estudio de la formación de precios de equilibrio en un contexto en que las distribuciones de las variables son inciertas y los agentes del mercado enfrentan ambigüedad de modelo, es el trabajo de Ozsoylev y Werner [2011]. En este contexto, se identifica cómo la ignorancia de las propiedades distribucionales del mercado conlleva alta volatilidad y falta de liquidez.

1.4 El modelo de Kyle en dos dimensiones

El modelo de Kyle considera un mercado con un único activo y tres diferentes clases de participantes. Al considerar mercados en los que se transacciona a la vez más de un activo, surge el fenómeno de impacto cruzado. Para concretar ideas consideremos un mercado en el que existen dos activos cuyos valores fundamentales S_1 y S_2 presentan correlación. Es posible conjeturar que al transaccionar uno de los activos entonces el segundo tendría que “reaccionar” debido a la correlación.

Por ejemplo, si se vende una dotación grande del primer activo y la correlación es positiva con el segundo, entonces es factible pensar en un precio posterior de ambos activos a la alza. Este simple razonamiento es de conocimiento común para todos los participantes del mercado y debe estar reflejado en sus estrategias. Retomando el tema principal del artículo, surge la interrogante de precisar el significado de la profundidad de mercado en este nuevo contexto, y la reacción que tiene el precio de uno de los activos dado que se transacciona en el otro. La conjetura en la que se identifica el impacto cruzado con la correlación no es del todo correcta: es posible que exista el impacto cruzado de precios aún cuando los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados; ver Proposición 3.3. También es posible que exista correlación y no obstante, el impacto cruzado sea cero; ver Proposición 3.4.

La versión bidimensional del modelo de Kyle se especifica de la siguiente forma. Existen dos activos cuyos valores son modelados por un vector $S := (S_1, S_2)$ con distribución normal bivariada de valor esperado $s := (s_1, s_2)$ y matriz de covarianzas Σ_S . La demanda del participante ruidoso en cada uno de los activos está dada por $Y := (Y_1, Y_2)$ y tiene una distribución normal bivariada con valor esperado $y := (y_1, y_2)$ y matriz de covarianzas Σ_Y . El agente informado decide su demanda en cada uno de los activos y lo denotamos $X := (X_1, X_2)$. El vector de valores S es independiente del vector de demanda Y . Las ganancias del agente informado se definen extendiendo la ecuación (1) al contexto bidimensional:

$$\Pi(X, P) = (S_1 - P_1)X_1 + (S_2 - P_2)X_2.$$

Las transacciones ocurren en dos pasos como en el modelo unidimensional de Kyle. Es decir, el agente informado y el agente ruidoso envían órdenes pasivas. El agente informado conoce el vector de valores S pero no la demanda del agente ruidoso. Posteriormente, el creador de mercado observa la demanda agregada $X + Y$ sin poder distinguir sus partes y envía órdenes limitadas.

La noción de equilibrio de Kyle en dos dimensiones es la siguiente.

Definición 1.2. *Un equilibrio es un vector de demanda $X^* := (X_1^*, X_2^*)$ y un vector de precios $P^* := (P_1^*, P_2^*)$ los cuales determinan la demanda del agente informado y los precios del creador de mercado respectivamente, y satisfacen las siguientes dos propiedades:*

$$E[\Pi(X^*, P^*) | \sigma(S)] \geq E[\Pi(X', P^*) | \sigma(S)], \text{ para } X' \text{ vector de demanda,}$$

y

$$P_i^* = E[S_i | \sigma(X^* + Y)], \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Las interpretaciones de las condiciones de equilibrio son similares al caso unidimensional. Considérense vectores *lineales* de demanda

$$X_1 = a_1 + b^{1,1} S_1 + b^{1,2} S_2, \quad (7)$$

$$X_2 = a_2 + b^{2,1} S_1 + b^{2,2} S_2, \quad (8)$$

y vectores *lineales* de precios

$$P_1 = u_1 + \frac{1}{2} \lambda^{1,1} (X_1 + Y_1) + \frac{1}{2} \lambda^{1,2} (X_2 + Y_2), \quad (9)$$

$$P_2 = u_2 + \frac{1}{2} \lambda^{2,1} (X_1 + Y_1) + \frac{1}{2} \lambda^{2,2} (X_2 + Y_2). \quad (10)$$

La clase de vectores lineales (9) y (10) capturan la idea de impacto cruzado: una demanda adicional $\frac{2}{\lambda^{1,2}}$ de unidades del segundo activo incrementa el precio del creador de mercado del primer activo en una unidad y esto cuantifica el impacto cruzado del segundo activo en el primero. Análogamente, $\frac{2}{\lambda^{2,1}}$ mide el efecto cruzado del primer activo en el segundo. Existe un equilibrio lineal cuyos parámetros involucran la correlación de los activos pero también incorpora información de la estrategia del participante ruidoso.

A manera de recordatorio, si A es una matriz cuadrada entonces su raíz cuadrada es una matriz que se denota $A^{\frac{1}{2}}$ y que satisface $A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$. Mediante $A^{-\frac{1}{2}}$ se denota la matriz inversa de la raíz cuadrada de la matriz A .

Se necesitarán las siguientes matrices

$$\Lambda := \Sigma_Y^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \Sigma_Y^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

y

$$M := \Sigma_Y^{\frac{1}{2}} \Sigma_S \Sigma_Y^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Existe un equilibrio especificado de la siguiente forma:

$$X^* = \Lambda^{-1}(S - s), \quad (13)$$

$$P^* = (s_1, s_2) + \frac{1}{2} \Lambda (X^* + Y - y). \quad (14)$$

La demostración es una adaptación del argumento de Kyle [1985]. Teorema 1, utilizando el hecho de que las distribuciones del modelo son bivariadas normales; el problema multidimensional más general con N activos y K agentes informados e información heterogénea ha sido resuelto por Caballè y Krishnan [1994] y con un agente informado adverso al riesgo por Vitale [2012]. Obsérvese que el equilibrio definido por el vector de demanda (13) y el vector de precios (14) pertenecen a la clase lineal (7), (8) y (9), (10), respectivamente. La matriz Λ contiene la información de la profundidad de mercado y del impacto cruzado. Siempre es simétrica y esto dice que en equilibrio, el impacto cruzado del activo S_1 en S_2 es igual al impacto cruzado del activo S_2 en S_1 . La matriz Λ es positiva definida y tiene las siguientes dos consecuencias. Los elementos de la diagonal $\lambda^{i,i}$ deben ser positivos y entonces, en equilibrio se satisface la ley de la demanda: mayor demanda del activo, induce un mayor precio. También dice que el “impacto primario” dado por el producto de los componentes de la diagonal $\lambda^{1,1} \lambda^{2,2}$ domina el impacto cruzado $\lambda^{1,2} \lambda^{2,1}$, debido a que el determinante de la matriz Λ es positivo.

A manera de ilustración se presenta la estimación del sistema de precios (9) y (10), por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para obtener estimadores de las matrices de impacto cruzado, se eligieron dos pares de acciones que cotizan en la BMV, y forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC); ver BMV [2015]. La información con la que se hará la estimación es pública, la cual se puede compartir si es solicitada a los autores. Tiene periodicidad diaria comenzando en febrero del 2002 hasta mayo de 2015. Las series se han normalizado para que sus máximos, respectivamente, sean igual a uno.

El primer par elegido corresponde a las emisoras GFINBUR y GFNORTE. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.52 & 0.28 \\ 1.02 & 0.65 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

En este caso, las emisoras son empresas pertenecientes al mismo sector industrial (servicios financieros) y se observa un efecto cruzado positivo en ambas direcciones.

El segundo par elegido corresponde a las emisoras ICA e ICH. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.48 & 0.79 \\ 0.67 & 0.33 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

En este caso se observa una situación cercana al primer par en el que existe un efecto de impacto cruzado en ambas direcciones. Las emisoras de este ejemplo tienen actividades diferenciadas (ICA con servicios de consultoría de ingeniería, ICH con producción de aceros) pero relacionadas a la construcción.

Al final de la Sección 2 se presentará un tercer ejemplo en el que el efecto de impacto cruzado es únicamente en una dirección.

2. Correlación vs Impacto cruzado

En esta sección se trabajará bajo la siguiente:

Hipótesis 2.1 *Las matrices de covarianzas Σ_S y Σ_Y son positivas definidas y pueden diagonalizarse simultáneamente.*

Bajo la Hipótesis 2.1, es posible determinar explícitamente el impacto cruzado y caracterizar cuándo es igual a cero.

Una matriz cuadrada E se dice ortogonal si el producto con su matriz transpuesta E^{tr} es igual a la matriz identidad. Es decir, si la matriz E tiene los componentes

$$E = \begin{pmatrix} e^{1,1} & e^{1,2} \\ e^{2,1} & e^{2,2} \end{pmatrix},$$

entonces la condición de ortogonalidad es

$$e^{1,1}e^{2,1} + e^{1,2}e^{2,2} = 0. \quad (17)$$

Las filas de la matriz estarán normalizadas si

$$\begin{aligned}(e^{1,1})^2 + (e^{1,2})^2 &= 1, \\ (e^{2,1})^2 + (e^{2,2})^2 &= 1.\end{aligned}$$

La hipótesis de que las matrices de covarianzas Σ_S y Σ_Y son positivas definidas y son mutuamente diagonalizables, quiere decir que existe una matriz ortogonal E , y matrices diagonales D_S y D_Y tales que

$$\begin{aligned}\Sigma_S &= E D_S E^{tr}, \\ \Sigma_Y &= E D_Y E^{tr}.\end{aligned}$$

En este caso, la matriz Λ se define en la ecuación (11) satisfice

$$\Lambda = E D_S^{\frac{1}{2}} D_Y^{-\frac{1}{2}} E^{tr}. \quad (18)$$

En la siguiente proposición se observa una condición suficiente para que no exista el impacto cruzado.

Proposición 2.2. *Supóngase que los valores S_1 y S_2 son no correlacionados y las demandas Y_1 y Y_2 del participante ruidoso son independientes. En este caso tampoco existirá un impacto cruzado.*

En efecto, las matrices Σ_S y Σ_Y son diagonales y en particular son mutuamente diagonalizables. La matriz Λ toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_{S_1}}{\sigma_{Y_1}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{Y_2}} \end{pmatrix},$$

debido a la ecuación (18).

La siguiente proposición caracteriza la existencia de impacto cruzado sin que los valores S_1 y S_2 sean correlacionados.

Proposición 2.3 (Impacto cruzado sin correlación). *Supóngase las condiciones de la Hipótesis 2.1. Más aún, supóngase que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ no es el vector cero. Condiciones necesarias y suficientes para que el impacto cruzado no sea cero y los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados son*

$$D_S^1 = D_S^2, \tag{19}$$

$$D_Y^1 \neq D_Y^2. \tag{20}$$

En efecto, la matriz de covarianzas Σ_S es diagonal y es igual al producto $ED_S E^{tr}$ en la que D_S es también una matriz diagonal. Una condición necesaria y suficiente para que esto sea posible es

$$e^{1,1}e^{2,1}D_S^1 + e^{1,2}e^{2,2}D_S^2 = 0. \tag{21}$$

La ecuación (21) es equivalente a la identidad (19), debido a la ecuación de ortogonalidad (17). La matriz Λ es igual a

$$\begin{pmatrix} (e^{1,1})^2 \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + (e^{1,2})^2 \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} & e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} \\ e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} & (e^{1,1})^2 \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + (e^{2,2})^2 \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

El impacto cruzado es igual a cero si y sólo si

$$e^{1,1}e^{2,1} \sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} + e^{1,2}e^{2,2} \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} = 0. \tag{23}$$

Dado que se satisface la ecuación de ortogonalidad (17) y la identidad de no correlación (19), la ecuación (23) es equivalente a la negación de la

ecuación (20). Es decir que si D_Y^1 no es igual a D_Y^2 mientras que $D_S^1 = D_S^2$, entonces existirá un impacto cruzado aún cuando los valores S_1 y S_2 sean no correlacionados.

Reconsiderando la conclusión de la Proposición 2.3 se puede afirmar que no sólo la correlación de los valores, sino también la estrategia del participante ruidoso puede generar el efecto de impacto cruzado. Pero también puede ocurrir que exista correlación entre los valores, y la estrategia del participante ruidoso anule el impacto cruzado como se demuestra en el siguiente resultado.

Proposición 2.4 (Correlación sin impacto cruzado). *Supónganse las condiciones de la Hipótesis 2.1. Más aún, supóngase que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ no es el vector cero. Una condición necesaria y suficiente para que no haya impacto cruzado aun cuando los valores S_1 y S_2 sean correlacionados es*

$$\frac{D_Y^2}{D_Y^1} = \frac{D_S^2}{D_S^1}. \quad (24)$$

En efecto, en este caso la ecuación (23) se satisface y en conjugación con la ecuación de ortogonalidad (17) requieren que el vector $(e^{1,1}e^{2,1}, e^{1,2}e^{2,2})$ sea ortogonal a los vectores $(1,1)$ y $\left(\sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}}, \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}}\right)$. Entonces colinealidad implica que

$$\sqrt{\frac{D_S^1}{D_Y^1}} = \sqrt{\frac{D_S^2}{D_Y^2}} \quad (25)$$

que es una forma equivalente de la ecuación (24). Recíprocamente, la ecuación (24) implica que la ecuación (23) se satisface debido a la ecuación de ortogonalidad (17).

Para concluir esta sección, se estimará el sistema de precios (9) y (10), por el método MCO, para las emisoras GFNORTE e ICA, continuando de esta forma, los ejemplos que se incluyeron al final de la Sección 1.3. La matriz estimada de impacto cruzado es igual a

$$\begin{pmatrix} 0.60 & 0.56 \\ 0.02 & 0.51 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

En este ejemplo, el coeficiente de impacto cruzado de GFNORTE en ICA, igual a 0.02, no fue significativo. Es decir que el impacto cruzado se satisface en una sola dirección; en la que la evolución de precios de ICA tienen un impacto en GFNORTE. Vemos así que la acción emitida por la empresa consultora impacta en el sector financiero representado por el grupo Banorte. De acuerdo a la teoría desarrollada en esta sección, dicho impacto cruzado puede ser debido a correlación de valores fundamentales en combinación con el flujo de órdenes y provisión de liquidez. No obstante, una mirada a la situación de la empresa inclina la balanza en favor de un factor transaccional en el impacto cruzado unidireccional. En efecto, la empresa ICA presenta un alto nivel de apalancamiento debido a créditos por varios millones de pesos, estableciendo un vínculo entre la empresa y el sector financiero; ver *El Economista* [2015]. En investigación futura se caracterizará estadísticamente, para el mercado mexicano, la sensibilidad del impacto cruzado a valores fundamentales y al flujo de órdenes.

3. Discusión

Las nociones de profundidad de mercado y de impacto cruzado de precios son intuitivas y frecuentemente citadas en discusiones de los mercados financieros. En este artículo se ha presentado la teoría del modelo de Kyle que entre otras propiedades, permite cuantificar dichas nociones en términos de conceptos básicos como la tendencia y volatilidad de los valores de los activos. El impacto cruzado de precios mantiene un vínculo con la correlación. Sin embargo, el mensaje más importante del presente trabajo es que los conceptos no son equivalentes. Se ha demostrado que puede existir un efecto cruzado sin que exista la correlación de los valores. Recíprocamente, los valores pueden estar correlacionados y no obstante, no existir el efecto de impacto cruzado. Esto es posible debido a que el impacto cruzado incorpora características más allá de la correlación, convirtiéndolo en un fenómeno multidimensional. En el modelo de Kyle se identifica que el impacto cruzado es el resultado de la correlación así como de la heterogeneidad de los diferentes participantes del mercado. Descubrir que otras dimensiones del impacto cruzado existen, y cómo impacta en la liquidación de portafolios, es un tema de investigación contemporánea.

Referencias bibliográficas

- Admati, A. R. (1985). "A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-Asset Securities Markets". *Econometrica*, 59: 629–657.
- Ait-Sahalia, Y. y Yu, J. (2009). "High Frequency Market Microstructure Noise Estimates and Liquidity Measures". *The Annals of Applied Statistics*, 3: 422–457.
- Almgren, R. F. y Chriss, N. (2001). "Optimal Execution of Portfolio Transactions". *Journal of Risk*, 3: 5–40.
- Andrade, S. C., Chang, C. y Seasholes, M. S. (2008). "Trading Imbalances, Predictable Reversals, and Cross-Stock Price Pressure". *Journal of Financial Economics*, 88(2): 406–423.
- Andrade, S. C., Bian, J. y Bursch, T. R. (2013). "A Practical Anti-Bubble Prescription". *The Economists' Voice*, 9(1).
- Back, K. (1992). "Insider Trading in Continuous Time". *The Review of Financial Studies*, 5(3): 387–409.
- Bank, P. y Fruth A. (2014). "Optimal Order Scheduling for Deterministic Liquidity Patterns". *SIAM J. Financial Math.*, 5: 137–152.
- Batthacharya, U., Reny, P. J. y Spiegel, M. (1995). "Destructive Interference in an Imperfectly Competitive Multi-Security Market". *Journal of Economic Theory*, 65: 136–170.
- Bernhardt, D. y Taub, B. (2008). "Cross-Asset Speculation in Stock Markets". *The Journal of Finance*, LXIII(5): 2385–2427.
- Bertsimas, D. y Lo, A. (1998). "Optimal Control of Execution Costs". *Journal of Financial Markets*, 1: 1–50.
- Biais, B., Glosten L., y Spatt C. (2005). "Market Microstructure: A Survey of Micro-Foundations, Empirical Results, and Policy Implications". *Journal of Financial Markets*, 8: 217–264.
- Black, F., Noise. (1986). *The Journal of Finance*. XLI(8): 529–543.
- BMV. (2015). "Relación de las primeras 55 series accionarias de acuerdo a los criterios de selección del IPC". *Portal de Internet: www.bmv.com.mx*.
- Bouchaud, J.-P., Farmer, J.-D. y Lillo F. (2009). "How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand". In *Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution*, ed. T. Hens, K. R. Schenkhoppe, pp. 57–130. *Elsevier: Academic Press*,
- Boulatov, A., Hendershott, T. y Livdan D. (2013). "Informed Trading and Portfolio Returns". *Review of Economic Studies*, 80(1): 35–72.

- Bradford De Long, J., Schleifer, A., Summers, S L. H. y Waldmann, R. J. (1990). "Noise Trader Risk in Financial Markets". *The Journal of Political Economy*, 98(4): 703-738.
- Caballè, J. y Krishnan, M. (1994). "Imperfect Competition in a Multi-Security Market With Risk Neutrality". *Econometrica*, 62(3): 695-704.
- Chakrabarty, B. y Moulton, P. C. (2012). "Earnings Announcements and Attention Constraints: The Role of Market Design". *Journal of Accounting and Economics*, 53(3): 612-634.
- Chan, L. K. y Lakonishok, J. (1995). "The Behavior of Stock Prices Around Institutional Trades". *Journal of Finance*, 50(4): 1147-1174.
- Cho, K. H. y El Karoui, N. (2000). "Insider Trading and Nonlinear Equilibria: Single Auction Case". *Annales d'économie et de statistique*, 60: 21-41.
- Chordia, T. A., Sarkar, y Subrahmanyam, A. (2011). "Liquidity Dynamics and Crossautocorrelations". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 46: 709-736.
- El Economista*. "¿Es tiempo de adquirir acciones de ICA?" *Nota periodística en internet*: <http://eleconomista.com.mx/fondos/2015/04/16/tiempo-adquirir-acciones-ica>, 2015.
- Fama, E. F. y French K. R. (1988). "Permanent and Temporary Components of Stock Prices". *Journal of political economy*, 96(21): 246-273.
- Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J. y Howison S. D. (2013). "Limit Order Books". *Quantitative Finance*, 13(11): 1709-1742.
- Harford, J. y Kaul, A. (2005). "Correlated Order Flow: Pervasiveness, Sources, and Pricing Effects". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40: 29-55.
- Hasbrouck, J. y Seppi, D. J. (2001). "Common Factors in Prices, Order Flows, and Liquidity". *Journal of Financial Economics*, 59(3): 383-411.
- Hautsch N. y Huang, R. (2012). "The Market Impact of a Limit Order". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 36(4): 501-522.
- Kyle, A. S. (1985). "Continuous Auctions and Insider Trading". *Econometrica*, 53(6): 1315-1335.
- Lasserre, J. B. (2004). "Asymmetric Information and Imperfect Competition in a Continuous Time Multivariate Security Model". *Finance and Stochastics*, 8: 285-309.
- Obizhaeva, A. y Wang, J. (2013). "Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics". *Journal of Financial Markets*, 16: 1-32.
- Ostrovsky, M. (2012). "Information Aggregation in Dynamic Markets with Strategic Traders". *Econometrica*, 80(6): 2595-2647.

- Ozsoylev, H. y Werner, J. (2011). "Liquidity and Asset Prices in Rational Expectations Equilibrium with Ambiguous Information". *Economic Theory*, 48(2): 469–491.
- Pasquariello, P. (2007). "Imperfect Competition, Information Heterogeneity, and Financial Contagion". *Review of Financial Studies*, 20(2): 391–426.
- Pasquariello, P. y Vega, C. (2013). "Strategic Cross-Trading in the U.S. Stock Market". *Review of Finance*, 19(1): 229–282.
- Rochet, J. C. y Vila, J. L. (1994). "Insider Trading without Normality". *The review of economic studies*, 61(1): 131–152.
- Rothfeld, M. y Patterson S. (2013). "Traders Seek an Edge with High-Tech Snooping". *The Wall Street Journal*, URL <http://online.wsj.com>.
- Underwood, S. (2009). "The Cross-Market Information Content of Stock and Bond Order Flow". *Journal of Financial Markets*, 12: 268–289.
- Vaglica, G., Lillo, F., Moro, E. y Mantegna R. (2008). "Scaling Laws of Strategic Behavior and Size Heterogeneity in Agent Dynamics". *Physical Review E*, 77(3).
- Vitale, P. (2012). "Risk-Averse Insider Trading in Multi-Asset Sequential Auction Markets". *Economic Letters*, 117: 673–675.
- Wang, D. H., Suo, Y. Y., Yu, X. W. y Lei, M. (2013). "Price-Volume Cross-Correlation Analysis of CSI300 Index Futures". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(5):1172–1179.

Modelación de Medidas y Norma en finanzas

Gauge Theory on Financial Modeling

Guillermo Sierra Juárez*

Fecha de recepción: 6 de enero de 2015

Fecha de aceptación: 26 de mayo de 2015

* Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas
gsierraj@cucea.udg.mx gsierraj@yahoo.com.mx

RESUMEN

El presente trabajo es principalmente una revisión y compilación de las principales ideas y estructura de la teoría de norma (Gauge Theory), que han tenido gran éxito en física, y que ahora se aplican al área de finanzas, en particular en los derivados financieros (teoría de Black-Scholes) con el objeto de determinar precios de opciones en presencia de arbitraje. Al final, se plantea un análisis y se contrastan los resultados de ambas valuaciones de opciones (tradicional y con arbitraje) obtenidos en términos de los parámetros de modelo y se proponen parámetros implícitos para la volatilidad y la velocidad de reacción del mercado.

Clasificación JEL: C6, G0, Y8

Palabras clave: teoría de norma, haz fibrado, arbitraje, volatilidad, velocidad de reacción del mercado.

ABSTRACT

This paper presents a revision and compilation of the main ideas and structure of Gauge Theory, which has had great success in physics and is now being applied in finance. Its application has been mainly on financial derivatives (Black-Scholes), trying to determine options' prices in the presence of arbitrage. At the end of this paper, an analysis is made of the results obtained with both options valuations (traditional and with arbitrage) obtained in terms of the model parameters, and implicit parameters for volatility and market reaction speed are proposed.

JEL Classification: C6, G0, Y8

Keyword: *Gauge theory, fiber bundle, arbitrage, volatility, market reaction speed.*

Introducción

Modelación de Medidas y Norma en finanzas¹

El trabajo presentado es principalmente una revisión resumida del trabajo de Ilinski (2001) y de sus otros trabajos, como sería Ilinski (1998). A este autor, se le reconoce como el creador de esta propuesta original en ideas y sobre todo en la parte técnica de las expresiones matemáticas. Los artículos y trabajos abarcan cientos de páginas y profundizan en cierta medida en la teoría de norma. La intención de esta propuesta es presentar de forma resumida, ordenada y con énfasis en las ideas y gráficas, los principales resultados de dichos trabajos reduciendo en lo posible la parte técnica y favoreciendo la parte geométrica. Al final se presenta una breve revisión propia de las convergencias de los valores de las opciones financieras con arbitraje a su valor de Black-Scholes y se introducen y se proponen los términos de volatilidad implícita (en términos de arbitraje) y parámetro de velocidad de mercado implícito que son los valores que hacen iguales a ambos valores de las opciones. El artículo está dirigido al público en general pero quienes tengan formación en finanzas cuantitativas y física o matemáticas podrían encontrarlo más interesante.

La ecuación y solución de Black-Scholes (Black and Scholes 1973) desde su deducción original y posteriores aproximaciones por otros métodos (p.e. binomial, simulaciones, ecuación de calor) siempre lleva implícitamente el supuesto de que el sistema se encuentra en un equilibrio. Sin embargo, los mercados en su dinámica del día a día no están permanentemente en equilibrio y las oportunidades de arbitraje son evidencia de ello. La propuesta de Ilinski (2001) es la presencia de arbitraje, es decir, un sistema fuera de equilibrio. Y aunque se suponga para mayor facilidad técnica como virtual, se llega a una ecuación y solución más general de opciones plain vanilla tipo europeas Call y Put. El arbitraje es un punto central de las finanzas moder-

¹ En lo subsecuente se mencionará también como Modelación de Teoría de Norma en Finanzas

nas y a pesar de su importancia, ya que es una forma real de generar rendimientos, se ha introducido con relativa modestia en los modelos. Por lo anteriormente expuesto, la idea de arbitraje y curvatura se estarán mencionando a lo largo de todo este trabajo.

La novedad del planteamiento es que hace uso de la teoría de norma y de los conceptos y definiciones formales como haces fibrados, curvatura, conexiones, transporte paralelo y estructura, entre otros, los cuales han obtenido resultados favorables desde hace años en ramas de la física como la gravitación y el electromagnetismo.

Se plantean las ideas geométricas análogas para el caso de finanzas, aplicándolas en conceptos de activos, divisas, acciones y valor del dinero en el tiempo. Además de la idea de circuitos en planos (plaquetas) o trayectorias locales cerradas y curvatura para intercambios financieros y su relación con el arbitraje. Este enfoque, además de por el autor en referencia, ha sido analizado por muy pocas personas en la literatura, a continuación se mencionan algunas de las que han contribuido:

En Sornette (1998) se hace una crítica a la teoría de normalización de finanzas. El autor comenta que aunque la idea en sí es interesante, ni la distribución log-normal, ni las ecuaciones de Black-Scholes demuestran la veracidad de la teoría. Reconoce que el elemento de la introducción del arbitraje aparece de forma correcta como parte de una teoría, pero uno de los problemas que enfrentan las teorías es que los mercados reales son incompletos y que su operador no es único.

En Zhou y Xiao (2010) se revisa el modelo de derivados financieros desde el punto de vista de la simetría de normalización y se muestra cómo la forma de la ecuación puede permanecer invariante bajo transformaciones de numerarias locales, además muestra la relación entre curvatura del haz fibrado y arbitraje. Los autores cambian de numeraria y se refieren a esta nueva simetría de ecuaciones de precios como un conjunto de transformaciones de norma. Esta simetría consiste en cambiar los valores de los activos o precios de los derivados por un factor como el tipo de cambio que tenga un amplio significado financiero. Todos los posibles precios del subyacente conforman el espacio de precios base y en el caso del precio de los derivados se construye un haz fibrado y su estructura de grupo consiste de transformaciones de norma. Se considera la función del precio de opciones sobre el vector de precios base con el objeto de introducir un sistema geométrico para modelar el precio de los derivados bajo transformaciones de norma y la geometría tiene un importante papel en esta aproximación.

En Ilinski y Kalini (1998) se propone un arbitraje virtual y una reacción de los especuladores, el modelo toma en cuenta la restricción al no arbitraje y las caminatas no brownianas. En el modelo se introduce el formalismo geométrico diferencial estocástico para introducir la teoría de finanzas estocásticas e introducir la teoría de arbitraje doméstico donde el mercado es modelado como un haz fibrado principal y el arbitraje corresponde a la curvatura y a la estrategia de arbitraje.

El trabajo se presenta en las siguientes secciones: en la primera se plantea la introducción de la teoría de norma dentro de las finanzas, en la segunda parte se consideran los procesos dinámicos dentro de la normalización y en la tercera sección, el caso particular de Black-Scholes y derivados. En la cuarta sección se revisa la consideración de arbitraje y las soluciones para un call y put, y se presenta un análisis gráfico en función a los parámetros. Al final se muestran las conclusiones, bibliografía y un apéndice.

1. Teoría de Norma y haz fibrado

1.1 Introducción

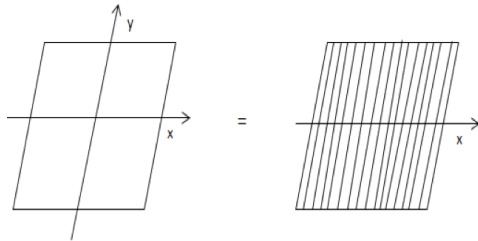
Un haz fibrado² consiste de subespacios idénticos unidos para conformar un espacio completo. Se puede mencionar, por ejemplo, un plano como una colección de líneas unidimensionales puestas sobre un eje, cada una de las líneas es idéntica a las otras desde el punto de vista geométrico. Estos subespacios se denominarán fibras y el espacio sobre el que se pegan es la base, entonces cualquier haz fibrado **E** consiste de una base **B** e idénticas fibras **F** que son colocadas en cada punto de la base **B**.

Otro ejemplo que puede considerarse es un cilindro, en donde se tiene como base un círculo y las líneas rectas pegadas a él son las fibras **F**, o bien la base puede ser una línea y las fibras serían los círculos pegados sobre esta base. Las dimensiones del haz fibrado (**E**) estarán dadas por la suma de la dimensión de la base más la dimensión de la fibra.

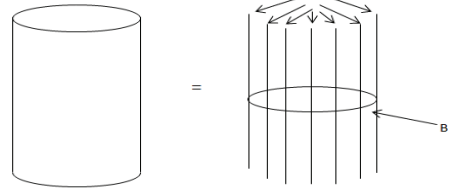
Se necesita además el concepto de comparación o de conexión en regiones locales. Si se piensa en términos de partículas se necesitan dos conjuntos de números: el primero se refiere al conjunto **b** que son las coordenadas de las partículas en la base **B** mientras que **F** denota las coordenadas de las partículas en la fibra **F(b)** correspondiente al punto **b**. Si se continúa pensando

² La definición matemática formal de haz fibrado aparece en el Anexo 1.

Figura 1 Plano descompuesto B y F



Cilindro descompuesto B y F



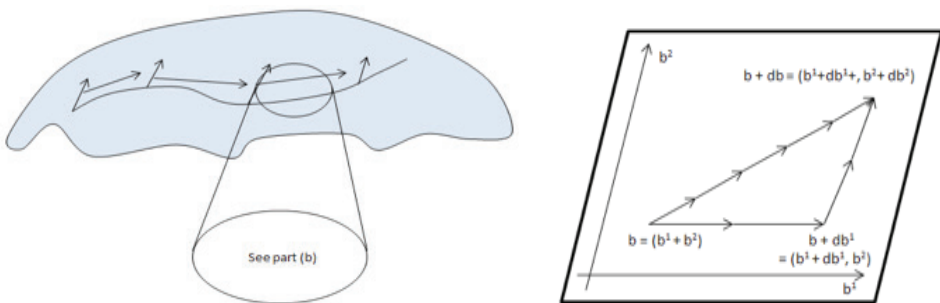
Fuente: Ilinski K. (2001).

en términos del movimiento de una partícula, ésta no puede saltar súbitamente de un punto a otro, sólo puede hacerlo a través de una serie de pasos infinitesimales por lo que será suficiente establecer una regla de comparación para puntos y sumar las diferencias.

El ajuste en términos diferenciales $\Delta F(b)$ entre sistemas coordenados de las fibras $F(b)$ y $F(b+db)$ se calcula como el producto escalar de las diferencias entre los puntos de la base db y el campo calibrado A (ver Fig. 2)

$$\Delta F(b) = db \cdot AF \equiv \sum_{i=1}^{dim B} A^i F(b) \cdot db^i$$

Figura 2. Ajuste de sistemas coordenados

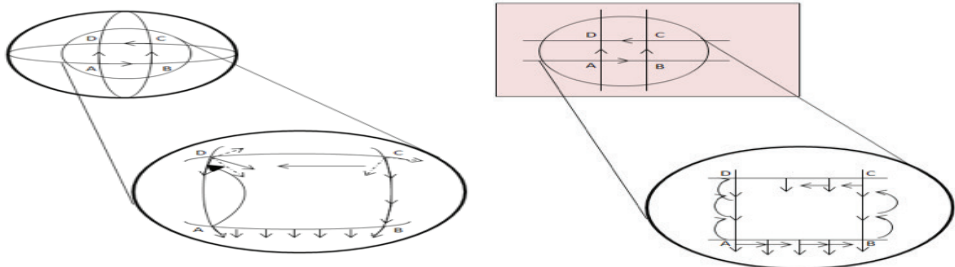


Fuente: Ilinski K. (2001).

La comparación de dos objetos distantes dependerá de la ruta tomada entre ellos en la base B , una curva y el campo de conexión a lo largo de la curva que produce un transporte paralelo a lo largo de la misma. Si se consideran las coordenadas de dos elementos de las fibras uniendo dos puntos distantes, usando para la comparación un campo de conexión y una curva y se encuentra que no hay diferencia, entonces se puede decir que el segundo elemento es el resultado del transporte paralelo del primer elemento a lo largo de la curva, en otras palabras, la diferencia en coordenadas es el resultado de un desajuste de sistemas coordinados y la diferencia covariante a lo largo de la curva es cero. Si los objetos no están conectados por transporte paralelo a lo largo de la curva hay una diferencia covariante distinta de cero a lo largo de la misma curva.

Considerando un transporte paralelo en un rectángulo de una esfera a lo largo de posibles caminos $ABCD$ o AD , se puede ver que hay una diferencia en la orientación del vector que se transporta. El origen de esta diferencia tiene que ver con la curvatura de la esfera, es posible comparar con el caso de un rectángulo plano. La diferencia (covariante) en dicha orientación será menor conforme el radio de la esfera tiende a infinito (es decir, disminuirá conforme R^{-2} multiplicada por la superficie del triángulo esférico) y se parecerá más al caso plano. La diferencia Δ entre dos transportes paralelos a lo largo de dos curvas con el mismo fin sobre la base de algunos haz fibrados con una conexión es definido para ser igual al producto del área S encerrado por las curvas y la curvatura R del haz fibrado asociada con la conexión $\Delta=SR$, la curvatura de un haz fibrado caracteriza su geometría por tanto son objetos muy útiles para su estudio y aplicaciones . (Ver Figura 3)

Figura 3. Transporte paralelo

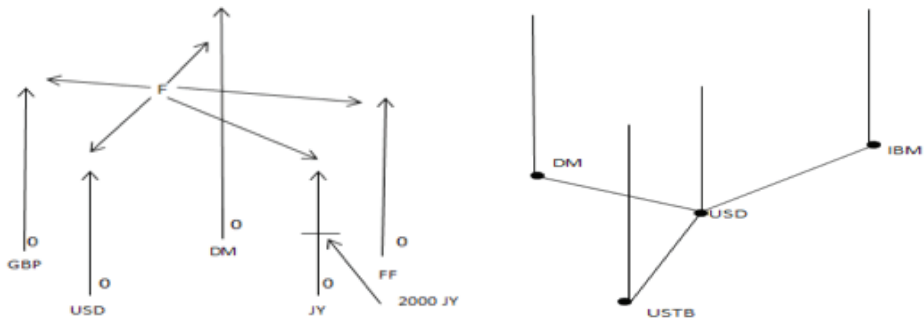


Fuente: Ilinski K.(2001

En el párrafo anterior se mostró la relación geométrica entre curvatura y arbitraje. De manera similar, un espacio de portafolios puede ser planteado como un haz fibrado donde la base está conformada por todas las posibles estructuras de portafolio que cuestan un dólar, las semi-líneas de fibras como los posibles valores de dinero de portafolio y la conexión como el valor del dinero en el tiempo.

Para el caso de divisas se puede definir la base por distintas monedas, por ejemplo, considerando las cinco siguientes: libra esterlina(GBP), dólar (USD), marco alemán (DM), franco francés (FF) y también yen japonés (JY), cada moneda correspondería a una fibra o semi-línea con coordenadas F de 0 a infinito. Un haz fibrado estará en el espacio de dinero y cualquier moneda puede ser intercambiada por otra y entonces la curva en la base consiste en todos los posibles saltos de una punto a otro de la base. El transporte paralelo asociado con cada curva es simplemente el tipo de cambio que constituye la conexión sobre esta base discreta. (ver figura 4)

Figura 4. Haz fibrado en divisas y acciones



Fuente: Ilinski K. (2001).

El procedimiento de descuento de valor en el tiempo, también tiene una interpretación geométrica y juega el papel de transporte paralelo en un haz fibrado que consiste del eje temporal como la base y las semi-lineas como las fibras. La multiplicación por el factor de descuento sirve de ajuste en sistemas coordenados en diferentes momentos del tiempo y las tasas de descuento coinciden con la conexión del campo vectorial. El valor presente neto (VPN) resume el principio básico del valor del dinero en el tiempo. Es importante recordar que la metodología de valor presente de un proyecto

establece que si el VPN es positivo conviene invertir en el proyecto y si es negativo no es recomendable la inversión.

Las ideas se pueden generalizar para construir haces fibrados para cualquier clase de activos y ajustar este espacio con el espacio del tiempo y crear otro haz fibrado que consiste de la descripción del ambiente dinámico. Para realizar esto se toma el producto de las bases que describen los movimientos del dinero a lo largo del mercado y los movimientos de los activos en el tiempo. El nuevo haz fibrado consiste: de precios en el tiempo, en el plano; en los puntos señalados por los nombres de los activos en el tiempo. Este haz permitiría comparar dinero en diferentes activos y en diferentes momentos del tiempo.

Las ganancias de rendimiento de arbitraje están siempre asociadas a flujo de intercambio de activos por dos rutas distintas teniendo puntos de inicio y finales comunes. Puede cambiarse a un problema equivalente donde en lugar de dos rutas puede estudiarse solamente una trayectoria cerrada de flujos de activos. Se utilizará el término de curvatura para representar exceso de rendimiento, asociado con la conexión definida por el tipo de cambio y la tasa de interés. La cantidad R es no negativa e igual a cero sólo si no hay arbitraje, por el contrario si una operación genera ganancias la dirección contraria genera pérdida. La cantidad R caracteriza la existencia de arbitraje sin especificar la operación particular y R será positiva.

2. Haz fibrado en finanzas y dinámica del campo de normalización

Para utilizar el concepto de haz fibrado³ dentro de la teoría de finanzas el primer paso es construir la base. Supóngase que se desea modelar un sistema financiero con $N+1$ tipos de activos que pueden ser divisas o acciones representadas en un plano dimensional por $N+1$ puntos. Para agregar el tiempo en la construcción se anexa una retícula Z para cada punto del activo, si se discretiza el tiempo hay un paso de tiempo natural, (todos los actos del trading suceden discretamente) esto da un conjunto de prebase $L_0 = (0, 1, 2, \dots, N)$. Cualquier punto de la pre-base está completamente caracterizado por la pareja de números (i, n) donde el primer número indica el número de activos y el segundo muestra el momento del tiempo.

³ Para una definición más formal de haz fibrado consultar Anexo 1.

EL siguiente paso es definir la forma de conectar los elementos de la pre-base, la conectividad es importante para definir todas las posibles trayectorias sobre la base y los correspondientes transportes paralelos, para hacer esto se introduce la matriz de vínculos $\Gamma: L_0 \times L_0 \rightarrow \{0, \pm 1\}$ definida por la siguiente regla: para cualesquiera dos elementos de la base $x \equiv (i, n) \in L_0$ y $y \equiv (k, m) \in L_0$ los elementos de la matriz de links $\Gamma(x, y)$ son cero

$$\Gamma(x, y) = 0 \quad (1)$$

Excepto en los siguientes casos.

a) $i=k$ y $n=m-1$ para la condición del i -ésimo título existe un momento que no es la fecha de vencimiento del título

$$\Gamma(x, y) = 1 \quad \Gamma(y, x) = -1 \quad (2)$$

b) $n = m, i \neq k$ y el n -ésimo momento del tiempo el i -ésimo activo puede ser cambiado por alguna cantidad del k -ésimo activo para alguna tasa, supóngase que la transacción es instantánea, en este caso

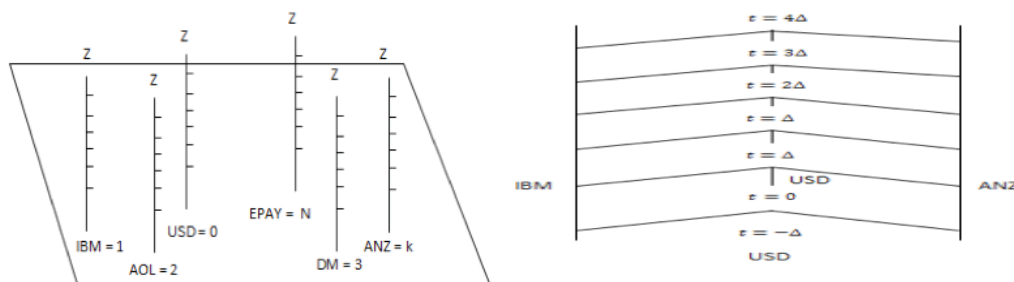
$$\Gamma(x, y) = 1 \quad (3)$$

Cuando las matrices de vínculos son distintas de cero se dice que los puntos correspondientes están conectados, la definición establece que los puntos de la base están conectados si ellos representan el mismo título y momentos consecutivos del tiempo o pertenecen al mismo instante de tiempo y pueden ser intercambiados. (Ver Figura 5)

Usando la matriz $\Gamma(\dots)$ es posible definir una curva en la base, una curva $\gamma(x, y)$ en L_0 que relaciona dos puntos $x, y \in L_0$ es un conjunto de puntos $\{x_j\}_{j=1}^p$ de la base tal que:

1. El primero y último puntos del conjunto coincide con el punto final de la curva $x_1 = x, x_p = y$
2. Para todos los segmentos $p-1$ (x_j, x_{j+1}) los elementos de la matriz de relaciones, son distintos de cero $\Gamma(x_j, x_{j+1}) = \pm 1$ para todo $j = 1, \dots, p-1$

Figura 5. Haz fibrado y conectividad en finanzas divisas y acciones



Fuente: Ilinski K.(2001).

La noción de la curva permite finalmente definir la base. L_0 puede ser dividido en un conjunto de componentes. Una componente conectada es un conjunto máximo de elementos de L_0 que puede ser relacionada a alguna curva para una pareja de elementos

En el planteamiento del sistema financiero se determina que se encuentra en el grupo de dilataciones, es decir, es un grupo de mapeos g de $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ a \mathbb{R} que actúa por multiplicación de alguna $x \in \mathbb{R}$ para alguna constante positiva $g(x) = \lambda(g)x$. Este grupo es de reescalamiento de unidades de activos con un factor de reescalamiento $\lambda(g)$. La función de transición de un haz fibrado con esta estructura de grupo corresponde a varios precios, tipos de cambio y factores de descuento. En esta estructura de grupo, la fibra que trabajará con \mathbb{R}_+

$$F = \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty) \tag{4}$$

Una sección cruzada describe la evolución en el tiempo de una asignación inicial de dinero $s(i, 0)$ donde $i=0, \dots, N$. En el $t=0$, se tienen $s(0, 0)$ unidades del activo 0, $s(1, 0)$ tiene 1 unidades del activo 1, mientras en el momento $t = m$, las correspondientes cantidades $s(0, m), s(1, m), \dots, s(N, m)$ el espacio de las secciones cruzadas es el espacio de todos los posibles escenarios de movimientos de dinero o flujo de dinero. La principal función del integrando será la invariancia de normalización local, es decir, invariancia bajo la acción global de la estructura de grupo, esta sección cruzada activo cero $S(1, 0), i=0 \dots N$ en $t=0$ y se tiene $s(0, 0)$.

De lo comentado en secciones anteriores, una conexión es una regla para el transporte paralelo de un elemento de la fibra de un punto de una base x a otro punto y . Una operación $U(y)$ de transporte paralelo a lo largo de la curva γ pertenece a la estructura de grupo y actúa de la fibra F_x a la F_y

$$U(y): F_x \rightarrow F_y \quad (5)$$

El operador de transporte paralelo a lo largo de la curva γ , $U(\gamma)$ es definido como un producto de operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos que constituyen la curva γ

$$U(\gamma) = \prod_{i=1}^{p-1} U(x_i, x_{i+1}), \quad \gamma \equiv \{x_i\}_{i=1}^{p-1} \quad x_1 = x \quad x_p = y \quad (6)$$

significa que si se definen sólo los operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos elementales entonces $U(\gamma) = U^{-1}(\gamma^{-1})$ restringe a una definición de estos operadores a lo largo de los vínculos elementales con una conectividad positiva. Sumando las reglas para el transporte paralelo a lo largo de los vínculos elementales con conectividad positiva y operadores de transporte paralelo a lo largo de los vínculos de asimetría. La definición de este conjunto es equivalente a la definición de transporte paralelo en el haz fibrado. La conectividad fue definida como la posibilidad de movimientos de los activos en el espacio y tiempo que permite dar una interpretación del transporte paralelo. Dos principios de conectividad positiva fueron definidos. El primero para conectar dos puntos (i, n) y $(i, n+1)$ representa la disposición del i -ésimo activo de una unidad de tiempo que resulta de la multiplicación de un número de activos por un factor de interés o tasa interna calculada como:

$$U((i, n), (i, n + 1)) = e^{r_i \Delta} \in G \quad (7)$$

donde Δ es una unidad de tiempo y r_i es la tasa apropiada de rendimiento para el i -ésimo activo, en el límite continuo r_i es la componente temporal del campo vectorial de conexión correspondiente al punto $(i, \Delta n)$, de forma similar el operador de transporte paralelo es definido como una segunda clase de links entre los puntos (i, n) y (k, n) si hay posibilidad de cambiar el n -ésimo momento una unidad del i -ésimo activo a $S_n^{i,k}$ unidades del k -ésimo activo.

$$U((i, n), (k, n)) = S_n^{i,k} \in G \tag{8}$$

En general, un operador de transporte paralelo a lo largo de una curva es un factor por el cual el número de unidades de activos es multiplicado como resultado de una operación de multiplicación de la curva. El resultado de transporte paralelo a lo largo de dos curvas diferentes con los mismos puntos de frontera no es igual para un conjunto genérico de operadores, una medida de diferencia es el tensor de curvatura R . Sus elementos son iguales a la multiplicación resultante después del transporte paralelo a lo largo de un círculo encerrando todas las plaquetas elementales⁴ con *links* distintos de cero en la base L

$$R_{\text{plaquetas} \rightarrow 0} = \prod_m U_m - 1 \tag{9}$$

m corre sobre todas las plaquetas $\{U_m\}$ son los transportes paralelos correspondientes a los operadores de transporte paralelos y acordando sobre la orientación.

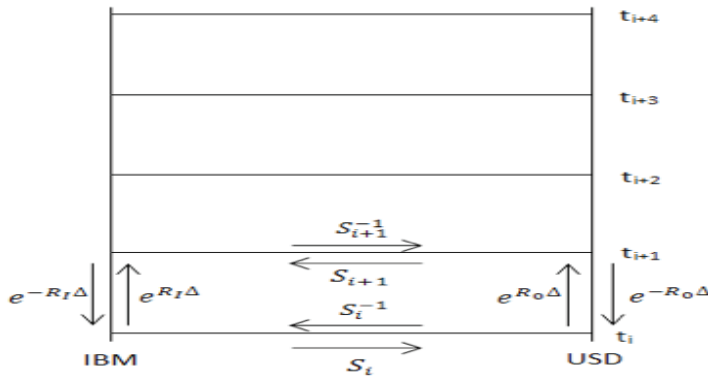
Los elementos del tensor de curvatura son el exceso de rendimientos sobre la operación, correspondientes a las plaquetas encerradas. Considere una plaqueta de elemento que involucra dos diferente activos: acciones y efectivo. Se supone que los activos puede intercambiarse con una tasa S_i , esto significa que una acción es intercambiada de S_i unidades de efectivo en algún momento t_i con la tasa inversa para las operaciones en efectivo, la operación es S_i^{-1} . El tipo de cambio S_i es considerado como un conjunto de tiempos equidistantes $\{t\}_{i=1}^N$ con saltos de tiempo $\Delta = t_{i+1} - t_i$. La tasa de interés para el efectivo es r_0 entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} , el volumen de efectivo se incrementa por un factor $e^{r_0 \Delta}$ las acciones están caracterizadas por una tasa r_1 . Como se mencionará la tasa r_1 está relacionada a la tasa promedio de las acciones.

Considere la posibilidad de hacer una operación de arbitraje entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} donde hay dos posibilidades para un inversionista que posee una unidad de efectivo en el momento t_i y quiere obtener acciones en el momento t_{i+1} . La primera posibilidad es poner efectivo en un

⁴ La curvatura relaciona al transporte paralelo alrededor de bucles cerrados que en espacios discretos son N -gons con x_1, x_2, \dots, x_N unidos consecutivamente por vínculos que se llamarán N -gons plaquetas. Se pueden asociar con transporte paralelo a lo largo de bucles, alrededor de cada plaqueta de la base.

depósito bancario con tasa de interés r_0 en el momento t_i regresando dinero en el momento t_{i+1} y comprar acciones del precio S_{i+1} cada uno. En el momento t_{i+1} los inversionistas tendrán acciones por unidad de efectivo en el momento t_i . Si esos dos números no son iguales $e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}$ y $S_i^{-1}e^{r_1\Delta}$ existirá oportunidad de arbitraje. (ver Figura 6)

Figura 6. Plaqueta acción-efectivo



Fuente: Ilinski K. (2001).

Suponga la siguiente cantidad obtenida en el circuito de la figura 6

$$R^{(2)} = S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} + S_i e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_1\Delta} - 2 \quad (10)$$

Esto es la suma del exceso de rendimientos sobre las operaciones de arbitraje de plaquetas en el límite continuo $R^{(2)}/2 \Delta$ converge al cuadrado del elemento del tensor de curvatura. En ausencia del arbitraje es equivalente a la igualdad

$$S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} = S_i e^{r_0\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_1\Delta} = 1 \quad (11)$$

Se pueden utilizar las cantidades para medir el arbitraje como un exceso de rendimiento. La expresión $S_i^{-1}e^{r_1\Delta}S_{i+1}^{-1}e^{-r_0\Delta} - 1$ presenta la regularización de látice (lattice) de un elemento del tensor de curvatura, esto permite escribir de una manera más formal

$$\begin{aligned}
 R^{(2)} &= U_1 U_2 U_3^{-1} U_4^{-1} + U_3 U_4 U_2^{-1} U_1^{-1} - 2 & (12) \\
 &= (R_{1234} + 1) + (R_{1234} + 1)^{-1} - 2
 \end{aligned}$$

Esta forma se puede generalizar a otras plaquetas, tales como plaquetas espacio-espacio, por ejemplo en un modelo de tipo de cambio para tres monedas, los elementos espacio-espacio del tensor de curvatura son iguales a

$$R_{123} = S_{12} S_{23} S_{31} - 1 \quad (13)$$

y el arbitraje cruzado puede ser caracterizado por la cantidad

$$R^{(2)} = S_{12} S_{23} S_{31} + S_{21} S_{13} S_{32} - 2 \quad (14)$$

2.1 Supuestos básicos

Anteriormente se ha planteado que los precios y factores de descuento tienen significado geométrico como elementos del grupo de estructura de un haz fibrado, éstos son los responsables del transporte paralelo en las direcciones de espacio y tiempo. A continuación se pueden mencionar los principales supuestos sobre la invariancia de renormalización:

Supuesto 1. Dinámica de invariancia de renormalización

Las propiedades observables y los procesos dinámicos del ambiente no dependen de la elección de unidades de los activos en cuestión.

Supuesto 2. Incertidumbre intrínseca

El ambiente financiero real es intrínsecamente incierto, dicho de otra forma, hay probabilidades distintas de cero de obtener excesos de tasas de rendimientos diferentes de las obtenidas en ambientes de certidumbre.

Supuesto 3. Principio de mínima acción

El exceso de la tasa de retorno, es decir, la desviación de la tasa de retorno sobre la tasa libre de riesgo, en cualquier operación toma el valor más pequeño posible que es permitido por el ambiente económico externo.

Suposición 4. Localidad

Significa que si una teoría es completa, la dinámica de un activo es directamente influenciada por sólo activos conectados Γ , por definición dos

puntos de la base L están Γ conectados si existiera la posibilidad de intercambiar activos.

Supuesto 5. Principio de correspondencia

Cuando el flujo de dinero no entra dentro de la teoría, ésta tiene que ser equivalente a las finanzas matemáticas estándar, en el límite de tiempo continuo se obtendrán caminatas cuasi brownianas correlacionadas con precios y factores de descuento y se reproducirán los resultados de la teoría de portafolios y derivados. Si se introducen flujos monetarios, se usarán algunos principios para desarrollar sus dinámicas, una forma de estudiar las propiedades estadísticas de movimiento de precios será con análisis de datos en tiempo real.

2.2 Construcción de la dinámica

De acuerdo a uno de los supuestos anteriores, los mercados financieros son esencialmente inciertos, sus variables son por ejemplo precios o tasas de interés o cambio que se caracterizan por funciones de probabilidad conjuntas que servirán para encontrar valores de los factores de transporte paralelo en cada relación de la base y que no servirán para dar una descripción del sistema. Se denomina a un conjunto particular de valores de los factores de transporte paralelo una configuración representada por $\{S, r\}$ y su distribución de probabilidad es la cantidad principal para construir. Se supone una distribución de probabilidad exponencial⁵

$$P(\{S, r\}) = N e^{-A_g |S, r|} \quad (15)$$

donde N es un factor de normalización y $A_g |S, r|$ es la nueva funcional que corresponde a la acción respecto a la invariancia de normalización.

Además de acuerdo a los supuestos anteriores se debe tener una formulación invariante de norma, para asegurar lo anterior, la medida de integración tiene que ser invariante y los precios y tasas de la configuración entran en la acción en forma de producto a lo largo de las curvas cerradas en la base, es decir, esos productos son operadores de transporte paralelo a lo largo de curvas. Dichos operadores de transporte paralelo a lo largo de las

⁵ Pueden proponerse otros tipos de distribuciones, pero la exponencial representa muchas ventajas técnicas.

curvas pueden verificarse que sean resultado de una sola combinación $\{U_{ik}\}$ que se establece constante bajo la transformación general de normalización, son productos de $U_{12} U_{23}, \dots, U_{n1}$ y en este caso se restringirá a la dependencia funcional de la acción de los productos. Sin pérdida de generalidad se restringirá a un conjunto de transporte paralelo cíclico al transporte paralelo a lo largo de la base, es decir, a curvas que no pueden ser reducidas.

Entonces se puede representar la acción como un expansión de series en términos de curvaturas de plaquetas elementales R

$$A_g |S, r| = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}} \alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N} (R_{\gamma_1} + 1)(R_{\gamma_2} + 1) \dots (R_{\gamma_N} + 1) \quad (16)$$

donde la suma es tomada sobre todos los posibles conjuntos de plaquetas elementales con algún coeficiente arbitrario $\alpha_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N}$ la ecuación anterior da una forma general de una acción de normalización invariante, cualquier invariante de normalización dinámica tiene que ser descrita por una acción de este tipo.

Por otro lado, la forma general de una acción lineal en curvatura puede ser escrita como:

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}} \alpha_{\gamma} (R_{\gamma} + 1) \quad (17)$$

que es la suma sobre todas las plaquetas elementales γ_n , incluyendo diferentes orientaciones, si el coeficiente correspondiente a la plaqueta elemental no depende de la orientación, entonces se puede reescribir

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\text{plaquetas } p} \alpha_p [(R_p + 1) + (R_p + 1)^{-1} - 2] \quad (18)$$

Para ilustrar el significado de la acción, considérese un sistema de dos activos (acciones y efectivo) en una normalización fija. La acción es una invariante de normalización, por lo que es posible encontrar una transformación invariante que no cambie la dinámica pero simplifique los cálculos. Es posible elegir entre varias opciones de normalización, una de las cuales es una normalización axial en la que los elementos del grupo son tomados constantes o en la dirección del tiempo. A continuación se fija el precio de las acciones en el momento $t=0$ como S_0 , y significa que la situación de la base, la única variable dinámica es el tipo de cambio como función del

tiempo y la correspondiente medida de integración es la medida invariante dS_i/S_i . Definiendo $t_i = i\Delta, i = -\infty, \dots, \infty$ se llega a la siguiente acción como función de $\{S_i\}$

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i (S_i^{-1} e^{r_1 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta} + S_i e^{-r_0 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta} - 2) \quad (19)$$

eligiendo $\alpha_i = 1/2\Delta\sigma_i^2$ en el límite $\Delta \rightarrow 0$ la expresión converge a la integral

$$A_g(S(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\sigma^2(\tau)} \left(\frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} - \mu \right)^2 \quad (20)$$

que corresponde a una caminata aleatoria con volatilidad $\sigma(\tau)$ dependiente del tiempo y tasa promedio del rendimiento de las acciones

$$\mu = r_0 - r_1 \quad (21)$$

se introduce $S(\tau_i)$ como $S(\tau_i) = S(t_i + \Delta/2)$ que permite representar el término $S_i^{-1} e^{r_1 \Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_0 \Delta}$ y después del desarrollo, simplificar y suponiendo $\alpha_i = 1/2\Delta\sigma_i^2$ se llega a

$$A_g(S(\cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{S'_l(\tau_i)}{S_l} + r_l - r_0 \right) \left(\frac{S'_m(\tau_i)}{S_m} + r_m - r_0 \right) \quad (22)$$

el sistema como un todo no es conservativo, ambas tasas r_0 y r_1 son externas al sistema, además se supone certidumbre y que la capitalización de la compañía se ha incrementado, nuevas acciones por la misma cantidad han sido emitidas y dividendos han sido pagados pero no en efectivo. El número de acciones para cada acción es $e^{r_1 \Delta}$, significa que las acciones acumuladas tendrían un precio $S_1 e^{r_1 \Delta}$ mientras que el precio original fue S_0 , tomando en cuenta el descuento y la certidumbre se tiene la expresión

$$S_1 = e^{(r_0 - r_1) \Delta} S_0 \quad (23)$$

de lo anterior la tasa de rendimiento de la acción debería ser $r_0 - r_1$. La forma general de la acción con curvatura cuadrática R es representada por

$$A_g(\{S, r\}) = \sum_{\{\gamma_n, \gamma_m\}} \alpha_{\gamma_n \gamma_m} R_{\gamma_n} R_{\gamma_m} \quad (24)$$

después la suma es tomada sobre todas las plaquetas elementales incluyendo distintas orientación $\gamma_n \gamma_m$, en el caso de un sistema de efectivo y acciones se genera un proceso estocástico que en el límite continuo con varianzas y coeficientes de correlación de una sección cruzada se puede demostrar

$$A_g(S(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{l,m=1}^N \frac{1}{2} (\sigma^2(\tau))_{lm}^{-1} \left(\frac{S'(\tau_i)}{S(\tau_i)} + r_1 - r_0 \right)^2 \quad (25)$$

el tipo de correlación de la descripción de activos con correlaciones que no son debidas a flujos monetarios. Es claro, que las acciones cuadráticas son casos particulares de acciones más generales y pueden ser consideradas en casos donde las fluctuaciones de arbitraje son suficientemente pequeñas y que se pueden limitar a la acción general.

3. Modelo de normalización para determinar precios de derivados

Se considerará un sólo tipo de acciones; perfecta movilidad de capitales y un portafolio con dos activos de riesgo, un parámetro para los derivados y las acciones subyacentes con el precio de la acción como un sólo factor. También se asumirá la existencia de activos libres de riesgo, depósitos bancarios con una tasa de interés r_b , acciones o derivados pueden ser intercambiados por efectivo y viceversa. Las tasas de cambio son S_i y C_i , es decir, una acción o un derivado es intercambiado por S_i o C_i unidades de efectivo en el momento t_i , y las tasas inversas de cambio son S_i^{-1} y C_i^{-1} , considera el periodo que inicia en $t=0$ y vencimiento en $t=T$, es conveniente elegir el tiempo T como el vencimiento del contrato derivado, supóngase que existe el horizonte de tiempo más corto $\Delta = T/N$ y Δ es tomado como unidad de tiempo. Significa que los tipos de cambio S_i y C_i son el conjunto de tiempo equidistante $\{t_i\}_{i=0}^N, t_i = i\Delta$ que representa el transporte paralelo.

La tasa de interés es r_b entre dos tiempos subsecuentes t_i y t_{i+1} y el volumen de efectivo se incrementa por el factor $e^{r_b \Delta}$. Las acciones y los deriva-

dos están caracterizados por las tasas r_1 y r_2 , dichas tasas son responsables del transporte paralelo en la misma dirección.

Se propone una acción de campo de normalización que utiliza el tensor de curvatura asociada con las operaciones de plaquetas elementales. Por ejemplo, la operación de plaquetas efectivo-acciones tiene el siguiente procedimiento: un “trader” pide prestada una acción en el tiempo t_i y la vende por S_i unidades de efectivo y pone el efectivo en el banco hasta el tiempo t_{i+1} y cierra su posición corta en el tiempo t_{i+1} , pidiendo prestado $e^{r_1\Delta}S_{i+1}$ unidades de efectivo y comprando acciones, el resultado del “trader” será $e^{r_b\Delta}S_i - e^{r_1\Delta}S_{i+1}$ unidades de efectivo, el exceso de rendimiento de esta operación es:

$$Q_i^{(1)} = S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} - 1 \quad (26)$$

La ecuación tiene elementos de tensor de curvatura correspondientes a los activos de los ciclos. Si $Q_i^{(1)} \neq 0$ se puede tener un exceso de rendimiento, ésta es una operación inversa, la cantidad

$$R_i^{(1)} = (S_i^{-1} e^{r_1\Delta} S_{i+1} e^{-r_b\Delta} + S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} - 2) / \Delta \quad (27)$$

y para medir el precio equivocado (exceso de rendimiento) en operaciones en efectivo, en ausencia de precio equivocado se tiene a la igualdad

$$S_i^{-1} e^{r_1\Delta} S_{i+1} e^{-r_b\Delta} = S_i e^{r_b\Delta} S_{i+1}^{-1} e^{-r_1\Delta} = 1 \quad (28)$$

lo mismo puede ser para otras operaciones de plaqueta, por ejemplo el elemento del tensor de curvatura para una plaqueta efectivo derivado está dada por

$$Q_i^{(2)} = C_i e^{r_b\Delta} C_{i+1}^{-1} e^{-r_2\Delta} - 1 \quad (29)$$

recuérdese que las plaquetas son invariantes de normalización, es decir, no cambian bajo una transformación de normalización reescalada. Se propone la acción de normalización más simple que depende de correlaciones de activos acción cuadrática local en tiempo

$$A_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\alpha_{11} \left(\frac{S'}{S} + r_1 - r_0 \right)^2 + \left(\frac{C'}{C} + r_2 - r_0 \right)^2 + \right. \quad (30)$$

$$\left. 2\alpha_{12} \left(\frac{C'}{C} + r_2 - r_0 \right) \left(\frac{S'}{S} + r_1 - r_0 \right) \right]$$

aquí $\|\alpha\|$ es la inversa de la matriz de correlación de las cantidades plaquetas, la correlación es importante ya que el derivado depende del precio subyacente que causa la correlación. La acción directa del movimiento del precio subyacente, el precio sigue un movimiento geométrico browniano en ausencia del flujo de dinero, ese flujo de dinero puede cambiar significativamente la función de distribución y otras propiedades de la caminata aleatoria.

Si se selecciona una tasa libre de riesgo r_b y $r_b - r_1$ y $r_b - r_2$ tasas promedio de rendimiento sobre las acciones y derivados las variables son el precio $S(t)$ y $C(t)$ y la medida correspondiente de integración en la integral funcional para la probabilidad de transición es la medida invariante

$$\mathcal{D}C \mathcal{D}S = \prod_t \frac{dS(t)}{S(t)} \frac{dC(t)}{C(t)} \quad (31)$$

Si se fija el precio de las acciones en el tiempo $t=0$, $S_0=S(0)$, y el tipo de cambio del derivado de la acción al momento de ejercer el derivado, la ponderación de la probabilidad de las trayectorias de los precios en ausencia del flujo de dinero está dada por la acción anterior y la medida anterior. Se necesita calcular la matriz de correlación $\|C_{ij}\|$ y su inversa $\|\alpha_{ij}\|$ para sustituir en la ecuación anterior. Un instrumento derivado de una acción, el precio del derivado tiene que ser correlacionado con el precio de la acción. Es conveniente escribir la función $C(t)$, para algunas funciones desconocidas $S(t)$ se integrará $C(t)$ sobre todos las funciones sin perder generalidad.

El coeficiente de correlación C_{11} es por definición la volatilidad del precio del activo

$$C_{11} = \frac{\langle \left(\frac{1}{S} dS(t) + (r_1 - r_0) dt \right) \left(\frac{1}{S} dS(t) + (r_1 - r_0) dt \right) \rangle}{dt} = \frac{1}{\beta_1} \quad (32)$$

y se denota el segundo factor de correlación C_{12} por $\alpha(t)/2\beta_t$ se introduce

$$\alpha(t) = \frac{\langle (\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt) (\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt) \rangle}{\langle (\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt) (\frac{1}{S}dS(t) + (r_1 - r_0)dt) \rangle} \quad (33)$$

usando la expansión del lema de Ito y suponiendo que el primer término depende de dS , se encuentra una expresión para α igual a $\frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$, el coeficiente de correlación se puede escribir

$$C_{12} = \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} / 2\beta_1 \quad (34)$$

C_{22} se calcula de manera similar, la correlación en el cambio de derivados depende de la S mencionada y de la naturaleza estocástica de la función $C(S)$, la suma puede ser expresada como suma de la correlación $\frac{\alpha^2(t)}{2\beta_1 \text{ para } S}$ y algunas correlaciones residuales

$$C_{22} = \langle (\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt) \quad (35)$$

$$(\frac{1}{C}dC(t) + (r_2 - r_0)dt) \rangle / dt = \frac{\alpha^2(t)}{2\beta_1} + \frac{(1-\alpha)^2(t)}{2\beta_2}$$

el último término desaparece si las derivadas son la acción de tal forma $\alpha = 1$ y $C_{11} = C_{12}$, la matriz es resultado

$$\|C_{ij}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\beta_1} & \frac{\alpha}{2\beta_1} \\ \frac{\alpha}{2\beta_1} & \frac{\alpha(t)^2}{2\beta_1} + \frac{(1-\alpha)^2}{2\beta_2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

y la inversa $\|\alpha_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2\beta_1 + \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 & \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\beta_2 \\ \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 & \frac{2}{(1-\alpha)^2}\beta_2 \end{pmatrix}$

$$A_g = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 dt \left[\left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right)^2 \right] \quad (37)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2 dt}{(1-\alpha)^2} \left[\left(\frac{1}{C(t)} \frac{dC(t)}{dt} + (r_2 - r_b) \right) - \alpha(t) \left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right) \right]^2$$

se debe notar que

$$A_g = \sum_i \left(\beta_1 R_i^{(1)} + \frac{\beta_2}{(1-\alpha)^2} R_i^{(2,1)} \right) \tag{38}$$

donde

$$R^{(1)} = \frac{(Q^{(1)})^2}{\Delta} \quad R^{(2,1)} = \frac{(Q_i^{(2)} - \alpha_i Q_i^{(1)})^2}{\Delta} \tag{39}$$

esta acción está en un sistema de látice, el cual es considerado usando la acción en tiempo continuo.

3.1 Derivación de la ecuación de Black-Scholes

Toda la estructura matemática anterior de la teoría de normalización es el fundamento para deducir la ecuación de Black-Scholes en el límite clásico primero en ausencia de flujo monetario, el término de A_g en el lado derecho de la ecuación (37) para el precio de un activo subyacente permite usar el lema de Ito en la deducción.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{C(t)} \frac{dC(t)}{dt} + (r_2 - r_b) \right) - \alpha(t) \left(\frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + (r_1 - r_b) \right) \right]^2 \right] \tag{40}$$

ya que $S(t)$ sigue un movimiento geométrico browniano es posible usar el lema de Ito para expandir dC y se puede reescribir el término de acción

$$\int \beta_2 dt \frac{c^2}{(c - \frac{\partial C}{\partial S})^2} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right. \\ \left. - r_b \left(1 - \frac{S}{c} \frac{\partial C}{\partial S} \right) + \left(r_2 - \frac{S}{c} \frac{\partial C}{\partial S} r_1 \right) \right]^2 \tag{41}$$

la última expresión se puede simplificar si la componente de la conexión (en la que la normalización es axial) es fija de tal forma $r_2 = r_1 \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S}$. En el caso general los valores de S y C no serán los precios de mercado de un número fijo de acciones y derivados, en el caso de la tasa promedio del rendimiento de acciones obedece la acción $r_1 = r_b - \mu$. La normalización elegida de S corresponde a un número fijo de acciones, de la misma forma, la fijación de la normalización corresponde a C como el precio de un número fijo de contratos derivados que permitirán obtener la expresión para el término arbitrario de acción

$$\int \beta_2 dt \left(\frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - r_b \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right)^2 \quad (42)$$

En el caso clásico $\beta_2 \rightarrow \infty$, que corresponde a la ausencia de arbitraje, la acción reduce la integración funcional sobre funciones $C(t,S)$, la contribución de la trayectoria clásica es definida por la ecuación Black-Scholes para el precio de derivados financieros

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt - r_b \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (43)$$

Como se observa, esta ecuación no depende de un tipo particular de derivados y sólo quedaría incluir las condiciones de frontera. Para la derivación de las cantidades de plaquetas de frontera para una opción call europea, en el vencimiento T la opción puede ser vendida o comprada por $C(T)$ unidades de efectivo pero puede ser intercambiada (junto con E unidades de efectivo) para una acción. Si el precio de la acción S es menor que el precio de ejercicio E , se descarta la opción call. El nuevo circuito crea nuevas oportunidades de arbitraje que se toman en cuenta para introducir el término βR_N , existe un nuevo arbitraje que es disponible al vencimiento en T ; se puede pedir prestado el portafolio consistente de la operación y E unidades de monedas intercambiándolo por acciones si $S(T) > E$ vendiendo acciones por $S(T)$ unidades de efectivo y comprando el portafolio otra vez, esto es, que las plaquetas exceden al rendimiento

$$Q_N = \left[[S(T)\theta(S(T) - E) + E\theta(E - S(T))] \right] [C(T) + E]^{-1} - 1 \quad (44)$$

y para la cantidad de plaqueta RN se obtiene

$$R_N' = \frac{E\theta(E-S(T))+S(T)\theta(S(T)-E)}{C(T)+E} + \frac{C(T)+E}{E\theta(E-S(T))+S(T)\theta(S(T)-E)} \quad (45)$$

en el límite clásico $\beta \rightarrow \infty$ que reproduce las condiciones de frontera para las opciones call europeas

$$C(T) = [S(T) - E]\theta(S(T) - E) \quad (46)$$

sin considerar la posibilidad de arbitraje en el tiempo T, es posible usar esta ecuación como una condición de normalización fija y no es necesario considerar adicionalmente plaquetas en la frontera.

4. Arbitraje de flujo de dinero

Para introducir el arbitraje de flujo de dinero es conveniente usar un haz fibrado de base continua. En el caso de derivado y acciones, las coordenadas en la base son (t, X_C, X_S) donde t es el tiempo, X_S es la fracción en acciones y X_C es la correspondiente fracción de derivados.

Los que realizan arbitraje, por definición explotan las oportunidades de obtener ventajas de las ineficiencias del mercado, en el espacio de configuración está restringido a un portafolio libre de riesgo, como en física o matemáticas se necesita introducir un potencial externo

$$-\lambda \int \left(x_C \frac{dC}{C} + x_S \frac{dS}{S} \right)^2 \quad (47)$$

dentro de acción de arbitraje. La acción por si misma puede ser construida usando los principios de invariancia de normalización, maximización de utilidades, perfecta movilidad de capitales, un horizonte de inversión de corto tiempo, no existencia de costos de transacción y la hipótesis de mercado

fractal. En el caso de aversión al riesgo absoluta ($\lambda \rightarrow \infty$), las trayectorias de flujo de dinero con probabilidades diferentes de cero están confinadas a reducir un sub-espacio definido por

$$X_S + X_C \frac{S}{C} \frac{\partial C}{\partial S} = 0 \quad (48)$$

que elimina el término potencial que coordina el portafolio de arbitraje que está parametrizado por k:

$$X_C = k \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \quad X_S = -k \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \quad (49)$$

Por lo tanto, en la acción para el arbitraje se define un campo unidimensional con la línea como espacio de configuración. Si se supone una simplificación de que el arbitraje mantiene el portafolio con un valor máximo absoluto de k, entonces maximizando el precio, el valor máximo k_0 es dictado por la posición límite para un arbitrarista promedio, entonces el significado de los parámetros k es la fracción del portafolio completo en activos de riesgo. La suposición permite reducir el conjunto de portafolios con arbitraje a sólo dos puntos

$$\left(k_0 \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}}, -k_0 \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \quad (50 a)$$

$$\left(-k_0 \frac{C}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}}, +k_0 \frac{S \frac{\partial C}{\partial S}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \quad (50 b)$$

en esta forma el flujo de dinero de arbitraje está descrito por este modelo que permitirá usar los resultados de esos capítulos en el análisis de la reacción del mercado a fluctuaciones de arbitraje virtual.

En el caso de haz fibrado continuo es conveniente fijar la calibración, de tal forma que el precio de base de portafolios en cada punto de la base es igual a uno y las componentes correspondientes de la conexión del punto (t, X_C , X_S) son:

$$A_0 = (1 - x_S - x_C)r_b + x_S \left(r_l + \frac{dS(t)}{S(t)} \right) + x_C \left(r_2 + \frac{dC(t)}{C(t)} \right) \quad (51)$$

En el caso anterior, la matriz de transición no normalizada para el incremento del paso en la norma tiene la forma

$$P(t_i, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} e^{\beta \Delta A_0(-k_0)} & 1 \\ 1 & e^{\beta e^{\beta \Delta A_0(k_0)}} \end{pmatrix} \quad (52)$$

lo que sigue

$$A_0(\pm k_0) = r_b \pm k_0 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \right) / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (53)$$

y se puede reescribir la matriz de transición

$$P(t_i, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} \exp \left(\frac{\beta r_b \Delta - k_0 \beta \Delta \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \right)}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) & 1 \\ 1 & \exp \left(\frac{r_b \Delta - k_0 \beta \Delta \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \right)}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right) \end{pmatrix} \quad (54)$$

Normalizando e introduciendo la notación

$$\mathcal{L}_{BS} C = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r_b S \frac{\partial C}{\partial S} - r_b C \quad (55)$$

entonces se obtiene la matriz de transición

$$P(t_i, t_{i-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \left[\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta L_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) X \right] \quad (56)$$

$$\left(\begin{array}{cc} e^{-\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta L_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} & e^{-\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta L_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} \\ e^{\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta L_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} & e^{\frac{1}{2} k_0 \beta \Delta L_{BS} C / \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right)} \end{array} \right)$$

$$\frac{dR}{dt} + \lambda R = v(t), \langle v(t) \rangle_v = 0, \langle v(t) v(t) \rangle_v = \sum \delta(t - t)^2 \quad (57)$$

Por tanto el modelo de normalización para derivados es complicado por lo que se buscan soluciones más bien por simulaciones que teóricas. Entonces se concentra en las correcciones al no arbitraje causadas por el flujo de dinero de arbitraje y posteriormente se pueden agregar los demás factores. Se propone un modelo fenomenológico para el precio de los derivados con arbitraje virtual y que sea consistente con el modelo de normalización y se generalizará la ecuación de Black-Scholes al caso de arbitraje virtual.

4.1 Modelo fenomenológico de precios con arbitraje virtual

Supóngase un momento del tiempo $\tau < t$ con una oportunidad de arbitraje en el mercado que sucede cuando el precio de la acción subyacente es $S' \equiv S(\tau)$. Se denota el rendimiento instantáneo de arbitraje por $v(\tau, S)$ donde el mercado reaccionaría y actuaría de tal forma que el arbitraje disminuiría gradualmente y los rendimientos de mercado tenderán a su estado de equilibrio en ausencia de arbitraje. El proceso de relajación puede ser descrito por la ecuación

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = F(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R}(\tau) = v(\tau, \Pi) \quad (58)$$

Se propone una función de reacción del mercado (manteniendo sólo un término) dependiente del tiempo y los coeficientes S y con el coeficiente $\{\lambda_i\}$ (que puede ser estimado de micro teoría de haces fibrados del mercado pero para ser más simple el análisis se considerará como constante) de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\lambda\mathcal{R}. \quad \mathcal{R}(\tau) = v(\tau, S') \quad (59)$$

La solución, después de sumar sobre todas las posibles fluctuaciones con frecuencias correspondientes, conduce a la siguiente expresión para el rendimiento de arbitraje al tiempo τ

$$\mathcal{R}(t, S) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty dS' e^{-\lambda(t-\tau)} P(t, S | \tau, S'), \quad t < T \quad (60)$$

donde T es el vencimiento del contrato derivado que inicia en el tiempo $t=0$. La función $P(t, S | \tau, S')$ es la frecuencia con fluctuaciones de arbitraje en el tiempo cuando el precio del subyacente era S' al tiempo τ con precio del subyacente es S. Esta función aparece en presencia de los especuladores en el mercado cuyas actividades sensibles al precio crean oportunidades de arbitraje, para especificar el proceso de arbitraje $v(t, S)$ asumiendo que las fluctuaciones en diferentes tiempos y precios subyacentes son independientes del ruido blanco con varianza $\Sigma^2 f(t)$

$$\langle v(t, S) \rangle = 0, \quad \langle v(t, S)v(t', S') \rangle = \quad (61)$$

$$\Sigma^2 \theta(T - t) f(t) \delta(t - t') \delta(S - S')$$

La función $f(t)$ es introducida al modelo como una dependencia del tiempo empírica de los rendimientos de arbitraje y suaviza la transición al arbitraje virtual cero en la fecha de expiración, la cantidad $\Sigma^2 f(t)$ puede ser estimada del mercado

$$\frac{\Sigma^2}{2\lambda} f(t) = \left\langle \left(\frac{\mathcal{L}_{BSC}}{C - S \frac{\partial C}{\partial S}} \right)^2 (t) \right\rangle \quad (62)$$

Y tiene que anularse en la aproximación del vencimiento, tan pronto como se aproxima el rendimiento de arbitraje estocástico ha sido reemplazado por la ecuación

$$d\Pi = [r + \mathcal{R}(t, S)]\Pi dt \quad (63)$$

que puede ser reescrita

$$\mathcal{L}_{BS}C = \mathcal{R}(t, S) \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (64)$$

Usando el operador \mathcal{L}_{BS} queda completa la formulación del modelo fenomenológico. Un modelo de esta estructura fue derivado del modelo del sistema derivado-efectivo-acción, el modelo se reduce a Black-Scholes en el caso de que la reacción del mercado $\lambda \rightarrow \infty \Sigma = 0$

En presencia de fluctuaciones arbitrarias de arbitraje $\mathcal{R}(t, S)$, los únicos objetos que pueden ser calculados son el valor promedio y momentos de orden mayor en los derivados.

4.2 Ecuación efectiva para precios de derivados

Supóngase que la distribución de probabilidad $\mathcal{R}(t, S)$ se distribuye como una gaussiana pero puede ser mostrado que los pesos de la probabilidad pueden ser de la forma

$$P[\mathcal{R}(., .)] \sim \exp \quad (65)$$

$$\left(-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_0^\infty dt dt' dS dS' \mathcal{R}(t, S) K^{-1}(t, S | t', S') \mathcal{R}(t', S') \right)$$

donde el kernel del operador K está definido

$$K(t, S | t', S') = \theta(T-t)\theta(T-t') \int_0^\infty d\tau ds f(\tau)\theta(t-\tau)e^{-\lambda(t+t'-d\tau)} \times \quad (66)$$

$$P(t, S | \tau, s) P(t', S' | \tau, s)$$

el kernel es del orden $1/\lambda$ y se anula $\lambda \rightarrow \infty$, en particular los resultados en la siguiente ecuación por las funciones de correlación

$$\langle \mathcal{R}(t, S) \mathcal{R}(t', S') \rangle = \Sigma^2 K(t, S | t', S') \quad (67)$$

Se permitirá regresar a la ecuación dinámica para el precio del derivado

$$\mathcal{L}_{BS} C(t, S) = \mathcal{R}(t, S) \left(C(t, S) - S \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} \right) \quad (68)$$

$\Sigma^2 f(t)$ juega el papel del pequeño parámetro del problema, el ruido \mathcal{R} puede ser considerado como débil y se encuentra una solución interactiva \mathcal{R} de la ecuación, al orden más bajo trivial, se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS} C &= \mathcal{R} \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \mathcal{R} \left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \mathcal{L}_{BS}^{-1} \mathcal{R} \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

El cual promediando sobre todas las posibles realizaciones de la funciones \mathcal{R} da la ecuación para el precio del derivado promedio $C \equiv \langle C \rangle_{\mathcal{R}}$ incluyendo los términos proporcionales $\Sigma^2 f(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS} \bar{C}(t, S) &= \Sigma^2 \int_0^\infty dt' dS' \left[\left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \mathcal{L}_{BS}^{-1} \right] \cdot (t, S | t', S') \times \\ &K(t, S | t', S') \left[\left(1 - S \frac{\partial}{\partial S} \right) \bar{C} \right] (t', S') \end{aligned} \quad (70)$$

Con las condiciones de pago $\bar{C}(T, S) = C_{payoff}(S)$

La ecuación es un resultado central de esta sección, esta ecuación se reduce a Black-Scholes cuando $\lambda \rightarrow \infty$ o $\Sigma \rightarrow \infty$

4.3 Soluciones explícitas

Siguiendo en este orden de ideas, en esta sección se deriva la solución explícita para los precios de los derivados promedio

$$\bar{V}(t, S) = \langle V(t, S, x) \rangle \quad (71)$$

Con arbitraje virtual $X(.)$ se buscarán las soluciones promedio de

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \quad (72)$$

Con condiciones de frontera

$$V(t, S)|_{t=T} = \text{Payoff}(S) \quad (73)$$

Con un proceso estocástico $r(t)$ se supone una función con la presencia de arbitraje, por ejemplo, costos de transacción u otras razones. Se supone que este proceso es independiente del proceso de los precios de las acciones, es conveniente descomponer como

$$r(t) = r_0 + x(t) \quad (74)$$

Donde $x(t)$ es la parte estocástica del retorno y r_0 es la tasa de interés libre de riesgo constante, su generalización es directa a una función no estocástica.

Lo más directo es seguir la solución de la ecuación Back Scholes con tasa de interés fija o si se cambia, también se tiene que promediar la configuración dependiente para una función arbitraria $r(t)$ para una opción call y put se tiene la fórmula

$$C(t, S) = SN(d_1(t, S)) - Ee^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} N(d_2(t, S)) \quad (75)$$

$$P(t, S) = Ee^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} N(-d_2(t, S)) - SN(-d_1(t, S)) \quad (76)$$

Con la notación

$$d_{1(2)}(t, S) = \frac{\log(S/E) + \int_t^T r(\tau) d\tau \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (77)$$

promediando y sobre el proceso aleatorio $r(t)$ se usarán las relaciones

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (78a)$$

$$\theta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{\omega-i0} \frac{d\omega}{2\pi i}, \quad (78b)$$

Cuyos resultados en la representación integral para la función de error

$$N(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \frac{e^{i\omega(x-y)}}{\omega-i0} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\omega}{2\pi i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x - \omega^2/2}}{\omega-i0} \frac{d\omega}{2\pi i} \quad (79)$$

Después de reescalar la última ecuación se transforma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w-i0} e^{-\frac{yw^2}{2} + iw\beta} = N\left(\frac{\beta}{\sqrt{y}}\right), \quad (80)$$

Sustituyendo la representación y promediando sobre todo el proceso aleatorio se obtienen expresiones para los precios call y put a través de la función generadora

$$\Phi(\alpha, T, t) = \left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \quad (81)$$

Cuyo valor esperado será el precio del call

$$\bar{C}(t, S) = S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{d}_1(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{iw \int_t^T x(\tau) d\tau} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right\rangle - \quad (82)$$

$$E e^{-r_0(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{d}_2(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{\int_t^T x(\tau) d\tau} \left[\frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1\right] \right\rangle$$

Donde son las expresiones de no arbitraje

$$\hat{d}_{1(2)}(t, S) = \frac{\log(S/E) + r_0(T-t) \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (83)$$

Una expresión similar puede ser derivada para la opción put europea

$$\hat{P}(t, S) = E e^{-r_0(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}} e^{iw\hat{a}_2(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{-\int_t^T x(\tau) d\tau \left[\frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} - 1 \right]} \right\rangle - \quad (84)$$

$$S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi i} \frac{e^{-w^2/2} e^{iw\hat{a}_1(t,S)}}{w-i0} \left\langle e^{-iw \int_t^T x(\tau) d\tau \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)} \right\rangle$$

De lo anterior se verá que las correcciones de arbitraje virtual están factorizadas y pueden ser encontradas como una función generadora $\Phi(\alpha, T, t)$ para un proceso aleatorio $r(t)$. Ésta puede ser calculada con la función generadora de un proceso Ornstein-Uhlenbeck que describe las fluctuaciones de arbitraje virtual en ausencia de costos de transacción. También se deduce la expresión aproximada explícita para un movimiento browniano la incertidumbre en el movimiento debido a los costos de transacción en ausencia de arbitraje virtual y procesos compuestos que toman en cuenta arbitraje virtual y costos de transacción.

4.4 Función generadora de movimiento browniano restringido

Se encuentra una aproximación para la función generadora cuando el proceso $x(t)$ es un movimiento browniano dentro de un cierto intervalo ($x \in [-a, a]$). Esto corresponde a la situación de costos de transacciones finitas en el intervalo donde hay rendimientos de arbitraje pero que no atrae arbitraristas y por lo tanto no es eliminado. Se promedia sobre $x(0)$ con la distribución estacionaria del movimiento browniano restringido el cual es una distribución homogénea dentro del intervalo $[-a, a]$. Tal función de probabilidad de transición obedece la ecuación de Fokker-Planck con condición de frontera

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\Sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (85)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (86)$$

que puede ser planteada como una serie

$$\psi(t, x', x) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\Sigma^2}{2}(kv)^2 t} \quad (87)$$

$$\cos[vk(x' + a)]\cos[vk(x + a)] \quad v \equiv \frac{\pi}{2a} \}$$

Que permite escribir la función generadora en forma de series de Taylor

$$\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \rangle = 1 + \alpha \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \right\rangle + \frac{\alpha^2}{2} \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \int_t^T x(s) ds \right\rangle + \dots \quad (88)$$

Evaluando los promedios, el segundo término es igual a cero debido a la simetría, se tienen las primeras contribuciones no lineales, que después de ser evaluadas y en el límite es posible aproximar el lado derecho

$$\frac{\alpha^2}{2} \left\langle \int_t^T x(\tau) d\tau \int_t^T x(s) ds \right\rangle \approx \frac{1}{6} \alpha^2 a^2 (T - t)^2 \quad (89)$$

Interpolando se llega a una fórmula para funciones generadoras que describen ambos casos límites

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \approx \exp \left(\alpha^2 a^4 \frac{4(T-t)}{15\sigma^2} \left(1 - e^{-\frac{5\sigma^2(T-t)}{8a^2}} \right) \right) \quad (90)$$

En el modelo virtual y de costos de transacción se considera

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x \left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) + \Sigma \eta(t) \quad (91)$$

la cual es la versión suave con una función de reacción , la representación de la integral de trayectoria

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle = \frac{1}{norm} \int_{x(t)=x}^{x(T)=x'} Dx(\tau) \exp \left\{ - \int_t^T \frac{d\tau}{2\Sigma^2} (x^2 + \lambda^2 x^2) + \right. \quad (92)$$

$$\left. \alpha \int_t^T x(\tau) d\tau - \int_t^T \frac{\lambda^2 x^2}{2\Sigma^2} \left[\left(1 - \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)^2 - 1 \right] d\tau - \right.$$

$$\left. \frac{\lambda}{2\Sigma^2} (x^2 - 2a\sqrt{x^2 + a^2}) \Big|_t^T \right.$$

la cual tiene un promedio sobre x con la distribución estacionaria para el proceso

$$Ponderado(a, x) = norm \times \exp\left(-\frac{\lambda}{\Sigma^2}(x^2 - 2a\sqrt{x^2 + a^2})\right) \quad (93)$$

$$Ponderado(a, x) = norm \times \exp\left(-\frac{\lambda}{\Sigma^2}(x^2 - 2a\sqrt{x^2 + a^2})\right) \quad (94)$$

$$\left\langle e^{\alpha \int_t^T x(\tau) d\tau} \right\rangle \approx \exp\left(\frac{\alpha^2 \Sigma^2}{2\lambda^2} [(T-t)(1+a\xi) - B(T-t)]\right) \text{ con } \xi \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \Sigma^2}}$$

De lo anterior se llega a las fórmulas para el precio de una opción call y put plain vanilla generales que es el caso cuando en el valor de las opciones se tiene la presencia de arbitraje virtual

$$\bar{C}(t, S) = SN \left(\frac{\hat{d}_1(t, S)}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}} \right) - E e^{-r_0(T-t) + \frac{\Sigma^2}{2\lambda^2} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]} \times \quad (95)$$

$$N \left(\frac{\hat{d}_2(t, S) - \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma \sqrt{T-t} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]}}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}} \right)$$

$$\bar{P}(t, S) = E e^{-r_0(T-t) + \frac{\Sigma^2}{2\lambda^2} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]} \times \quad (96)$$

$$N \left(\frac{-\hat{d}_2(t, S) + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma \sqrt{T-t} [(1+a\xi)(T-t) - B(T-t)]}}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}} \right) - SN \left(\frac{-\hat{d}_1(t, S)}{\sqrt{1 + \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 \sigma^2} \left(1 + a\xi \frac{B(T-t)}{T-t}\right)}} \right)$$

donde

$$\hat{d}_{1,2}(t, s) = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + r_0(T-t) \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (97)$$

con

$$\xi = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi \Sigma^2}} \text{ y } B(T-t) = (1 - e^{-\lambda(T-t)})/\lambda$$

4.5 Análisis de las expresiones con arbitraje

Utilizando las ecuaciones (95, 96 y 97) para la valuación de opciones call y put con arbitraje virtual, es posible a partir de un caso, sin pérdida de generalidad, deducir algunos resultados generales de comportamiento. Supóngase un call y put con precio de subyacente (S_t) de 15, un precio de ejercicio o “strike” (E) de 16, una tasa libre de riesgo de 3%, un plazo (T-t) de un año, una volatilidad de subyacente de 20% y diferentes propuestas de arbitraje virtual con una volatilidad (Σ) y distintos parámetros de velocidad de reacción del mercado (λ).

A partir de dichas ecuaciones se observa que los valores generales del call y del put van convergiendo a los valores del call y put tradicionales o Black-Scholes de forma más rápida conforme los valores de la velocidad de reacción del mercado (λ) se incrementa y el de la volatilidad Σ va disminuyendo. (ver Gráfica 7 y 8)

Figura 7

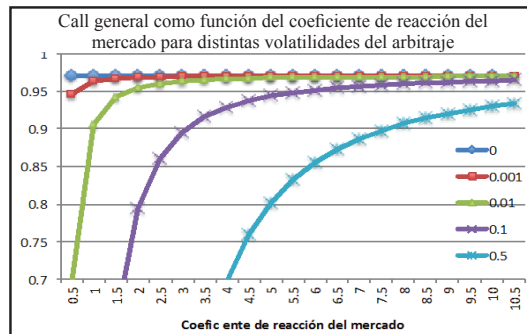
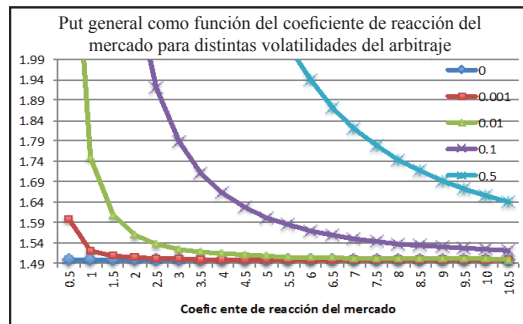


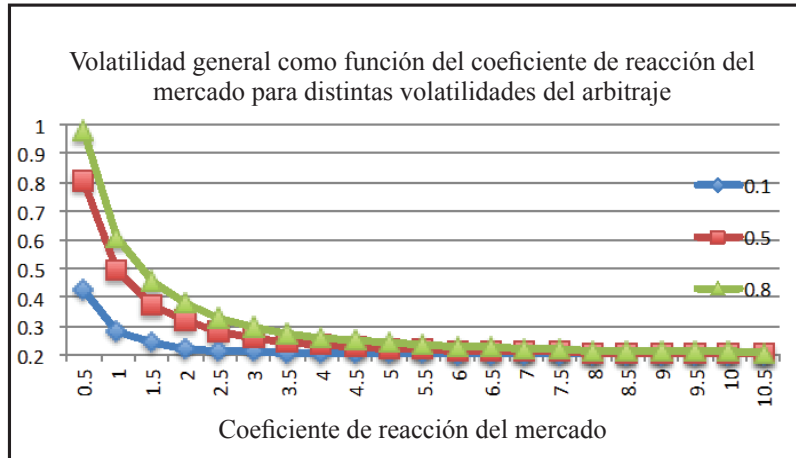
Figura 8



Fuente: Elaboración propia.

Se puede hacer también una estimación de la volatilidad implícita, que en este caso es la volatilidad que iguala el valor del call general al call Black-Scholes considerando distintos valores de reacción del mercado λ y de la volatilidad Σ . De la misma manera se puede observar cómo va acercándose a la volatilidad originalmente propuesta cuando va aumentando λ . (ver Figura 9)

Figura 9

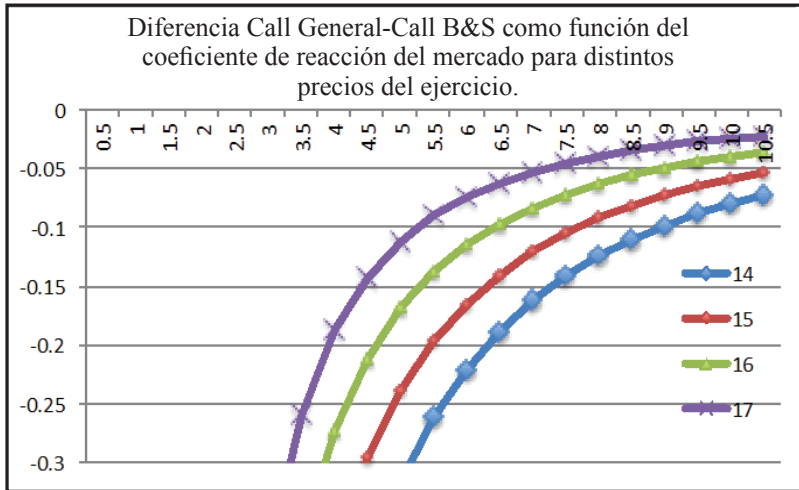


Fuente: Elaboración propia.

A partir de las mismas ecuaciones se consideran distintas velocidades de reacción del mercado y volatilidad de la función del arbitraje virtual, pero ahora cambiando los precios de ejercicio para las opciones call y put es posible observar los resultados en las Gráficas 10 y 11. Nuevamente la diferencia entre el precio general y Black-Scholes se va reduciendo.

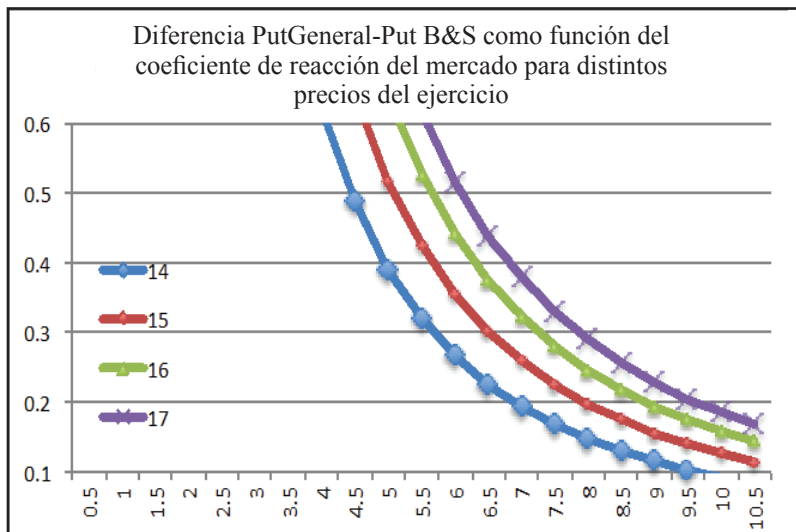
Como último ejercicio se puede hacer una estimación por medio de simulaciones del valor del parámetro de velocidad del mercado, la (implícita) que resulta cuando se iguala el precio de la opción general y la opción Black-Scholes. (ver Gráfica 12)

Figura 10



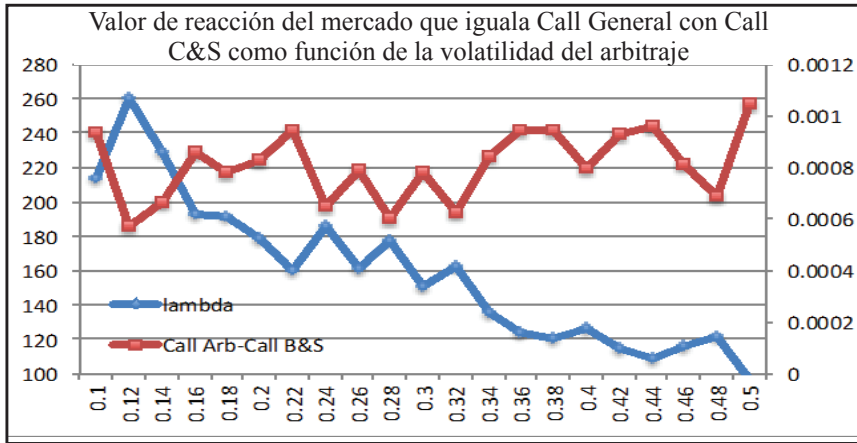
Fuente: Elaboración propia.

Figura 11



Fuente: Elaboración propia.

Figura 12



Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

Utilizando teoría de norma en finanzas, en especial aplicada en teoría de derivados y de portafolios, a través de los conceptos de haz fibrado, curvatura, transporte paralelo pueden deducirse las ecuaciones tradicionales de Black-Scholes y del modelo CAPM.

A partir del mismo formalismo de teoría de norma, se puede ampliar a la consideración fuera de equilibrio, considerando la posibilidad de arbitraje donde de la misma forma se puede deducir y proponer una solución equivalente de Black-Scholes y CAPM. El arbitraje puede considerarse como una fuerza en física y geoméricamente como una deformación de un espacio con curvatura.

Se deducen y grafican los precios de opciones call y put como función de ciertos parámetros. A medida que el coeficiente de la velocidad de reacción λ del mercado, cuando existe arbitraje virtual va creciendo el valor de call general igualmente se va aproximando al comportamiento del call tradicional de equilibrio. Contrariamente al efecto de la desviación estándar del ruido blanco y el parámetro del arbitraje virtual.

Un efecto similar se observa para la volatilidad implícita del call general, ésta va convergiendo a la volatilidad inicial del subyacente y del call Black-

Scholes conforme la velocidad de reacción del mercado aumenta y para volatilidades de arbitraje que vayan disminuyendo.

Por último la velocidad de reacción implícita (aquella que iguala los dos precios call general y B&S) se puede estimar por simulaciones y resulta que va disminuyendo conforme aumenta la volatilidad del arbitraje.

Referencias bibliográficas

- Black, F y Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 81, 637-59.
- Farinelli S. (2014). "Geometric Arbitrage Theory and market Dynamics", PDF, Octubre, Disponible en <http://arxiv.org/pdf/0910.1671.pdf>.
- Ilinski K. (2001). "Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing". NY USA, John Wiley y Sons, PDF, octubre 2014, Disponible en <http://arxiv.org/abs/hep-th/9712034>.
- Ilinski K., Kalinin G. (1998). *Black-Scholes equation from gauge theory of arbitraje*, PDF.
- Sornette D. (1998). Gauge theory of Finance? PDF, octubre 2014, Disponible en <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9804045>.
- Zhou S., Xiao L. (2010). "An application of Simmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance". *Symmetry 2010*, 2, 1763-1775.

Anexo 1

1. Haz fibrado desde el punto de vista en Matemáticas

A continuación se establecerán una serie de definiciones matemáticas relacionadas con el haz fibrado (Ilinski 2001)

Definición 1. Un espacio M es un campo n -dimensional suave si se cumple lo siguiente:

1. Existe un conjunto de vecindades $U_i \in M$ tal que su unión genera el espacio completo $\cup U_i = M$.
2. Existe una función ϕ_i que mapea la vecindad en un dominio abierto de un espacio euclidiano n -dimensional y obedece a cualesquiera dos vecindades U_i e U_j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ el mapeo

$\phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$. es una función suave del espacio euclidiano, los dominios $\phi_i(U_i)$ son llamados gráficos y al conjunto completo de los gráficos se le llama Atlas.

Definición: Un haz fibrado suave es un objeto compuesto de la siguiente forma

1. Un campo suave E es llamado espacio total (haz).
2. Un campo suave B es llamado espacio base.
3. Un mapeo suave $E \rightarrow B$ llamada proyección, cuyo Jacobiano requiere tengan un rango máximo $n = \dim B$ para todo punto.
4. Un campo suave F es llamado la fibra.
5. Un grupo G de transformaciones suaves de la fibra F (esto implica que la acción $G \times F \rightarrow F$, este grupo es llamado estructura de grupo del haz fibrado).
6. Una estructura de haz fibrado vincula las entidades anteriores. La base B viene con un sistema de coordenadas vecinales o gráficas encima de cada una de las cuales del producto directo vía un difeomorfismo $\phi_i: F \times U_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ que satisface $p\phi(f, x) = x$ las transformaciones $\lambda_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i: F \times U_{ij} \rightarrow F \times U_{ij}$ donde $U_{ij} = U_i \cap U_j$ Son llamadas funciones de transición de los haces fibrados. Toda transformación λ_{ij} tiene la forma $\lambda_{ij}(f, x) = (T^{ij}f, x)$.

Donde para todas las i, j, x la transformación $T^{ij}(x)$ es un elemento de la estructura de grupo G . Un haz fibrado principal es definido como un haz cuyas fibras F coinciden con la estructura de grupo el cual actúa sobre la fibra $F = G$ como $g \cdot G \rightarrow G \quad g(x) = x$

Definición: En cualquier curva γ en la base, una conexión es un mapeo de la fibra $F_{\gamma(a)}$ asociada al punto $\gamma(a)$ de la base a la fibra $F_{\gamma(b)}$ por encima del punto $\gamma(b)$.

Y satisface los siguientes requerimientos

1. $\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma$ depende continuamente de la trayectoria $\gamma(t)$, un pequeño cambio en la trayectoria no puede conducir a un gran cambio como resultado del transporte paralelo.
2. $\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma$ es independiente de la parametrización de la trayectoria.
3. $\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma$ es un mapeo identidad si $\gamma(t) = \text{constante}$ si no hay trayectoria entonces no hay transporte.

Se mantienen las siguientes ecuaciones

$$\emptyset(\gamma_1, \gamma_2) = \emptyset(\gamma_1)\emptyset(\gamma_2), \emptyset(\gamma^{-1}) = (\emptyset(\gamma))^{-1}$$

la primera relación establece que el transporte paralelo a lo largo de dos curvas consecutivas es equivalente al transporte paralelo a lo largo de la curva resultante combinada. La segunda dice que el transporte paralelo a lo largo de la misma curva en direcciones opuestas genera el inverso de un transporte paralelo.

Estimación de modelos multivariados GARCH en los mercados accionarios de China y México

Multivariate GARCH Models Estimation for China and Mexico's Stock Markets

Francisco Javier Reyes Zárate*

Fecha de recepción: 12 de mayo de 2015

Fecha de aceptación: 18 de agosto de 2015

* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco,
Departamento de Administración
fjrz@correo.azc.uam.mx.

RESUMEN

El presente trabajo tiene por finalidad, analizar la existencia de interdependencia entre los mercados bursátiles de China y de México mediante la aplicación de modelos econométricos multivariados heteroscedásticos de series de índices accionarios de los mercados de Shanghai, Shenzhen y Hang Seng pertenecientes a China, y el índice de precios y cotizaciones de México. El periodo de análisis comprende del 5 de enero de 2009 al 31 de diciembre de 2014 con un total de 1 563 observaciones diarias. Por un lado se encontró que existen asimetrías en los mercados y una correlación débil, señal de una nula o escasa transmisión de volatilidad entre los mercados de China y México. Sin embargo, este último mercado ofrece mayores ventajas de rendimiento y bajo riesgo. Por otra parte, el modelo CCC explica de mejor forma la conducta de la varianza condicional en el tiempo, siendo éste el modelo que mejor comportamiento y parsimonia demuestra sobre los activos financieros internacionales sujetos a estudio.

Clasificación JEL: C3, C31, C51, G15.

Palabras clave: volatilidad, modelo econométrico, modelos GARCH multivariados, México, China.

ABSTRACT

This paper aims to analyze the existence of interdependence among China and México's stock markets by analyzing their financial indexes. Series of stock markets from Shanghai, Shenzhen y Hang Seng (this three markets belong to China) and México's stock price index quote are modeled. The analysis covers the period from January 1st, 2009 to December 31st, 2014 with a total of 1,563 daily observations. For empirical evaluation multivariate GARCH models D-Vech, D-BEKK and Conditional Correlational Constant (CCC) were used in order to find the best model that explain the behavior of dynamic conditional volatility over time. On the one hand it was found that there are asymmetries in the market and a negligible positive correlation, a weak signal transmission of volatility between the markets of China and Mexico. However, the latter market offers greater performance benefits and low risk. Moreover, the CCC model best explains the behavior of the conditional variance in time, which is the model that shows better performance and parsimony for the international financial assets subject to study.

JEL Classification: C3, C31, C51, G15

Keywords: *volatility, econometric model, multivariate GARCH models, Mexico, China.*

Introducción

El proceso de liberalización y desregulación que ha ocurrido alrededor de los últimos veinticinco años en muchos mercados de capitales ha tenido, al día de hoy, severos impactos en su grado de respuesta, sobre todo de las economías emergentes. El grado de vinculación del mercado chino con el exterior tiene grandes implicaciones para las compañías domésticas y los inversionistas externos; asimismo, la economía mexicana ha mostrado avances positivos como una medida de adaptación en respuesta a los cambios en la economía financiera en la esfera internacional. Después de un periodo de madurez en donde las economías emergentes se mostraban menos eficientes a principios de los años noventa en cuanto a la presencia de resultados, en relación con los beneficios y riesgos que representan, en comparación con los mercados bursátiles de economías desarrolladas (Lee, 2001), en la actualidad las dos economías sujetas al presente estudio ofrecen al inversionista extranjero opciones que deben ser reconocidas en función del impacto que han mostrado en el comportamiento general de sus rendimientos así como del riesgo de mercado que generan. A pesar de mejorar el marco legal y reducir sus barreras de entrada, en los últimos tiempos, el mercado financiero chino muestra la evidente particularidad de la existencia del control gubernamental (Boyreau *et al.* 2005), y compite internacionalmente con tres importantes mercados: Shanghai, Shenzhen y Hang Seng (los dos primeros se ubican en China y el tercero se ubica en Hong Kong), en general, está dividido en dos mercados segmentados: el mercado "A", cuyas acciones se restringen a inversionistas nacionales; y el mercado "B", cuyas acciones se restringen solamente a inversionistas extranjeros. Por su parte, después de haber sido la primera y desafortunada víctima de la globalización financiera debido a los efectos de la crisis internacional bajo el denominado "efecto Tequila", el mercado bursátil mexicano es actualmente una de las economías emergentes más atractivas para la inversión, porque ha demostrado un crecimiento en los últimos años, como se revisará más adelante.

Los constantes movimientos en los mercados internacionales, el nivel de desarrollo de las economías así como también el grado de desarrollo de sus

mercados financieros permiten competir y ser eficientes en cuestiones de liquidez, información, inversión y movilización de ahorros, principalmente. A medida que la liberalización y la desregulación financiera han presentado cambios como la integración financiera bajo el enfoque de la globalización, la dinámica de los rendimientos ha permitido tener la oportunidad de obtener mejores beneficios y un mayor grado de inversión gracias al efecto de la diversificación, sin embargo también ha presentado consecuencias tanto indeseables como inesperadas. El grado de codependencia de los mercados ha provocado un sistema complejo con diversos efectos negativos —como una alta volatilidad— así como otros factores endógenos y su transmisión a otros mercados mediante el llamado efecto (riesgo) de contagio, fenómeno desestabilizador que conlleva a crisis bursátiles de manera rápida y simultánea (López, *et al.*, 2009). De esta manera, el interés particular del presente artículo es observar si dicho grado de integración ha determinado el comportamiento de los mercados bursátiles de México y China, cuyos vínculos han sido cada vez más estrechos y abundantes, a partir de inicios de la década de los noventa bajo crecientes flujos comerciales y de inversión bilateral, transformando la competencia entre ambas economías en una relación bilateral estratégica de la sociedad (véase Villalobos, 2007 y Anguiano, 2007).

La importancia de analizar ambos mercados radica en que, dadas las condiciones del comportamiento histórico de sus bolsas de valores, podrían aprovecharse las oportunidades que ofrecen las dos economías en su conjunto y tomar estrategias de inversión, es decir, en el presente estudio se analizan los mercados financieros de China y México observando si existen efectos de segmentación, o bien, cierto grado de correlación que determinen la posible existencia de una integración financiera y un grado de codependencia en los mercados bursátiles de ambas economías. Lo anterior, a fin de evidenciar oportunidades de inversión en todos o algunos de sus mercados bursátiles. Los hallazgos aportarían conclusiones para futuros estudios mediante la posibilidad de aplicación de algunos instrumentos cuantitativos de la ingeniería financiera, por ejemplo.

El presente artículo modela econométricamente los tres mercados bursátiles de China y el mercado bursátil de México mediante el enfoque GARCH multivariado. La importancia del análisis radica en que estos modelos analizan el efecto “spillover” (transmisión de la volatilidad) y detectan aquél que mejor se ajuste al comportamiento asimétrico del rendimiento de los índices accionarios de los mercados financieros de las economías sujetas a estudio, mediante la garantía de obtener una matriz de varianza-covarianza positi-

va, a diferencia de los modelos univariados, que se utilizan para el estudio de la interrelación de las volatilidades de los mercados financieros. Lo anterior permitirá, por un lado, generar evidencia empírica que permita una posterior construcción de enfoques de cartera y administración del riesgo de mercado, así como tener los elementos necesarios para reforzar la toma de decisiones en las inversiones de portafolios. Por otra parte, se podrá revisar también el grado de integración de estos mercados con respecto al mercado internacional.

Existe bibliografía extensa sobre el análisis de la volatilidad en las bolsas de valores de países desarrollados y apenas comienza a darse una mayor participación en este sentido, con respecto al análisis de estos fenómenos en las bolsas de los mercados emergentes. Sin embargo, el análisis conjunto de dos economías emergentes con características asimétricas en sus mercados financieros como lo son las economías china y mexicana, es escasa, o más aún, inexistente. En México, solamente Anguiano y Rodríguez (2011), documentan la evolución del mercado financiero de China en cuanto a tamaño y eficiencia en años recientes.¹

El trabajo está dividido en los siguientes apartados: en la primera sección se realiza la revisión de la literatura, referente a los trabajos relacionados con la aplicación del enfoque GARCH multivariado en mercados bursátiles. En la segunda sección se revisan los aspectos metodológicos, mediante el desarrollo de los modelos multivariados GARCH propuestos en el presente trabajo. La tercera sección destaca la evaluación empírica, mediante el análisis sobre la aplicación de los modelos GARCH multivariados en los índices accionarios de China y México; se analizan y comparan los modelos planteados a fin de establecer cuál es aquel que mejor explica el comportamiento de la volatilidad y sus asimetrías en los índices accionarios involucrados. Por último se presentan las principales conclusiones.

¹ Sin embargo, solamente se compara a esta economía con la mexicana en cuanto a la aplicación de una política de rescate similar al FOBAPROA mexicano después de la crisis financiera china, aunque el objetivo fue diferente, es decir, nunca se consideró la opción de privatizar empresas y bancos, sino que la financiación con los recursos públicos —impuestos de los contribuyentes— para mantenerlos rentables y eficientes bajo la premisa de financiar la producción real de bienes y servicios. A nivel internacional, existe literatura abundante sobre el tema de la evolución, desarrollo, tamaño, eficiencia y modelación del mercado financiero chino; se sugiere revisar los trabajos de Ma (1996), Song et. al. (1998), Tsui y Yu (1999), Lee (2001), Gao y Kling (2006), Li (2007), y recientemente, Carpenter et. al. (2015), entre otros.

1. Revisión de literatura

La presencia de asimetrías es el preámbulo a la aparición de la volatilidad en los índices accionarios de las diversas bolsas del mundo y ello deriva en factores de riesgo de contagio y nerviosismo en el mercado (Hernández, *et al.*, 2015). Existen estudios que documentan el comportamiento tanto del mercado financiero chino como del mercado financiero mexicano. Este comportamiento puede ser analizado mediante modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional generalizados (GARCH, por sus siglas en inglés, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity model); en la aplicación a las finanzas, dicha familia de modelos² intentan medir y pronosticar el impacto que tiene la varianza condicional en los rendimientos de índices de precios y otros activos financieros.

En cuanto a la investigación con respecto a los mercados financieros de China, Brooks y Ragunathan (2003) encuentran la existencia de autocorrelación y correlación cruzada en los índices accionarios del mercado, sin embargo no encuentran indicios del efecto *spillover* o afectación de la volatilidad entre sus mercados de tipo "A" hacia "B" y viceversa. Sosa y Ortiz (2014) analizan la economía china con respecto a su grado de integración como integrante del grupo BRIC y la posibilidad de México por integrarse a este grupo; examinan asimismo, mediante modelos econométricos VAR y multifactorial, la relación entre variables macroeconómicas y el rendimiento bursátil para cuantificar su contribución al riesgo sistemático concluyendo que existe una segmentación parcial, y diferencias en el grado de sensibilidad de las variables macroeconómicas ante movimientos de las respectivas bolsas de valores. Sun *et al.* (1999) y Yang (2003) analizan las acciones A y B de los principales mercados de valores chinos encontrando mediante el método VAR y la correlación cruzada evidencia en la existencia de información asimétrica, segmentación del mercado y autocorrelación cruzada

² Los modelos pioneros fueron desarrollados por Engle (1982) y generalizados por Bollerslev (1986). Ahora nuevos métodos econométricos han sido introducidos a fin de estimar las varianzas condicionales de los precios y rendimientos de datos financieros. Para responder a las necesidades de la industria financiera y la administración de riesgos, han surgido nuevas metodologías cuyo diseño permite examinar las colas de distribución (aún no queda claro si las colas tienen la misma conducta dinámica que el resto de la distribución como podría asumirse en los modelos GARCH (Engle *et al.* 1995). Complementan la familia de modelos univariados GARCH sucesivos métodos tales como IGARCH, TGARCH, EGARCH, PARCH, CGARCH, FIGARCH, FIEGARCH, SWARCH, GJR-GARCH, NAGARCH y AGARCH, entre otros.

positiva. Song *et al.* (1998) utilizan el modelo GARCH-M para modelar las series de rendimiento de los mercados Shenzhen y Shangai para examinar la posible transmisión de volatilidad. Por último, Li (2007) analiza los vínculos entre los mercados bursátiles de China y Estados Unidos utilizando el modelo multivariado D-BEKK encontrando evidencia de una débil volatilidad unidireccional en los mercados de valores chinos de Shangai, Shenzhen y Hang Seng, lo cual beneficia a los inversionistas en la reducción del riesgo diversificado, generando oportunidades para la selección óptima de portafolios de inversión.

Por su parte, para el caso mexicano, López y Ortiz (2011) analizan los mercados financieros del TLCAN mediante la aplicación de modelos multivariados MV-GARCH y de correlación condicional dinámica (DCC) encontrando en primer lugar la presencia de una relación a largo plazo que tiende al ajuste en la dinámica cotidiana, en segundo lugar encuentran también efectos significativos de transmisión de volatilidad de los mercados norteamericano y canadiense hacia México; por último, observan un aumento de la correlación del mercado mexicano con sus contrapartes del bloque analizado. Ruiz y Ruiz (2015) analizan la hipótesis de mercados eficientes utilizando los modelos multivariados D-VECH, BEKK y CCC encontrando que este último modelo es el que mejor explica el comportamiento de la varianza condicional en el tiempo. Por último, Reyes y Ortiz (2013) proponen la metodología MVARARCH (modelos multivariados GARCH y modelos de valor en riesgo, VaR) para analizar portafolios de inversión aplicados a series de rendimientos de precios accionarios del mercado TLCAN; encuentran que el modelo CCC explica de forma más eficiente los estimadores de pérdidas potenciales, siendo México el país que representa la mejor opción de inversión.

2. Aspectos metodológicos

A partir del modelo autorregresivo de heteroscedasticidad condicional (ARCH), trabajo seminal de Engle (1982), se ha dado pie al desarrollo de propuestas alternativas que contribuyen en la innovación de modelos y pronósticos de la volatilidad asociada a series de tiempo. La denominada familia de modelos ARCH ha demostrado que captura muchos de los comportamientos atípicos asociados a la volatilidad de rendimientos de los activos financieros como, por ejemplo: las distribuciones leptocúrticas, volatilidad agrupada —o clúster—, varianzas cambiantes en el tiempo, efectos *leverage* (correlación entre los rendimientos de un activo y cambios en su volatilidad futura),

persistencia y asimetrías en la volatilidad debido a grandes incrementos o caídas en el precio de un activo, entre muchas otras.³

Por su parte, los modelos multivariados GARCH poseen ventajas comparativas respecto de los modelos univariados en las finanzas, es decir, se pueden obtener estimadores óptimos para la construcción de las matrices de varianzas-covarianzas, aplicables a modelos de portafolios de inversión y permiten dimensionar también la movilidad conjunta de capitales, así como la interrelación existente de la volatilidad en los mercados financieros. Actualmente la integración de los mercados financieros ha permitido que los agentes participantes (inversionistas institucionales y privados) se vean beneficiados por efecto de la diversificación internacional a largo plazo. Sin embargo existen también problemas con los modelos GARCH multivariados, por ejemplo, la dimensionalidad, es decir, el número de parámetros tiende a crecer de forma exponencial en comparación con el número de variables existentes en el modelo, además de requerir que la matriz de varianzas-covarianzas sea definida positiva (López, *et al.* 2009). La aplicabilidad de estos modelos es entonces complicada y deja de ser atractiva para muchas investigaciones, ya que además de lo anterior puede sumarse el momento de elegir el modelo y asegurar que el método de estimación trae como resultado estimadores insesgados y consistentes (Galván y Cermeño, 2009).

Es importante realizar el análisis de la estructura que conforman los modelos GARCH multivariados y su desarrollo constante a través del tiempo, enfatizando que los nuevos modelos que emergen son propuestas para mejorar su sistema estructural y capturar de una forma más exacta el fenómeno de la volatilidad condicional. El fin primordial es realizar una descripción de tres modelos econométricos recientes, pertenecientes a la familia GARCH.

³ Los modelos de volatilidad fueron punta de lanza en el campo de las finanzas debido a que el inversionista tratará siempre de anticipar los movimientos en el riesgo y rendimiento de un instrumento de corto plazo. El análisis sobre la media y la varianza no condicional de una serie de rendimientos, responde a la acción de anticipar el comportamiento de uno o varios instrumentos del mercado financiero; tal comportamiento dependerá de los movimientos diarios de las bolsas bursátiles del mundo. Los modelos a analizar tienen su fundamento en la idea de que éstos se realizan con la media y varianza condicional simultáneamente, i.e., se propone un modelo autorregresivo (media condicional) y además se propone un mecanismo de control sobre la evolución de los errores (varianza condicional); finalmente, se busca incorporar los supuestos de que la volatilidad muestra altas y bajas en un periodo dado de tiempo (cuantificada por la desviación estándar condicional).

Los modelos sujetos a discusión son el modelo VEC diagonal (Diagonal Vector H, D-VECH), el modelo BEKK (acrónimo de sus autores Baba-Engle-Kraft-Kroner) y el modelo de Correlación Condicional Constante (Constant Conditional Correlation, CCC). El gran logro de estos modelos es el de permitir capturar regularidades empíricas como la dependencia de segundo orden (volatilidad *clustering*) y las colas pesadas (*fat tails*), que es característico de las series de rendimientos financieros.

3. El modelo VEC Diagonal

En el modelo VEC general (Bollerslev, *et. al.*, 1988), cada elemento de H_t es una función lineal de errores cuadrados rezagados y productos cruzados de los valores de los errores y rezagos de los elementos de H_t . El modelo es definido como:

$$h_t = c + A\eta_{t-1} + G h_{t-1} \quad (1)$$

donde

$$h_t = \text{VECH}(H_t) \quad (1.2)$$

$$\eta_{t-1} = \text{VECH}(\varepsilon_t \varepsilon_t') \quad (1.3)$$

$\text{VECH}(\cdot)$ es el operador que conjunta la porción triangular más baja de una matriz $N \times N$ como un vector $N(N+1)/2 \times 1$. A y G representan las matrices de parámetros cuadrados de orden $(N+1)/2$ y c es un vector de parámetros $(N+1)N/2 \times 1$.

Debido a la problemática que presenta este modelo, solamente aplicado en la práctica para el caso bivariado, Bollerslev et al. (1988) sugieren el modelo VEC diagonal (DVECH) en el cual las matrices A y G se asumen diagonales, y cada elemento h_{ijt} depende solamente de su rezago propio y del valor previo de ε_{ijt} .⁴

⁴ Para el modelo VEC, el número de parámetros es $N(N+1)(N(N+1)+1)/2$, mientras que en el modelo DVECH se tiene $N(N+5)/2$. Por ejemplo, si $N=3$, en el caso del modelo DVECH se tienen $N=78$ parámetros; en cambio, para el modelo VEC se tienen $N=12$ parámetros. Pero bajo este supuesto de diagonalidad, los sistemas de gran escala son aún fuertemente parametrizados y difíciles de estimar en la práctica (para mayores referencias, consúltese Bauwens, *et. al.*, (2006).

En particular, se definen las matrices NxN simétricas, A_0 , G_0 y C_0 , como las matrices implícitas por las relaciones $A = \text{diag}[\text{VECH}(A_0)]$,⁵ $G = \text{diag}[\text{VECH}(G_0)]$ y $c = \text{VECH}(C_0)$. El modelo diagonal puede escribirse así:

$$H_t = C_0 + A_0 \odot (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') + G_0 \odot H_{t-1} \quad (2)$$

4. El modelo BEKK

Debido a la dificultad para garantizar la positividad de la matriz H_t en el modelo VEC, sin imponer fuertes restricciones sobre los parámetros, Engle y Kroner (1995) proponen una nueva parametrización para H_t que impone fácilmente su positividad, esto es, el modelo D-BEKK(1,1,K), el cual es definido como:

$$\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_k^* + \sum_{k=1}^K G_k^{*'} H_{t-1} G_k^* \quad (3)$$

$$H_t = CC' + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K A' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{jk} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p G_{jk}' H_{t-j} G_{jk} \quad (4)$$

Donde C , A y G son matrices NxN pero C es triangular superior. El límite de la sumatoria K determina la generalidad del proceso. Los parámetros del modelo BEKK no representan directamente el impacto de los diferentes términos rezagados sobre los elementos de H_t , como el modelo VEC. El modelo BEKK es un caso especial del modelo VEC.⁶

Uno de los principales problemas al estimar un modelo VEC y un modelo BEKK es el alto número de parámetros desconocidos (incluso después de imponer varias restricciones). Por esta razón el uso de estos modelos se limita al análisis de un máximo de tres a cuatro series. Los modelos fac-

⁵ Si v es un vector de dimensión m entonces $\text{diag}(v)$ es la matriz diagonal $m \times m$ con v en la diagonal principal.

⁶ El número de parámetros en el modelo BEKK (1,1,1) es $N(5N+1)/2$. Para reducir este número, y consecuentemente reducir la generalidad, se puede imponer un modelo BEKK diagonal (DBEKK), esto es, A_k^* y G_k^* en (1) son matrices diagonales. Este modelo es también un modelo DVEC aunque es menos general, pero garantiza ser positivo definido mientras DVEC no lo hace.

toriales y ortogonales tratan de contrarrestar esta dificultad imponiendo una estructura dinámica común en todos los elementos de H_t , lo cual resulta en modelos con menos parámetros. Bollerslev (1990) propone una clase de modelo MGARCH en el cual las correlaciones condicionales son constantes y así las covarianzas condicionales son proporcionales al producto de las desviaciones estándar condicionales correspondientes. Esta restricción reduce enormemente el número de parámetros desconocidos y simplifica la estimación.

5. El modelo Correlación Condicional Constante (CCC)

El modelo CCC (Bollerslev, 1990) es definido como:

$$H_t = D_t R D_t = (\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jtt}}) \quad (5)$$

donde:

$$D_t = \text{diag} \left(h_{iit}^{1/2} \dots h_{Nt}^{1/2} \right) \quad (5.1)$$

h_{iit} puede ser definido como un modelo GARCH univariado, y $R = (\rho_{ij})$ es una matriz definida positiva simétrica $\rho_{ij} = 1 \forall i$. R es la matriz que contiene las correlaciones condicionales constantes ρ_{ij} .

Para llevar a cabo el análisis comparativo y tener criterios alternativos para la selección del mejor modelo descriptivo de las series cuando las matrices de varianzas y covarianzas son semidefinidas positivas y tener mayores bases para sostener la sugerencia de ciertos patrones de comportamiento dinámico de las series financieras analizadas, cabe resaltar que en todos los casos se utilizó el método de máxima verosimilitud (ML o bien, *Maximum Likelihood*) para las estimaciones de los modelos. Sin embargo, también se analizaron los estimadores de bondad de ajuste como el logaritmo de verosimilitud (*Log-Likelihood*) y el criterio de información Akaike (AIC).

6. Análisis empírico

El estudio empírico utiliza datos del periodo del 5 de enero de 2009 al 31 de diciembre de 2014, generando un total de 1 563 datos diarios hábiles. Se ha utilizado como fuente la base de datos de *Yahoo Finance*. Para calcular los datos perdidos por los días festivos u otros eventos de cierre de mercado, se utilizó la técnica de interpolación lineal del paquete estadístico SPSS. El análisis econométrico fue generado en EViews versión 8. El periodo de estudio fue seleccionado después de contemplar que no hubiese eventos o noticias que aceleren o cambien la tendencia de los mercados de una manera radical —*asimétrica*— de forma temporal (efectos *clustering* y *leverage*); tal es el ejemplo de la reciente crisis financiera de los años 2007-2008 que afectó de manera contundente a los mercados financieros con un fuerte impacto económico internacional. La razón por la cual se han seleccionado índices accionarios se debe a que son representativos en la literatura financiera del comportamiento cotidiano de los principales valores que participan en sus respectivas bolsas domésticas (Reyes y Ortiz, 2013). Los rendimientos de los índices fueron calculados mediante la obtención del cociente del logaritmo natural (ln) del precio de cierre del día t (P_t) como numerador entre el precio del mismo rezagado un periodo (P_{t-1}), el resultado es finalmente multiplicado por cien para obtener el porcentaje de dichos rendimientos (ver ecuación 6).

$$P_t = \ln (P_t/P_{t-1}) * 100 \quad (6)$$

Las asimetrías existentes en el tamaño de las economías se reflejan en el tamaño relativo de los mercados bursátiles de China y México. Como es posible notar en la Tabla 1, al considerar la suma total de los tres mercados de China, el resultado representa una maquinaria competitiva con respecto a los mercados de economías desarrolladas, como Estados Unidos. Lo anterior contrasta a pesar de que las tasas de crecimiento de capitalización interna de México entre el periodo de 2009 a 2013 mostraran un incremento de casi cincuenta por ciento (49.42%) en comparación con la tasa de crecimiento de China, la cual mostró un incremento de 20% en el mismo periodo. Aunque es importante señalar que los dos rubros restantes de la Tabla; China muestra su claro potencial. Las cifras son contundentes: la tasa de crecimiento del PIB en China tuvo un incremento de 85.2% y la de México solamente la

Tabla 1. Características de los mercados de valores de China y México (2009-2013)

PIB (millones de US dólares a precios actuales)					
País	2013	2012	2011	2010	2009
China	9,240.27	8,229.49	7,321.89	5,930.50	4,990.23
México	1,260.91	1,186.46	1,170.09	1,051.63	895.31
Capitalización interna de mercado (miles de millones de US dólares)					
Bolsa de valores					
México	526.02	525.06	408.69	454.35	352.05
Hong Kong	3,100.78	2,831.95	2,258.04	2,711.32	2,305.14
Shangai	2,496.99	2,547.20	2,357.42	2,716.47	2,704.78
Shenzhen	1,452.15	1,150.17	1,054.69	1,311.37	868.37
Total China	7,049.92	6,529.32	5,670.14	6,739.16	5,878.30
Número de compañías listadas					
México	143	138	133	130	125
Hong Kong	1,643	1,553	1,496	1,496	1,319
Shanghai	953	953	931	931	870
Shenzhen	1,536	1,536	1,411	1,411	830
Total China	4,132	4,042	3,838	3,838	3,019

Fuente: Elaboración propia con datos de World Federation of Exchanges, Annual Report (años 2009 a 2014) y estadísticas on line del Banco Mundial, sitio web en <http://databank.bancomundial.org/>.

mitad, es decir 40.8%; en el segundo rubro, China mostró un incremento de 36.87% en el número de empresas listadas, en tanto que México sólo obtuvo un incremento del 14.40%.

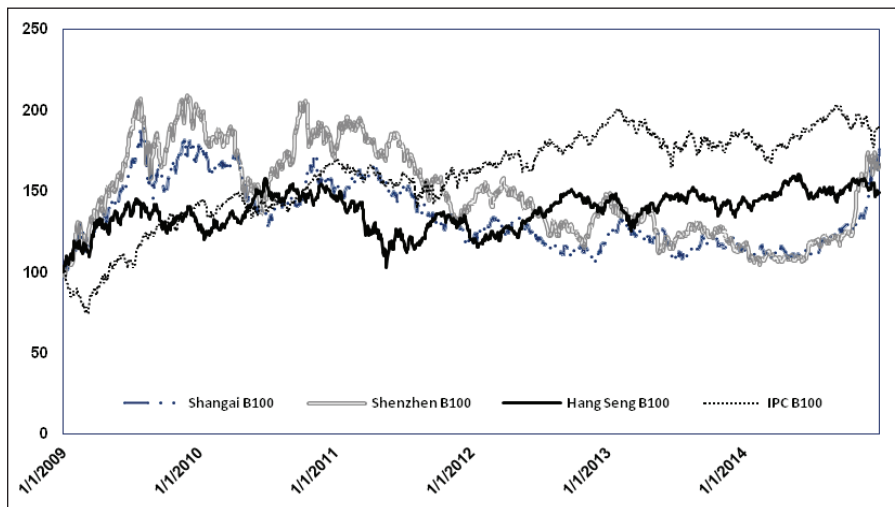
Analizado de manera individual, con respecto a la capitalización interna de mercado, para el año 2013 Hong Kong tuvo la mayor capitalización, seguido del mercado de valores de Shangai y del mercado Shenzhen; México ocupa la última posición en este rubro. La capitalización de este mercado es \$3,100.78 miles de millones de US dólares en 2013. México en este año tuvo una capitalización de \$526.02 millones de dólares, es decir apenas representa el 17% de capitalización del mercado de Hong Kong, el 21% del

mercado de Shanghai y 36% del mercado Shenzhen (es decir, la capitalización del mercado mexicano sólo representó 7% del mercado financiero chino en conjunto durante el año 2013).

Cabe señalar el preocupante caso del reducido tamaño de empresas que opera en el mercado accionario mexicano. Ya se ha observado en investigaciones como Reyes y Ortiz (2013) así como en López *et al.* (2009) que el mercado bursátil mexicano sufre de una falta de profundización, debido a la escasa participación y monopolio de las empresas mexicanas en mercados accionarios. En cambio, China ha dado grandes pasos a partir de la década de los noventa gracias al establecimiento de mecanismos de apertura y liberalización a pesar de su régimen político. Este país ha mostrado un crecimiento del número de empresas participantes en el mercado del 36.9% durante el periodo 2009-2013 (aumentando de 3,019 a 4,132 empresas en suma total de sus tres mercados), mientras que México solamente creció 14.4%, pasando de 125 a 143 empresas.

El comportamiento de los principales índices financieros de mercados bursátiles de ambas economías se ve reflejado en la Figura 1. A fin de homologar las cifras de los cambios en el comportamiento diario del puntaje observado en cada uno de los índices analizados, y resaltar además la com-

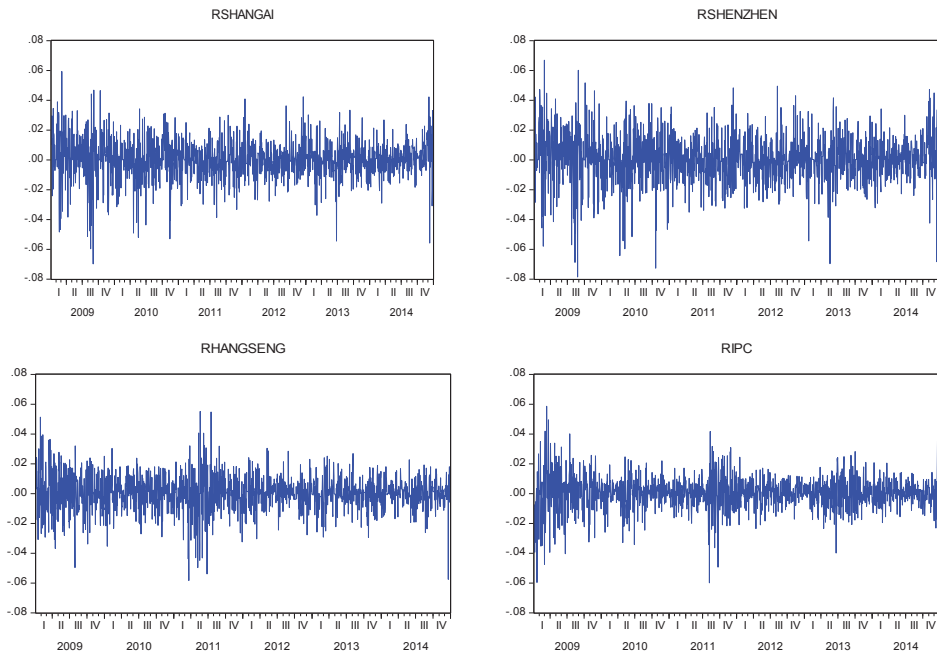
Figura 1. Comportamiento de los principales índices bursátiles de China y México (base 2009=100)



Fuente: Elaboración propia.

petencia directa de los mercados, se parte de la base común 2009=100. Es posible observar el repunte del índice del mercado bursátil mexicano a partir de 2012 hasta finales de 2014. Este intervalo con respecto al aumento del índice de precios y cotizaciones (IPC) le podría permitir al mercado mexicano tener la oportunidad aprovechar para competir y ser atractivo internacionalmente. Cabe señalar que México fue el único mercado que mostró una tasa de crecimiento positiva, en el crecimiento del índice, en comparación con los tres mercados bursátiles chinos, i.e., 41.7% entre 2009 y 2011 y 7.1% entre 2012 y 2014 (ver Apéndice A). Sin embargo, lo anterior debe acotarse frente a dos hechos; primero, la volatilidad existente en cada uno de estos mercados; y segundo, observar el grado de correlación entre los mismos. El análisis sugerido debe realizarse en base a los problemas que han exacerbado en las últimas décadas a raíz de la liberalización de los mercados financieros y su creciente integración como producto de la globalización financiera.

Figura 2. Evolución de los rendimientos sobre índices accionarios de China y México



Fuente: Elaboración propia.

La Figura 2 muestra los patrones de cambio de los rendimientos de los cuatro mercados analizados en la presente investigación. En los cuatro casos se observa la presencia de volatilidad, la más alta se ubica en el índice chino Shenzhen. En términos anuales, la desviación estándar de este índice de precios fue de 1.56%, de 1.28% para el índice Shanghai, 1.18% para el índice Hangseng y de 1.069% para el índice de precios y cotizaciones mexicano. La dependencia del tiempo es una constante que se identifica en los cuatro índices y se exhiben clústers o agrupamientos de volatilidad. Los inversionistas deben considerar la heteroscedasticidad en los rendimientos que incluyen los índices de estos mercados al incorporarlos en sus portafolios de inversión a fin de evitar pérdidas potenciales que pongan en riesgo su dinero.

En lo referente a la correlación entre los mercados, la Tabla 2 muestra la presencia de un débil grado de asociación lineal entre las variables de estudio. Durante el periodo 2009 a 2014 los mercados accionarios chinos y el mexicano mostraron correlaciones positivas en su gran mayoría, aunque muy bajas. La correlación más alta corresponde al caso bilateral entre el índice de precios mexicano y el índice chino Shanghai (0.1828); la correlación más baja pertenece a la dupla de índices Shenzhen y Hang Seng (-0.036). Además del problema de heteroscedasticidad de los rendimientos, estos mercados se caracterizan por tener correlaciones con tendencia a cero. La reducción de oportunidades de optimización de los rendimientos de los activos de un portafolio —en este caso, utilizando índices accionarios— es una parte que describe el análisis de la Tabla 2.

Tabla 2. Correlación entre los rendimientos de índices bursátiles de México y China (2009-2014). Datos diarios

Índice	Shanghai	Shenzhen	Hang Seng	IPC
Shanghai	1.00000	0.00580	0.03737	0.18281
Shenzhen	0.00580	1.00000	-0.03674	0.04192
Hang Seng	0.03737	-0.03674	1.00000	0.00579
IPC	0.18281	0.04192	0.00579	1.00000

Fuente: elaboración propia.

La Tabla 3 muestra las estadísticas básicas, cuyos resultados son concluyentes para fundamentar los hechos estilizados encontrados en series de tiempo financieras. Se aprecian diferencias en los promedios de los rendimientos y las desviaciones estándar de los tres índices pertenecientes a cada mercado (cabe aclarar que todos las series de índices financieros estudiados se miden —por homologación— en dólares de Estados Unidos, i.e., US dólares). Además, se puede apreciar que la inversión en el índice IPC presenta el riesgo más bajo (cuantificado por su desviación estándar), pero sus rendimientos (cuantificados por su media simple) son más altos que cualquiera de los demás mercados. El sesgo (coeficiente de asimetría) es negativo para el caso de los cuatro mercados, esto indica que las distribuciones respectivas presentan exceso de datos en la cola de distribución izquierda; por otra parte, la curtosis presenta casos mayores a tres, lo cual es indicativo de la presencia de distribuciones leptocúrticas, hecho muy común en datos de series financieras. La prueba de normalidad Jarque-Bera rechaza la hipótesis nula de normalidad, por lo cual en todos los casos se tienen distribuciones diferentes a la normal. Finalmente el ratio rendimiento-riesgo, obtenido del cociente entre ambos indicadores, muestra que el mercado mexicano presenta una mejor proporción (0.038%) lo cual es indicativo de que se podrían

Tabla 3. Propiedades estadísticas de la serie de los rendimientos (porcentajes)

	Shangai	Shenzhen	Hang Seng	IPC
Media	0.036045	0.031891	0.025637	0.040738
Mediana	0.024697	0.000000	0.013730	0.060912
Máximo	5.935871	6.685396	5.518693	5.862618
Mínimo	-6.982743	-7.855111	-5.827027	-5.985282
Desviación estándar	1.287224	1.567526	1.185719	1.069132
Coeficiente de asimetría	-0.397881	-0.308557	-0.225220	-0.279385
Curtosis	5.928758	5.451708	5.545309	6.680374
Jarque-Bera	600.2412	416.5259	435.4107	903.0389
Probabilidad	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Riesgo/rendimiento	0.028002	0.020345	0.021622	0.038103

Fuente: elaboración propia.

ofrecer mejores beneficios con una proporción de riesgo moderada. El mercado de Shanghai secunda esta proporción (0.028 por ciento), y los mercados Hang Seng y Shenzhen ocupan la tercera y cuarta posición (0.021 y 0.020 por ciento respectivamente), siendo el tercero el que presentó menores rendimientos y mayor riesgo ofrecido a los inversionistas durante el periodo de estudio.

El análisis de series de tiempo de cada una de las variables, se realizó en primer lugar para controlar los efectos de la autocorrelación llevando a cabo la selección de rezagos bajo el criterio de información de Schwarz especificando inicialmente cinco rezagos. A fin de comprobar si efectivamente dichas series son estacionarias se realizó la prueba de las raíces unitarias. La prueba Dickey y Fuller permite concluir que las series de estudio pueden ser estacionarias y es posible proceder a la estimación de los parámetros y modelación multivariada de las ecuaciones (2), (4) y (5).⁷ Finalmente, con el fin de evaluar la importancia de la estructura de volatilidad condicional multivariada se ha calculado la matriz de correlación cruzada entre los rendimientos, siendo reconocida la asociación lineal significativa en el periodo actual y rezagada un periodo; como lo han realizado Gallón y Gómez (2007). Dada la evidencia de dependencia temporal presente en cada una de las series de rendimientos se estimó un modelo VAR (vectores autoregresivos) para la media condicional, especificado como:

$$y_t = E(y_t | \mathfrak{S}_{t-1}) + \epsilon_t = v + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t \quad (7)$$

donde:

$$\epsilon_t | \mathfrak{S}_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

H_t : matriz de varianzas y covarianzas condicionales

v : vector N-dimensional de parámetros

Φ_i : matriz cuadrada de parámetros para $i=1,2$.

La selección óptima de longitud del rezago se basó en los criterios de información de Akaike (AIC) y Schwarz (SIC).

⁷ Por razones de espacio, solamente se presenta en el Apéndice B una tabla con la prueba ADF (Augmented Dickey-Fuller) en primera diferencia.

En la Tabla 4 se presenta el comparativo de los estimadores de bondad de ajuste (BA) para cada una de las estimaciones analizadas. La comparación de los valores absolutos de los estimadores muestra que el modelo CCC parece modelar la varianza condicional de una manera más eficiente, lo cual podría deberse a que la correlación de la volatilidad se asume como una constante descriptivamente estimada, obteniendo resultados más consistentes mediante la mejor bondad de ajuste, según los criterios a los que se someten las pruebas realizadas en cada modelo. Particularmente, el modelo multivariado T-Student con especificación TGARCH parece explicar de mejor forma el comportamiento heteroscedástico (varianza condicional) de las series ajustándose de manera más rápida y eficaz en el tiempo; es posible también que la distribución de densidad t de Student multivariada describa de mejor manera las perturbaciones. Se debe enfatizar que las restricciones impuestas por este modelo multivariado permite, entre otros beneficios: 1) disminuir el número de parámetros sujetos a estudio y asegurar que las varianzas condicionales estimadas sean positivas; 2) considerar los efectos de la volatilidad y de los choques de los otros mercados sobre la volatilidad condicionada de un mercado; 3) que la matriz de correlaciones pueda variar sobre el tiempo; y 4) capturar los efectos de la influencia de las varianzas rezagadas de los otros mercados del sistema.

Tabla 4. Comparativo de estimadores de bondad de ajuste para los modelos estimados

Criterio Modelo	MODELO MULTIVARIADO NORMAL			MODELO MULTIVARIADO T-STUDENT		
	ARCH(1)	GARCH (1,1)	TARCH(1,1)	ARCH(1)	GARCH (1,1)	TARCH(1,1)
LM DVECH	-9,818.23	-9,984.26	-9,830.37	-9,830.37	-9,904.77	-9,758.62
DBEKK	-9,901.09	-9,963.20	-9,809.71	-9,809.71	-9,868.28	-9,754.69
CCC	-9,823.05	-9,823.05	-9,711.67	-9,711.67	-9,779.68	-9,679.25
AIC DVECH	12.61	12.79	12.60	12.60	12.70	12.52
DBEKK	12.70	12.77	12.58	12.58	12.66	12.51
CCC	12.60	12.61	12.46	12.46	12.56	12.43
Mejor Modelo (BA)	DVECH	CCC	CCC	CCC	CCC	CCC

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado un comparativo de modelos multivariados GARCH aplicado a series de rendimientos accionarios de los tres mercados bursátiles de China y el mercado bursátil de México durante el periodo 2009 a 2014. Se encontró evidencia de que existen asimetrías entre sus mercados de valores y que las correlaciones entre los cuatro mercados son tendientes a cero (i. e., existe una débil transmisión de volatilidad entre los mercados). Sin embargo, a pesar de las diferencias de desarrollo entre los tres mercados de China, en comparación con el escaso desarrollo del mercado mexicano, éste último ha mostrado tener mejores rendimientos y el menor nivel de riesgo durante el periodo de estudio, lo cual puede ser aprovechado para tener oportunidades de inversión, por ejemplo. Los resultados mostrados indican que el modelo CCC es el que mejor comportamiento y parsimonia demuestra en los activos financieros internacionales sujetos a estudio.

Por último, debe resaltarse que en la actualidad existen escasos o nulos estudios con respecto a la investigación de mercados financieros entre China y México. El estudio permite, también abrir temas de frontera para continuar con el desarrollo a profundidad respecto del análisis de dichos mercados; los resultados permitirán aportar nuevos avances en la aplicación de esta metodología en la industria financiera. Por ejemplo, la aplicación de nuevas metodologías permitiría nuevos patrones en la conducta de empresas que evitarían, al corto plazo, ignorar su verdadero nivel de riesgo y contar así con mayores opciones para determinar criterios en la toma de decisiones para asumir sus riesgos de mercado.

Referencias bibliográficas

- Anguiano, E. (2007). *Relaciones México-China en su perspectiva histórica, en China y México: implicaciones de una nueva relación*. Dussel, E., y Trápaga, Y., México, Nuestro Tiempo.
- Anguiano, E. y Rodríguez, M. T. (2011). *El sistema financiero de China: heterodoxia política*. Cuadernos de trabajo del CECHIMEX, México, UNAM, pp. 4-16.
- Bauwens, L., Laurent, S., Rombouts, J. V. K. (2006). "Multivariate GARCH Models: A Survey". *Journal of Applied Econometrics* 21, pp. 79-109.

- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., y Wooldridge (1988). "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances". *Journal of Political Economy* 96 (1), pp. 116-131.
- Bollerslev, T. (1990). "Modelling the Coherent in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model". *The Review of Economics and Statistics* 72, pp. 498-505.
- Boyreau-Debray, G. y Wei, J. (2005). "Pitfalls of a State-Dominated Financial System: The Case of China, National Bureau of Economic Research". *Working Paper*, (11214).
- Brooks D., R. y Raganathan V. (2003). "Returns and Volatility on the Chinese Stock Markets". *Applied Financial Economics* 13, pp. 747-752.
- Carpenter, J., Lu, F. y Whitelaw, R. (2015). "The Real Value of China's Stock Market, National Bureau of Economic Research". *Working Papers* (20957).
- Engle, Robert (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation". *Econometrica* 50, pp. 987-1008.
- Engle, Robert y Kroner, K. (1995). "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH". *Econometric Theory* 2 (1), pp. 122-150.
- Galván, Á., y Cermeño, R. (2009). "Desempeño de estimadores alternativos en modelos GARCH bivariados con muestras finitas". *Documentos de trabajo* 469, México, CIDE.
- Gallón G., Santiago, P., Karoll (2007). "Distribución condicional de los retornos de la tasa de cambio colombiana: un ejercicio empírico a partir de modelos GARCH multivariados", Colombia, *Revista de Economía del Rosario* 10 (2:127).
- Gao, L. y Kling, G. (2006). "Regulatory Changes and Market Liquidity in Chinese Stock Markets". *Emerging Markets Review* (7), pp. 162-175.
- Hernández, A., López, H., y Hoyos R. (2015). "Análisis del efecto apalancamiento en los rendimientos del IPC mediante una Cadena de Markov Monte Carlo antes, durante y después de la crisis subprime". *Revista Estocástica, Finanzas y Riesgo* 5 (1), enero-junio, México, UAM-Azcapotzalco, pp. 43-64.
- Li, H. (2007). "International Linkages of the Chinese Stock Exchanges: A Multivariate GARCH Analysis". *Applied Financial Economics* 17, pp. 285-297.
- Lee, C. F. (2001). "Stock Returns and Volatility on China's Stock Markets". *The Journal of Financial Research* 24(4), pp. 523-543.
- López H. F. y Cabello, A. (2009). "Las interrelaciones de volatilidad y rendimientos entre los mercados de valores del TLCAN". *Investigación Económica LXVIII* (267), pp. 83-114.

- López H. F. y Ortiz C., E. (2011). "Vínculos de largo plazo y transmisión de volatilidades en los mercados de capital del TLCAN: análisis VECM-MVGARCH-DCC, en Avances recientes en valuación de activos y administración de riesgos (2)". México, Universidad Panamericana.
- Ma, X. (1996). "Capital Controls, Market Segmentation and Stock Prices: Evidence from the Chinese Stock Markets". *Pacific-Basin Finance Journal* (4), pp. 219-239.
- Reyes Z., F. J. y Ortiz C., E. (2013). "Modelos VaR-GARCH y portafolios de inversión trinationales en los mercados accionarios del TLCAN". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, IMEF 8(2), pp. 129-155.
- Ruiz, A. y Ruiz, B. (2015). "La hipótesis de eficiencia y modelación de series bursátiles mexicanas: un análisis multivariado". *Economía Informa* (390), México, UNAM, pp. 28-57.
- Song, H., Liu, X. y Romilly, P. (1998). "Stock Returns and Volatility: an Empirical Study of Chinese Stock Markets". *International Review of Applied Economics* 12(1), pp. 129-139.
- Sosa C., M., y Ortiz C., E. (2014). "Riesgo sistemático y variables macroeconómicas: integración del grupo BRIC y su relevancia para México". *Administración de riesgos, Mercados bursátiles y estrategias competitivas* (5), México, UAM Azcapotzalco.
- Sun, Q., y Tong W. H. S. (1999). "The Effect of Market Segmentation on Stock Prices: the China Syndrome". *Journal of Banking & Finance* (24), pp. 1875-1902.
- Tsui, A. y Yu, Q. (1999). "Constant Conditional Correlation in a Bivariate GARCH Model: Evidence from the Stocks Markets of China". *Mathematics and Computer in Simulation* (48), pp. 503-509.
- Villalobos, A. (2007). "La relación comercial de México y China, en Oportunidades en la relación económica y comercial entre México y China". Naciones Unidas, CEPAL.
- World Federation of Exchanges* (varios números), Annual Report & Statistics.
- Yang, J. (2003). "Market Segmentation and Information Asymmetry in Chinese Stock Markets: A VAR Analysis". *The Finance Review* (38), pp. 591-609.

Apéndice A

Promedios de crecimiento de los índices bursátiles de los mercados financieros de México y China: 2009-2014 (anual)

	Promedio anual de crecimiento del índice bursátil (puntos base)						Tasas de crecimiento (%)	
	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2009/2011	2012/2014
Shangai	2,740.46	2,828.52	2,666.92	2,220.14	2,197.04	2,233.84	-2.7	0.6
Shenzhen	10,959.47	11,733.67	11,229.70	9,276.68	8,528.30	8,249.03	2.5	-11.1
Hang Seng	20,469.50	22,376.89	20,287.82	21,208.41	22,462.01	23,753.27	-0.9	12.0
IPC	25,354.39	33,323.97	35,915.60	39,747.02	41,968.72	42,586.85	41.7	7.1

Fuente: elaboración propia.

Apéndice B

Pruebas ADF para series de rendimientos en diferencia de los mercados de México y China

Variable	Se incluye para el test de la ecuación	T-Statistic	Prob.
dshangai	intercepto	-28.59119	<0.01
	tendencia e intercepto	-28.58248	<0.01
	ninguna	-28.60040	<0.01
dshenzhen	intercepto	-29.57221	<0.01
	tendencia e intercepto	-29.56265	<0.01
	ninguna	-29.58172	<0.01
dhangseng	intercepto	-29.03482	<0.01
	tendencia e intercepto	-29.02533	<0.01
	ninguna	-29.04423	<0.01
dipc	intercepto	-28.18298	<0.01
	tendencia e intercepto	-28.17611	<0.01
	ninguna	-28.19118	<0.01

Cobertura dinámica de la reserva actuarial de una empresa con pasivos pensionales¹

Dynamic hedging of the actuarial reserve of a
firm with pension liabilities

Francisco Venegas-Martínez*

Gabriel Alberto Agudelo Torres**

Luis Ceferino Franco Arbeláez***

Luis Eduardo Franco Ceballos****

Fecha de recepción: 1 de agosto 2015

Fecha de aprobación: 21 de septiembre 2015

* Instituto Politécnico Nacional, México
fvenegas1111@yahoo.com.mx

** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
albertoagudelo@itm.edu.co

*** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
luisfranco@itm.edu.co

**** Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia
luisefranco@itm.edu.co

¹ Los autores agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de los árbitros.

RESUMEN

Una cuestión determinante para las finanzas de una empresa con pasivos pensionales, corresponde a la estimación de las reservas actuariales. En este artículo se propone una estrategia para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia, a una vida, considerando una dinámica estocástica integrada con una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. El planteamiento teórico es relevante, en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implicaría, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro.

Clasificación JEL: C22, G22, H55.

Palabras clave: derivados financieros, reservas actuariales, sistemas pensionales.

ABSTRACT

The estimation of the actuarial reserves is a pivotal point for the finances of a firm with pension liabilities.

In this article a strategy is proposed for the estimation of the actuarial reserve of a life annuity (for one life period), considering an stochastic dynamic integrated with a hedging strategy that guarantees a future value of the reserve greater or equal than the payment due. The theoretical approach is relevant in so far as it allows to diminish the cost of the life annuity, with the social and fiscal benefits that it would entail, by allowing the retirement systems to have greater coverage.

JEL Classification: C22, G22, H55.

Key words: *financial derivatives, actuarial reserves, pension systems.*

Introducción

Para las compañías de seguros, gobiernos y entidades públicas y privadas con pasivos pensionales, el cálculo de la reserva actuarial necesaria para cubrir la totalidad de los pagos de una renta vitalicia es un tema fundamental en la actualidad. La estimación del monto de dicha reserva afecta directamente la estabilidad y cobertura de los sistemas pensionales y, por ende, la calidad de vida de los involucrados. Un desequilibrio en el sistema pensional además de generar un efecto directo en la calidad de vida de los pensionados y sus familias, afecta la sostenibilidad de las entidades con obligaciones pensionales, con probables desequilibrios sistémicos en la economía (Grinols y Turnovsky, 1993; Schmedders, 1998).

En la ciencia actuarial tradicional se plantea el cálculo de dichas reservas como la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles (Bowers *et al.*, 1997). En este cálculo intervienen factores como la probabilidad de vivir de los individuos, la inflación, las edades, el monto del pago y la tasa de interés de descuento denominada “tasa de interés técnico”. Sin embargo, hasta ahora no se incluye en el análisis una estructura estocástica del portafolio, en el cual está invertida dicha reserva, ya que supone, usualmente, un mundo determinista.

Las metodologías de administración de portafolios incluyendo derivados financieros para estructurar coberturas han sido ampliamente investigadas. Especialmente desde el surgimiento del modelo de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), tales estrategias son comunes en los mercados financieros, tanto de renta variable, Jarrow y Turnbull (1999), como de renta fija, Jarrow (2002). Estrategias de ese tipo también han sido aplicadas en el contexto de los mercados de “commodities”; por ejemplo para el caso de la energía eléctrica, Nässäkkälä y Keppo (2005).

Asimismo, diversas investigaciones han abordado el estudio de fenómenos financieros, considerando la dinámica estocástica para la modelación de variables y precios de derivados financieros. Algunos de los trabajos con este tipo de enfoque son Black y Scholes (1973), Merton (1973), Cox y Ross (1976), Cox *et al.* (1985a) y (1985b), Vasicek (1977), Hull y White (1990) y

(1993), Black *et al.* (1990) y Heath *et al.* (1992). Los avances en el campo de los derivados financieros han impulsado el desarrollo de los mercados de capitales y han mejorado la gestión de los riesgos financieros.

En esta investigación se desarrolla un modelo estocástico útil para estimar la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida, a partir de una estrategia de cobertura que garantiza un valor futuro de la reserva mayor o igual al pago a realizar. La alternativa estructurada permite reducir el costo de la renta vitalicia a través de una gestión dinámica del portafolio en el cual está invertida la reserva. Después de esta introducción, en la Sección 1, se presenta el modelo; en la Sección 2 se muestra una aplicación, y finalmente se exponen algunas conclusiones.

1. El modelo

1.1 Pago de una renta como una combinación de opciones

Sea V_t el valor del fondo necesario para soportar el pago futuro D_T , que se realizará siempre y cuando la persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T - t$ años más. Por lo tanto el valor de dicho fondo corresponde al valor presente actuarial:

$$V_t = D_T({}_{(T-t)}p_\phi)e^{-r(T-t)}$$

donde r es la tasa de interés técnica utilizada para el cálculo actuarial y ${}_{(T-t)}p_\phi$ es la probabilidad de que una persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T - t$ años más. Se supone que V_t es conducido por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t.$$

Sea $S_T = V_T - D_T$. Si $V_T < D_T$, entonces se incumple con el pago, por lo menos parcialmente, y no hay ningún tipo de excedente en el portafolio que respalda la renta vitalicia, es decir, $S_T = 0$. Si $V_T \geq D_T$, entonces se cumple con el pago. En consecuencia se sigue que:

$$S_T = \max(V_T - D_T, 0)$$

Con base en las ecuaciones de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), y suponiendo que los agentes necesitan un incentivo para invertir en una reserva para una renta vitalicia (bajo el supuesto de neutralidad al riesgo),² se tiene que:

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \Phi(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v\sqrt{T-t}$$

y $\Phi(x)$ es la probabilidad de que una variable normalmente distribuida con media cero y desviación estándar uno sea menor que x . A partir de $V_t = D_T({}_{T-t}p_\phi)e^{-r(T-t)}$, se tiene que

$$d_1 = \frac{\ln({}_{T-t}p_\phi e^{-r(T-t)}) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}}$$

Si $V_T < D_T$, el faltante está dado por $F_T = D_T - V_T$. En caso contrario el faltante será cero ($F_T = 0$). Por lo tanto, se tiene que

$$F_T = \max(D_T - V_T, 0)$$

y que

$$F_t = D_T e^{-\mu_v(T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1)$$

² Véase al respecto Venegas-Martínez, F. (2008).

con

$$d_1 = \frac{\ln(\tau_{-t} p_\phi e^{-r(T-t)}) + \left(\mu_v + \frac{1}{2} \sigma_v^2\right) (T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T-t}$$

Como el pagador de la obligación debe cubrir con sus propios recursos el posible faltante o bien quedarse con el posible excedente, entonces se tiene una opción *call* en posición larga y una opción *put* en posición corta, ambas con subyacente V_t y precio de ejercicio D_T . Por lo tanto, el valor del portafolio de opciones en el tiempo t satisface por la condición de paridad put-call:

$$S_t - F_t = V_t - D_T e^{-\mu_v^*(T-t)}$$

La ganancia obtenida será la diferencia entre V_t y el pago D_T a realizar descontado a una tasa de rentabilidad igual al parámetro de tendencia de la EDE que describe el cambio en V_t .

1.2 Cálculo de probabilidad de incumplimiento del pago D_T

Siguiendo a Merton (1974), es posible calcular la probabilidad de incumplir total o parcialmente con el pago D_T , con base en lo siguiente

Se sabe que:

$$\begin{aligned} S_t &= e^{-\mu_v(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} S_T f_{V_T|V_t}(V|V_t) dv \\ &= e^{-\mu_v(T-t)} E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t] - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} \end{aligned}$$

donde $f_{V_T|V_t}(V|V_t)$ es la función de densidad de probabilidad de V_T , condicional al valor inicial V_t . Como $S_t = V_t \Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v^*(T-t)} \Phi(d_2)$, entonces:

$$\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} = \Phi(d_2)$$

Por lo tanto la probabilidad de incumplimiento será:

$$\mathbb{P}\{V_T < D_T | V_t\} = 1 - \Phi(d_2)$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln({}_{T-t}p_\phi e^{-r(T-t)}) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}} - \sigma_v\sqrt{T-t}$$

Si la probabilidad de incumplimiento es inaceptable para el administrador de la renta vitalicia, la opción put en posición corta que resulta de la descomposición realizada en la sección 1.1 puede ser anulada a través de una cobertura dinámica como se expone a continuación.

1.3 Cobertura dinámica de los déficits de reserva

Para determinar el monto de la reserva constituida debe verse a la obligación como la combinación de una opción *call* en posición larga con una put en posición corta. En ese sentido, una cobertura dinámica corresponderá a encontrar un portafolio óptimo en el cual el riesgo de mercado sea eliminado cuando $V_T < D_T$. Se considera el portafolio Π_t conformado por w_1 unidades de posiciones cortas en la reserva V_t y w_2 opciones put (F_t) en posición corta.

$$\Pi_t = -w_1V_t - w_2F_t$$

El cambio en el valor del portafolio está dado por

$$d\Pi_t = -w_1dV_t - w_2dF_t$$

El Lema de Ito proporciona la EDE que describe el cambio en F_t .

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial V_t} \mu_v V_t + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial V_t} \sigma_v V_t dW_t$$

Reemplazando dV_t y dF_t en $d\Pi_t$ se obtiene:

$$d\Pi_t = \left(-w_1 - w_2 \frac{\partial F}{\partial t}\right) \mu_v V_t dt + \left(-w_1 - w_2 * \frac{\partial F}{\partial V_t}\right) \sigma_v V_t dW_t \\ - w_2 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right) dt$$

Para eliminar el riesgo de mercado, si se hace $w_2 = 1$, es necesario que $-w_1 = \frac{\partial F}{\partial V_t}$, y como $F_t = D_T e^{-\mu_v(T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1)$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial V_t} = -1 + \Phi(d_1)$$

Por lo tanto,

$$w_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}}\right)$$

Es decir, por cada opción put en posición corta contenida en el portafolio (o en forma equivalente, por cada obligación de pagar D_T en el tiempo T), en el instante t se debe tener en posición corta, un porcentaje sobre la reserva V_t igual a $1 - \Phi(d_1)$. De no ser posible tal posición, se utilizará un activo Z tal que $\text{Corr}(V_t, Z_t) \approx 1$. La estrategia anterior constituye una cobertura delta para una opción put en posición corta.

El riesgo que se asume en una sucesión de pagos D_T , con $T = 1, 2, 3, \dots, n$, es equivalente a tener un portafolio conformado por opciones *call* en posición larga sin costo alguno, cuya valuación individual viene dada simultáneamente por las siguientes dos ecuaciones, ya expuestas en la sección anterior

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \Phi(d_2)$$

y

$$S_t = e^{-\mu_v(T-t)} E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t] - D_T e^{-\mu_v(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$$

De lo anterior se deduce que

$$V_t \Phi(d_1) = e^{-\mu_v(T-t)} E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t].$$

Es decir, el valor esperado condicional de la reserva para el vencimiento T , viene dado por:

$$E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t] = V_t \Phi(d_1) e^{\mu_v(T-t)}$$

Por lo que la reserva actuarial necesaria para soportar el pago D_{T+1} será:

$$\begin{aligned} V_t^{T+1} &= D_{T+1}(T+1-t)p_\phi e^{-r^*(T+1-t)} - E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t] \\ &= D_{T+1}(T+1-t)p_\phi e^{-r^*(T+1-t)} - V_t \Phi(d_1) e^{\mu_v(T-t)} \end{aligned}$$

2. Aplicación del modelo

Se considera una población cuya tabla de mortalidad se muestra en el Anexo 1. Para esta aplicación se supone una tasa de interés técnico $r = 4.5\%$. Si la inflación anual proyectada es 3.5% y los pagos a realizar a una persona de 62 años de edad crecen anualmente en un porcentaje igual, siendo el primer pago correspondiente a \$7,000 USD, entonces un cálculo actuarial tradicional arroja un valor de reserva actuarial de \$123,043 USD. Si se supone que la EDE que conduce las reservas pensionales de dicha población es:

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t$$

donde $\mu_v = 4.5\%$ y $\sigma_v = 7\%$ y la parte de la obligación correspondiente a las opciones put en posición corta es gestionada mediante una cobertura delta, entonces el excedente esperado en cada período, $E[V_{T\{v>D_T\}}|V_t] - D_T$, puede ser considerado parte de la reserva necesaria para el siguiente período V_{T+1} , tal como se expuso en la sección 1.3. Esta gestión dinámica del portafolio conduce a una reserva actuarial de \$82,464 USD, lo que corresponde a una disminución de 33% con respecto al cálculo actuarial tradicional. Los cálculos detallados se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Detalle del cálculo de la reserva actuarial

T-t	DT	tPx	Trad. V	d1	d2	PUT (short)	Delta	Hedging	CALL (long)	E(VT Vt)	New Vt
1	7,000	0.990803	6,630	-0.096995	-0.166995	218.373339	-0.538635	-3,571.384622	156.826310	3,200	6,630
2	7,245	0.980620	6,493	-0.148189	-0.247184	328.060640	-0.558903	-3,629.020629	199.738983	3,134	3,293
3	7,499	0.969385	6,351	-0.195830	-0.317074	422.328578	-0.577628	-3,668.546272	221.752329	3,070	3,217
4	7,76	0.957033	6,204	-0.243694	-0.383694	510.506904	-0.596266	-3,699.245932	231.972602	2,999	3,134
5	8,033	0.943496	6,052	-0.293327	-0.449852	596.507762	-0.615364	-3,724.048932	234.080391	2,915	3,053
6	8,314	0.928708	5,894	-0.345615	-0.517079	682.568934	-0.635184	-3,743.855275	230.109981	2,817	2,979
7	8,605	0.912604	5,731	-0.401201	-0.586403	770.226898	-0.655864	-3,758.662362	221.407265	2,702	2,914
8	8,906	0.895120	5,562	-0.460615	-0.658605	860.657307	-0.677462	-3,767.915550	208.990613	2,571	2,859
9	9,218	0.876200	5,387	-0.524338	-0.734338	954.826716	-0.699978	-3,770.677020	193.707994	2,423	2,816
10	9,540	0.855788	5,206	-0.592849	-0.814208	1,053.574191	-0.723359	-3,765.725305	176.310018	2,259	2,783
11	9,874	0.833840	5,019	-0.666616	-0.898780	1,157.620886	-0.747491	-3,751.582710	157.498395	2,079	2,760
12	10,220	0.810320	4,826	-0.746129	-0.988616	1,267.591178	-0.772205	-3,726.592481	137.936977	1,886	2,747
13	10,577	0.785203	4,627	-0.831904	-1.084292	1,384.006341	-0.797268	-3,688.981166	118.255574	1,684	2,741
14	10,948	0.758481	4,422	-0.924485	-1.186401	1,507.258091	-0.822383	-3,636.938582	99.045895	1,475	2,739
15	11,331	0.730163	4,212	-1.024451	-1.295559	1,637.585139	-0.847189	-3,568.733446	80.846114	1,264	2,738
16	11,727	0.700277	3,997	-1.132425	-1.412425	1,775.045771	-0.871272	-3,482.852375	64.120795	1,057	2,733
17	12,138	0.668875	3,778	-1.249084	-1.537701	1,919.489317	-0.894183	-3,378.157959	49.239071	859	2,721
18	12,563	0.636038	3,555	-1.375145	-1.672130	2,070.507031	-0.915457	-3,254.065058	36.456554	676	2,695
19	13,002	0.601874	3,328	-1.511384	-1.816507	2,227.422164	-0.934655	-3,110.706177	25.897285	511	2,653
20	13,458	0.566522	3,100	-1.658649	-1.971699	2,389.285592	-0.951407	-2,949.053600	17.547597	370	2,588
21	13,929	0.530158	2,870	-1.817848	-2.138628	2,554.861938	-0.965456	-2,770.989478	11.264494	255	2,500
22	14,416	0.492991	2,641	-1.989970	-2.318299	2,722.671265	-0.976703	-2,579.259365	6.796138	166	2,386
23	14,921	0.455265	2,413	-2.176076	-2.511784	2,891.015618	-0.985225	-2,377.334785	3.817790	100	2,247
24	15,443	0.417258	2,188	-2.377322	-2.720250	3,058.054715	-0.991281	-2,169.146561	1.975135	56	2,088
25	15,983	0.379277	1,968	-2.594964	-2.944964	3,221.869710	-0.995270	-1,958.767827	0.929023	29	1,912

26	16,543	0.341658	1,754	-2.830360	-3.187291	3,380.522839	-0.997675	-1,750.102232	0.391344	13	1,726
27	17,122	0.304755	1,548	-3.084967	-3.448698	3,532.116886	-0.998982	-1,546.635081	0.145057	5	1,535
28	17,721	0.268930	1,352	-3.360389	-3.730794	3,674.862451	-0.999611	-1,351.282240	0.046341	2	1,346
29	18,341	0.234545	1,167	-3.658356	-4.035317	3,807.104725	-0.999873	-1,166.390375	0.012454	1	1,165
30	18,983	0.201949	994	-3.980745	-4.364151	3,927.368358	-0.999966	-993.795913	0.002736	0	993
31	19,648	0.171466	835	-4.329570	-4.719314	4,034.393631	-0.999993	-834.914052	0.000475	0	835
32	20,335	0.143374	691	-4.707059	-5.103039	4,127.206533	-0.999999	-690.770851	0.000063	0	691
33	21,047	0.117899	562	-5.115579	-5.517699	4,205.136008	-1.000000	-562.048052	0.000006	0	562
34	21,784	0.095199	449	-5.557753	-5.965920	4,267.880637	-1.000000	-449.044954	0.000000	0	449
35	22,546	0.075312	351	-6.037710	-6.451836	4,315.702508	-1.000000	-351.494399	0.000000	0	351
36	23,335	0.058199	269	-6.561142	-6.981142	4,349.227929	-1.000000	-268.764559	0.000000	0	269
37	24,152	0.043795	200	-7.133940	-7.559733	4,369.193750	-1.000000	-200.113061	0.000000	0	200
38	24,997	0.031981	145	-7.762291	-8.193800	4,376.541814	-1.000000	-144.592594	0.000000	0	145
39	25,872	0.022580	101	-8.452766	-8.889916	4,372.457367	-1.000000	-101.012500	0.000000	0	101
40	26,778	0.015352	68	-9.212420	-9.655139	4,358.355335	-1.000000	-67.952502	0.000000	0	68
41	27,715	0.010005	44	-10.049077	-10.497296	4,335.823101	-1.000000	-43.819915	0.000000	0	44
42	28,685	0.006221	27	-10.970942	-11.424594	4,306.513361	-1.000000	-26.956802	0.000000	0	27
43	29,689	0.003668	16	-11.988216	-12.447237	4,272.057772	-1.000000	-15.726322	0.000000	0	16
44	30,728	0.002038	9	-13.111554	-13.575881	4,233.933886	-1.000000	-8.645787	0.000000	0	9
45	31,803	0.001059	4	-14.353683	-14.823257	4,193.406035	-1.000000	-4.445791	0.000000	0	4
46	32,917	0.000511	2	-15.728398	-16.203161	4,151.474785	-1.000000	-2.120743	0.000000	0	2
47	34,069	0.000225	1	-17.260860	-17.740756	4,108.880317	-1.000000	-0.925489	0.000000	0	1
48	35,261	0.000090	0	-18.959323	-19.444298	4,066.110541	-1.000000	-0.367199	0.000000	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

En este trabajo se propone un planteamiento teórico para la estimación de la reserva actuarial de una renta vitalicia, a una vida, considerando la dinámica estocástica del portafolio en el cual está invertida; además se estructura una estrategia de cobertura que impacta de manera directa dicha estimación. La estrategia es relevante en la medida que permite disminuir el costo de una renta vitalicia, con los beneficios sociales y fiscales que ello implica, al permitir una mayor cobertura de los sistemas de retiro. Futuras investigaciones podrían estar orientadas al análisis de las condiciones regulatorias y de mercado, necesarias para implementar lo planteado en este artículo.

Anexo 1

Tabla de mortalidad

X	l(x)
15	1,000,000
16	999,515
17	999,019
18	998,510
19	997,988
20	997,451
21	996,898
22	996,327
23	995,736
24	995,124
25	994,488
26	993,826
27	993,136
28	992,415
29	991,660
30	990,868
31	990,036
32	989,159
33	988,233
34	987,254
35	986,216
36	985,114
37	983,942
38	982,693
39	981,360
40	979,936
41	978,411
42	976,776
43	975,021
44	973,135
45	971,105
46	968,919
47	966,561
48	964,017
49	961,269
50	958,298
51	955,085
52	951,608

x	l(x)
53	947,843
54	943,766
55	939,348
56	934,604
57	929,498
58	923,991
59	918,039
60	911,595
61	904,607
62	897,019
63	888,769
64	879,635
65	869,557
66	858,477
67	846,334
68	833,069
69	818,623
70	802,940
71	785,968
72	767,658
73	747,970
74	726,872
75	704,342
76	680,372
77	654,970
78	628,162
79	599,994
80	570,538
81	539,892
82	508,181
83	475,562
84	442,222
85	408,381
86	374,288
87	340,219
88	306,474
89	273,371
90	241,235

x	l(x)
91	210,391
92	181,152
93	153,808
94	128,609
95	105,758
96	85,395
97	67,556
98	52,206
99	39,285
100	28,688
101	20,255
102	13,771
103	8,975
104	5,580
105	3,290
106	1,828
107	950
108	458
109	202
110	81

Referencias bibliográficas

- Black, E, E. Derman, y W. Toy (1990). "A One-factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, (January-February), 33-39.
- Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Option and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D.A. y Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*, 2nd edition. Itasca: Society of Actuaries.
- Cox, J. C., Ross, S. A. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1, pp. 145-166.
- Cox, J. C., J. Ingersoll y S. Ross (1985a). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.
- Cox, J. C., J. Ingersoll y S. Ross (1985b). "A Theory of the Term Structure of Interest rates", *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.
- Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky (1993). "Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 1-36.
- Heath, D., R.A. Jarrow, y A. Morton (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.
- Hull, J. y A. White (1990). "Pricing Interest Rate Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.
- Hull, J. y A. White (1993). "One-factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 2, pp. 235-254.
- Jarrow, R. A. (2002). *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*. 2nd edition, Stanford University Press.
- Jarrow, R. A., Turnbull, S. (1999). *Derivative Securities: The Complete Investor's Guide*. 2nd edition, South-Western College Publishing.
- Merton, R. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Merton, R. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-70.
- Nässäckälä, E., & Keppo, J. (2005). "Electricity Load Pattern Hedging With Static Forward Strategies". *Managerial Finance*, Vol. 31, No. 6, pp. 115-136.

- Schmedders, K. (1998). "Computing Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Markets". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 22, No. 8-9, pp. 1375-1401.
- Vasicek O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. 2da. Edición, Cengage Learning, México.

Convocatoria abierta

La revista *Estocástica: finanzas y riesgo*, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. *Estocástica* es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- Administración y análisis de riesgos financieros.
- Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- Diseño de instrumentos financieros.
- Econometría financiera.
- Finanzas computacionales.
- Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- Finanzas matemáticas.
- Ingeniería financiera.
- Innovación financiera.
- Mercados financieros.
- Modelado del comportamiento de instrumentos financieros.
- Modelado matemático de riesgos.
- Modelos de regulación financiera.
- Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- Teoría financiera.
- Teoría del riesgo.
- Valuación de activos financieros.

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación bajo la modalidad de doble ciego y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista *Estocástica: finanzas y riesgo*, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

CALL FOR PAPERS

Estocástica: finanzas y riesgo will consider for possible publication articles written in Spanish or English, provided they contain unpublished research. *Estocástica* is published twice a year and its objective is to contribute to the sharing of cutting-edge research in the areas of finance, risk management, and financial engineering. *Estocástica* promotes communication of original research results, either theoretical or empirical, related to the study and practice of the above mentioned disciplines and the following research lines:

- Financial risk analysis and management
- Financial innovation
- Financial and economic analysis and modeling
- Financial markets
- Financial instruments design
- Financial instruments behavior modeling
- Financial econometrics
- Financial engineering
- Computational finance
- Risk modeling
- Behavioral finance applying quantitative methods
- Financial regulation modeling
- Mathematical finance
- Stochastic processes applied to finance
- Risk Theory
- Financial theory
- Financial assets valuation

In addition to these research lines, closely related original manuscripts will be accepted according to the editorial guidelines published on the journal's web site: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Research papers will be double-blind peer reviewed. Those articles accepted will be scheduled for publication.

Manuscripts should be sent to estocastica@azc.uam.mx. Further information may be obtained dialing +52 (55) 5318-9454 ext. 157 or 154. Online journal viewing is available at <http://estocastica.azc.uam.mx>.

Authors grant, by sending a manuscript for possible publication, the legal authorization to *Estocástica: finanzas y riesgo* for publishing it in print and electronic formats. In addition, authors will be fully responsible for any legal acts promoted by third parties questioning the authorship and originality of their research articles, freeing the Universidad Autónoma Metropolitana from any legal or economic responsibility associated to such claims.

La revista
Estocástica: finanzas y riesgo
está incluida en el Sistema Regional de
Información en Línea para Revistas Científicas
de América Latina, el Caribe, España y
Portugal



CS
H *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco

DEPARTAMENTO
DE SISTEMAS

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros

ISSN 2007-5383

