

# Estocástica

## FINANZAS Y RIESGO

**Disminución del riesgo electoral mediante un algoritmo híbrido**

Eric Alfredo Rincón García  
Luis Fernando Magno Rico

**Decisiones óptimas de consumo y portafolio con una restricción probabilista sobre la riqueza final: difusiones con saltos y horizonte finito**

Francisco Venegas-Martínez  
Abigail Rodríguez-Nava  
Ambrosio Ortiz-Ramírez

**Estimation of Alpha in Defined Benefit Pension Funds with a t-Student O-GARCH Matrix. A test in Pensiones Civiles del Estado de Michoacán**

Oscar V. De la Torre Torres

**Aplicación del modelo Weibull en el análisis de eventos críticos en precios bursátiles**

Juan de la Cruz Mejía Téllez

**VOLUMEN 3, NÚMERO 1**  
**ENERO - JUNIO 2013**

Universidad Autónoma Metropolitana  
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco





# Estocástica

## FINANZAS Y RIESGO

Volumen 3, número 1  
enero - junio 2013

Universidad  
Autónoma  
Metropolitana



Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

## Directorio

### Rector General

Dr. Enrique Pablo Alfonso  
Fernández Fassnacht

### Secretaria General

Mtra. Iris Edith Santacruz Fabila

### Rectora de la Unidad Azcapotzalco

Mtra. Gabriela Paloma Ibañez Villalobos

### Secretario de la Unidad

Ing. Darío Eduardo Guaycochea  
Guglielmi

### Director de la División De Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Sánchez Daza

### Secretario Académico

Mtro. Cristian Leriche Guzmán

### Jefe del Departamento de Administración

Dr. Oscar Lozano Carrillo

### Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Lic. Santiago Ávila Sandoval

### Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández Lerma  
Dr. Francisco Venegas Martínez  
Dr. Edgar Ortiz  
Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade  
Dra. Patricia Saavedra Barrera  
Dr. Francisco López Herrera  
Dr. Wojciech Szatzschneider Smigielka

### Comité Editorial

#### Presidente

Dr. Luis Fernando Hoyos Reyes

#### Editora

Mtra. Marissa R. Martínez Preece

#### Miembros

Dra. María G. Henaine Abed  
Mtro. Carlos Zubieta Badillo  
Mtro. Rafael Eutimio García García  
Mtro. Sergio Solís Tepexpa

**Estocástica: Finanzas y Riesgo.** Volumen 3, número 1, enero - junio 2013, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros, Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F., Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, D.F.; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154, Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: [estocastica@correo.azc.uam.mx](mailto:estocastica@correo.azc.uam.mx), Editora responsable Mtra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 17 de enero de 2013, Tamaño del archivo: 6.4 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

# CONTENIDO

## PRESENTACIÓN

Disminución del riesgo electoral  
mediante un algoritmo híbrido

Eric Alfredo Rincón García  
Luis Fernando Magno Rico

7

Decisiones óptimas de consumo  
y portafolio con una restricción  
probabilista sobre la riqueza final:  
difusiones con saltos y horizonte finito

Francisco Venegas-Martínez  
Abigail Rodríguez-Nava  
Ambrosio Ortiz-Ramírez

23

Estimation of Alpha in Defined  
Benefit Pension Funds with a  
t-Student O-GARCH Matrix.  
A test in Pensiones Civiles del  
Estado de Michoacán

Oscar V. De la Torre Torres

39

Aplicación del modelo Weibull  
en el análisis de eventos críticos  
en precios bursátiles

Juan de la Cruz Mejía Téllez

73



## PRESENTACION

Las ciencias sociales y dentro de ellas las finanzas se han beneficiado de metodologías creadas en otras disciplinas, por ejemplo, la física, para explicar fenómenos complejos. Algunas de estas herramientas son los algoritmos de tipo heurístico o estocástico que fueron desarrollados para resolver problemas de optimización cuando no existen ecuaciones eficientes para ello, debido a la complejidad o al gran número de las operaciones requeridas para analizar las problemáticas tratadas, o en casos en donde se presentan objetivos múltiples. Los algoritmos heurísticos no necesariamente encuentran una *solución óptima*, pero sí son capaces de generar buenas soluciones, entendiéndose por esto soluciones muy cercanas al óptimo.

En este número, dentro del marco de la administración de riesgos se presenta un ejemplo de métodos heurísticos aplicados a las ciencias sociales, y para el proceso de toma de decisiones en economía y finanzas se ofrecen dos modelos estocásticos, y un modelo probabilístico.

En el primer trabajo, Eric Alfredo Rincón García y Luis Fernando Magno Rico nos presentan su artículo *Disminución del riesgo electoral mediante un algoritmo híbrido*, basado en técnicas heurísticas, capaz de generar zonas electorales que cumplan con criterios preestablecidos para garantizar procesos electorales democráticos.

En *Decisiones óptimas de consumo y portafolio con una restricción probabilista sobre la riqueza final: difusiones con saltos y horizonte finito*, Francisco Venegas-Martínez, Abigail Rodríguez-Nava y Ambrosio Ortiz-Ramírez desarrollan un modelo para una economía estocástica con mercados incompletos. El modelo es útil para analizar el proceso de toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre, y tiene como objetivo optimizar la regla de consumo y las proporciones de la riqueza que el individuo debe asignar a cada uno de los activos disponibles en la economía.

El tercer artículo *Estimation of Alpha in Defined Benefit Pension Funds with a t-Student O-GARCH Matrix. A Test in Pensiones Civiles del Estado de Michoacán*, Oscar V. De la Torre Torres, evalúa la utilidad de un proceso de administración activa de portafolios de inversión empleando una matriz de covarianzas GARCH ortogonal, y concluye que para el caso del Fondo de Pensiones Civiles del Estado de Michoacán el manejo activo de la cartera de inversión es la opción más conveniente.

Por último, en su artículo *Aplicación del modelo Weibull en el análisis de eventos críticos en precios bursátiles*, Juan de la Cruz Mejía Téllez, aplica el modelo Weibull, ya que éste se ajusta a la distribución del tiempo en el cual ocurren dos eventos críticos consecutivos, utilizando para esto los precios de las acciones de CEMEX.

Esperamos que estos trabajos representen un estímulo para continuar estudiando los temas aquí tratados y ofrezcan ideas que contribuyan a enriquecer la investigación en las áreas de finanzas y riesgos.

Para nosotros siempre será importante mencionar que esta publicación ha llegado a su tercer año gracias a la colaboración de la comunidad especializada que aceptó la invitación para participar en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en las disciplinas objeto de esta revista, por ello, les agradecemos el interés mostrado en este proyecto y les reiteramos nuestra invitación para continuar formando parte del espacio de colaboración que representa esta publicación.

Por último, deseamos comunicar que a partir del volumen 2, número 2 se usó la notación volumen en lugar de año, siguiendo los estándares internacionales, y cada volumen incluirá dos números semestrales, tal y como se ha venido haciendo.

Comité Editorial



# Disminución del riesgo electoral mediante un algoritmo híbrido

---

Eric Alfredo Rincón García\*

Luis Fernando Magno Rico\*\*

Fecha de recepción: 13 de abril de 2012

Fecha de aceptación: 7 de diciembre de 2012

---

\* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería.  
Departamento de Sistemas  
rigaeral@correo.azc.uam.mx

\*\* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería.  
Departamento de Sistemas  
cachito\_uam@hotmail.com

## Resumen

El diseño de zonas electorales es un problema difícil de resolver que ha sido estudiado tanto por su complejidad computacional como por su influencia en los resultados de los procesos electorales. Para promover procesos democráticos se han establecido diferentes criterios que deben satisfacerse como son el equilibrio poblacional, la conexidad y la compacidad geométrica. En este artículo se propone un algoritmo, basado en técnicas heurísticas, capaz de generar zonas electorales que cumplen con estos criterios. Esta propuesta fue aplicada en el Estado de México, y los resultados obtenidos muestran que el algoritmo favorece la creación de zonas de alta calidad.

Clasificación JEL: C15, C44 y C63.

**Palabras clave:** Simulated annealing, Gerrymandering, Multiple criteria districting problems.

### Reduction of Electoral Risk by Means of a Hybrid Algorithm

#### Abstract

*Redistricting is a complex problem in which democracy of the electoral processes is promoted by some constraints such as population balance, contiguity and compactness. In this paper we solve the problem by means of a novel hybrid algorithm based in two heuristics techniques. This algorithm was applied in a real example in Estado de Mexico. The results show that the new algorithm favors the creation of high quality districts.*

*JEL Classification: C15, C44, and C63.*

**Key words:** *Multiple criteria districting problems, Gerrymandering, Simulated Annealing.*

## 1. Introducción

El diseño de zonas ocurre cuando se deben agrupar unidades geográficas (UG), generalmente unidades administrativas, en un número predeterminado de zonas. Está presente en diferentes tareas geográficas y requiere tomar en cuenta múltiples objetivos, los cuales pueden estar en competencia o conflicto unos con otros, por lo que encontrar una solución capaz de satisfacer de forma óptima cada uno de ellos puede resultar imposible.

El diseño de zonas aparece en diversas aplicaciones como son la creación de zonas escolares (DesJardins *et al*, 2006), territorios de ventas (Tavares-Pereira *et al*, 2007), áreas de servicios y mantenimiento (Shortt *et al*, 2005) y uso de tierras (Shirabe, 2005). Sin embargo, el caso más conocido es el diseño de zonas electorales también llamado distritación política (Gutiérrez y Rincón, 2009), que se ha analizado principalmente por su influencia en las elecciones políticas. Se han propuesto diferentes normas que regulan la construcción de las zonas y que buscan evitar la manipulación de las mismas a favor o en contra de algún partido, candidato o sector social. En México, en el 2004, el Instituto Federal Electoral (IFE) realizó un proceso de distritación para el ejercicio electoral llevado a cabo en el 2006. Durante esta etapa el IFE buscó consolidar la credibilidad que había logrado en los procesos de 1996. Para lo cual se contrataron a especialistas en distintas áreas como demografía, modelos matemáticos, sistemas de información geográfica, computación, y se promovió la participación directa de representantes de los diferentes partidos políticos. Uno de los resultados obtenidos fue la creación de un algoritmo basado en la técnica heurística recocido simulado (RS), que diseña las zonas electorales de forma automatizada considerando los criterios establecidos en el acuerdo del Consejo General del IFE CG-104-2004.

Sin embargo, la creación de nuevas técnicas heurísticas abre el camino para iniciar una investigación hacia la obtención de algoritmos capaces de mejorar la calidad de las zonas electorales obtenidas hasta el momento. Lamentablemente la información necesaria para realizar un análisis profundo, incluso en sólo un estado, requeriría de un largo proceso, por lo cual fue nece-

sario acotar el área de estudio. En este trabajo se propone el uso combinado de dos técnicas heurísticas para obtener diferentes planes de distritación con zonas de buena calidad, tomando en cuenta tres de los criterios considerados por el IFE: conexidad, compacidad geométrica y equilibrio poblacional, considerados como imprescindibles en todo proceso político democrático.

En la siguiente sección se describen algunos de los riesgos inherentes a todo proceso de distritación. En la sección 2 se indican las características más importantes que dificultan el diseño de zonas electorales. En la sección 3 se presentan el modelo y el algoritmo propuestos en este trabajo para promover la construcción de zonas con las características mencionadas en el párrafo anterior. En la sección 4 se describe la aplicación realizada y se analizan los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

## 2. Riesgos en el proceso de distritación

Los riesgos de un proceso de distritación suelen asociarse a la falta de representación de los ciudadanos, al violar el principio de un hombre un voto, y a la manipulación conocida como *gerrymandering*, que consiste en la alteración de los distritos para favorecer a un partido o candidato, dando como resultado zonas con formas retorcidas. Sin embargo, las posibilidades de alteraciones de este tipo fueron minimizadas mediante la participación de grupos multidisciplinarios y de los partidos políticos, en el proceso de creación de los 300 distritos electorales que fueron empleados en los ejercicios políticos del 2006 y 2012. Los distritos obtenidos cumplían con las restricciones establecidas por el IFE, con lo cual se establecieron las bases para realizar un proceso democrático. Sin embargo, los efectos de un mal diseño van más allá de los resultados electorales, y en ese sentido aún queda mucho trabajo por realizar. Uno de los puntos que sobresale en la actual distritación es la formación de zonas que incluyen diferentes etnias sin tomar en cuenta su identidad cultural y relaciones históricas, como ocurre en el estado de Chiapas (López, 2006).

En estos casos resulta razonable suponer que el representante político de dicha zona no se identificará con todos los sectores sociales que la constituyen, y por lo tanto no concentrará su atención y energía de manera uniforme entre las diferentes áreas que forman su distrito electoral. Así, podría canalizar los recursos de manera parcial perjudicando a algunas regiones. Es claro que una historia semejante puede presentarse en todo el país, aunque con matices más sutiles, donde las diferencias pueden provenir no sólo de factores culturales sino partidistas, económicos, religiosos, etc.

De hecho, el “Diagnóstico sobre la vulnerabilidad político electoral de los programas sociales federales” realizado por el Proyecto de Protección de los Programas Sociales Federales (2006) reconoce que, entre las variables clave para la asignación del gasto gubernamental, se encuentra la geografía electoral. Los políticos en el poder distribuyen el gasto público dando mayor importancia a las coaliciones políticas existentes, y a ganar la preferencia de aquellos electores que no deciden aún su voto que a las necesidades reales de la población. Este comportamiento se retroalimenta cuando el electorado vota en respuesta al desempeño gubernamental, premiando o castigando al gobierno, o partido al que representa, por buenos o malos resultados. Esto significa que el gobierno, o representante político de una zona, se convierte en un jugador indirecto de las elecciones, que busca ser premiado por los electores. Nuevamente, la asignación política o partidista de los recursos puede poner en grave riesgo áreas de marginación elevada o con altos índices de pobreza.

Por lo anterior es necesario establecer modelos capaces de evitar, o al menos minimizar, la presencia de distritos con diferencias que puedan promover la marginación de algunos grupos sociales. Un acercamiento hacia la construcción de distritos socialmente ecuanímenes consistió en la división entre zonas urbanas y rurales tomada en cuenta por el IFE, pero los resultados aún requieren mejoras que implicarán agregar objetivos y restricciones al modelo del problema, con lo cual aumentará su complejidad computacional. Por lo tanto, eventualmente será necesario contar con herramientas capaces de construir zonas de mejor calidad. En este sentido, se toma como punto de partida el modelo propuesto por el IFE en el último proceso de distritación y se construye un algoritmo que genera mejores distritos que los obtenidos mediante la técnica de recocido simulado tradicional.

### 3. Complejidad

La búsqueda de zonas que contengan el mismo número de habitantes permite que los electores tengan un voto con el mismo peso o igualdad en la elección. Las zonas electorales que tienen una gran variación en su población (condición referida como mala distribución) violan el principio “un hombre, un voto” central en toda democracia.

Por lo tanto, las zonas electorales deben ser rediseñadas periódicamente, debido a los cambios constantes en la población o en los límites administra-

tivos. Por ejemplo, puede ser necesario rediseñar un área de votación si la población del área se ha expandido mucho y no es posible mantener un solo recinto de votación o, el área de votación ha perdido población y ya no es práctico seguir teniendo en función esa zona.

Sin embargo, rediseñar las zonas electorales es un problema especialmente difícil, debido al tamaño del espacio de soluciones. La dimensión de los problemas reales generalmente hace irrealizable cualquier tentativa de enumerar explícitamente todas las posibles soluciones. El número total de soluciones para dividir  $n$  unidades geográficas en  $k$  zonas está dado por el número de *Stirling* del segundo tipo:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} (k-i)^n \quad (3.1)$$

Para mostrar el crecimiento del espacio de soluciones en este caso, en la Tabla 1 se muestra el número posible de planes de zonificación que podrían usarse para dividir un estado hipotético en dos zonas, así como el número de años que necesitaría una computadora capaz de realizar  $2.5 \times 10^{15}$  operaciones por segundo para revisar todos los planes de zonificación en cada caso.

Tabla 1. Número posible de planes de zonificación.

Total de unidades	10	50	80	150	250
Numero de planes	511	$5.6 \times 10^{14}$	$6.04 \times 10^{23}$	$7.13 \times 10^{44}$	$9 \times 10^{74}$
Años requeridos	$6.48 \times 10^{-21}$	$7.10 \times 10^{-9}$	7.66	$9.04 \times 10^{21}$	$1.14 \times 10^{52}$

Aunado a lo anterior, se ha demostrado que el diseño de zonas es un problema NP-Duro (Gilbert *et al*, 1985). Por lo anterior, se ha recurrido a la implementación de algoritmos heurísticos que son considerados la mejor opción para producir soluciones de buena calidad en tiempos de cómputo razonable, y aunque no garantizan encontrar la solución óptima, normalmente se obtiene una respuesta suficientemente buena.

#### 4. Diseño de zonas electorales

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se propone el diseño de zonas electorales tomando en cuenta los principios de equilibrio poblacional,

conexidad y compacidad geométrica. En esta sección se presenta un modelo que toma en cuenta estos principios para resolver el diseño de zonas como un problema de optimización, donde la función objetivo mide la calidad de las zonas generadas, en términos del equilibrio poblacional y la compacidad geométrica, mientras que la conexidad es garantizada por medio de restricciones.

#### 4.1. Función objetivo

La función objetivo será utilizada para evaluar la calidad de las soluciones en términos del equilibrio poblacional y la compacidad geométrica, para lo cual se utilizarán las siguientes medidas.

El equilibrio poblacional es un criterio, que busca garantizar el principio de “un hombre, un voto”, y es considerado el más importante del proceso de redistribución. Mediante el cumplimiento de este criterio se busca que los distritos electorales sean habitados por el mismo número de personas, para evitar la subrepresentación y la sobrerrepresentación. Ya que en la práctica es imposible que todos los distritos tengan el mismo número de habitantes en general se acepta cierto porcentaje de desviación con respecto al valor ideal. En este trabajo el equilibrio poblacional será medido con la fórmula usada por el Instituto Federal Electoral de México (IFE) en la redistribución que actualmente está vigente.

$$C_1(P) = \sum_{s \in S} \left( \frac{100P_T}{d_a(P_N/300)} \right)^2 \left( \frac{P_s}{P_T} - \frac{1}{n} \right)^2 \quad (4.1)$$

Donde  $P = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ , es un plan de zonificación,  $P_N$  es la población nacional,  $P_T$  es la población de la entidad y  $P_s$  es la población del distrito  $S$ ,  $d_a$  es el porcentaje de desviación poblacional máxima aceptable para la entidad, y  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  es el número de distritos electorales que se deben generar en la entidad. El número total de distritos electorales que se deben generar en el país es 300.

De esta forma, mientras menor sea el valor obtenido en la ecuación (3.1), por una solución, mayor será el equilibrio poblacional entre las zonas. De hecho, se espera que cada una de las zonas propuestas como solución final tengan un valor en el intervalo  $[0,1]$ , ya que valores mayores indicarían un desequilibrio muy alto.

La compacidad favorece la imagen estética de los planes de zonificación propuestos y la claridad en la delimitación de los distritos, pero en general no se considera que sea suficiente para evitar la manipulación conocida como *gerrymandering*. Sin embargo, al incorporarla dentro del proceso de distritación se aumenta la confianza en la realización de un trabajo sin sesgo. Se trata de un criterio que puede contribuir a minimizar la discusión y discrepancias entre los partidos políticos. Por lo tanto es una característica deseable pero su aporte radica principalmente en la imagen, por lo cual debe evitarse que interfiera en contra de otros criterios. Para medir la compacidad geométrica de cada zona existen muchas propuestas, pero ninguna de ellas es considerada perfecta. Por este motivo, para la realización de este trabajo se buscó una medida de compacidad geométrica que requiriera de pocas operaciones algebraicas. Después de algunas pruebas se escogió una medida que compara el perímetro de cada zona con el perímetro de un cuadrado que contiene la misma área.

$$C_2(P) = \sum_{s \in S} \left( \frac{PC_s}{4(AC_s)^{1/2}} - 1 \right) \quad (4.2)$$

Donde  $PC_s$  y  $AC_s$  son el perímetro y el área, respectivamente, de la zona  $s$ . Por lo tanto, un distrito geoméricamente compacto será semejante a un cuadrado y tendrá un costo cercano a cero.

Finalmente, la función objetivo a minimizar es:

$$f(P) = \alpha_1 C_1(P) + \alpha_2 C_2(P) \quad (4.3)$$

Donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  son factores que miden la importancia relativa del equilibrio poblacional y la compacidad geométrica. De esta forma, la función objetivo guiará la búsqueda hacia planes de zonificación que promuevan el mayor balance entre equilibrio poblacional y compacidad geométrica. Además, la minimización estará sujeta a restricciones que garanticen (i) la conexidad de las zonas construidas, (ii) que el número de zonas sea  $n$  y (iii) que cada unidad geográfica pertenezca a exactamente una zona.

Es importante insistir en que este modelo incluye tres de las características más frecuentes e importantes en el diseño de zonas electorales. Sin em-



bargo, el número de criterios considerados puede variar dependiendo de las leyes que regulen los procesos electorales, por ejemplo, en las elecciones federales del 2006, el modelo utilizado por el IFE incluía una lista mucho mayor de criterios, tan solo en la función objetivo se pueden observar dos componentes más que las consideradas en este trabajo, (IFE, 2004):

1. Equilibrio demográfico en la determinación de los distritos partiendo de la premisa de que la diferencia de población de cada distrito, en relación con la media poblacional estatal sería lo más cercano a cero.
2. Delimitación de los distritos procurando obtener la mayor compacidad, de tal forma que el perímetro de los distritos tenga una forma geométrica lo más cercana a un polígono regular.
3. Los distritos se constituían preferentemente con municipios completos.
4. Se procuraría optimizar los tiempos de traslado entre los recorridos al interior de los distritos, considerando su tamaño, su extensión y la distribución geográfica de sus localidades.

En este punto es importante destacar, que los resultados obtenidos en este trabajo no serán comparables con la distritación propuesta por el IFE para las elecciones del 2006, ya que las funciones objetivo son distintas y por lo tanto, las soluciones propuestas buscarán el equilibrio entre criterios diferentes. Más aún, el objetivo de este trabajo no es competir con los distritos diseñados por el IFE, sino proponer una nueva técnica, eficiente y capaz de generar zonas de alta calidad.

#### 4.2 Recocido simulado

Para el proceso electoral realizado en México en el año 2006, el IFE realizó una distritación empleando un algoritmo basado en recocido simulado (RS). Este método es reconocido por producir soluciones de buena calidad, y por su capacidad para generar resultados que no dependen de la solución donde se inicie el proceso de búsqueda. Por lo tanto, se consideró una herramienta adecuada para garantizar imparcialidad en esta etapa del proceso electoral (D'Amico *et al*, 2002).

RS es una de las heurísticas más conocidas, que por su simplicidad y buenos resultados en numerosos problemas, se ha convertido en una herramienta muy popular, con aplicaciones en diferentes áreas de optimización. El concepto fue introducido en el campo de la optimización combinatoria a

inicios de la década de los 80 por Kirkpatrick (Kirkpatrick *et al*, 1983). Esta heurística, comienza con una solución,  $P_A$ , y un factor llamado temperatura  $T$ . En cada iteración se genera de manera aleatoria una solución vecina,  $P_B$ , si la nueva solución mejora el costo de la función objetivo con respecto a la solución actual,  $f(P_B) < f(P_A)$ ,  $P_A$  es reemplazada. Cuando la nueva solución no mejora el valor de la función objetivo, se puede aceptar el cambio de la solución actual con cierta probabilidad dada por:

$$\rho = \exp\left(\frac{f(P_A) - f(P_B)}{T}\right) \quad (4.4)$$

Conforme el algoritmo avanza, el valor de la temperatura disminuye mediante un coeficiente de enfriamiento,  $0 < \alpha < 1$ , pero cada valor es mantenido estable durante  $E$  iteraciones, para permitir que el algoritmo explore distintas soluciones con la misma probabilidad de aceptación. Es importante destacar que la elección de los valores para  $\alpha$  y  $E$  son de crucial importancia para la obtención de buenos resultados. Si al factor  $\alpha$  se le asigna un valor muy pequeño el algoritmo convergerá muy rápido y puede quedar atrapado en óptimos locales, si se le asigna un valor muy alto, el tiempo de cómputo será excesivo. Algo semejante ocurre con el número de iteraciones  $E$ , si son muy pocas el algoritmo no tendrá la oportunidad de explorar el espacio de soluciones de forma adecuada y difícilmente obtendrá soluciones de buena calidad, si son demasiadas el tiempo de cómputo será excesivo.

### 4.3 Reencadenamiento de trayectorias

La búsqueda continua de mejores soluciones en distintas área de investigación ha llevado a la creación de nuevos y más eficientes métodos heurísticos. En particular, existen propuestas, llamadas híbridas, las cuales se basan en la combinación de varias técnicas heurísticas que al trabajar en conjunto son capaces de producir mejores resultados que de manera independiente. Por lo anterior, se decidió mejorar las soluciones producidas por RS, mediante el reencadenamiento de trayectorias (RT).

RT surgió como un proceso de integración de estrategias de intensificación y de diversificación en la búsqueda de soluciones de mejor calidad (Glover *et al*, 2000). Este proceso genera caminos entre soluciones, que han sido previamente visitadas, durante un proceso de búsqueda. Se basa en el hecho

de que entre dos soluciones se puede trazar un camino que las una, de modo que las soluciones en dicho camino contengan atributos de las soluciones originales. Para generar los caminos es necesario seleccionar movimientos que cumplan los siguientes objetivos: empezando por una solución inicial,  $P_A$ , los movimientos deben introducir progresivamente los atributos de la solución guía,  $P_B$ , reduciendo la diferencia entre las dos soluciones. De esta forma, se crea una sucesión de soluciones que forman un camino desde  $P_A$  hasta  $P_B$ ,  $P_A = x(1), x(2), \dots, x(r) = P_B$ . Los papeles de ambas soluciones son intercambiables, y cada solución puede moverse hacia la otra para generar diferentes caminos. Finalmente, se pueden evaluar los costos asociados a cada una de las soluciones que forman el camino, y si alguna de ellas mejora el costo asociado a la solución inicial, esta última es reemplazada.

#### 4.4 Algoritmo híbrido RS-RT

En este trabajo, se propone el uso de un algoritmo que utiliza RS para producir soluciones de buena calidad, y RT para combinar las mejores características de las soluciones obtenidas. Sin embargo, para mejorar la eficiencia del algoritmo es importante encontrar valores adecuados para  $\alpha$  y  $E$ , parámetros necesarios en RS, y un número adecuado, de preferencia pequeño, de soluciones para realizar el reencadenamiento de trayectorias, de tal forma que se garantice la calidad de las soluciones sin emplear tiempos de cómputo excesivos.

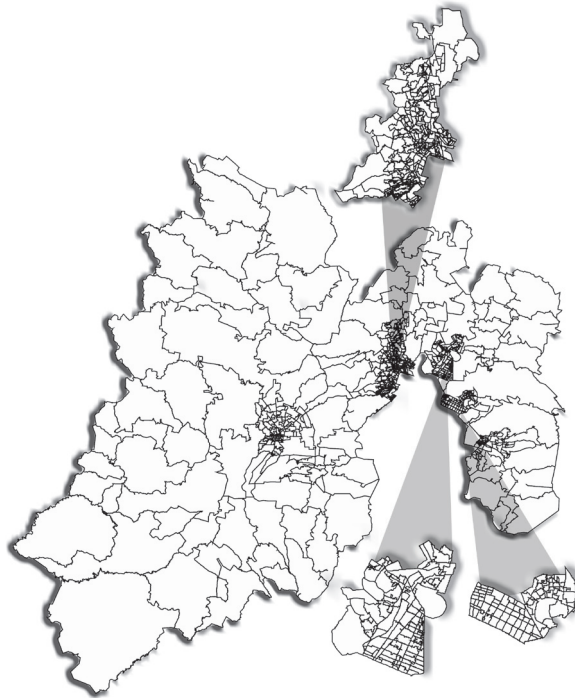
Después de varias pruebas preliminares se determinó que en cada ejecución el algoritmo híbrido RS-RT debe producir 10 soluciones mediante RS, utilizando los valores  $\alpha = 0.99$  y  $E = 500$ . Dichas soluciones son posteriormente mejoradas utilizando la estrategia RT. Es importante mencionar que durante estos experimentos se observó que RS fue capaz de producir mejores soluciones al considerar los parámetros  $\alpha = 0.99$  y  $E = 1500$ . Sin embargo, el tiempo de cómputo necesario para combinarlo con RT fue considerado excesivo.

### 5. Aplicación

El algoritmo propuesto fue aplicado al Estado de México, utilizando la información disponible en el 2006. El estado está formado por 835 unidades geográficas que deben ser utilizadas para formar 40 zonas (Fig. 1). Se utilizó un porcentaje de desviación poblacional máximo  $d_s = 15\%$  de acuerdo con

lo estipulado por el IFE. Por último, se consideró una población estatal de 2,487,367 habitantes, y una población nacional de 97,483,412.

Figura 1. Unidades geográficas del Estado de México.



Fuente: Dirección de cartografía electoral. IFE.

## 5.1 Experimentos computacionales

Para determinar la eficiencia del algoritmo propuesto RS-RT se definió un conjunto  $L$  de factores de ponderación de tal forma que  $\alpha_1 = \{0.9, 0.8, \dots, 0.2\}$ , mientras que  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ . El valor  $\alpha_1 = 0.1$  no es reportado ya que los planes de zonificación encontrados por los algoritmos presentan zonas con una desviación poblacional mayor al 15% permitido, lo cual los convierte en soluciones inaceptables. Asimismo, para evitar que las pruebas se vieran afectadas por variabilidad de las soluciones finales, obtenidas dependiendo de los números pseudoaleatorios generados durante el desempeño del algoritmo, inherente a todo método heurístico se realizaron 10 corridas de RS y RS-RT para cada factor de ponderación.

En la Tabla 2 se presentan los valores máximo, mínimo, promedio y desviación estándar, considerando la ecuación 3.3, obtenidos por el algoritmo híbrido en cada una de sus etapas para cada factor de ponderación. En todos los casos se observa que el valor promedio mejora después de aplicar la técnica RT.

Tabla 2. Resultados obtenidos por RS y RS-RT, usando  $E=500$ .

Factor $\alpha_i$	RS ( $\alpha = 0.99, E = 500$ )				RS-RT			
	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. Estd.	Máximo	Mínimo	Promedio	Desv. Estd.
0.9	94.45	89.82	91.91	1.86	87.00	81.35	84.76	1.96
0.8	90.78	84.97	87.81	1.86	85.24	79.26	82.03	1.82
0.7	85.96	81.00	83.96	1.56	82.48	78.19	80.06	1.76
0.6	85.87	80.45	82.87	1.60	80.76	77.28	78.94	1.15
0.5	83.81	78.24	80.91	1.75	79.96	76.94	78.27	1.12
0.4	84.75	79.26	80.63	1.85	81.41	76.88	78.58	1.37
0.3	81.75	78.87	80.06	0.934	78.86	75.29	77.29	1.14
0.2	82.82	78.56	80.78	1.68	82.82	75.96	78.72	2.25

Como se mencionó anteriormente, SA fue capaz de producir soluciones de muy buena calidad al utilizar los parámetros  $\alpha = 0.99$  y  $E = 1500$ , sin necesidad de emplear RT. Por este motivo se decidió realizar 10 corridas para cada factor de ponderación, y comparar los resultados con el híbrido propuesto. En la Tabla 3 se presentan los valores máximo, mínimo, promedio y desviación estándar obtenidos por RS con estos parámetros y se comparan con los resultados producidos por RS-RT, nuevamente los valores reportados son considerando la ecuación 3.3. En este caso no se modificaron los parámetros del algoritmo híbrido RS-RT, por lo cual se reportan los mismos valores que en la Tabla 2.

Se aprecian que las soluciones generadas por RS-RT son de mejor calidad, lo cual muestra las ventajas al combinar de forma adecuada dos técnicas heurísticas.

Tabla 3. Resultados obtenidos por RS y RS-RT, usando  $E=1,500$ .

Factor $\alpha_i$	RS ( $\alpha = 0.99, E = 1500$ )				RS-RT			
	Máx.	Mín.	Promedio	Desv. Estd.	Máx.	Mín.	Promedio	Desv. Estd.
0.9	95.50	87.62	90.56	2.02	87.00	81.35	84.76	1.96
0.8	88.77	85.68	86.98	1.20	85.24	79.26	82.03	1.82
0.7	84.29	80.93	82.67	1.22	82.48	78.19	80.06	1.76
0.6	84.64	77.15	80.54	2.53	80.76	77.28	78.94	1.15
0.5	82.16	77.00	79.99	1.59	79.96	76.94	78.27	1.12
0.4	81.22	77.46	79.68	1.07	81.41	76.88	78.58	1.37
0.3	81.93	77.14	79.13	1.65	78.86	75.29	77.29	1.14
0.2	82.02	78.26	79.55	0.99	82.82	75.96	78.72	2.25

Es importante mencionar que el tiempo de cómputo requerido por RS-RT fue en promedio de 16 minutos para cada corrida, mientras que SA, con  $\alpha = 0.99$  y  $E = 1500$ , sólo requirió de 4 minutos por ejecución. Sin embargo, se considera que el tiempo requerido es aceptable si se toma en cuenta que una distritación debe realizarse con meses de anticipación al proceso electoral.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se propone un algoritmo híbrido RS-RT para el diseño de zonas electorales, que combina las técnicas heurísticas RS y RT. Para poder evaluar la eficiencia del algoritmo propuesto se implementó en el Estado de México utilizando la información disponible hasta el 2006, año en que se diseñó la distritación electoral vigente en el país. Para evitar que la variabilidad de las soluciones finales afectara las conclusiones, se realizaron 10 corridas para diferentes factores de ponderación. Se observó que los resultados obtenidos por el algoritmo híbrido son de mejor calidad que los obtenidos cuando sólo se aplica RS, aún cuando RS fue ejecutado con parámetros que le permitían mejorar sus resultados. De esta forma se obtuvo un método que hereda las características de SA, por lo que las soluciones finales no dependen de las soluciones con las que se inicia el proceso de búsqueda, lo cual se traduce en el desarrollo de un proceso imparcial, pero capaz de producir resultados de mejor calidad. Lamentablemente, en este momento no se cuentan con las herramientas necesarias para determinar la influencia de mejores planes de zo-

nificación en la distribución adecuada de los recursos públicos y programas sociales, y establecer objetivos o restricciones que ayuden a promover este tipo de equidad se encuentra más allá de los objetivos de este trabajo, pero se considera que las soluciones obtenidas por el algoritmo propuesto seguirán superando a los resultados obtenidos por recocido simulado tradicional aunque la complejidad del problema sea mayor.

## Bibliografía

- Consejo General del IFE CG-104-2004. Disponible en:  
<http://www.ife.org.mx/documentos/TRANSP/docs/consejo-general/acuerdos/2004/15JUL04/150704ap10.pdf>
- D'Amico S.; Wang S.; Batta R.; Rump C. (2002). "A Simulated Annealing Approach to Police District Design", *Computers & Operations Research* 29, pp. 667-684.
- DesJardins, M.; Bulka, B.; Carr, R.; Jordan E.; Rheingans, P. (2006). "Heuristic Search and Information Visualization Methods for School Redistricting", *AI Magazine* 28 (3), pp 59-72.
- Glover F.; Laguna M.; Martí R. (2000). "Fundamentals of Scatter Search and Path Relinking". *Control and Cybernetics* 29 (3), pp. 653-684.
- Gilbert K. C.; Holmes D. D.; Rosenthal R. E. (1985). "A Multiobjective Discrete Optimization Model for Land Allocation", *Management Science* 31(12), pp. 1509-1522.
- Gutiérrez A. M. A., Rincón G. E. A. (2009), "Redistricting by Square Cells", *Lecture Notes on Artificial Intelligence* 5845, pp. 669-679.
- Instituto Federal Electoral (2004) "Gaceta electoral", 18, pp. 119-134.
- Kirkpatrick S.; Gellat C.D.; Vecchi M.P. (1983). "Optimization by Simulated Annealing", *Science* 220, pp. 671-680.
- López T. L. (2006); "Redistribución electoral en México: logros pasados y retos futuros, Investigaciones Geográficas", *Boletín del Instituto de Geografía, UNAM*, 61, 99-113.
- Proyecto de Protección de los Programas Sociales Federales (2006). Diagnóstico sobre la vulnerabilidad político electoral de los programas sociales federales. Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo.
- Shirabe T. (2005). "A Model of Contiguity for Spatial Unit Allocation", *Geographical Analysis* 37, pp. 2-16.

- Shortt N. K.; Moore A.; Coombes M.; Wymer C. (2005). "Defining Regions for Locality Health Care Planning: A Multidimensional Approach", *Social Science & Medicine* 60, pp. 2715–2727.
- Tavares-Pereira F. Rui J. Mousseau V. Roy B. (2007). "Multiple Criteria Districting Problems: The Public Transportation Network Pricing System of the Paris Region", *Ann. Oper. Res.* 154, pp. 69–92.



# Decisiones óptimas de consumo y portafolio con una restricción probabilista sobre la riqueza final: difusiones con saltos y horizonte finito

---

Francisco Venegas-Martínez\*

Abigail Rodríguez-Nava\*\*

Ambrosio Ortiz-Ramírez\*\*\*

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2012

Fecha de aprobación: 7 de diciembre de 2012

---

\* Instituto Politécnico Nacional,  
Escuela Superior de Economía.  
fvenegas1111@yahoo.com.mx

\*\* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco,  
Departamento de Producción Económica.  
arnava@correo.xoc.uam.mx

\*\*\* Instituto Politécnico Nacional,  
Escuela Superior de Economía.  
a7ortiz@yahoo.com.mx

## Resumen

La presente investigación desarrolla un modelo para una economía estocástica con mercados incompletos, la cual está poblada por agentes racionales adversos al riesgo. El modelo es útil para analizar el proceso de toma de decisiones, en un ambiente de incertidumbre, de un consumidor-inversionista que desea integrar un portafolio en un horizonte de planeación finito, sujeto a dos restricciones: una de tipo presupuestal que considera saltos de Poisson en la dinámica del precio de un activo riesgoso y otra probabilista sobre la riqueza final. Asimismo, el trabajo determina la regla de consumo óptimo y las proporciones óptimas de la riqueza que el individuo debe asignar a cada uno de los activos disponibles en la economía.

Clasificación JEL: C02, D11, D91 y D81.

**Palabras clave:** Modelos estocásticos, comportamiento del consumidor, decisiones intertemporales, y riesgo de mercado.

**Optimal Consumption and Portfolio Decisions with a Probabilistic Restriction over Final Wealth: Diffusion-jump Process within a Finite Horizon.**

## Abstract

*This paper is aimed at developing a stochastic model for an economy with incomplete markets, which is populated by rational and risk-averse agents. The model is useful to analyze the process of decision making in an uncertain environment, of a consumer-investor who wishes to integrate a portfolio within in a finite planning horizon, subject to two constraints: a budget constraint that considers Poisson type jumps in the price dynamics of a risky asset, and a probabilistic constraint on final wealth. This research also determines the optimal consumption rule and the optimal proportions of wealth the individual must assign to each of the available assets in the economy.*

*JEL Classification: C02, D11, D91, and D81.*

**Keywords:** *Stochastic modeling, consumer behavior, intertemporal choice, and market risk.*

## 1. Introducción

Una de las características notables en la dinámica de los mercados accionarios es que éstos, ocasionalmente presentan saltos bruscos e inesperados, ya sea hacia arriba o hacia abajo, en los precios de los títulos y, por ende, en los índices bursátiles que conforman. De hecho, cualquier inversionista espera estar en un auge de magnitud excepcional y no estar en una caída abrupta. Esta investigación reconoce explícitamente en el proceso de toma de decisiones de consumo y portafolio de un consumidor-inversionista racional la existencia de saltos en los precios de los activos (títulos de capital) y una restricción probabilista sobre el nivel de la riqueza final.

En vista de los saltos observados en los índices bursátiles a finales de 2008 y a principios de 2009 en los mercados financieros de casi todo el mundo, y su secuela, que desencadenó una burbuja especulativa, es imprescindible modelar el comportamiento de los precios de los activos utilizando procesos estocásticos con saltos, así como incorporar en el proceso de toma de decisiones una restricción probabilista sobre la riqueza final de los agentes. Existe una extensa literatura sobre el modelado de saltos en los precios de los activos; véanse, por ejemplo: Cox y Ross (1976), Merton (1976), Ball y Torous (1985), Page y Sanders (1986), Cao (2001), Chandrasekhar Reddy Gukhal (2004) y Venegas-Martínez (2001), (2006a) y (2008b), entre otros.

Aunque el problema de asignar proporciones de la riqueza a la tenencia de los diferentes activos disponibles en los mercados financieros ha sido estudiado ampliamente, poca atención se ha puesto en este problema cuando ocurren saltos repentinos y extremos en los precios de los activos y cuando los inversionistas desean al final de su horizonte de planeación (finito en este caso) que su riqueza exceda un determinado umbral (nivel de subsistencia) con cierta probabilidad; usualmente alta.

Esta investigación extiende el trabajo de Gavira-Durón y Venegas-Martínez (2011) y Venegas-Martínez y López-Herrera (2013) al desarrollar un modelo estocástico que analiza el proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista racional que desea integrar un portafolio en un ambiente de riesgo de mercado, en un horizonte de planeación finito, sujeto a dos res-

tricciones: una de tipo presupuestal que incorpora saltos de Poisson en los precios de los activos y otra probabilista sobre la riqueza final. La inclusión de saltos en el comportamiento de los activos riesgosos y la consideración de un horizonte de planeación finito, introducen en el modelado del proceso de toma de decisiones de agentes racionales algunas dificultades: una de carácter técnico en la determinación de las condiciones necesarias del problema de optimización correspondiente y otras sobre la unicidad de las soluciones por la presencia de mercados incompletos (ya que los saltos no son activos que negocien).

Esta investigación está organizada de la siguiente forma: en la sección 2 se establecen las características de la economía bajo estudio; en la sección 3 se plantea el problema de optimización del agente racional; en la sección 4 se resuelve el problema de optimización del agente bajo el supuesto de utilidad logarítmica; en la sección 5 se presentan las conclusiones. Por último, dos apéndices presentan los detalles de diversos resultados analíticos del presente trabajo.

## 2. Características de la economía bajo estudio

Considere una economía que produce y consume un solo bien (el numerario) y que está poblada por un número finito de individuos idénticos en gustos y dotaciones que toman decisiones en un horizonte finito,  $[0, T]$ . La incertidumbre está representada por dos espacios de probabilidad: el primero, asociado con difusiones (pequeños movimientos que se observan todos los días en los precios de los activos), equipado con una filtración,  $(\Omega, F_W, (F_{tW})_{t \in [0, T]}, P_W)$  sobre el cual está definido un movimiento browniano estándar,  $dW_t \sim N(0, dt)$ , de tal forma que

$$E[dW_t] = 0$$

y

$$\text{Var}[dW_t] = dt,$$

y en el segundo espacio de probabilidad, asociado con los saltos,  $(\Omega, F_N, (F_{tN})_{t \in [0, T]}, P_N)$ , en el que está definido un proceso de Poisson  $dN_t$  con parámetro de intensidad  $\phi$ , de tal forma que:

$$P_N \{\text{un salto de longitud uno durante } dt\} = P_N \{dN_t = 1\} = \phi dt$$

y

$$P_N \{\text{más de un salto durante } dt\} = P_N \{dN_t > 1\} = o(dt),$$

así

$$P_N \{\text{ningún salto durante } dt\} = 1 - \phi dt + o(dt),$$

donde  $o(dt)$  es tal que  $o(dt)/dt \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ . Observe que el tiempo medio esperado entre dos saltos está dado por  $1/\phi$ . Se puede también mostrar fácilmente que  $E_N[dN_t] = \text{Var}_N[dN_t] = \phi dt$ .

Todos los procesos estocásticos que se introduzcan en el análisis subsecuente se suponen adaptados a la filtración producto,  $F_t \equiv F_{tW} \times F_{tN}$ , en el espacio de probabilidad generado por  $P \equiv P_W \otimes P_N$ . Asimismo, se supone que todas las igualdades que involucran procesos estocásticos se cumplen  $P$ -casi seguramente (es decir, con probabilidad uno). En todo lo que sigue, se supone que todos los procesos están bien definidos, sin establecer explícitamente las condiciones de regularidad que así lo garanticen.

Las posibilidades de inversión, en los mercados financieros de la economía en cuestión, están representadas por un bono de vencimiento instantáneo (el cual en automático es cupón cero), libre de riesgo de incumplimiento (emitido por agentes que siempre cumplen las obligaciones de pago adquiridas), y que paga una tasa de interés (anualizada) constante a todos los plazos y  $r$  continuamente capitalizable. La tasa  $r$  es real, es decir, los bonos pagan intereses en términos de bienes. Se supone que el precio del bono,  $B_t$ , y el precio del activo riesgoso,  $S_t$ , tienen las siguientes dinámicas:

$$dB_t = B_t r dt, \quad (1)$$

y

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t), \quad (2)$$

donde  $\mu$  es el rendimiento medio anualizado de la acción,  $\sigma$  es la desviación estándar de los rendimientos anualizados alrededor de  $\mu$  y  $\nu$  es el tamaño medio esperado del salto. Se supone además que los procesos  $dW_t$  y  $dN_t$  son independientes entre sí, lo cual implica que  $\text{Cov}(dW_t, dN_t) = 0$ .

La dinámica de los mercados completos (bajo condiciones de no arbitraje) implica la existencia de una densidad (no necesariamente única) de precios de estado,  $\xi_t$ , que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\xi_t = -\xi_t [rdt + \lambda dW_t - \nu\lambda'(dN_t - \phi dt)], \quad (3)$$

donde

$$\lambda \equiv \sigma^{-1}(\mu + \delta - r) \text{ y } \lambda' \equiv \sigma^{-2}(\mu + \delta - r)$$

son, respectivamente, el premio al riesgo y el premio al riesgo estandarizado de mercado. La razón de restar la media al proceso de Poisson en (3) es asegurar que (ecuación)  $X_t$

$$X_t = dN_t - E_N[dN_t],$$

esto asegura que  $X_t$  tenga media cero, en efecto  $X_t = dN_t - E_N[dN_t] = \phi dt - \phi dt = 0$ , y en consecuencia  $X_t$  es una martingala. El proceso  $\xi_t$  puede ser interpretado como el precio Arrow-Debreu por unidad de probabilidad  $P$  de una unidad de un bien de consumo en el tiempo  $t$ . En este caso la solución de (3) está dada por:

$$\xi_T = \xi_t \exp \left\{ \left( -r - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \int_t^T ds - \lambda \int_t^T dW_s + \ln(1 + \nu) \int_t^T dN_s + \nu \phi \int_t^T ds \right\}$$

Se puede mostrar que  $\xi_t$  es una martingala (ver Apéndice 1).

Cada agente en la economía está dotado, al tiempo  $t = 0$ , con una riqueza inicial  $a_0$  y elige en cada instante la proporción de su riqueza,  $\theta_t$ , que destinará a la tenencia de la acción; la proporción complementaria  $1 - \theta_t$  será

asignada al bono. En este caso, la dinámica del proceso de riqueza real del agente  $a_t$  está dada por (ver apéndice 2)

$$\begin{aligned} \frac{B_0 a_t}{B_t} = & a_0 + B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u (\mu - r) du + B_0 \sigma \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u dW_u \\ & + B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u dN_u - B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} c_u du, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4)$$

esta restricción, en términos de la densidad de precios de estado, es equivalente a

$$E \left[ \int_0^T \xi_t c_t dt + \xi_T a_T \mid F_t \right] = \xi_0 a_0. \quad (5)$$

Se supone que el consumidor representativo obtiene satisfacción por el consumo del bien numerario. La utilidad esperada del tipo Von Neumann-Morgenstern,  $V_t$ , al tiempo  $t$  de un individuo representativo, adverso al riesgo y competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma:

$$V_t \equiv E \left[ \int_t^T u(c_s) e^{-\rho s} ds \mid F_t \right], \quad (6)$$

donde  $c_t$  es el consumo al tiempo  $t$  y  $\rho$  es la tasa subjetiva de descuento. Así pues, el consumidor toma decisiones de consumo y portafolio de tal manera que se maximice su satisfacción total descontada. Es decir, el consumidor desea determinar la regla de consumo y las proporciones de su riqueza que va a asignar, en cada instante, a los diferentes activos disponibles en la economía de tal forma que su satisfacción por el bien de consumo sea la máxima posible. Se supone que la función de utilidad  $u(\cdot)$  es dos veces continuamente diferenciable, estrictamente creciente, estrictamente cóncava y con  $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$ . Se impone la restricción de que

la riqueza del individuo representativo exceda un determinado umbral,  $\underline{a}$ , de tal manera que

$$P(a_T \geq \underline{a}) = 1 - \beta. \quad (7)$$

### 3. Solución del problema del agente racional

A continuación se plantea el problema de un consumidor representativo que maximiza utilidad, expresada en (6), por el bien de consumo en donde en lugar de utilizar la restricción (4) se utiliza su equivalente en función de la densidad de precios de estado  $\xi_t$ , dada en (5). Asimismo se impondrá la condición (7) de que su riqueza exceda un determinado umbral,  $\underline{a}$ , con cierta probabilidad. Así pues, considere el problema:

$$\text{Maximizar}_{c_t} \quad E \left[ \int_0^T u(c_t) e^{-\rho t} dt \mid F_0 \right]$$

$$\text{sujeto a.} \quad E \left[ \int_0^T \xi_t c_t dt + \xi_T a_T \mid F_0 \right] = a_0, \quad a_0 \text{ dado,}$$

$$P\{a_T \geq \underline{a} \mid F_0\} = 1 - \beta.$$

Observe que la última restricción se puede reescribir como:

$$P\{a_T \geq \underline{a} \mid F_0\} = E \left[ \xi_T (a_T - \underline{a}) 1_{\{a_T \geq \underline{a}\}} \mid F_0 \right] = 1 - \beta.$$

En este caso se ha empleado el hecho de que  $\xi_0 = 1$ . El Lagrangeano,  $\mathcal{L}$ , del problema de optimización está dado por:

$$\mathcal{L} \equiv u(c_t) e^{-\rho t} - \eta \xi_t c_t + \gamma [u(a_T) e^{-\rho T} - u(\underline{a}) e^{-\rho T} - \psi^{(\beta)} \xi_T (a_T - \underline{a})] 1_{\{a_T \geq \underline{a}\}}$$



donde  $\eta$  y  $\gamma$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones y  $\psi^{(\beta)}$  es tal que se asegure que  $\mathbb{P}(a_T \geq \underline{a}) = 1 - \beta$ . Las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = u'(c_t)e^{-\rho t} - \eta \xi_t,$$

lo cual conduce a

$$c_t = I(\eta \xi_t e^{\rho t}) \quad (8)$$

donde  $I \equiv (u')^{-1}$ , y

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_T} = u'(a_T) - \psi^{(\beta)} \xi_T,$$

lo cual implica que

$$a_T = I(\eta \psi^{(\beta)} \xi_T e^{\rho T}). \quad (9)$$

#### 4. Problema de optimización con utilidad logarítmica

A continuación se utiliza la siguiente forma funcional específica para la función de utilidad:

$$u(c_t) = \ln(c_t)$$

En este caso, la condición necesaria de optimalidad expresada en (8) conduce a:

$$c_t = \frac{e^{-\rho t}}{\eta \xi_t} \quad (10)$$

para toda  $t \in [0, T]$  y

$$a_T = \frac{e^{-\rho T}}{\eta \psi^{(\beta)} \xi_T}. \quad (11)$$

En este caso, al sustituir (10) en (5), se sigue que

$$\begin{aligned} a_t &= \xi_t^{-1} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \xi_t c_t dt + \xi_T a_T \mid F_t \right] = \xi_t^{-1} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \eta^{-1} e^{-\rho t} dt + [\psi^{(\beta)} \eta]^{-1} e^{-\rho T} \mid F_0 \right] \\ &= \xi_t^{-1} \left[ \eta^{-1} (1 - e^{-\rho T}) + [\psi^{(\beta)} \eta]^{-1} e^{-\rho T} \right] = A^{-1} (\eta \xi_t)^{-1} = A^{-1} c_t \end{aligned}$$

donde  $A^{-1} = (1 - e^{-\rho T}) + (e^{-\rho T} / \psi^{(\beta)})$ . Es decir,

$$c_t = A a_t.$$

En otras palabras, el consumo es proporcional a la riqueza, esto es, el consumidor siempre consume la proporción  $A$  de su riqueza real  $a_t$ , independientemente del nivel de esta última. Observe también que el multiplicador  $\psi^{(\beta)}$  es tal que:

$$\mathbb{P}\{a_T \geq \underline{a} \mid F_0\} = \mathbb{P}\{\underline{\xi} \geq \xi_T \mid F_0\} = 1 - \beta$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\{a_T \leq \underline{a} \mid F_0\} = \mathbb{P}\{\xi_T \geq \underline{\xi} \mid F_0\} = \beta,$$

donde

$$\underline{\xi} = \frac{e^{-\rho T}}{\psi^{(\beta)} \eta \underline{a}}.$$

Así pues  $\psi^{(\beta)}$  satisface

$$\psi^{(\beta)} = \frac{e^{-\rho T}}{\underline{\xi} \eta \underline{a}}$$

donde  $\underline{\xi}$  es tal que  $P\{\xi_T \geq \underline{\xi} | F_0\} = \alpha$ . Observe también que a partir de (10)

$$c_t \xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{\eta}.$$

Por lo tanto,

$$a_t \xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{A \eta}$$

Es decir,

$$d \ln(a_t) + d \ln(\xi_t) = -\rho dt$$

Después de tomar esperanzas condicionales en la expresión anterior, se sigue que

$$E[d \ln(a_t) | F_t] = -[E[d \ln(\xi_t) | F_t] + \rho dt].$$

Ahora bien, en virtud de que  $d\xi_t = -\xi_t [r dt + \lambda dW_t - \nu \lambda' (dN_t - \phi dt)]$ , se obtiene:

$$E[d \ln(\xi_t) | F_t] = \left[ -(r + \lambda \phi) + \frac{1}{2} \lambda^2 + r \lambda \phi \ln(\nu \lambda \xi_t) \right] dt.$$

Si se iguala  $E[d \ln(a_t) | F_t]$  con  $-[E[d \ln(\xi_t) | F_t] + \rho dt]$ , se tiene que

$$r + \theta_i(\mu + \delta - r) - A - \frac{1}{2}\theta_i^2\sigma^2 + \phi \ln(a_i\theta_i v) = -(r + \lambda\phi) + \frac{1}{2}\lambda^2 + r\lambda\phi \ln(v\lambda\xi_i)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de  $\theta_i$ , se sigue que

$$(\mu + \delta - r) - \theta_i \sigma^2 + \frac{\phi}{\theta_i} = 0,$$

lo cual implica que las componentes de difusión tienen que ser iguales, es decir,

$$\theta_i \sigma dW_i = \lambda dW_i$$

esto implica que

$$\theta_i \equiv \theta = \frac{\mu + \delta - r}{\sigma^2}. \quad (12)$$

Por otro lado, al igualar las partes deterministas se tiene que

$$r + \theta_i(\mu + \delta - r) - \rho - A = r - v\lambda'\phi \quad (13)$$

y si se sustituye (12) en (13), se obtiene el valor de  $A$  de manera endógena, el cual satisface

$$A \equiv \left( \frac{\mu + \delta - r}{\sigma} \right)^2 + \lambda' v \phi - \rho.$$

Asimismo, las partes de saltos conducen a la identidad

$$\theta v = v\lambda',$$

es decir,

$$\theta = \lambda' = \sigma^{-2}(\mu + \delta - r),$$

Este resultado coincide plenamente con (12) y determina la proporción de la riqueza real del individuo que éste asigna a la tenencia del activo riesgoso en un horizonte de planeación finito, sujeto a una restricción presupuestal y otra probabilista sobre el excedente de su riqueza final con respecto de un umbral predeterminado.

## 5. Conclusiones

En el proceso de integración de portafolios tradicional se consideran bonos libres de riesgo de incumplimiento (emitidos por un gobierno) y activos riesgosos, títulos de capital (emitidos por corporativos que cotizan en bolsas), en los modelos teóricos utilizados en este proceso no contemplan las recurrentes alzas y bajas abruptas que se han observado en los mercados financieros en los últimos años. De esta manera son escasos los trabajos que propongan modelos de decisión, en el marco de maximización de utilidad en un horizonte finito, que consideren portafolios que incluyan difusiones con saltos en la dinámica estocástica de los precios de los activos además de incorporar restricciones probabilistas sobre el nivel de riqueza final del agente. El presente trabajo ha desarrollado un modelo estocástico que describe el proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista racional para integrar un portafolio en un ambiente de riesgo de mercado con saltos bruscos e inesperados en los precios de los activos estando sujeto a dos restricciones: una de tipo presupuestal y otra probabilista sobre la riqueza final.

La agenda de investigación futura, sin duda, debe tomar en cuenta la inclusión de productos derivados (en particular opciones) en la restricción presupuestal a fin de que el agente pueda cubrirse contra el riesgo de mercado. Por ejemplo, si el agente adquiere una opción de venta de tal manera que si el precio del activo riesgoso cae por debajo de un precio de ejercicio (establecido con anterioridad), entonces el agente puede vender el activo a dicho precio de ejercicio, reduciendo su margen de pérdida.

## Bibliografía

- Ball, C. A., and W. N. Torous (1985). "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing". *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, pp.155-173.
- Cao, M. (2001). "Systematic Jump Risks in a Small Open Economy: Simultaneous Equilibrium Valuation of Options on the Market Portfolio and the Exchange Rate". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 20, No. 2, pp. 191-218.
- Chandrasekhar Reddy Gukhal, C. R. (2004). "The Compound Option Approach to American Options on Jump-Diffusions". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 10, pp. 2055-2074.
- Cox, J. C., and S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 145-166.
- Gavira-Durón, N. y F. Venegas-Martínez (2011). "Decisiones óptimas de consumo y portafolio: un enfoque de precios de estado de Arrow-Debreu". *Revista Contaduría y Administración*, No. 234, pp. 151-172.
- Merton, R. C., (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.
- Naik, V. y Lee, M., (1990). "General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns". *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 493-521.
- Page, F. H., and A. B. Sanders (1986). "A General Derivation of the Jump Process Option Pricing Formula". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 21, No. 4, pp. 437-446.
- Venegas-Martínez, F. (2001a). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.
- \_\_\_\_\_. (2001b). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- \_\_\_\_\_. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.
- \_\_\_\_\_. (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk". *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.
- \_\_\_\_\_. (2013, en proceso de publicación). "Decisiones de consumo y portafolio con un nivel de confianza sobre la riqueza final: horizonte de planeación finito *EconoQuantum*", *Revista de Economía y Negocios*.

## Apéndice 1

Observe que

$$\begin{aligned}
 E_P \left[ \frac{\xi_T}{\xi_t} \mid F_t \right] &= e^{-r(T-t)} E_W \left[ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^2 (T-t) - \lambda (W_T - W_t) \right\} \right] \times \\
 &\quad E_N \left[ \exp \left\{ \ln(1 + \nu \lambda') (N_T - N_t) - \nu \lambda' \phi(T-t) \right\} \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 (T-t) + \frac{1}{2} \lambda^2 (T-t)} e^{\phi(T-t)(e^{\ln(1+\nu\lambda')} - 1)} e^{-\nu \lambda' \phi(T-t)} \\
 &= e^{-r(T-t)} e^{\nu \lambda' \phi(T-t)} e^{-\nu \lambda' \phi(T-t)} = e^{-r(T-t)}.
 \end{aligned}$$

Lo que establece que  $\xi_t$ , definida en (3), es una martingala.

## Apéndice 2

Note que

$$da_t = a_t [r + \theta_t (\mu + \delta - r)] dt + a_t \theta_t \sigma dW_t + a_t \theta_t \nu dN_t - c_t dt$$

implica

$$B_0 \int_0^t \frac{da_u}{B_u} = B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u [r + \theta_u (\mu - r)] du + B_0 \sigma \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u dW_u +$$

$$B_0 \nu \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u dN_u - B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} c_u du.$$

Pero

$$B_0 \int_0^t \frac{da_u}{B_u} = \frac{B_0 a_t}{B_t} - a_0 + B_0 r \int_0^t \frac{a_u}{B_u} du.$$

Al sustituir la última ecuación en la penúltima, se obtiene

$$\frac{B_0 a_t}{B_t} = a_0 + B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u (\mu - r) du + B_0 \sigma \int_0^t \frac{1}{B_u} a_u \theta_u dW_u - B_0 \int_0^t \frac{1}{B_u} c_u du,$$

lo cual proporciona la ecuación (4).



# Estimation of Alpha in Defined Benefit Pension Funds with a t-Student O-GARCH Matrix. A test in Pensiones Civiles del Estado de Michoacán\*

---

Oscar V. De la Torre Torres\*\*

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2012

Fecha de aceptación: 14 de diciembre de 2012

“El autor agradece al CONACyT por apoyar la publicación del presente artículo, al amparo de la convocatoria de Apoyos Complementarios para la Consolidación Institucional de Grupos de Investigación (Retención, 2012)”.

---

\* The author wants to thank Rosa Hilda Posadas and Antonio Delgado Garcia former General Managers of Pensiones Civiles del Estado de Michoacán and Gustavo Arias, the actual Finance director, for the support and interest given to the present paper. Any Grammar, Semantics or style error remain as the author’s responsibility.

\*\* Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas.  
UMSNH: [contact@oscardelatorretorres.com](mailto:contact@oscardelatorretorres.com).

## Estimación de alfa en fondos con beneficios definidos mediante una matriz t-Student O-GARCH. Una evaluación de las pensiones civiles del Estado de Michoacán.

### Resumen

En este artículo se evalúa la utilidad de un proceso de administración activa de portafolios empleando una matriz de covarianzas GARCH ortogonal (O-GARCH) con función de verosimilitud t-Student, al aplicarlo en la reserva técnica de fondos de pensiones de beneficio definido de la Dirección de Pensiones Civiles del Estado de Michoacán. Esto tanto para lograr el objetivo de 7.5% anual de rendimiento establecido en su estudio actuarial como para definir *alpha* respecto al *benchmark* establecido en su política de inversión. Para demostrar esto, se corrieron tres simulaciones de eventos discretos en donde se ejecutó, en una de ellas, un proceso de administración pasiva de portafolios con una disciplina de rebalanceo de tipo *posición objetivo* y en las otras dos una activa de tipo *rebalanceo por rangos*. Con los resultados observados se resalta la preferencia de utilizar, en este fondo de pensiones, la administración activa de portafolios con la matriz O-GARCH.

Clasificación JEL: C12, G11, G12, G17

**Palabras Clave:** Selección de portafolios, Valuación de activos, Pronósticos y simulaciones financieras, Pruebas de hipótesis.

### Abstract

*This paper presents an assesment of an active portfolio management process with a t-Student orthogonal GARCH (O-GARCH) covariance matrix, in order to achieve a 7.5% actuarial target return and to formulate alpha in defined benefit pension funds for Dirección de Pensiones Civiles del Estado de Michoacán. To test this, three discrete event simulations were performed using, in the first one, a passive portfolio management process with a target position rebalancing discipline and, in the other two, an active portfolio management with range portfolio rebalancing where an equally weighted covariance and a t-Student O-GARCH covariance matrix are used. The results suggest that the O-GARCH matrix is suitable for active portfolio management in this sort of pension funds.*

*JEL classification code: C12, G11, G12, G17*

**Key words:** *Portfolio Selection, Asset Pricing, Financial forecasting and Simulation, Hypothesis testing.*

## 1. Introduction

There are several pension fund schemes in Mexico. Among them, the defined benefit and the defined contribution are the most common. In the former scheme, a percentage of the salary earned over the last year as an employee at the time of retirement. In the latter, the employee retires only with the amount of money saved during the accumulation period,<sup>1</sup> leaving the pension fund with no other responsibility than to deposit into and, in some cases, to manage the account. A detailed review of all the pension fund schemes used in Mexico and their main financial reform proposals are outside the scope of this paper. For the interested reader, a very straightforward review is given by the Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas (2006).

In each state of Mexico, there are several pension funds that manage the retirement savings for their public servants. Among these, a defined benefit pension fund, which is owned by the public servants of Michoacán and known as “Dirección de Pensiones Civiles del Estado de Michoacán (DPCEM)”, is the focus of this paper.

The DPCEM covers all the public servants in the State of Michoacán (about 15,000). Among the most observable legal liabilities in the pension plan is that all the beneficiaries retire with the 100% of its salary paid during the last year in service. In order to fund this, the Government and the employees save an amount equal to the 4% of the employees’ monthly wages, considering an actuarial yearly wage increase of 6.5%. By assuming a life expectancy of 81 years for Mexico and due to the fact that an employee in this pension fund can retire after 30 years of service (an average 45-50 years of age at retirement) and a 4% theoretical inflation rate, it is necessary for DPCEM either to achieve a nominal 7.5% yearly return in the investment policy of its Technical Reserve (TR)<sup>2</sup> or to change the monthly contributions from 4% to 11% of the employees’ salaries.

---

<sup>1</sup> Before retirement.

<sup>2</sup> A trust created to support the pension plan when the outflows are higher than the inflows (about 2032 with the current scheme).

This paper focuses on the first proposal and its aim is to show the usefulness of an active portfolio investment process that uses a t-Student log likelihood O-GARCH covariance matrix in the TR of DPCEM. The main focus is to test an active portfolio management process with the historical asset allocation in the six different markets shown in the investment policy statement (IPS) presented in Appendix one. A benchmark that incorporates this asset allocation and its limits is also given in this appendix along with the target investment positions ( $\mathbf{w}_{\text{bmk}}$ ) related to it.

Why an active portfolio management process? With the advent of the Markowitz (1952) model, the portfolio management practice started a notable development with a “buy and hold” rationale that led to a portfolio management practice known nowadays as “*Passive portfolio management*”. Considering the Markowitz-Tobin-Sharpe-Lintner (MTSL) model (Markowitz, 1987, p. 5) and the assumption of an aggregate optimality due to homogeneous expectations among investors (Samuelson, 1965) —that leads to the concept of market equilibrium (Sharpe, 1963; Lintner, 1965)—, the stock market indexes are used not only as a statistical measure of the aggregate investor behavior but also as a proxy of the market portfolio, a key concept in the main asset pricing models.

Due to several economical, financial and behavioral circumstances, the aggregate optimality (as a proxy definition of *equilibrium* in financial markets) is not observable in the short term, suggesting the preference of *active portfolio management*. This situation has been improved with the development of time series analysis through the seminal works of Box, Jenkins and Reinsel (2008) and later with the proposals of Engle (1982) and Bollerslev (1986) for the short term volatility forecast. With these quantitative developments, the Portfolio Management Theory had a positive and practical advance which allowed to explore and exploit short term price differentials, leading to support the active management practice. Several research papers have been published in order to test active portfolio management against the passive approach in the mutual fund industry with cases such as Daniel *et al.* (1997) and Ennis (2005) who found, through the mutual fund comparison against a stock index after management fees, that the active management practice couldn't lead to a better performance than a passive one such as *index tracking* or *enhanced index tracking*.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Index tracking means that the manager must replicate the behavior or (if possible) the conformation of a market benchmark or index. This practice could lead to

In some cases (such as *index tracking*), the passive management strategy can be executed by following a *Target Positions* (TP) portfolio rebalancing discipline, where the portfolio position is rebalanced to that of the benchmark's ( $\mathbf{w}_{\text{bmk}}$ ). In contrast, the active management practice, which seeks to outperform a benchmark or a market index, could be executed with two rebalancing disciplines (among the most used) known as *Percentage Portfolio Rebalancing* and *Range Portfolio Rebalancing* (RPR). The former is a rebalancing method executed at periodically specified time intervals where the portfolio manager adjusts the investment positions to a range of  $\pm x\%$  from a target optimal position  $\mathbf{w}_{\text{bmk}}$ ; the latter consists of discretionary investment proportions that must follow upper and lower asset or market type limits, stated in an IPS like the one presented in Appendix one.

From several strategies widely used as rebalancing disciplines in the portfolio management practice and from those previously mentioned, DPCEM decided to test an RPR discipline using the IPS shown in Appendix one as a legal and institutional mandate. This situation allows the fund manager to invest in a relatively discretionary manner in different types of assets allowed in the IPS.

In order to assess whether a passive Target Position (TP) or an active Range Portfolio Rebalancing (RPR) portfolio management strategy is more suitable to the fund, three discrete event simulations were performed. One was performed for the passive portfolio management case with a TP regime and two for the RPR active portfolio management that use two different covariance matrixes: 1) a constant or equally weighted covariance and 2) an O-GARCH with a t-Student log likelihood one.

Once established the aim of the present paper (to test the use of active portfolio management with O-GARCH matrixes in the Technical Reserve of DPCEM and similar ones) the results will be presented as follows: In a second section, a brief explanation of the Markowitz-Tobin-Sharpe-Lintner model is given along with a review of the O-GARCH covariance matrix model. Following this, the assumptions and general structure of the algorithm used in the three discrete event simulations are presented along with the results obtained. After this, the document ends with the concluding remarks.

---

some limitations such as the impact of financial costs (trade fees, market timing, tax impact or liquidity) therefore the enhanced index tracking discipline tries to achieve higher gross returns than the replicated benchmark in order to compensate the impact of financial costs.

## 2. The optimizer used in the active portfolio management process.

### 2.1 The Markowitz-Tobin-Sharpe-Lintner portfolio selection model.

The Markowitz-Tobin-Sharpe-Lintner or MTSL model is a theoretical proposal that incorporates a risk-free asset in the asset allocation, a drawback that the original Markowitz (1952) *standard* model couldn't solve. In the MTSL, the optimal portfolio selection is now conceived as a linear combination of a risk-free asset  $rf$  and a risky portfolio given by  $\mathbf{w}^*$ . This selection is performed in a two-step problem that starts with the solution of the next optimization problem given an  $n \times 1$  investment proportion vector  $\mathbf{w}$ , an  $n \times n$  covariance matrix  $\mathbf{C}$ , an  $n \times 1$  expected return vector  $\mathbf{r} = [E(\mathbf{r}_1) \cdots E(\mathbf{r}_n)]'$ , an  $l \times n$  asset or market grouping matrix  $\mathbf{D}$  and an  $l \times 1$  minimum or maximum limits vector  $\mathbf{d}$  established in the IPS:<sup>4</sup>

$$\mathbf{w}^* = \arg \max_{\mathbf{w}} [\mathbf{w}' \cdot \mathbf{r} - (rf \cdot \mathbf{1})'] \cdot [\mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}]^{-1/2} \quad (1)$$

Subject to:

$$\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{1} = 1$$

$$\mathbf{w}^* \geq 0$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{w}^* = \mathbf{d}$$

The second step is given by the proportion in the total investment budget  $\omega$  in  $\mathbf{w}^*$  and the proportion  $(1 - \omega)$  in  $rf$  determined, following Levy and Markowitz (1979), with a quadratic utility function in the next expression:<sup>5</sup>

$$\omega = \arg \max_{\omega} [\omega \cdot (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{r})] - \omega^2 \cdot 0.5 \cdot A [\mathbf{w}' \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}] \quad (2)$$

<sup>4</sup> Such as the one described in appendix one.

<sup>5</sup> In the case of Pensiones Civiles del Estado de Michoacán, a value of  $A = 4$ , related to a "neutral risk aversion investor" is set.

Once  $\omega$  is determined, the final optimal portfolio is a linear combination of  $rf$  and the *risky asset*  $\mathbf{w}^*$  :

$$\mathbf{w}^{**} = \omega \cdot \mathbf{w}^* + (1 - \omega) \cdot rf \quad (3)$$

The portfolio selection model in (3) is the so-called Markowitz-Tobin-Sharpe-Lintner model or MTSL (Markowitz, 1987, p. 5) and is one of the most widely used in the portfolio management industry (as is the case in this paper) because it incorporates a risk-free asset in the asset allocation step. Although the rationale of the MTSL is a very straightforward one, its main drawback is observed in the calculation of  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{C}$  due to the presence of estimation error; its computational inefficiency and also the presence of volatility and correlation clustering. As a potential solution for the computational efficiency problem, Sharpe (1963) proposed an alternative calculation of such parameters that led to the proposal of the CAPM model (Sharpe, 1966).<sup>6</sup> This valuation model is the theoretical foundation of several heuristics and alternative portfolio selection models that have, as a central concept, the covariance of assets now proxied through the covariance with a common factor or set of factors. Although the CAPM model is a straightforward rationale for asset pricing, and setting aside the theoretical critiques made against it, the presence of volatility and correlation clustering and the potential presence of estimation error are some of its main drawbacks as is the general case in the models of the Modern Portfolio Theory. Therefore, a pure mean-variance framework was adopted that led to choose the MTSL as the optimizer for the asset allocation step in the portfolio management process.

Best and Grauer (1991) suggested that the optimal portfolio selection is sensitive to the sample magnitude observed in  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{C}$ , the aim of this paper is to assess the performance of an active portfolio management process using the t-Student Orthogonal GARCH (O-GARCH) matrix, in defined benefit pension funds such as DPCEM. Given this, it is necessary to review this multivariate volatility model and the need for a t-Student log likelihood function.

---

<sup>6</sup> This is an almost parallel approach to Lintner's (1965) proposal.

## 2.2 The Orthogonal GARCH model (O-GARCH) for the calculation of the covariance matrix.

With the earliest proposals of Engle (1982) and Bollerslev (1986), the calculation of short term volatilities that incorporate the volatility clustering effect, allowed the financial practice to forecast risk levels more appropriately. The univariate  $GARCH(p, q)$  model follows an expression shown by:

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \cdot \sigma_{t-i}^2 \quad (4)$$

As a starting point for this paper, the  $GARCH(p, q)$  model departs from the assumption that the returns vector  $\mathbf{r}_i$  of the  $i^{\text{th}}$  asset is either<sup>7</sup>  $\mathbf{r}_i | I \sim N(\bar{\mathbf{r}}_i, \sigma_{\mathbf{r}_i}^2)$  or  $\mathbf{r}_i | I \sim t(\bar{\mathbf{r}}_i, \sigma_{\mathbf{r}_i}^2, gl)$ , leading to the more general assumption of multivariate elliptic probability functions in the set of returns time series  $\mathbf{X} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i]$ . With this, the log likelihood problem can be solved through two functions. If  $\mathbf{r}_i | I \sim N(\bar{\mathbf{r}}_i, \sigma_{\mathbf{r}_i}^2)$  the vector of parameters  $\theta_i = [\kappa, [\beta_i], [\gamma_i]]$  leads to<sup>8</sup>  $\sigma_t^2 = \sigma_t^2(\theta_i)$  in (4) and the optimal set of parameters  $\theta^*$  is shown with the solution of the next optimization problem:

$$\arg \max_{\sigma_t^2(\theta_i)} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \log(\sigma_t^2) + \left( \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_t} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} \kappa, \beta_i, \gamma_i &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j &\leq 1 \end{aligned}$$

When  $\mathbf{r}_i | I \sim t(\bar{\mathbf{r}}_i, \sigma_{\mathbf{r}_i}^2, gl)$ , the solution is shown by the next log likelihood function maximization<sup>9</sup>:

<sup>7</sup> Given the information set  $I_{t-1}$  that makes  $r_t$  conditional.

<sup>8</sup>  $\varepsilon_i = r_i - (\bar{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{1}) = [\varepsilon_{i,t}]$

<sup>9</sup> Please see Bollerslev (1986) and Lambert & Laurent (2001).



$$\arg \max_{\sigma_t^2(\theta_t)} = - \sum_{t=1}^T \left\{ \log(\sigma_t^2) + \left( \frac{gl+1}{2} \right) \cdot \log \left( \frac{1}{gl-2} \cdot \left( \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right) \right\} +$$

$$T \cdot \log \left[ \frac{\Gamma \left( \frac{gl+1}{2} \right)}{\left( (gl-2) \cdot \pi \right)^{1/2} \cdot \Gamma \left( \frac{gl}{2} \right)} \right] \quad (6)$$

Subject to:

$$\kappa, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j \leq 1$$

$$gl \geq 2$$

The expression in (6) will be used by the DPCEM based on the theoretical assumption that the t-Student matrix is more suitable to model sample probabilities and more appropriate to measure the characteristic fat tails of the financial data used.

For the multivariate case, one of the first proposals is the one made by Bollerslev (1990), which starts with the use of a constant correlation matrix **H** and a diagonal matrix **S** defined by univariate GARCH variances:

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{S}_t \quad (7)$$

Despite its low computational efficiency, this model does not take into account the correlation clustering effect. A model that solves this situation is the BEKK GARCH of Engle and Kroner (1993), but, in some cases, this represents a hard computational task given the log likelihood maximization problem inherent to it. As a solution for this situation, a model known as *Orthogo-*

nal GARCH, *O-GARCH*( $p, q$ ) or simply O-GARCH is proposed in Alexander and Chibumba (1996), Alexander (2002), and a generalized version in Van der Weide (2002). This model departs from the spectral decomposition of an equally weighted<sup>10</sup> covariance matrix  $\mathbf{C}_c$  that leads to the definition of a  $n \times n$  matrix of eigenvectors  $\mathbf{E}$  and a  $n \times n$  spectrum  $\mathbf{\Lambda}$ :

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E} \quad (8)$$

The computational efficiency of the O-GARCH model is based on the variance (eigenvalues) of the principal components ( $\mathbf{P} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i]$ ) in the diagonal elements of  $\mathbf{\Lambda}$ . Once this matrix is defined, a selection of principal components, eigenvalues and eigenvectors, is made by sorting the eigenvectors and principal components from the highest ( $h$ ) to the lowest eigenvalue. Following this, the next selection criteria is applied, given a total variance explanation level  $\nu$  (percentage) previously fixed:

$$\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}^*, \mathbf{e}_i \in \mathbf{E}^*, \mathbf{p}_i \in \mathbf{P}^* \Leftrightarrow \sum_{h=1}^i \frac{\lambda_h}{\text{trace}(\mathbf{\Lambda})} \leq \nu \quad (9)$$

With the definition of  $\mathbf{\Lambda}^*$ , the calculation of a univariate GARCH volatility is made in each main component in  $\mathbf{P}^*$  by using the log likelihood function given in (6). This will lead to the definition of a GARCH spectrum  $\mathbf{\Omega}$  and to the next matrix composition of the expected O-GARCH covariance matrix:

$$\mathbf{C}_{\text{OGARCH}} \approx \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{E}^{*'} \quad (10)$$

Why use this specific multivariate GARCH model? There are two reasons: a) computational efficiency, b) its practical usefulness in financial risk modeling to calculate high dimension matrixes with low latency data.

<sup>10</sup> An equally weighted covariance matrix is given by:

$$\mathbf{C} = \left[ \left( \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' \right] \cdot \mathbf{X} \right)' \cdot \left( \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' \right] \cdot \mathbf{X} \right) \right] \cdot \frac{1}{n}, \mathbf{X} = [r_1, \dots, r_i]$$

The computational efficiency of the O-GARCH model can be compared against the Engle and Kroner (1993) BEKK-GARCH model and a previous and more general proposal of Bollerslev (1986) known as Vech-GARCH. In the latter case, the number of parameters to be estimated is given by the  $n$  number of factors with the following expression:  $\left[ n(n+1)(n(n+1)+1) \right] / 2$ . In the BEKK-GARCH it is necessary to calculate  $n(n+5)/2$  parameters and in the O-GARCH model, as noted in (9) and (10), it is necessary to calculate at most  $\pi \cdot p \cdot q$  parameters where  $\pi$  is the number of main components selected with (9),  $p$  the maximum ARCH lag term allowed in the univariate GARCH of each main component model and  $q$  the maximum GARCH lag term.

Several papers can be mentioned related to the practical usefulness of the O-GARCH, Alexander (2002) that presents the calculation of large covariance matrixes with different kinds of assets like currencies, UK gilt bonds term structure, English equities, and the oil futures term structure, noting that the limitation of quality and amount of data<sup>11</sup> and the “dimensionality course”<sup>12</sup> can be avoided thanks to the main components analysis inherent to this multivariate GARCH model.

Another practical use is reviewed by Bredin and Hyde (2004) who test several covariance models, such as the equally weighted<sup>13</sup>, the exponentially weighted; the O-GARCH and the O-EWMA,<sup>14</sup> in the Irish FX market previous to Ireland’s integration to EMU. Their results supported the O-GARCH model as the best one for capital reserve purposes and the O-EWMA for compliance.

Following Bredin and Hyde, Cifarelli and Paladino (2004, 2006) use the O-GARCH model to test the contagion of credit default events in the behavior of sovereign bond term structures in Latin America and Asia. They found, thanks to the O-GARCH model ability to capture the correlation and volatility clustering effect with the lack of data, that there is a weak integration in the Asian and Latin American sovereign bond markets in low volatility time periods, but this tends to disappear with the presence of contagion after specific market shocks such as the 2001 Argentinean default.

---

<sup>11</sup> A property observed in fixed income assets or futures term structures.

<sup>12</sup> I.e. that the number of assets could lead to a flatter log likelihood function.

<sup>13</sup> Please refer to note 10.

<sup>14</sup> Also proposed in Alexander (2002).

Also, Chen *et al* (2008) and Kearney and Muckley (2008) use this multivariate model to quantify either the Chinese stock market Value at Risk or the pegging effect (high and stable correlation and volatility) in the main Asian markets and currencies.

Therefore, because of its computational efficiency, O-GARCH model's ability to measure the correlation clustering effect even if the historical data is not latent,<sup>15</sup> and its several practical applications such as the usefulness to quantify a measure of financial markets integration, to identify possible currencies that could potentially be pegged, and to quantify large covariance matrixes of heterogeneous financial assets by avoiding the "dimensionality course", it is the most appropriate for measuring the volatility of a portfolio invested in the six financial markets stated in the IPS given in Appendix one. In fact, its usefulness is still researched nowadays in extensions such as the one made by Sharifi *et. al.* (2012) where M-estimators are tested to calculate more robust GARCH parameters with less stringent moment conditions.<sup>16</sup>

Now that the calculation of the MTSL model and the O-GARCH covariance matrix have been reviewed as parts of the optimizer used in the portfolio management process, the assumptions of the three discrete event simulations performed are presented, noting that a proof of the presence of volatility and correlation clustering in the six benchmarks of the investment universe is shown in Appendix three.

### 3. The discrete event simulations performed.

#### 3.1 Statistical parameters, theoretical assumptions and practical implications in each simulation.

Given a time frame from January 2<sup>nd</sup>, 2002, to December 31<sup>st</sup>, 2010, 470 weekly interval simulations are performed for each simulated portfolio, using each of the benchmarks presented in Appendix one as financial assets.<sup>17</sup>

These financial assets or benchmarks were valued at Mexican pesos (MXN) at a December 29<sup>th</sup>, 2000 base 100 value and incorporated currency impact. The length of each time series ( $\mathbf{r}_i$ ) is  $T = 52$  weeks and it is assumed

---

<sup>15</sup> I.e. the financial asset price does not change due to a lack of liquidity.

<sup>16</sup> At this point the out of sample and robust estimation scenario is set aside.

<sup>17</sup> Assuming that these values represent the behavior of zero tracking error Exchange Traded Funds (ETF's) invested in each benchmark.

that these represent the behavior of zero tracking error Exchange Traded Funds (ETF's) that replicate them.

A quantitative analysis algorithm that performed the entire portfolio selection process (analysis, rebalancing and mark to market valuation) was programmed in MATLAB and, among the most relevant ones, the following assumptions and parameters were considered:

- 1) The theoretical<sup>18</sup> starting value of the four simulated portfolios is 10,000,000.00 MXN, using the inflows and outflows presented in Appendix 2.
- 2) The financial data sources are Bloomberg™, Reuters™ and Infosec<sup>MR</sup>.
- 3) In order to incorporate the impact of financial costs, a 0.25% fee is assumed in each trade either in the ETF's or in the FX market (noting that an institutional investor such as DPCEM can get access to a lower transaction cost). This fee will be used in order to measure a higher impact in the final turnover results.
- 4) The risk-free asset  $rf$  used is the weekly secondary market curve rate of 28-day-maturity Mexican treasury certificates (CETES). This rate was published on 2012 by Banco de México.
- 5) Only an MXN bank account and two investment contracts (one in US dollars and another in MXN pesos) will be used. When a foreign asset position (USD valued) is sold, the amount is turned into Mexican pesos by selling USD using the current FX rate. When the opposite happens, the US dollar amount is funded from the Mexican bank account.
- 6) The expected values in the return vector  $\mathbf{r}$  are shown in the following expression:

$$\forall E(\mathbf{r}_i) \in \mathbf{r}, E(\mathbf{r}_i) = \bar{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^T r_i \cdot n^{-1} \quad (11)$$

In order to calculate the O-GARCH matrix with (10) using (6) as the log likelihood function, the algorithm selected the best  $GARCH(p, q)$  model for each

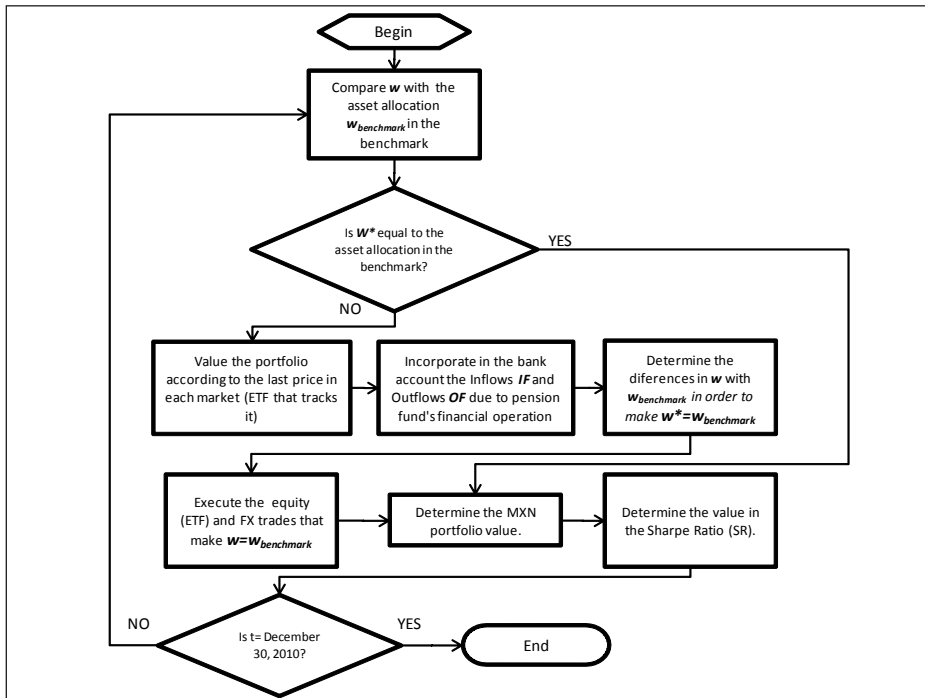
---

<sup>18</sup> The original value of the pension fund was modified to MXN\$ 10 million due to confidentiality issues.

main component by using different ARCH lag terms truncated at the value of five and different GARCH lag terms truncated at the value of two. The goodness of fit of the best GARCH model in each principal component is measured by the Bayesian information criterion of Schwarz (1978).

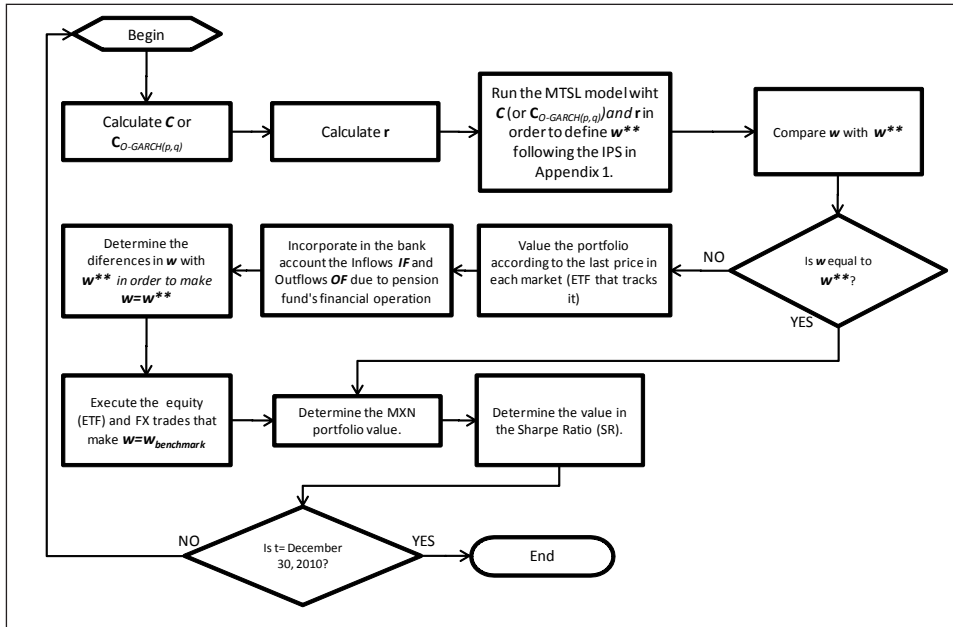
For the passive management (TP) portfolio simulation, the main assumption is that all the investment balance is allocated in the risky asset given by the benchmark asset allocation ( $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_{\text{bnk}}$ ) shown in Appendix one. In order to rebalance from the actual investment proportion, a 0.25% financial cost is also incorporated and the algorithm shown in Figure one is performed.<sup>19</sup> In order to execute the two discrete event simulations in the active portfolio management simulations, the algorithm of figure two was also used. Finally, with the results obtained, the three historical simulated portfolios were valued in a January 2<sup>nd</sup>, 2002, base 100.

Figure 1. Flowchart of the discrete event simulation performed in the passive portfolio management ("Target position").



<sup>19</sup> As noted, this is an index tracking passive portfolio management practice.

Figure 2. Flowchart of the discrete event simulation performed in the active portfolio management (“Range portfolio rebalancing”) using the three different covariance matrixes.



### 3.2. Results observed in simulations.

The historical value of the simulated portfolios and their accumulated turnover is presented in chart one and summarized in table one. It is shown that the three simulated portfolios and the benchmark had a better performance than a theoretical financial asset that paid the 7.5% target return (light area). As shown, the simulated portfolios using the O-GARCH covariance matrix lead to a superior turnover than the benchmark, the passively managed and the constant parameter covariance matrix portfolios.

In order to confirm this result and to follow the portfolio management performance evaluation practices, a quality chart of the difference between the observed weekly return of each simulated portfolio and the benchmarks is presented in Chart two. As noted, the O-GARCH portfolio showed the highest positive alpha against the benchmark, suggesting a better performance if an O-GARCH matrix is used in the active portfolio management.

Chart 1. Performance comparison of the four simulated portfolios.

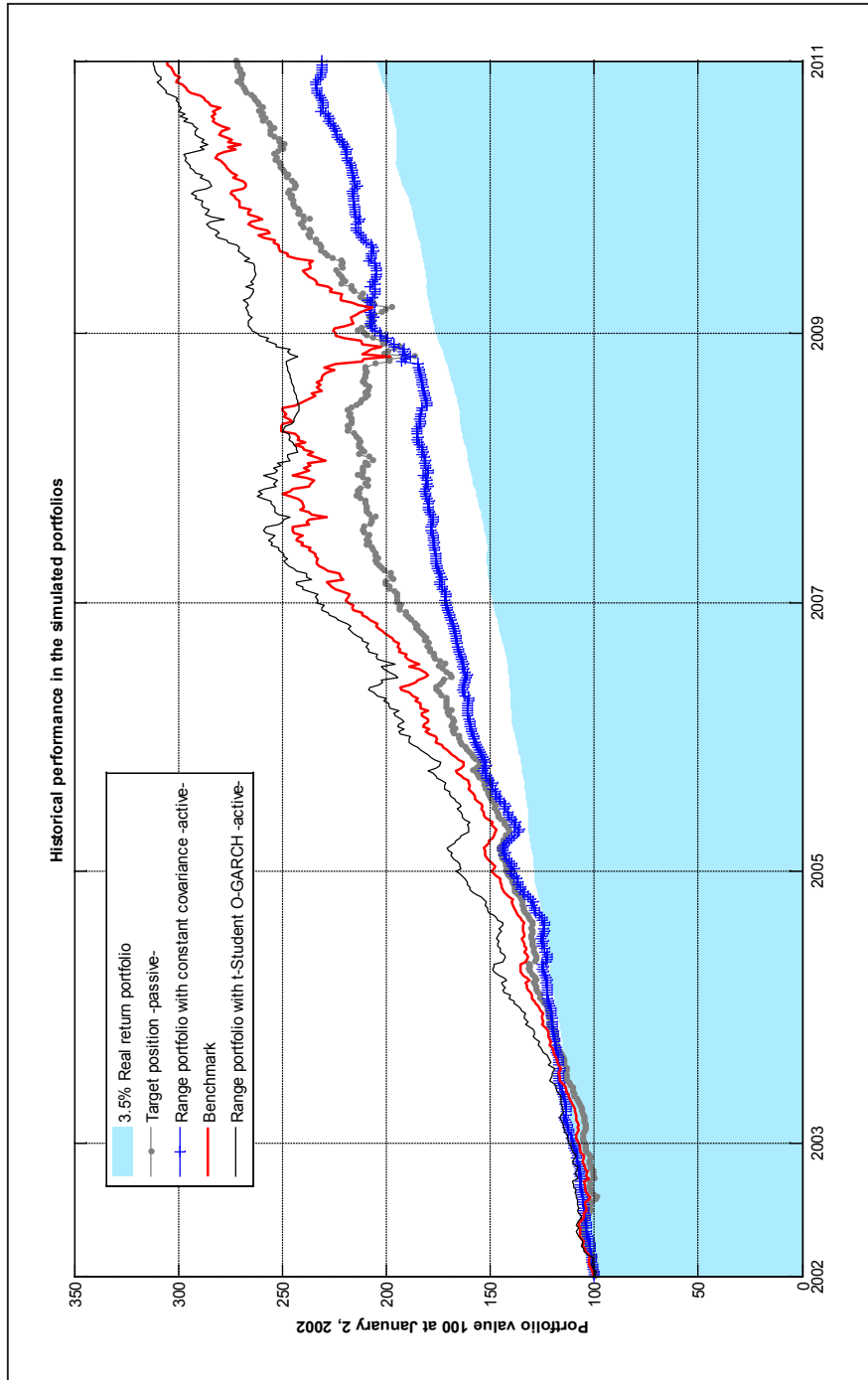




Table 1. Accumulated turnover in the four simulated portfolios.

Portfolio or benchmark	Accumulated turnover	Yearly effective return
7.5% actuarial target return	105.05%	11.67%
Benchmark	205.34%	22.82%
<i>Passive management: Target Position</i>	172.12%	19.12%
<i>Active management: constant covariance matrix.</i>	131.13%	14.57%
<i>Active management: Gaussian OGARCH covariance matrix</i>	210.14%	23.35%
<i>Active management: t-Student OGARCH</i>	212.22%	23.58%

A more detailed examination of the results obtained during the three simulations is presented in Chart three where the historical allocation between the risk-free asset  $rf$  and the risky portfolio  $\mathbf{w}^*$  can be observed. The reader should note that the portfolios simulated with an O-GARCH covariance matrix (specifically the t-Student one) were more sensitive in the risk-free asset investment proportion during the dates where the financial crisis was acute (e.g. the Lehman Brothers Chapter eleven filing in the September-October 2008 period). This is due to the fact that the volatility and correlation clustering effect<sup>20</sup> was measured more accurately in this period, leading to a higher concentration in the risk-free asset for longer time periods in comparison with the other two portfolios.

Another perspective of these results is shown with a complete historical asset allocation in Chart four. In the case of the O-GARCH covariance matrix portfolio, the optimizer manages more accurately the investment in riskier markets such as the Mexican equity (IPC index) or the foreign equities proxied with the MSCI Global Gross equity. This historical behavior is summarized in the box plots of chart five that shows the different investment levels in each asset type for each portfolio.

It should be noted that the passive portfolio and the active one that use the equally weighted covariance matrix were highly concentrated in the Mexican government bond and international treasury bond markets (especially the former), suggesting that even though the IPS presented in Appendix one

<sup>20</sup> In order to confirm that the level of volatility clustering was high in certain time periods like the aforementioned one, please refer to the historical ARCH test results shown in Appendix two.

Chart 2. Quality chart of the four simulated portfolios against the benchmark proposed in table one.

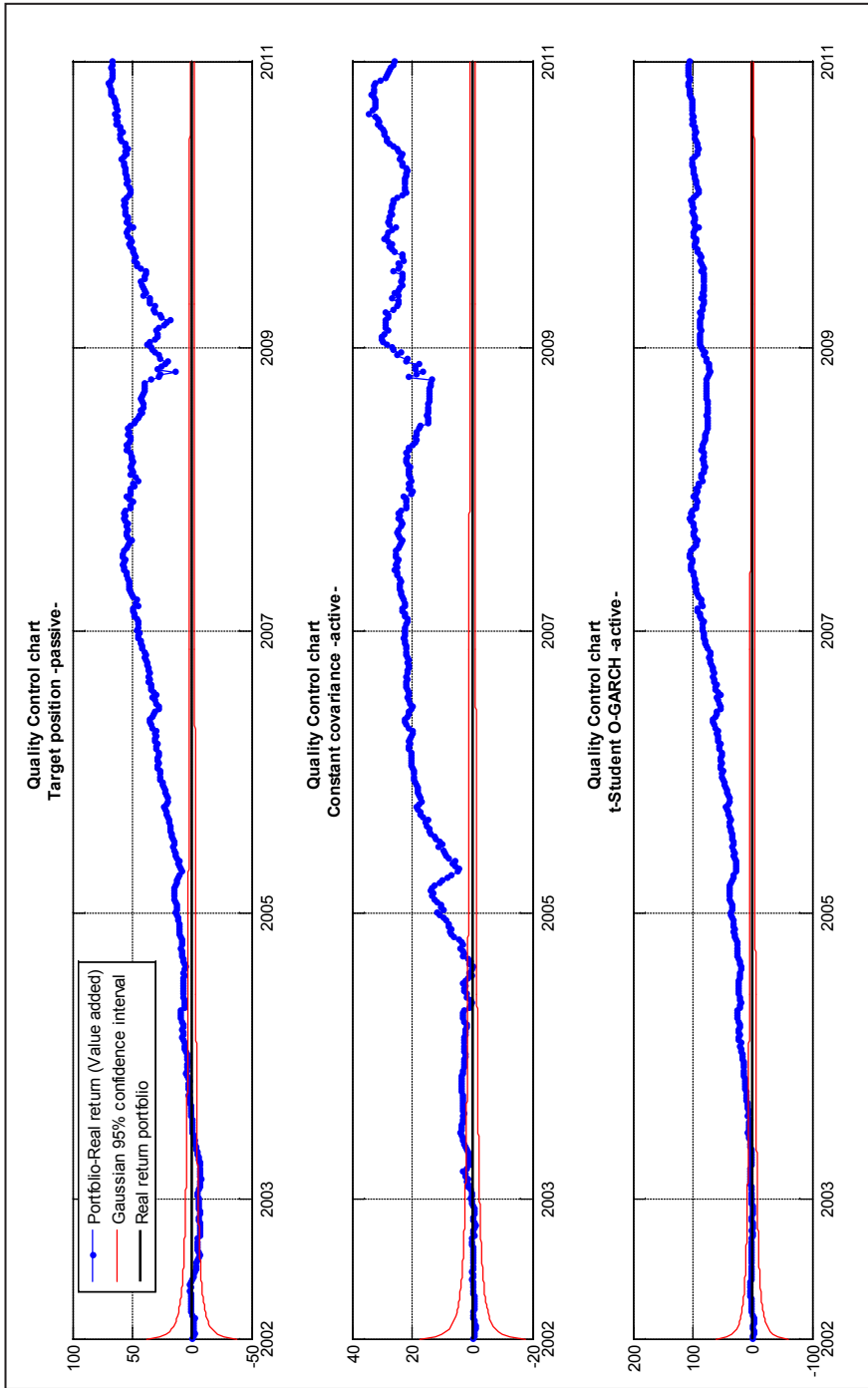


Chart 3. Historical investment proportions (risk-free asset v.s. entirely risky diversified portfolio) in each simulated portfolio.

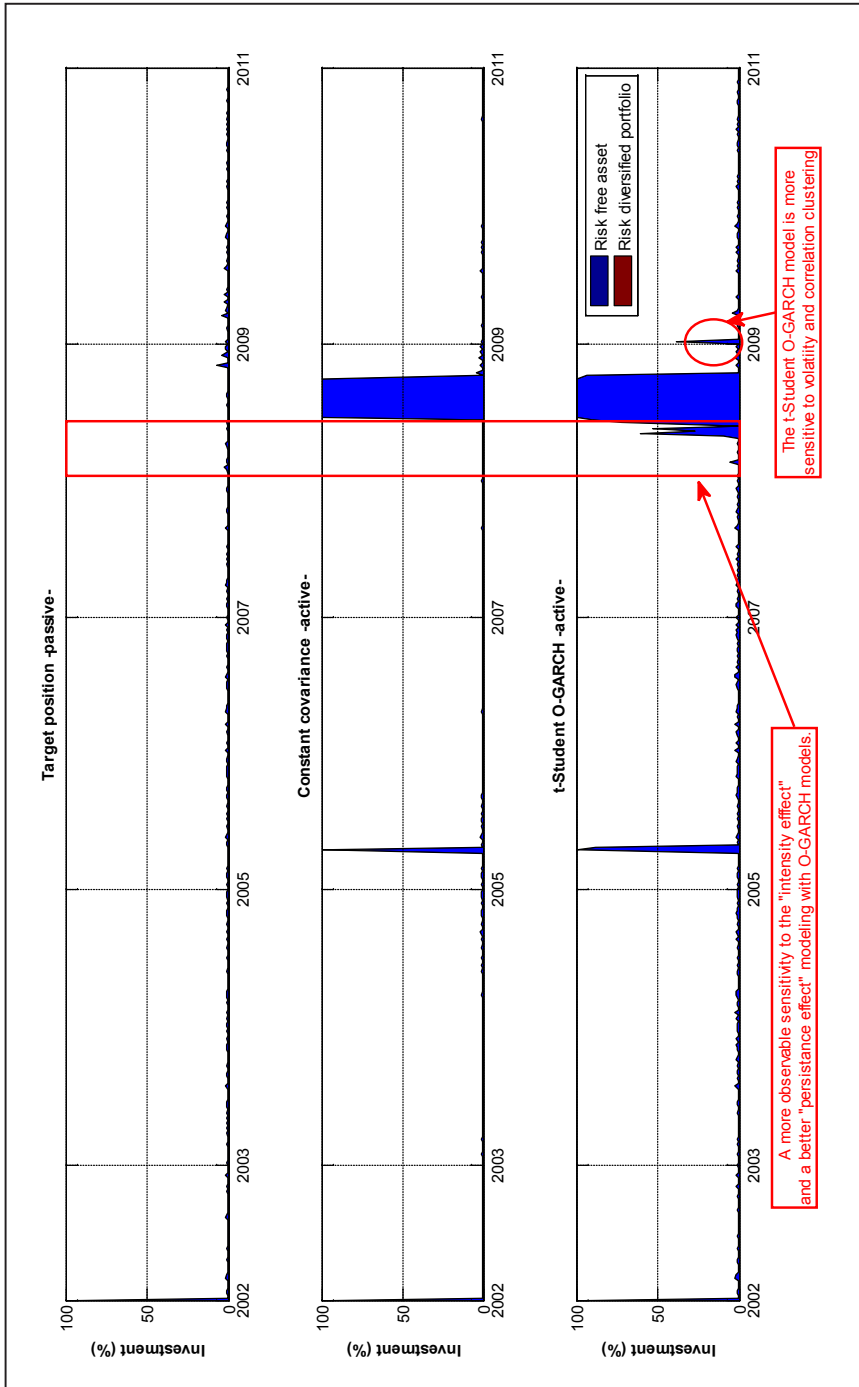


Chart 4: Historical investment proportions in the entirely risky portfolio.

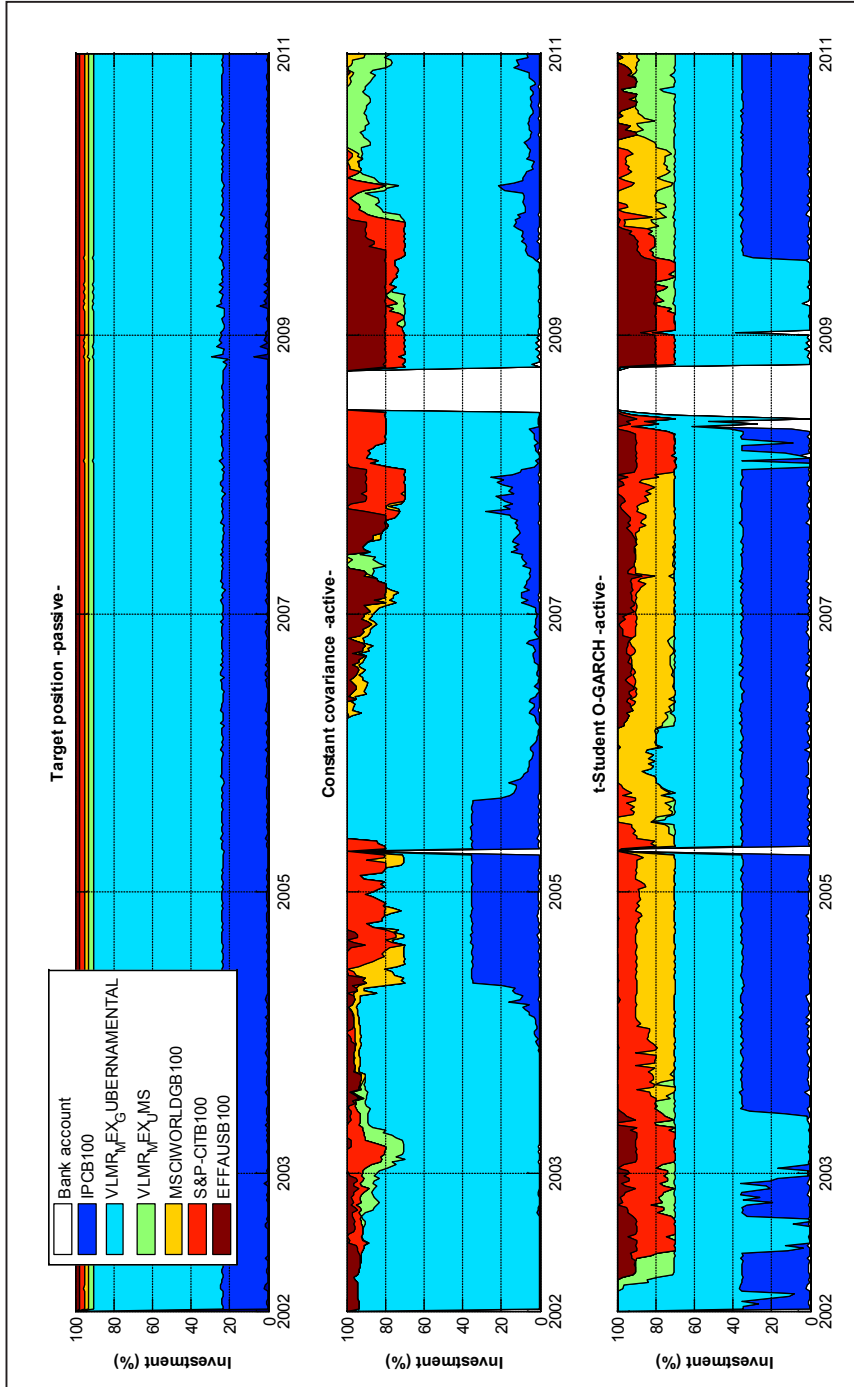
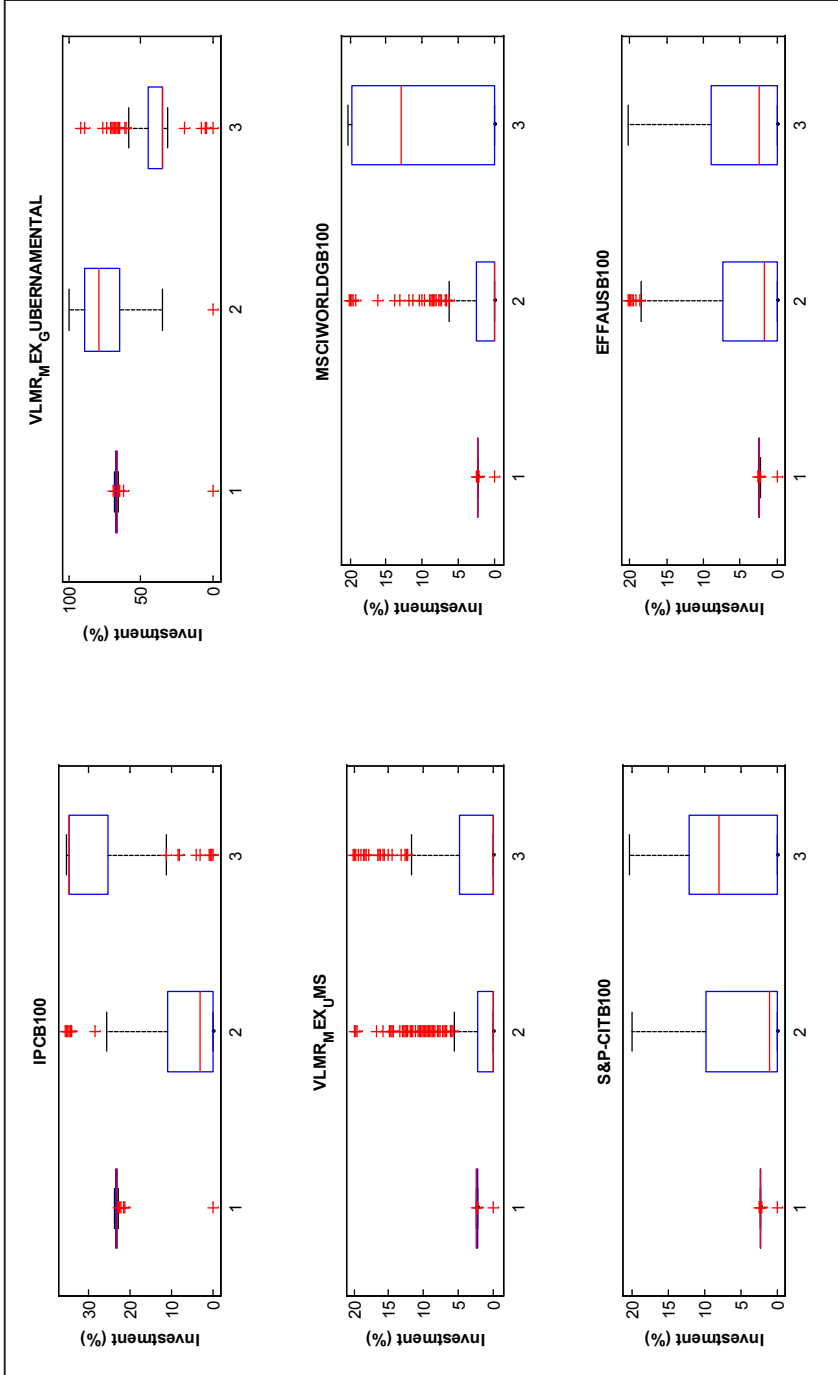


Chart 5. Box plot: Historical investment proportions by market in each portfolio.



Portfolio code (box plot): 1= Target portfolio –passive-, 2= Constant covariance –active-, 3= t-Student O-GARCH covariance –active-

suggests the presence of *home bias* in the asset allocation, the O-GARCH matrix handles this drawback better thanks to an active and a proper management of risky assets during high volatility and correlation clustering periods.

With the results shown in charts four and five, two questions could be posed: Given the historical asset allocation resumed in chart five, does this higher active investment proportions in risky assets explain the better performance in the O-GARCH simulated portfolio? And, do the financial, political, and economic events have an impact on the behavior of the simulated portfolios, leading to a better performance with the use of a t-Student O-GARCH matrix? In order to answer the first question, Chart six presents the historical performance of the six markets in the IPS of Appendix one along with the historical accumulated value of the 7.5% annual target rate (light area).

As noted, the best performers were the Mexican equity, Mexican sovereign bonds, and Mexican treasury markets. If this historical performance is compared with the investment proportions of Chart four and Chart 5, it should be noted that the highest investment proportions in the O-GARCH models are in these three markets. When inspecting Chart four more closely, the performance of the portfolio analysis in the O-GARCH cases suggests a more sensitive asset allocation in the presence of volatility and correlation clustering, i.e. these two portfolios were better diversified during the most uncertain time periods in the financial markets.

The second question “Do the financial, political and economic events have an impact in the behavior of the simulated portfolios, leading to a better performance with the use of a t-Student O-GARCH matrix?” is answered in Chart seven where the historical behavior of the three simulated portfolios is compared with the financial and economic events shown in Chart six. The most notable period depicted in this chart is when the Lehman Brothers’ chapter 11 filing took place. During this time period, the volatility and correlation clustering effect was more observable.<sup>21</sup> For this reason and because of their statistical properties, the O-GARCH portfolio had a softer behavior than the benchmark and the equally weighted covariance matrix portfolio when the financial crisis was acute.

<sup>21</sup> It is also when the optimization problem given in (2) leads to the highest concentration in the risk free asset. Please refer to chart four in comparison with chart six to confirm this and to Appendix three for the proof of the presence of volatility clustering in those periods.

Chart 6. Historical performance of the financial markets used in the IPS of table one related to economic, political and financial events.

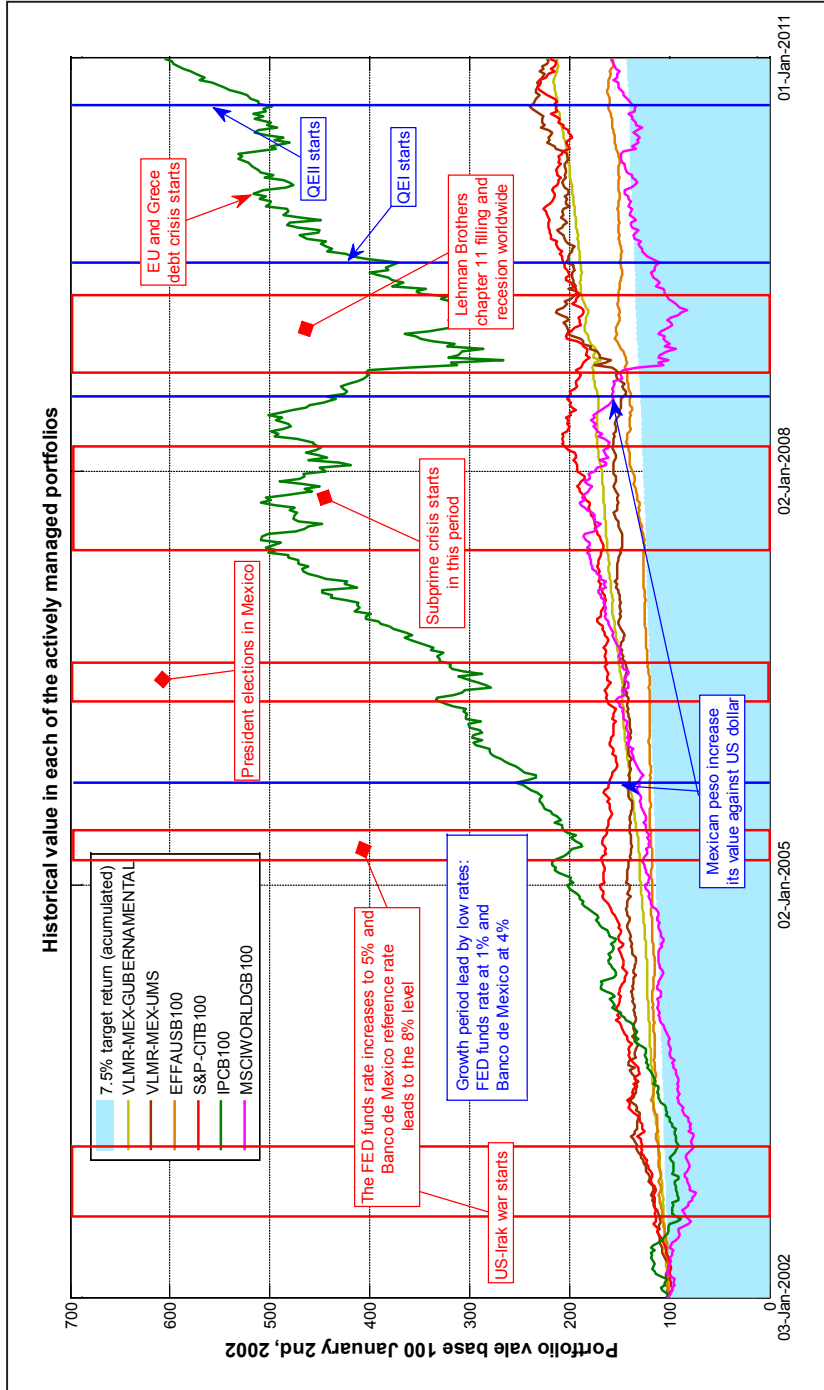


Chart 7. Historical performance of the simulated portfolios related to economic, political and financial events.

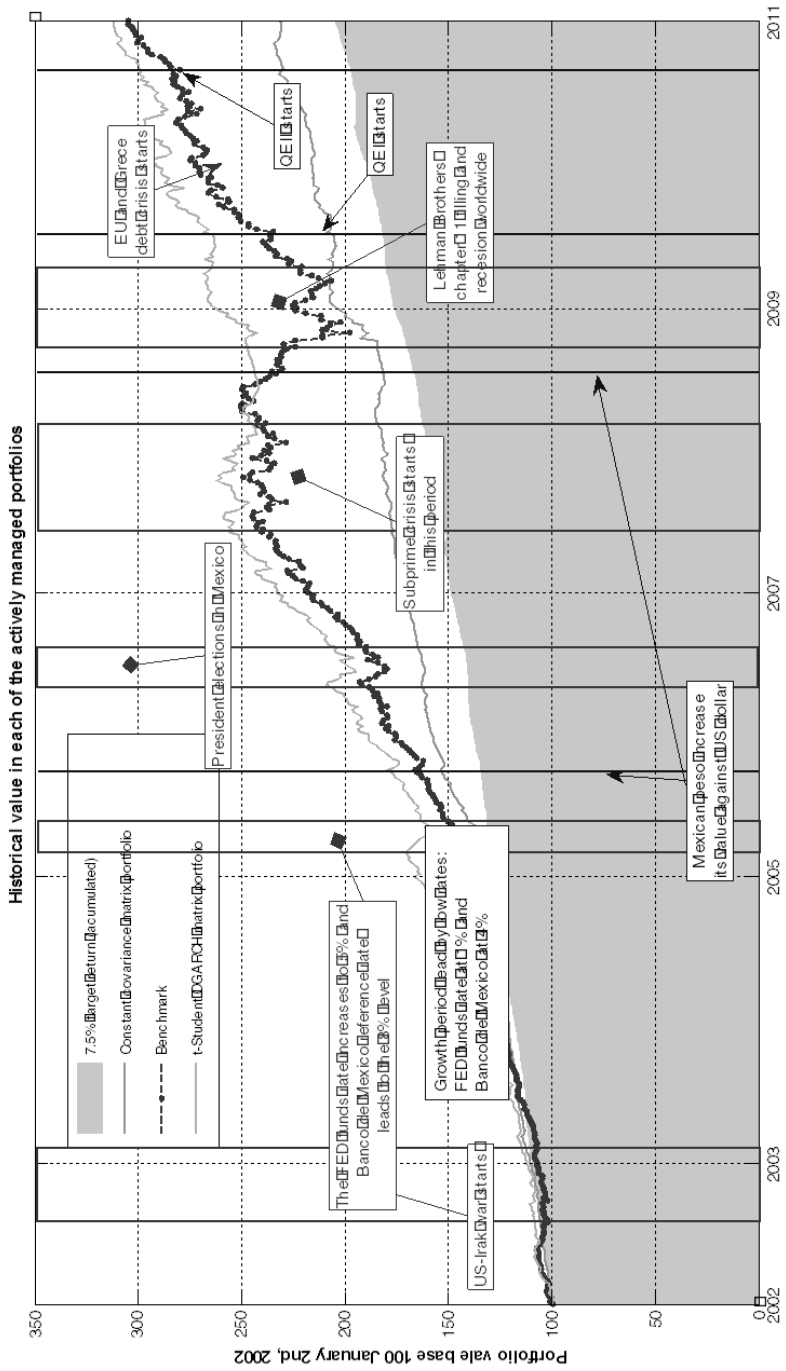




Table 3. ANOVA1: Test of the historical Sharpe ratios in the four simulated portfolios.

Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	43.6680667	3	14.5560222	1.84961698	13.61501%
Error	14393.7718	1829	7.86974947		
Total	14437.4399	1832			

Now that it has been shown that the portfolio management process using the t-Student O-GARCH matrix outperforms a 7.5% annual target return, it is necessary to know the behavior of the risk exposure and turnover relation (financial efficiency) observed, by using this active portfolio management process and covariance matrix to answer the following question: Do we have a higher financial efficiency if an active portfolio management process with a t-Student O-GARCH covariance matrix is used?

To answer this question, the efficiency of the portfolio management process is measured with the historical Sharpe ratio (1966) of each simulated portfolio. If there's either no difference or a lower level of Sharpe ratio (SR) observed in the value of the active O-GARCH portfolio against the other two cases, this portfolio management process is accepted as the best option.

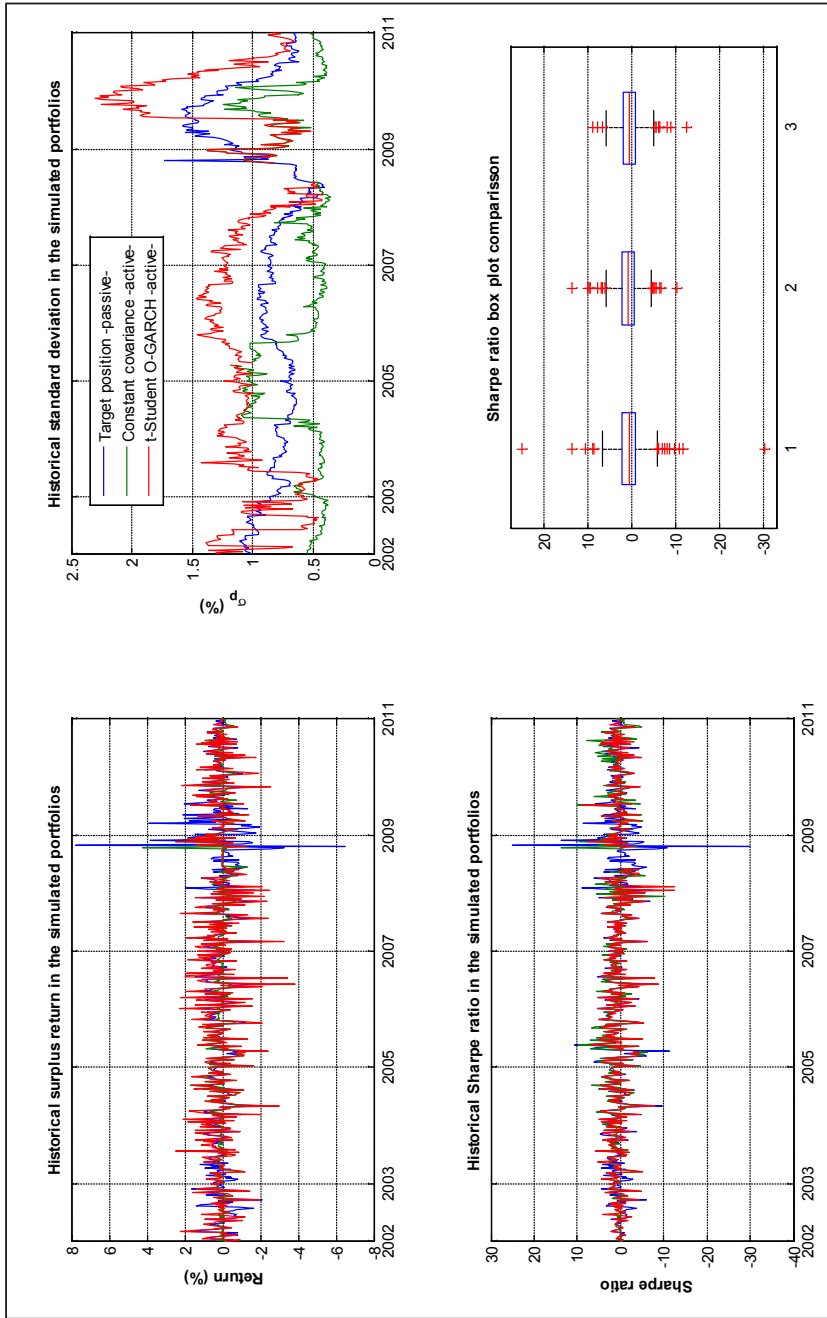
Chart eight presents the historical values observed in each simulated portfolio along with a boxplot comparison. Table three presents the results of a one-way ANOVA test in the historical SR levels, suggesting, along with the results of the boxplot in Chart eight, that the use of a t-Student O-GARCH matrix leads to a better and more stable risk-return trade-off than both the passive and equally weighted covariance matrix portfolios.

#### 4. Concluding remarks.

Given the IPS of Appendix one and from the results observed in the three simulations performed, it is concluded that the *range portfolio rebalancing* discipline with a t-Student O-GARCH matrix in an active portfolio management process is the most suitable for the Technical Reserve of the defined benefit pension fund of interest in this paper (Pensiones Civiles del Estado de Michoacán) and similar ones. This conclusion is supported by the achievement and outperforming of the 7.5% actuarial target return and by a higher turnover than the benchmark (*alpha*), the passively managed and the equally weighted covariance matrix portfolios.

As noted in the results obtained, the use of a t-Student O-GARCH matrix leads to a more suitable asset allocation in the simulated portfolios. This re-

Chart 8. Historical Sharpe ratios for the four simulated portfolios.



Portfolio code (box plot): 1 = Target portfolio -passive-, 2= Constant covariance -active-, 3 = t-Student O-GARCH covariance -active-.

mark is confirmed by the fact that it managed, in a better fashion, the investment proportion in the risk-free asset  $r_f$  given the presence of volatility and correlation clustering. Also of interest is that the actively managed O-GARCH portfolio was more sensitive to the influence of financial, political, and economic events. This can be observed by using a softer portfolio performance and a more appropriate asset allocation in the risky asset  $w^*$  during critical time periods.

As a final remark, it is noted that even though the use of a t-Student O-GARCH Matrix could lead to a higher exposure to risk given the higher return, the observed financial efficiency (risk-return trade off) is higher in this case, supporting the use of this kind of active portfolio management process with this type of covariance matrix.

## References

- Alexander, C. (2002). "Principal Component Models for Generating Large GARCH Covariance Matrices". *Economic Notes*, 31(2), 337-359.
- \_\_\_\_\_, & Chibumba, A. (1996). "Multivariate Orthogonal Factor GARCH". *Working paper, Mathematics department, University of Sussex*.
- Best, M., & Grauer, R. (1991). "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results". *Review of Financial Studies*, 4(2), 315-342.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- \_\_\_\_\_. (1990). "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model". *Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498-505.
- Box, G. E., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). "Time Series Analysis Forecasting and Control (8th ed.)". Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Bredin, D., & Hyde, S. (2004). FOREX Risk: "Measurement and Evaluation Using Value-at-Risk". *Journal of Business Finance & Accounting*, 31(9), 1389-1418.
- Chen R. *et al*, (2008). "Portfolio VaR Computation Based on O-GARCH". *International Workshop on Modelling, Simulation and Optimization*. pp. 133-138. IEEE. Hong Kong.
- Chow, G., Kritzman, M., & Lowry, K. (1999). "Optimal Portfolios in Good Times and Bad". *Financial Analysts Journal* (55), 65-73.

- Cifarelli, G., & Paladino, G. (2004). "The Impact of the Argentine Default on Volatility Co-movements in Emerging Bond Markets". *Emerging Markets Review*, 5(4), 427-446.
- \_\_\_\_\_. (2006). "Volatility Co-movements between Emerging Sovereign Bonds: Is there Segmentation between Geographical Areas?" *Global Finance Journal*, 16(3), 245-263.
- Daniel, K., Grinblatt, M., Titman, S., & Wermers, R. (1997). "Measuring Mutual Fund Performance with Characteristic Based Benchmarks". *Journal of Finance*, 52(3), 1035-1058.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the United Kingdom Inflation". *Econometrica*, 50(1), 987-1007.
- \_\_\_\_\_, & Kroner, K. F. (1993). "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH". *Econometric theory*, 11(1), 122-150.
- Ennis, R. (2005). "Are Active Management Fees Too High?". *Financial Analysts Journal*, 61(5), 44-51.
- Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas. (2006). "Sistemas de Pensiones en México -perspectivas financieras y posibles soluciones". México, DF, Mexico: *Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C.*
- Kearney, C., & Muckley, C. (2008). "Can the Traditional Asian US Dollar Peg Exchange Rate Regime be Extended to Include the Japanese Yen?" *International Review of Financial Analysis*, 17(5), 870-885.
- Lambert, P. and Laurent, S. (2001). "Modelling Financial Time Series Using GARCH-type Models with a Skewed Student Distribution for the Innovations". *Discussion Paper 01-25*, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Belgium.
- Levy, H., & Markowitz, H. (1979). "Approximating Expected Utility by a Function of Mean Variance". *The American Economic Review*, 69(3), 308-317.
- Lintner, J. (1965). "The Valuations of Risk Assets and the Selection of the Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics*. XLVII(1), pp.13-37.
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.
- \_\_\_\_\_. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. New York, NY, USA. *John Wiley & Sons*.
- Samuelson, P. (1965). "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". *Industrial Management Review*, 6(1), 41-90.
- Schwarz, G. (1978, Mar). "Estimating the Dimension of a Model". *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.

- Sharifi-Renani and M. Mirfatah (2012). "The Impact of Exchange Rate Volatility on Foreign Direct Investment in Iran". *Procedia Economics and Finance*. Volumen I, 2012, pp. 265-373. Sweden.
- Sharpe, W. (1966). "Mutual fund Performance". *Journal of bussiness*, 39, 49-58.
- \_\_\_\_\_. (1963). "A Simplified Model for Portfolio Analysis". *Management Science*, 9(2), 277-293.
- Van der Weide, R. (2002). GO-GARCH: "A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model". *Journal of Applied Econometrics* (17), 549-564.

# Appendix 1

**Table 1 Investment Policy Statement of Pensiones Civiles del Estado de Michoacán given its actuarial target return and its future stream of liabilities.**

Market	CURRENCY	Index or benchmark	benchmark ticker used in the present paper	Price vendor	Target investment level	investment level allowed	Maximum investment level allowed	Investment level by currency exposure
Mexican government debt market (fixed, float, real and quasi-sovereign debt)	MXN	Valmer México Gubernamental	MEX_GUBERNAMENTAL	Bolsa Mexicana de Valores S.A.B. de C.V. through VALMER	67.061%	51%	100%	MXN exposure
The most traded stocks in the Mexican stock market (IPC index members)	MXN	Índice de Precios y Cotizaciones	IPCBI00	Bolsa Mexicana de Valores S.A.B. de C.V.	23.471%	0%	35%	30%-100%
Mexican sovereign debt (UMS)	MXN/1	Valmer UMS	MEX_UMS	Bolsa Mexicana de Valores S.A.B. de C.V. through VALMER	2.367%	0%	20%	USD exposure
United States Treasury bills and bonds markets	USD	EFFA-Bloomberg US treasuries index	EFFAUSB100	Bloomberg Inc. and European Federation of Financial Analysts (EFFA)	2.367%	0%	20%	0%-70%
World treasury bonds markets of the 24 main developed and 24 developing economies (ex US) according to Standard & Poors	USD/2	Standard & Poors - Citigroup international treasury bond index ex-US	S&P-CITB100	S&P Stock Indexes and Citigroup Inc.	2.367%	0%	20%	0%-70%
World equity markets from the 24 main developed and 24 main developing countries according to MSCI	USD/2	MSCI Global Gross Equity Index USD	MSCIWORLDGBI00	MSCI Inc.	2.367%	0%	20%	
<b>Total invested in the index</b>					<b>100.000%</b>			

1/ Even though Mexico has sovereign debt in USD, EUR, JPY and GBP, VALMER values the benchmark in MXN.  
2/ Even though the country members quote their assets in their local currencies, the price vendor turn their value to US dollars in order to calculate the benchmark's value. Therefore this benchmark incorporates currency impact.

## Appendix 2

Table A.1 The inflows and outflows of the technical reserve of Pensiones Civiles del Estado de Michoacán

Outflows (OF)	Inflows (IF)					
	Date	Amount (MXN)	Date	Amount (MXN)	Date	Amount (MXN)
A monthly \$356,4284 outflow paid the last week of each month. The outflow is the payment of custodial bank services for the assets (ETF's that replicate the six benchmark) in the managed portfolios.	18/01/2002	\$ 985,516.29	16/07/2004	\$ 641,630.06	02/07/2009	\$ 89,559,398.71
	22/02/2002	\$ 3,285,054.31	10/09/2004	\$ 8,212,635.78	18/12/2009	\$ 66,358,097.13
	22/03/2002	\$ 2,628,043.45	28/01/2005	\$ 82,662,629.71	12/02/2010	\$ 289,453.33
	19/04/2002	\$ 3,285,054.31	08/04/2005	\$ 33,659.65		
	14/06/2002	\$ 2,628,043.45	29/04/2005	\$ 474,292.10		
	09/08/2002	\$ 1,642,527.16	06/05/2005	\$ 3,360.22		
	06/09/2002	\$ 1,642,527.16	19/05/2006	\$ 3,285,054.31		
	20/12/2002	\$ 679,476.88	09/06/2006	\$ 4,927,581.47		
	10/01/2003	\$ 6,570,108.63	24/08/2007	\$ 22,995,380.20		
	02/05/2003	\$ 3,285,054.31	07/09/2007	\$ 8,212,635.78		
	01/08/2003	\$ 4,927,581.47	25/01/2008	\$ 19,710,325.88		
	05/09/2003	\$ 5,256,086.90	28/03/2008	\$ 6,570,108.63		
	19/09/2003	\$ 4,927,581.47	25/04/2008	\$ 6,570,108.63		
	09/01/2004	\$ 6,570,108.63	02/05/2008	\$ 218,473.54		
	07/05/2004	\$ 4,927,581.47	05/06/2009	\$ 163,404,217.91		

Source: Pensiones Civiles del Estado de Michoacán. The real numbers were changed due to confidentiality. This numbers reflect the behavior of the original magnitudes.

## Appendix 3

This appendix presents the evidence of the volatility and correlation clustering in the six markets (benchmarks) of the investment policy in Table one. In order to test the presence of the volatility clustering, the Engle (1982) ARCH test was performed in each asset and in each of the weekly dates used in the discrete event simulations. A 95% confidence level is used to test the next hypothesis:

$$H_0 : T \cdot R^2 > X_{95\%,T}^2 \tag{13}$$

Where  $R^2$  is the coefficient of determination of the next auxiliary regression given  $\varepsilon_t = r_t - \bar{r}_t$ :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha + \beta_t \varepsilon_{t-i}^2 \tag{14}$$

This test was performed on each weekly date used for the simulation from January 2, 2002, to December 31, 2010.<sup>22</sup> The results are presented in Chart

A.1 and the number of dates with a presence of the ARCH effect is summarized in Table A.2.

As noted in Chart A.2, not all the dates presented an ARCH effect, suggesting that not in all of them an O-GARCH matrix should be used in the MTSL model. In order to accept a general use of GARCH models in all the dates, a Poisson probability function hypothesis test is used with a mean of  $\lambda = 23$  and a 95% confidence level given by  $\lambda + (95\% \cdot \lambda) = 28.10$ . With these parameters, the number of dates that report the presence of the ARCH effect were compared, and if this number was higher than 28.10, the presence of the ARCH effect was accepted for all the dates by assuming that the number of dates is high enough to generalize the presence of this phenomenon in each asset.

The results of these hypotheses tests are presented in the right panels of Chart A.2 and Table A.3. It can be shown that almost all the benchmarks (excepting the US treasuries -EFFAUSB100- that is not conclusive) lead to the acceptance of the ARCH effect for all dates.

Table A.2. ARCH effect test resume

Benchmark	Poisson critical value	Number of dates with ARCH effect	Conclusion
VLMR-MEX-GUBERNAMENTAL	28.10529586	100	This asset has ARCH effect
VLMR-MEX-UMS	28.10529586	55	This asset has ARCH effect
IPCBI00	28.10529586	31	This asset has ARCH effect
S&P-CITB100	28.10529586	51	This asset has ARCH effect
EFFAUSB100	28.10529586	28	The test is not conclusive
MSCIWORLDGB100	28.10529586	60	This asset has ARCH effect

Once the evidence of the ARCH effect in the six benchmarks is presented, it is necessary to demonstrate the usefulness of an O-GARCH covariance matrix by testing the presence of the correlation clustering effect. In order to do so, the return time series  $\mathbf{r}_t$  in each asset was divided into two time groups by using the following distance suggested by Chow, Kritzman & Lowry (1999):

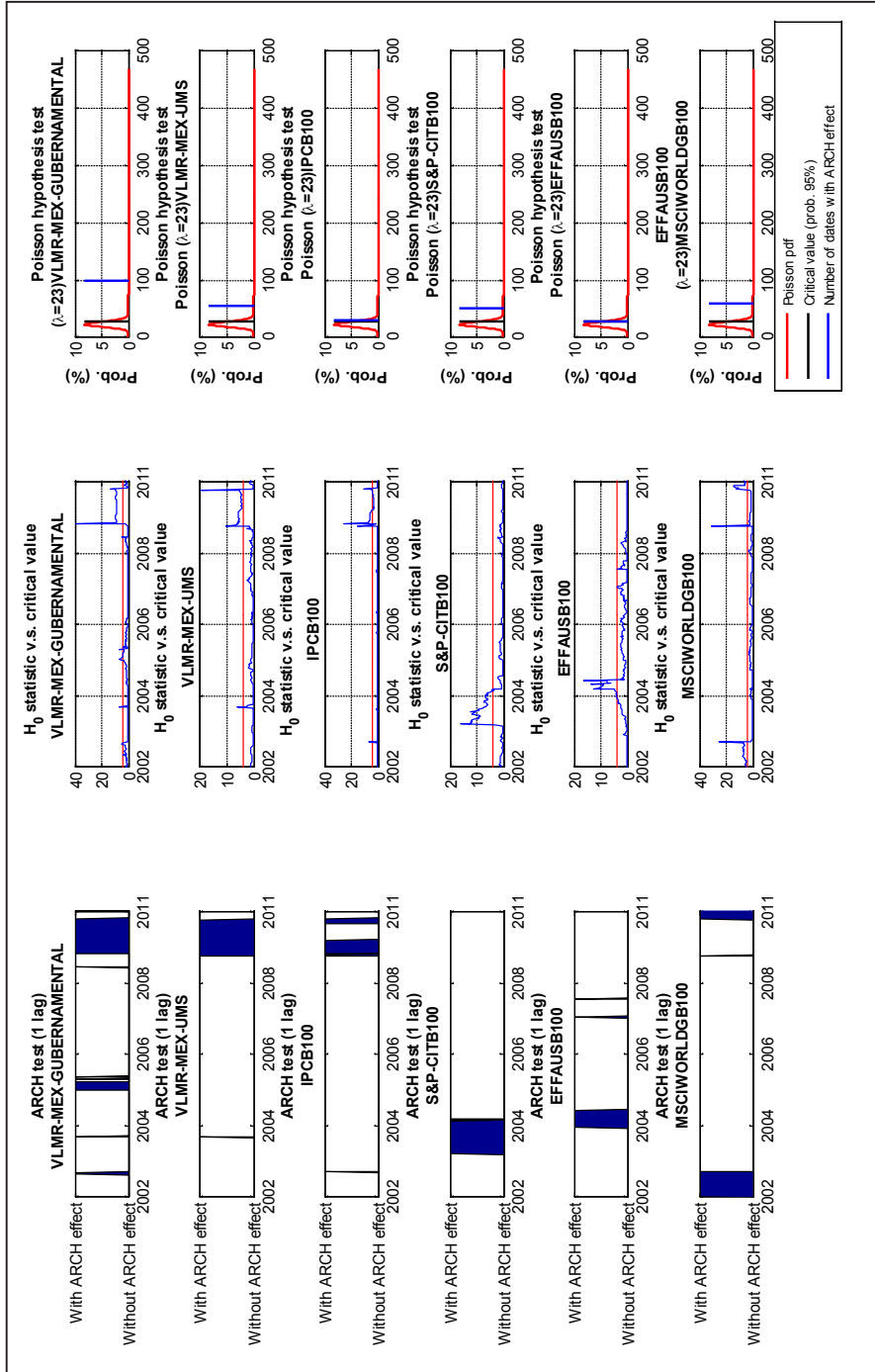
$$\varphi_t = (\mathbf{r}_t - \bar{\mathbf{r}}_0)' \cdot \mathbf{C}_0^{-1} (\mathbf{r}_t - \bar{\mathbf{r}}_0) \quad (15)$$

Where  $\mathbf{r}_t$  is a  $6 \times 1$  vector with the observed return at date  $t$  in each asset,  $\bar{\mathbf{r}}_0$  is a vector with the means of the entire time series  $\mathbf{r}_t$  in each asset and  $\mathbf{C}_0$  the covariance matrix for the same data:

<sup>22</sup> Using a T=52 return time series length from t to t-51.



Chart A.2. Engle's ARCH test in the six markets used in the asset allocation (benchmarks).



$$C_0 = \left[ \left( \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' \right] \cdot \mathbf{X} \right)' \cdot \left( \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}' \right] \cdot \mathbf{X} \right) \right] \cdot \frac{1}{n}, \mathbf{X} = [r_1, \dots, r_t] \quad (16)$$

Each date  $t$  or returns vector  $\mathbf{r}_t$  from that date was included in the “unusual dates” set  $\Theta$  by following the rule:

$$\mathbf{r}_t \in \Theta \Leftrightarrow \rho_t > X_{95\%, \nu}^2 \quad (17)$$

Where  $\nu$  are the degrees of freedom related to the number of assets included in the covariance matrix  $C_0$ . Once  $\Theta$  and  $\Theta^C$  are defined with (16), two correlation matrixes were calculated for the usual and unusual date sets and the correlation of  $\Theta^C$  was compared with  $\Theta$ , leading to the results shown in Table A.3.

As noted, the correlation observed in “unusual times” increased in eight of 15 pairs of assets (or markets), suggesting the presence of correlation clustering in turbulent or unusual times. This can also be observed in the difference of the effective correlation (determinant) value observed in both matrixes.

Table A.3 Correlation matrix comparisson in "unusual" and "usual" dates.

"Unusual dates" correlation matrix.						
Asset type	VLMR_MEX_UMS	EFFAUSB100	SP500TRB100	MSCIWORLDGB100	VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	IPCB100
VLMR_MEX_UMS	1					
EFFAUSB100	0.408287007	1				
SP500TRB100	-0.340421318	-0.417051245	1			
MSCIWORLDGB100	-0.352979265	-0.354964665	0.91810741	1		
VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	-0.04527618	0.196305779	0.099137752	0.110340901	1	
IPCB100	-0.010496348	0.05721501	-0.052602401	0.008871604	-0.019101146	1
Effective correlation (Determinant)	0.089648924					
"Usual dates" correlation matrix.						
Asset type	VLMR_MEX_UMS	EFFAUSB100	SP500TRB100	MSCIWORLDGB100	VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	IPCB100
VLMR_MEX_UMS	1					
EFFAUSB100	-0.117425925	1				
SP500TRB100	-0.369673719	-0.286097744	1			
MSCIWORLDGB100	-0.416630382	-0.255187292	0.9557821	1		
VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	0.255163266	-0.057908116	0.481861901	0.49041005	1	
IPCB100	-0.143888126	0.365550275	-0.08956764	-0.049046676	-0.151424226	1
Effective correlation (Determinant)	0.023188107					
Correlation level difference between "unusual" and "usual" dates						
Asset type	VLMR_MEX_UMS	EFFAUSB100	SP500TRB100	MSCIWORLDGB100	VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	IPCB100
VLMR_MEX_UMS	0					
EFFAUSB100	0.525712932	0				
SP500TRB100	0.0292524	-0.130953501	0			
MSCIWORLDGB100	0.063651118	-0.09977373	-0.03767469	0		
VLMR_MEX_GUBERNAMENTAL	-0.300439446	0.254213895	-0.382724149	-0.380069149	0	
IPCB100	0.133391778	-0.308335266	0.036965239	0.05791828	0.132323079	0
Determinant difference	0.066460817					

# Aplicación del modelo Weibull en el análisis de eventos críticos en precios bursátiles

---

Juan de la Cruz Mejía Téllez\*

Fecha de recepción: 29 de junio de 2012

Fecha de aceptación: 18 de diciembre de 2012

---

\* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.  
Departamento de Sistemas.  
jmt@nechikali.azc.uam.mx

## Resumen

Es bien sabido que la distribución de probabilidad Weibull encuentra aplicación en la modelación de procesos o fenómenos que involucren riesgo, por ejemplo sismos, falla en la operación de un equipo o sistema, tiempo de vida, etc. Para inversionistas financieros es importante contar, para la toma de decisiones, con un método o metodología que estime cuándo será más probable que ocurra un evento crítico, como pudiera ser la caída o alza considerable en el precio de cotización de una determinada acción bursátil. En este trabajo se aplica el modelo Weibull en la distribución del tiempo al cual ocurren dos eventos críticos consecutivos. Caso de análisis: acción bursátil CEMEX.

Clasificación JEL: C22, C46 y C58

**Palabras clave:** distribución Weibull, ajuste de funciones, series de tiempo financieras, altas y bajas en precio.

### **Weibull Model Application for the Analysis of Critical Events in Stock Prices**

#### Abstract

*It is well known that the Weibull probability distribution finds application in phenomenon or processes modeling involving risk, such as earthquakes, break down of equipment or system, life-time, etc. Financial investors wish to count on methods or methodologies to support decisions making, estimating when a critical event is more likely to occur, such as downs or ups of a certain share price. In this paper we present the Weibull model application for the occurrence time random variable between two consecutive critical events. Study case: CEMEX equity shares.*

*JEL classification: C22, C46 y C58*

**Key words:** *Weibull distribution, function adjustment, financial time series, market price movements.*

## 1. Introducción

Tradicionalmente la distribución de probabilidad Weibull se ha empleado en la teoría de confiabilidad para modelar fenómenos de falla y degradación (Kalbfleish, (1980)), encontrando aplicación en el mantenimiento preventivo de elementos, ensambles, equipos, sistemas, etc. (Lyonnet, (1991)). A la variable aleatoria involucrada se le ha denominado de muy diversas formas como por ejemplo, tiempo de vida, tiempo de servicio, tiempo de falla, entre otras. Conceptualmente la variable aleatoria se entiende como el tiempo o espacio que ocurre entre dos eventos considerados caóticos o críticos en la operación o funcionamiento de un equipo o sistema. El analista o administrador del equipo o sistema desearía estimar la fecha de ocurrencia del próximo evento para tomar la decisión más adecuada antes de que se presente el evento, como pudiera ser darle servicio de mantenimiento, remplazarlo, e incluso puede dar pauta para cancelar el servicio que brinda tal equipo.

La modelación de datos financieros en las operaciones de transacción es un tópico en desarrollo en la econometría. Se ha creado una nueva literatura comúnmente referida como “la econometría de las finanzas de alta (ultra) frecuencia” Bauwens-Hautsch (2007). Las variables de interés más comunes en este tipo de operaciones son el tiempo entre dos transacciones consecutivas (trade- duration) y el tiempo entre dos cotizaciones consecutivas (quote-duration). El análisis de datos financieros con alta frecuencia teniendo la característica de que el espaciamiento entre transacciones consecutivas es irregular, fue tratado originalmente por Engle and Rusell (1998), quienes introdujeron el modelo de Duración Condicional Autoregresivo (ACD). Muchos otros investigadores han seguido la pauta marcada por Engle and Rusell desarrollando modelos en el campo de la econometría financiera: Zang *et al*, (2001), Pathmanathan D. *et al*, (2009) por citar algunos de éstos. Peiris M.S. *et al*, (2007), hacen una revisión de las publicaciones realizadas sobre series de tiempo financieras con el enfoque ACD. En todos estos trabajos se ha aplicado la distribución de probabilidad Weibull como una herramienta de modelación exitosa.

Cabe mencionar que en ninguno de los trabajos existentes en la literatura se ha aplicado la distribución Weibull para la modelación del tiempo en que ocurren dos eventos consecutivos considerados críticos en la baja del precio de cotización de una acción bursátil, o bien de alza en el precio, que es el caso de estudio del presente trabajo.

El objetivo principal de esta aplicación es el de poder contribuir con un elemento más, que consideramos relevante, en la toma de decisiones.

## 2.- Metodología.

Caracterización del modelo Weibull.

Función de densidad de probabilidad

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ , son los parámetros de forma y escala, respectivamente.

Función de distribución acumulada

$$F(t, \alpha, \beta) = \int_0^t f(x) dx = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$$

que es la probabilidad de que un componente no viva más allá del tiempo  $t$ .

Valor esperado:

$$E[T] = \beta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \beta^2 \left( \Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right)$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  es la función gama definida:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

con propiedades:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \text{ si } \alpha \text{ es entero positivo}$$

Función de confiabilidad:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

Función de riesgo o también llamada tasa de falla instantánea, obtenida por el cociente  $f(t)/R(t)$  y denotada por  $z(t)$ :

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}$$

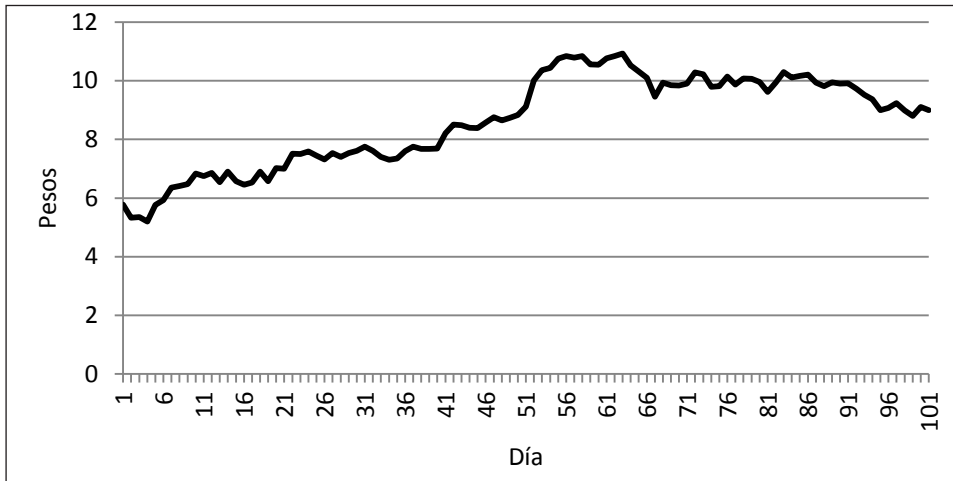
Para la identificación de los puntos críticos, se tomará en consideración el siguiente procedimiento:

*Se evalúa dinámicamente la pendiente de la recta que une a dos puntos consecutivos en la serie de tiempo. Si la pendiente cambia de negativa a positiva a este punto se le denominará crítico, en particular punto mínimo, caso contrario punto máximo.*

### 3. Análisis de la serie de tiempo

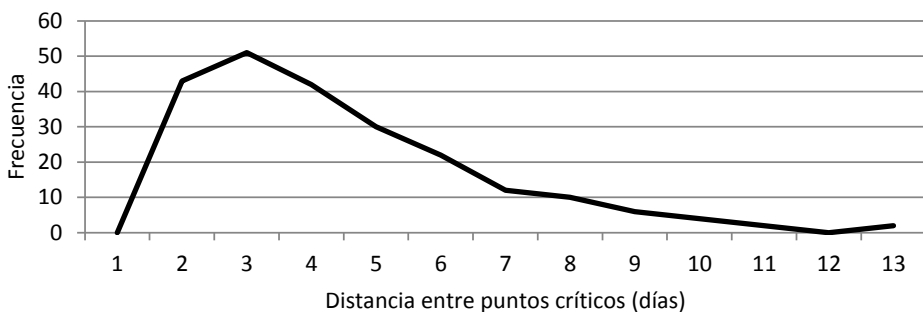
El objetivo en esta aplicación será el de modelar los tiempos a los cuales ocurre una baja en el precio (punto crítico) de la acción bursátil "CEMEX". Se tomó una muestra de 1000 datos históricos de esta serie de tiempo. En la Gráfica 1 se representan 100 datos recientes:

Gráfica 1. Cemex: Precios al cierre.



Identificados los puntos críticos, se determinan los tiempos de ocurrencia entre éstos, los cuales representarán los valores de la variable aleatoria. Para nuestro caso de estudio alcanzó un rango igual a 13 días. La Gráfica 2 ilustra el polígono de frecuencias.

Gráfica 2. Polígono de frecuencias.



En esta gráfica podemos observar que presumiblemente la variable aleatoria sigue la forma típica de la **distribución Weibull**, la cual será la hipótesis a considerar, contra la hipótesis alternativa de que no lo sea.



Considerando la función de confiabilidad:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$$

tomando logaritmo natural

$$\ln R(t) = -\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha$$

$$-\ln R(t) = \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha$$

$$\ln(-\ln R(t)) = \alpha \ln\left(\frac{t}{\beta}\right) = \alpha \ln t - \alpha \ln \beta$$

obteniendo finalmente:

$$\ln\left(\ln\frac{1}{R(t)}\right) = \alpha \ln t - \alpha \ln \beta$$

$$\text{Sean } x = \ln t, m = \alpha, b = \alpha \ln \beta, y = \ln\left(\ln\frac{1}{R(t)}\right),$$

resulta la forma:  $y = mx - b$

que es la ecuación de una línea recta. Así entonces, si los datos corresponden al modelo Weibull, los puntos caerán sobre una línea recta, cuya pendiente y ordenada al origen, determinarán los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Cuadro 1. Valores de respuesta y de variable independiente para estimar la línea de regresión.

Días		
(t)	ln (t)	$\ln \left( \ln \frac{1}{R(t)} \right)$
2	0.693147181	-1.525081273
3	1.098612289	-0.600447766
4	1.386294361	-0.063191602
5	1.609437912	0.317033912
6	1.791759469	0.605725609
7	1.945910149	0.805603419
8	2.079441542	1.021386719
9	2.197224577	1.169032176
10	2.302585093	1.393718246
11	2.397895273	1.552434286
12	2.48490665	1.552434286

Estimando la línea de regresión por el método de Mínimos Cuadrados se obtuvo:

$$y = 1.695397x - 2.51433$$

Pendiente	m=1.695397
Ordenada al origen	b= -2.51433

por tanto:

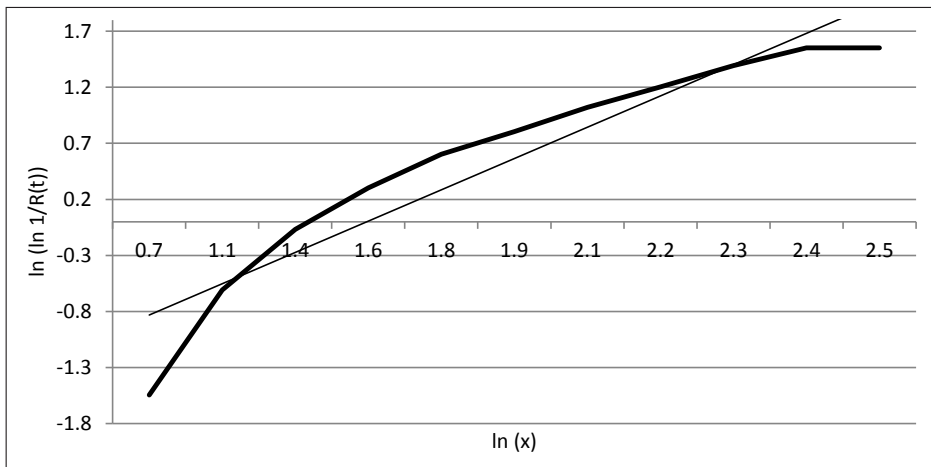
$$\alpha = m$$

$$\beta = e^{(-b/\alpha)}$$

$$\alpha = 1.6954$$

$$\beta = 4.4063$$

Gráfica 3. Contraste de datos ajustados con línea de regresión.



En lo siguiente se realizará la prueba de bondad de ajuste Ji-cuadrada para justificar o no que la variable aleatoria del tiempo entre ocurrencias de precios a la baja adopta el modelo Weibull.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(e_i - f_i)^2}{e_i}$$

donde  $e_i$  es el valor de la frecuencia teórica para el  $i$ -ésimo valor de tiempo:

$$e_i = [F(t) - F(t-1)] * \text{Frecuencia total}$$

siendo  $F(t) - F(t-1)$  la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor  $t$ .

Procedemos a calcular los valores de la función de distribución acumulada  $F(t)$ :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$$

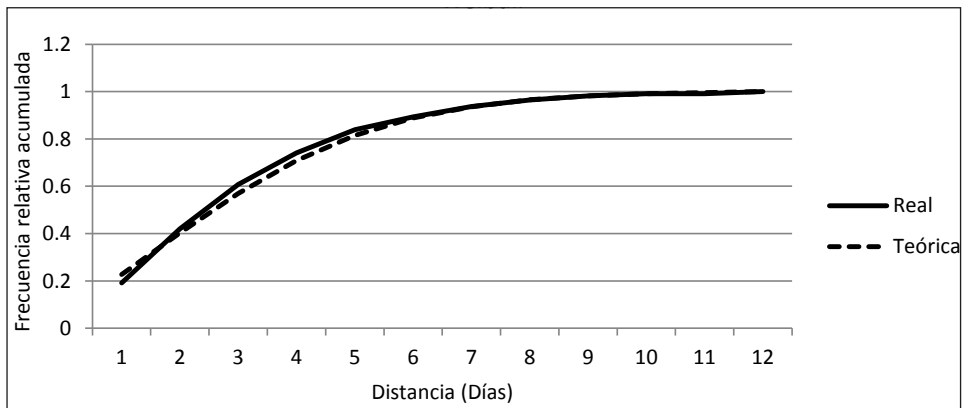
Cuadro 2. Función de distribución de probabilidad Weibull para

$$\alpha = 1.6954, \beta = 4.4063$$

Días T	F(t)
$\leq 2$	0.230537823
3	0.406154401
4	0.572043716
5	0.710327337
6	0.81507067
7	0.888293914
8	0.935992863
9	0.965135974
$\geq 10$	1

En la Gráfica 4 se muestra el contraste entre la distribución de frecuencias relativas acumuladas con la función de distribución de probabilidad Weibull:

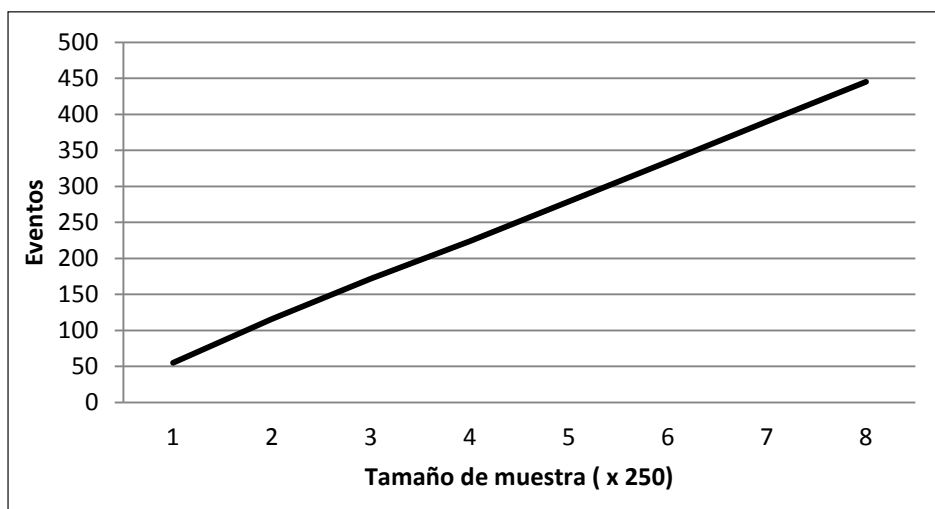
Gráfica 4. Contraste entre distribuciones acumuladas real con teórica Weibull.



Se observa en esta última figura que ambas curvas siguen la misma trayectoria, es decir, tienen la misma forma. Sin embargo, presentan una sensible discrepancia.

La variable Ji-cuadrada alcanza el valor de 7.2045. Refiriéndonos a valores tabulados para esta variable con 8 grados de libertad y nivel de significancia del 1%, se tiene el valor de 20.09. Con esto se interpreta que el valor calculado para la variable Ji-cuadrada es estadísticamente significativo como para no rechazar la hipótesis de que ocurra el modelo Weibull ( $E[T]= 4.43$  días,  $\sigma^2 =5.77$ ).

Gráfica 5. Número de eventos vs tamaño de muestra.



#### 4. Análisis de sensibilidad

Con el propósito de observar los cambios en valor de los parámetros de escala y de forma, así como también en los dos primeros momentos de la distribución Weibull a medida que el tamaño de muestra ( $n$ ) aumenta, se experimentó con varios niveles, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750 y 2000, cubriendo un periodo de 1 a 8 años (aproximadamente) de información histórica. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Cuadro 3. Resultados en el análisis de sensibilidad.

n	Eventos	$\alpha$	$\beta$	Media	Varianza
250	55	1.70	4.35	4.38	5.59
500	116	1.77	4.17	4.21	4.77
750	172	1.64	4.24	4.29	5.70
1000	224	1.66	4.40	4.44	6.02
1250	279	1.73	4.44	4.46	5.64
1500	334	1.75	4.46	4.47	5.55
1750	390	1.77	4.45	4.46	5.42
2000	445	1.75	4.44	4.45	5.45

En la Gráfica 6 se observa que el número de eventos ( mínimos locales ) son directamente proporcionales al tamaño de muestra.

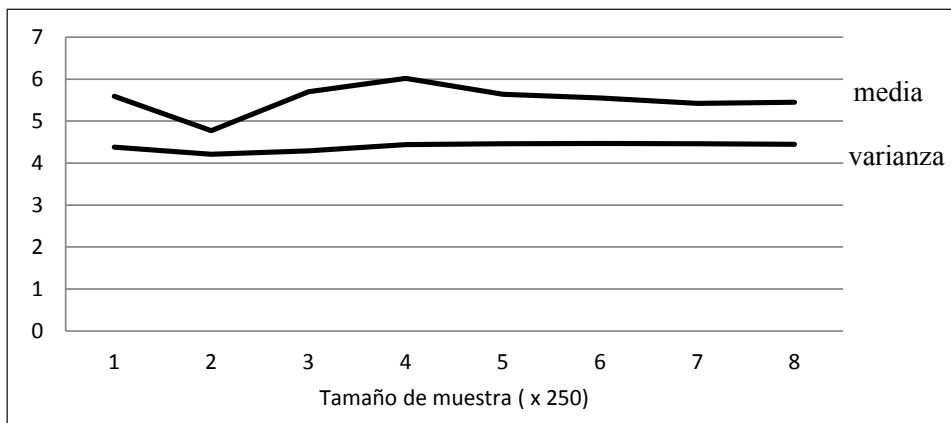
Gráfica 6. Valor de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  vs tamaño de muestra.



Para un tamaño de muestra mayor a 1000 los parámetros de forma y de escala presentan estabilidad.

Al observar el comportamiento de media y varianza (Gráfica 7), se presume que la distribución se torna estacionaria para muestras de tamaño mayor a 1500 elementos.

Gráfica 7. Valores de media y varianza vs tamaño de muestra.



Se aplicó esta metodología de análisis a otras series de tiempo de emisoras bursátiles tales como América Móvil, Grupo Financiero Banorte, Grupo México, Walmart, obteniendo resultados exitosos, muy similares a los aquí mostrados.

## 5. Problema de aplicación

Un inversionista que posee una cantidad considerable de títulos de la empresa CEMEX. Desea contar con un esquema que le brinde de alguna manera información cuantitativa adicional para considerar si debe conservar los títulos o tomar la decisión de vender.

### Solución:

Aprovechando el análisis elaborado en las secciones anteriores para la acción bursátil CEMEX, habiendo determinado que la distribución Weibull modela adecuadamente los eventos tipificados aquí como puntos críticos (baja, alza en precio), y teniendo en cuenta que el inversionista tiene títulos en su poder, será conveniente elaborar un cuadro informativo sobre las probabilidades de que ocurra baja en precio precisamente el día de mañana.

Los eventos a considerar para el cálculo de sus probabilidades son denominados como eventos condicionados, ya que conociendo el hecho de que han transcurrido  $d$  unidades de tiempo (días) desde que ocurrió la baja en precio, ésta se presente al día siguiente.

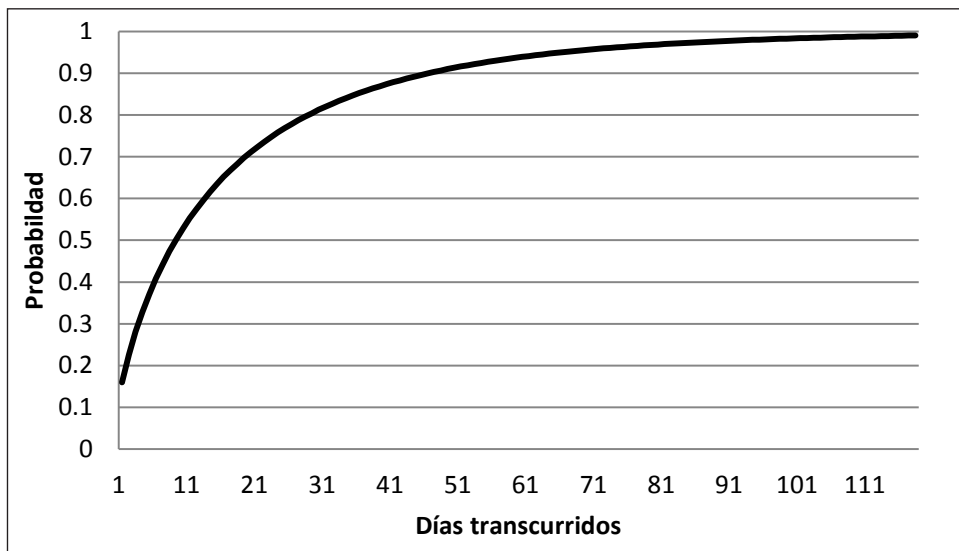
$$P\left(\frac{t < d + 1}{t > d}\right) = \frac{F(d + 1) - F(d)}{R(d)}$$

sustituyendo valores para la distribución Weibull:

$$P\left(\frac{t < d + 1}{t > d}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{d+1}{\beta}\right)^\alpha + \left(\frac{d}{\beta}\right)^\alpha}$$

En la siguiente Gráfica se muestran esquemáticamente estas probabilidades condicionales, para  $\alpha = 1.75$ ,  $\beta = 4.44$ ,

Gráfica 8. Probabilidades condicionales vs días transcurridos desde última baja en precio.





Por ejemplo, tomando el caso de que han transcurrido 10 días desde que se presentó la baja en precio, la probabilidad de que al día siguiente ocurra este evento será de 53% aproximadamente.

Es de esperarse que a mayor número de días transcurridos sin que se haya presentado la baja en precio, las probabilidades de que este evento ocurra al día siguiente son cada vez mayores.

## 6. Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha aplicado la función de probabilidad Weibull, considerada en la literatura como una herramienta para la modelación de procesos que involucren riesgo. Trasladando la idea de “riesgo” al caso de pérdida cuando se tienen títulos financieros en propiedad y que se coticen a un precio menor al adquirido. Resulta valioso para el administrador financiero contar con un modelo que le brinde una medida más de apoyo en la toma de decisiones. Se encontró como resultado de esta aplicación que el modelo Weibull es robusto cuando el número de datos informativos sobre el valor de la acción financiera es grande (mayor a 1500). El enfoque aquí propuesto es válido en el análisis de alza en precio del título financiero.

## Bibliografía

- Bauwens, Luc. and Hautch Nicolas (2007). “Modelling Financial High Frequency Data Using Point Processes”. *Humboldt-Universität Berlin*. SFB 649 discussion paper No. 2007, 066, [Hdl.handle.net/10419/25238](http://hdl.handle.net/10419/25238).
- Engle, R.F. and Rusell, J.R. (1998). “Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data”. *Econometric*, 66, pp. 1127-1162.
- Lyonnet P. (2001). *Maintenance Planning Methods and Mathematics*. Chapman & Hall.
- Kalbfleisch, J.D. and Prentice, R.L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. John Wiley & Sons, Inc.
- Pathmanathan, D., Ng, K.H., Peiris, M.S. (2009). “On Estimation of Autoregressive Conditional Duration (ACD) Models Based on Different Error Distributions”. *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*, Vol. 10, pp.251-269.

- Peiris, M.S., Ng, K.H. and Ibrahim, M. (2007). "A Review of Recent Development of Financial Time Series: ACD Modelling Using the Estimating Function Approach". *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*, 8: pp. 1-17.
- Zhang, M.Y., Russell, J.R. and Tsay, R.S. (2001). "A Nonlinear Autoregressive Conditional Duration Model With Applications to Financial Duration Data". *Journal of Econometrics*, 104, pp. 179-207.

## Convocatoria abierta

La revista **Estocástica: finanzas y riesgo**, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. Estocástica es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- ❖ Administración y análisis de riesgos financieros.
- ❖ Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- ❖ Diseño de instrumentos financieros.
- ❖ Econometría financiera.
- ❖ Finanzas computacionales.
- ❖ Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- ❖ Finanzas matemáticas.
- ❖ Ingeniería financiera.
- ❖ Innovación financiera.
- ❖ Mercados financieros.
- ❖ Modelado del comportamiento de instrumentos derivados.
- ❖ Modelado financiero.
- ❖ Modelado matemático de riesgos.
- ❖ Modelos de regulación financiera.
- ❖ Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- ❖ Teoría financiera.
- ❖ Valuación de activos financieros

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica del departamento de administración de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: [estocastica@azc.uam.mx](mailto:estocastica@azc.uam.mx). Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

*Estocástica: finanzas y riesgo* will consider for possible publication articles written in Spanish or English, provided they contain unpublished work. *Estocástica* is published twice a year and its objective is to contribute to developing knowledge in the areas of finance, risk management and modeling and financial engineering. *Estocástica* promotes communication of original research results, either theoretical or empirical, related to the study and practice of the above mentioned disciplines and the following research lines:

- ❖ Financial risk analysis and management
- ❖ Financial instruments design
- ❖ Financial and economic analysis and modeling
- ❖ Financial econometrics
- ❖ Computational finance
- ❖ Mathematical finance
- ❖ Behavioral finance applying quantitative methods
- ❖ Financial engineering
- ❖ Financial innovation
- ❖ Financial markets
- ❖ Derivative products modeling
- ❖ Financial modeling
- ❖ Risk mathematical modeling
- ❖ Financial regulation modeling
- ❖ Stochastic processes applied to finance
- ❖ Financial theory and assets valuation

In addition to these research lines, closely related original manuscripts will be accepted according to the editorial guidelines published in the web site of the Departamento de Administración, of the Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Research papers will be reviewed by an experts' panel and those accepted will be scheduled for publication.

Manuscripts should be sent to [estocastica@azc.uam.mx](mailto:estocastica@azc.uam.mx). Further information may be obtained dialing 5318-9454 ext. 157 or 154.

Authors grant, by sending a research work for review and possible publication, the legal authorization to *Estocástica: finanzas y riesgo* for publishing it in print and electronic formats. In addition, authors will be fully responsible for any legal acts pursued by third parties questioning the authorship and originality of their research work freeing the Universidad Autónoma Metropolitana of any legal or economic responsibility associated to such claims.



**CSH** *División  
de Ciencias  
Sociales y  
Humanidades*

Departamento de  
**Administración** 

**CBI** *DIVISIÓN DE  
CIENCIAS BÁSICAS  
E INGENIERÍA*  
*UAM - Azcapotzalco*

DEPARTAMENTO  
DE SISTEMAS

 Red para el  
Análisis de  
Riesgos  
Financieros

