

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

**Análisis borroso del impacto
del índice de inflación
y de la cotización del dólar
sobre el índice
de confianza en México**

Sergio G. de los Cobos Silva
Miguel A. Gutiérrez Andrade
Pedro Lara Velázquez

**Integración fraccionaria
y valor en riesgo**

Francisco López Herrera
Edgar Ortiz
Raúl de Jesús Gutiérrez

**Valuación de opciones
sobre activos subyacentes
con distribuciones estables**

César Emilio Contreras Piedragil
Francisco Venegas Martínez

**Estimación de la esperanza de la
función de penalización
descontada en procesos de riesgo con
medida de intensidad continua:
el caso de la probabilidad de ruina en
tiempo finito**

María Guadalupe Cordero Parra

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Directorio

Rector General

Dr. Enrique Pablo Alfonso
Fernández Fassnacht

Secretaria General

Mtra. Iris Edith Santacruz Fabila

Rectora de la Unidad Azcapotzalco

Mtra. Gabriela Paloma Ibañez Villalobos

Secretario de la Unidad

Ing. Darío Eduardo Guaycochea
Guglielmi

Director de la División De Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Sánchez Daza

Secretario Académico

Mtro. Lucino Gutiérrez Herrera

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Lic. Santiago Ávila Sandoval

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández Lerma
Dr. Francisco Venegas Martínez
Dr. Edgar Ortiz
Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade
Dra. Patricia Saavedra Barrera
Dr. Francisco López Herrera
Dr. Wojciech Szatzschneider Smigielska

Comité Editorial

Presidente

Dr. Luis Fernando Hoyos Reyes

Editora

Mtra. Marissa R. Martínez Preece

Miembros

Dra. María G. Henaine Abed
Mtro. Carlos Zubieta Badillo
Mtro. Rafael Eutimio García García
Mtro. Sergio Solís Tepexpa

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Año 1, número 1, enero - junio 2011, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros, Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F., Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, D.F.; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154, Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx, Editora responsable Mtra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed; fecha de última modificación: 25 de enero de 2011, Tamaño del archivo:4.9 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Presentación

La Red para el Análisis de Riesgos Financieros está integrada por un grupo interdisciplinario de académicos de diversas unidades de la UAM. Su propósito es estudiar problemas planteados por los mercados financieros, y proponer formas alternativas de abordarlos, en concordancia con los últimos avances de las teorías y metodologías en las finanzas y el análisis, administración y modelado de riesgos financieros. Las finanzas y la administración de riesgos son áreas de conocimiento que han experimentado notables avances derivados, no sólo de los mercados financieros sino también del desarrollo de la informática y la computación. No obstante, aún se tiene un largo camino que recorrer como evidencian las últimas crisis financieras que han afectado no únicamente a los mercados financieros internacionales sino también a múltiples sistemas económicos. Se pretende que el trabajo generado en este espacio multidisciplinario contribuya al análisis de la inestabilidad de los mercados e instituciones financieras; asimismo, que los productos de investigación apoyen a los agentes involucrados en la toma de decisiones al considerar fenómenos de riesgo y sus mecanismos de identificación, control, regulación y administración a nivel corporativo, sectorial y macroeconómico.

Se espera que la Red para el Análisis de Riesgos Financieros sirva como medio para la generación de conocimientos, teorías y herramientas metodológicas útiles para agentes y mercados, que fortalezca el avance de las finanzas, e influya positivamente en los procesos de adaptación, innovación y comunicación de resultados de investigación de esta disciplina; además, que se convierta en un mecanismo de vinculación de los esfuerzos de investigación que diversos académicos o colectivos realizan de manera aislada, conjuntando el trabajo de investigadores destacados de otras instituciones de excelencia.

Con la revista *Estocástica: finanzas y riesgo*, la Red para el Análisis de Riesgos Financieros, crea un vehículo de comunicación que busca impulsar el estudio y análisis de las finanzas y la administración de riesgos.

El objetivo de la revista es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Con este primer número se abre un espacio de colaboración que se fortalecerá con la participación de la comunidad especializada. Les invitamos cordialmente a formar parte de este esfuerzo.

Comité Editorial.

CONTENIDO

Introducción

Análisis borroso del impacto
del índice de inflación
y de la cotización del dólar
sobre el índice de confianza en México

Sergio G. de los Cobos Silva
Miguel A. Gutiérrez Andrade
Pedro Lara Velázquez

7

Integración fraccionaria y valor en riesgo

Francisco López Herrera
Edgar Ortiz
Raúl de Jesús Gutiérrez

29

Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables

César Emilio Contreras Piedragil
Francisco Venegas-Martínez

55

Estimación de la esperanza de la función de penalización descontada en procesos de riesgo con medida de intensidad continua: El caso de la probabilidad de ruina en tiempo finito

María Guadalupe Cordero Parra

73

Análisis borroso del impacto del índice de inflación y de la cotización del dólar sobre el índice de confianza en México

Sergio G. de los Cobos Silva*

Miguel A. Gutiérrez Andrade*

Pedro Lara Velázquez**

1. Introducción	9
2. Regresión por mínimos cuadrados	12
3. Regresión borrosa	13
4. Resultados	17
5. Conclusiones	26

* Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa.
Departamento de Ingeniería Eléctrica.
cobos@xanum.uam.mx; gamma@xanum.uam.mx

** Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco.
Departamento de Sistemas, pedrolara@correo.azc.uam.mx

RESUMEN

En este artículo se presenta la metodología, los resultados y las conclusiones de un análisis comparativo del comportamiento del índice de confianza del consumidor de México usando dos modelos diferentes de regresión: el método tradicional de mínimos cuadrados y el método de regresión borrosa. Considerando como variables independientes el índice de inflación y la cotización del dólar para los trimestres de 2006 a 2009. Los modelos borrosos que se utilizan resultan ser más apropiados que los modelos por mínimos cuadrados, en los cuales se obtienen ordenadas al origen no creíbles y de difícil interpretación. Los intervalos de confianza posibilísticos son mucho más reducidos que los intervalos de confianza probabilísticos al 95%. Palabras clave: Regresión lineal, regresión borrosa, programación lineal borrosa.

ABSTRACT

This paper presents the methodology, results and conclusions of a comparative analysis of the behavior of the Mexican Consumer Confidence Index using two different regression models; the traditional least squares method and the fuzzy regression method, considering as independent variables the inflation rate and the dollar –peso exchange rate, for the quarters from 2006 to 2009. The fuzzy models used are more appropriate than the least squares models in which the resulting y intercepts are difficult to interpret and sometimes illogical. The possibilistic confidence intervals are a lot more reduced than the probabilistic confidence intervals at 95%.

Keywords: Linear regression, fuzzy regression, fuzzy linear programming.

Clasificación JEL: C01, C13, C18, C58

1. Introducción

En el presente trabajo se expone la utilización de la regresión lineal por mínimos cuadrados así como un instrumento de regresión alternativo, la regresión borrosa. La regresión borrosa es más versátil que los convencionales modelos de regresión estadísticos, ya que permite hallar relaciones funcionales cuando la variable dependiente, las variables independientes o ambas no se manifiestan como valores únicos, sino como *intervalos de confianza en posibilidad y no en probabilidad*. Estos instrumentos de tipo borroso se diferencian de los econométricos usuales, donde se deben reducir las observaciones a un valor representativo, con la posible pérdida de información que ello implica.

El Índice de Confianza del Consumidor (ICC) de México, proviene de la Encuesta Nacional sobre la Confianza del Consumidor (ENCO) elaborada conjuntamente por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) y el Banco de México, y refleja la percepción que los hogares urbanos de México tienen acerca del estado actual y la situación esperada de la economía de los propios hogares, así como del país en general. La ENCO se lleva a cabo durante los primeros veinte días de cada mes y tiene como base una muestra de 2,336 viviendas urbanas a nivel nacional, en las que se entrevista de forma personal al informante, quien por lo menos debe tener 18 años de edad.

La ENCO se recaba en 32 ciudades que comprenden a la totalidad de las entidades federativas del país y el nivel de confianza de sus resultados es de 90% con un error máximo esperado de 15%.

La información del ICC se expresa en forma de índice con base en enero de 2003=100, el cual resulta de promediar cinco índices parciales, de los cuales dos hacen referencia a la situación económica actual y esperada del hogar entrevistado, otros dos atienden a la situación económica actual y esperada del país y el quinto índice refleja qué tan propicio es el momento actual para la compra de bienes de consumo duraderos. Los conceptos de los cinco índices mencionados son:

1. Comparada con la situación económica que los miembros de este hogar tenían hace 12 meses, ¿cómo cree que es su situación en este momento?
2. ¿Cómo considera usted que será la situación económica de los miembros de este hogar dentro de 12 meses, respecto a la actual?
3. ¿Cómo considera usted la situación económica del país hoy en día comparada con la de hace 12 meses?
4. ¿Cómo considera usted que será la condición económica del país dentro de 12 meses respecto a la actual situación?
5. Comparando la situación económica actual con la de hace un año, ¿cómo considera en el momento actual las posibilidades de que usted o alguno de los integrantes de este hogar realice compras tales como muebles, televisor, lavadora, otros aparatos electrodomésticos, etcétera?.

En cada una de las cuatro primeras preguntas los entrevistados tienen cinco opciones de respuesta: mucho mejor, mejor, igual, peor y mucho peor. En la quinta pregunta las opciones son: mayores, iguales y menores. Los ponderadores utilizados para cada opción de respuesta se dan en la Tabla 1.

Tabla 1. Ponderadores utilizados en el ICC.

Opción de respuesta	Ponderador
Mucho mejor o mayores	1.00
Mejor	0.75
Igual	0.50
Peor	0.25
Mucho peor o menores	0.00

Fuente: INEGI 2010.

Ahora bien, el Índice de Inflación (II) es proporcionado por el Banco de México, el cual es el banco central del Estado Mexicano, constitucionalmente

autónomo en sus funciones y administración, cuya finalidad es proveer a la economía del país de moneda nacional. En el desempeño de esta encomienda tiene como objetivo prioritario procurar la estabilidad del poder adquisitivo de dicha moneda. Adicionalmente, le corresponde promover el sano desarrollo del sistema financiero y propiciar el buen funcionamiento de los sistemas de pago. La información que se presenta se obtuvo del INEGI, cabe mencionar que el índice base igual a 100 corresponde a la segunda quincena de junio de 2002, (INEGI, 2010a) y (INEGI, 2010b).

La política cambiaria en México, es responsabilidad de la Comisión de Cambios, integrada por funcionarios de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público y del Banco de México. A finales de 1994, dicha Comisión acordó que el tipo de cambio fuese determinado libremente por las fuerzas del mercado.

El tipo de cambio del dólar (FIX) es determinado por el Banco de México con base en un promedio de las cotizaciones del mercado de cambios al mayo-reo para operaciones liquidables el segundo día hábil bancario siguiente, los datos para este estudio se obtuvieron del Banco de México (Banxico, 2010).

En este trabajo se eligieron las variables II y FIX como variables independientes de la variable respuesta ICC, puesto que como se observa de las preguntas que se realizan a los consumidores para obtener tal índice, éstas se refieren a situaciones económicas pasadas, presentes y futuras, por lo que consideramos que tanto el II como el FIX inciden de manera directa sobre las respuestas, realizadas de manera subjetiva, de los encuestados, puesto que están íntimamente relacionadas con sus creencias y expectativas de la situación económica personal, familiar y del país, por lo que están basadas en la posibilidad y no en términos de la teoría de probabilidades, por lo que este tipo de situaciones son muy propicias para utilizar principalmente la modelización de tipo borroso, donde más que utilizar valores exactos (“crisp” en inglés), se consideran intervalos de confianza posibilísticos.

Además, respecto al modelado con regresión borrosa se indica en De Andrés Sánchez J. y Terceño Gómez A., (2002):

Respecto a esta forma de modelización, creemos que de alguna forma, ofrece ciertas ventajas sobre la tradicional técnica de regresión. En primer lugar, porque las estimaciones que obtengamos después de ajustar los coeficientes borrosos, no serán variables aleatorias, y por tanto, en muchas ocasiones de difícil tratamiento numérico, sino números borrosos, cuyo tratamiento es más sencillo.

2. Regresión por mínimos cuadrados

En términos generales, la técnica usual de regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), consiste en ajustar un hiperplano tal que la distancia cuadrada de las observaciones al hiperplano sea mínima. Se considera que existen elementos de perturbación estocásticos e independientes, que denotamos como ε_j , los cuales se acostumbra considerar que siguen una distribución normal, con media cero y varianza σ^2 . Se desea encontrar una estimación de los parámetros a_i , denotada como \hat{a}_i , para $i = 0, 1, 2, \dots, m$, por lo que se desea minimizar $z = \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{Y}_j)^2$, donde \hat{Y}_j es el valor estimado de $E[Y_j]$ como función de las variables $X_{0,j}, X_{1,j}, \dots, X_{m,j}$, y n es el número de observaciones; después de hallar los valores estimados de a_0, a_1, \dots, a_m , es decir:

$$\hat{Y}_j = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_{1,j} + \hat{a}_2 X_{2,j} + \dots + \hat{a}_m X_{m,j} \quad (1)$$

Finalmente, los parámetros \hat{a}_i , se pueden encontrar mediante:

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2)$$

Bajo los supuestos de normalidad, independencia y homocedasticidad, los estimadores \hat{a}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$, del MCO son MELI, i.e., son estimadores lineales insesgados con varianza mínima.

Antes de calcular estos estimadores se deben verificar los supuestos señalados anteriormente, lo que en muchas ocasiones (si no es que en la mayoría) es difícil de verificar o se pasa por alto, ya sea porque se cuenta con una pequeña cantidad de observaciones (Y_j, X_j), $j = 1, 2, \dots, n$, o éstas ni siquiera son soportables por el tipo de problema y/o escalas de medición utilizadas, esto sin considerar que el modelamiento de tipo lineal (o linealizable) sea el adecuado.

Por lo anterior, si tan sólo contamos con una muestra pequeña, la cual en sí ya puede contener cierto ruido con función de probabilidad desconocida (además es casi imposible considerar todas las variables que son importantes o indicativas para cualquier modelo), es interesante suponer un modelamiento de tipo borroso, es decir, $Y_j = \hat{a}_0 X_{0,j} + \hat{a}_1 X_{1,j} + \dots + \hat{a}_m X_{m,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, donde \hat{a}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ son números borrosos. Por supuesto, de manera

análoga a la de MCO, una vez que se disponga de la muestra, el objetivo será el de ajustar los coeficientes \hat{a}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ bajo cierto criterio de mejor ajuste. Obsérvese que en este caso el término de error no queda introducido en el modelo, sino que se incorpora en los coeficientes al ser éstos números borrosos.

3. Regresión borrosa

Con el fin de facilitar la lectura del presente trabajo, sólo presentamos algunos conceptos, en cualquier caso, para una exposición más detallada de los mismos puede consultarse por ejemplo Sakawa y Yano (1992), Tanaka e Ishibuchi (1992), así como De Andrés Sánchez y Terceño Gómez (2002) y De Andrés Sánchez y Terceño Gómez (2002a), para los conceptos y definiciones nos hemos basado en las dos últimas referencias.

Los modelos de regresión borrosa, tienen como objetivo, al igual que toda técnica de regresión el determinar una relación de tipo funcional entre una variable dependiente (llamada también de respuesta) Y respecto de una o varias variables independientes o explicativas, digamos $X = (X_0, X_1, \dots, X_m)$, $X_0 = 1$. En nuestro caso Y será el índice de confianza del consumidor y el vector X el índice de inflación y la cotización del dólar.

En general, para obtener un modelo de regresión borrosa se necesita considerar los tres puntos siguientes:

1. Determinación de los coeficientes de la regresión.
2. Determinación de la bondad del ajuste.
3. Medición de la congruencia de las estimaciones.

Cada punto se desarrolla a continuación.

3.1 Determinación de los coeficientes de la regresión

Inicialmente se tiene una muestra: $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n)$, donde:

1. Se considerará cada Y_j como un intervalo real (Y_j^1, Y_j^2) , $j = 1, 2, \dots, n$, que está determinado a través de su centro y de su radio como:

$$Y_j = \langle Y_{jC}, Y_{jR} \rangle \quad (3)$$

donde:

$$Y_{jC} = \frac{Y_j^1 + Y_j^2}{2} \quad Y_{jR} = \frac{Y_j^2 - Y_j^1}{2} \quad (4)$$

Por supuesto, si Y_j es un número cierto o exacto, $Y_{jR} = 0$.

2. Asumimos que la relación existente entre la variable dependiente Y , que puede venir dada por un intervalo de confianza, y las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_m es lineal, de forma que:

$$Y = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_mx_m. \quad (5)$$

donde A_i , $i = 0, 1, \dots, m$ son intervalos de confianza posibilísticos de la forma:

$$A_i = \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (6)$$

De esta forma, si denominamos como $\hat{Y}_j = \langle \hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR} \rangle$ al intervalo de confianza correspondiente al valor que estimamos para la j -ésima variable independiente, Y_j , después de hallar dicha estimación se realizaría mediante la suma: $\hat{Y}_j = A_0 + A_1X_{1j} + A_2X_{2j} + \dots + A_mX_{mj}$, $j = 1, 2, \dots, n$, podemos expresarla a través de sus centros y sus radios, que serán funciones de los centros y de los radios de los parámetros A_i , $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\langle \hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR} \rangle = \sum_{i=0}^m \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle X_{ij} = \quad (7)$$

$$\langle \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3.2 Determinación de la bondad del ajuste

La bondad del ajuste es inversa a la incertidumbre (amplitud) de las estimaciones de las observaciones, la cual se obtiene como:

$$\hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| = a_{0R} + a_{1R} |X_{1j}| + \dots + a_{mR} |X_{mj}|. \quad (8)$$

Por lo que, se desea minimizar la “incertidumbre total” (amplitud total) de todas las estimaciones, es decir:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \quad (9)$$

3.3 Medición de la congruencia de las estimaciones

Los parámetros A_0, A_1, \dots, A_m , deben satisfacer no sólo que la incertidumbre de \hat{Y}_j sea la menor posible, sino que \hat{Y}_j sea lo más congruente posible con la observación de la variable explicada que pretenden aproximar, Y_j . En este contexto, cabe definir dos aproximaciones a “ \hat{Y}_j congruente con Y_j ”.

La primera aproximación Tanaka e Ishibuchi (1992), consistiría en exigir que la observación esté incluida dentro de su estimación, por lo que se tendrá:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} \leq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

y

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} \geq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

Otra aproximación Sakawa y Yano (1992), consistiría en exigir que la observación sea “igual” a su estimación, es decir, $Y_j = \hat{Y}_j$, por lo que se tendrá:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} \leq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

y

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} \geq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Respecto a la determinación de los centros de los parámetros, existen dos enfoques principales:

- a) Tanaka e Ishibuchi determinan los centros $a_{0C}, a_{1C}, \dots, a_{mC}$ a la vez que determinan los radios $a_{0R}, a_{1R}, \dots, a_{mR}$.
- b) En cambio Savic y Pedrycz determinan el vector de centros $a_C^T = (a_{0C}, a_{1C}, \dots, a_{mC})$ mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Por tanto, si se busca minimizar la función z dada en la ecuación 5 se obtienen los siguientes programas de optimización para determinar los parámetros A_j :

- i) Cuando se desea que las estimaciones \hat{Y}_j contengan las variables independientes observadas, Y_j , es decir: $Y_j \subseteq \hat{Y}_j, \forall j$, se deberá resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}|, \quad (14)$$

sujeto a las restricciones 15 a 17 dadas por:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \leq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \geq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (17)$$

- ii) Si las estimaciones que se obtienen de las variables independientes \hat{Y}_j son iguales a las realmente observadas, $Y_j, j = 1, 2, \dots, n$, es decir, $\hat{Y}_j = Y_j$, se deberá resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \quad (18)$$

sujeto a las restricciones 19 a 21 dadas por:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \leq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \geq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

$$a_{iR} \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (21)$$

En cada sistema anterior, si se decide determinar los centros y los radios de los parámetros A_0, A_1, \dots, A_m , simultáneamente las variables decisión serán tanto $a_{0C}, a_{1C}, \dots, a_{mC}$ como $a_{0R}, a_{1R}, \dots, a_{mR}$, mientras que si los centros se han prefijado previamente mediante MCO, las variables decisión quedarían reducidas al conjunto $a_{0R}, a_{1R}, \dots, a_{mR}$.

3.4 Predicción con regresión borrosa

Tras haber ajustado los parámetros de la regresión, obtendremos la siguiente relación entre la variable explicada y las explicativas:

$$\hat{Y} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 X_1 + \dots + \hat{A}_m X_m. \quad (22)$$

Por tanto, la predicción de Y , que notaremos como \hat{Y}_e , será:

$$\hat{Y}_e = \langle \hat{Y}_{eC}, \hat{Y}_{eR} \rangle = \sum_{i=0}^m \langle \hat{a}_{iC}, \hat{a}_{iR} \rangle X_{ie} = \langle \sum_{i=0}^m \hat{a}_{iC} X_{ie}, \sum_{i=0}^m \hat{a}_{iR} |X_{ie}| \rangle, \quad \text{con} \quad X_{0,e} = 1. \quad (23)$$

4. Resultados

Se cuenta con información de tipo histórico desde enero de 2006 a diciembre de 2009. En este estudio se trabajó con los promedios trimestrales. El icc considerado en este ensayo como la variable respuesta Y se pudo “fuzzificar”,

utilizando la regla empírica, que no depende de ningún tipo de distribución de probabilidad para valores de tipo cuantitativo, en el intervalo de una desviación estándar alrededor del valor promedio se concentran aproximadamente 65-68% de los datos. Por lo anterior, se obtuvieron los intervalos de confianza borrosos $Y_j = < Y_{jC}, Y_{jR} >$, donde el subíndice j se refiere al trimestre correspondiente. Y_{jC} será igual al índice de confianza del consumidor, que es el promedio de los índices explicados en la introducción del presente trabajo, e Y_{jR} es la desviación estándar de los valores de los índices considerados en el mes. Los datos utilizados en el presente trabajo se obtuvieron de INEGI, (2010a y 2010b); y se reportan en la Tabla 2.

Tabla 2. Promedios trimestrales de ICC, II y FIX.

Año/trim.	ICC/ Y_C	ICC/ Y_R	II	FIX
2006/01	109.41	4.31	116.82	10.60
2006/02	109.06	2.60	117.25	11.18
2006/03	110.35	2.84	117.47	10.95
2006/04	108.07	3.61	119.73	10.89
2007/01	104.81	3.95	121.55	11.02
2007/02	106.27	2.54	122.00	10.87
2007/03	106.04	2.07	122.23	10.96
2007/04	102.34	4.68	124.30	10.85
2008/01	102.39	3.21	126.08	10.81
2008/02	94.23	5.39	127.59	10.43
2008/03	88.87	7.48	128.84	10.32
2008/04	83.29	8.87	131.55	13.04
2009/01	80.09	12.24	134.07	14.38
2009/02	80.47	13.39	135.32	13.31
2009/03	82.95	13.63	135.82	13.27
2009/04	78.42	14.53	137.36	13.06

Fuente: INEGI 2010.

Cabe mencionar que se utilizó el paquete estadístico NCSS para resolver los modelos por MCO, y el paquete LINDO para resolver los modelos de programación lineal obtenidos para encontrar los modelos borrosos. Los resultados que se obtuvieron para los diferentes modelos propuestos fueron:

1. Modelos por mínimos cuadrados ordinarios, obteniéndose las siguientes rectas ajustadas de regresión junto con sus coeficientes de determinación en la Tabla 3.

Tabla 3. Rectas ajustadas por el modelo de regresión ordinario.

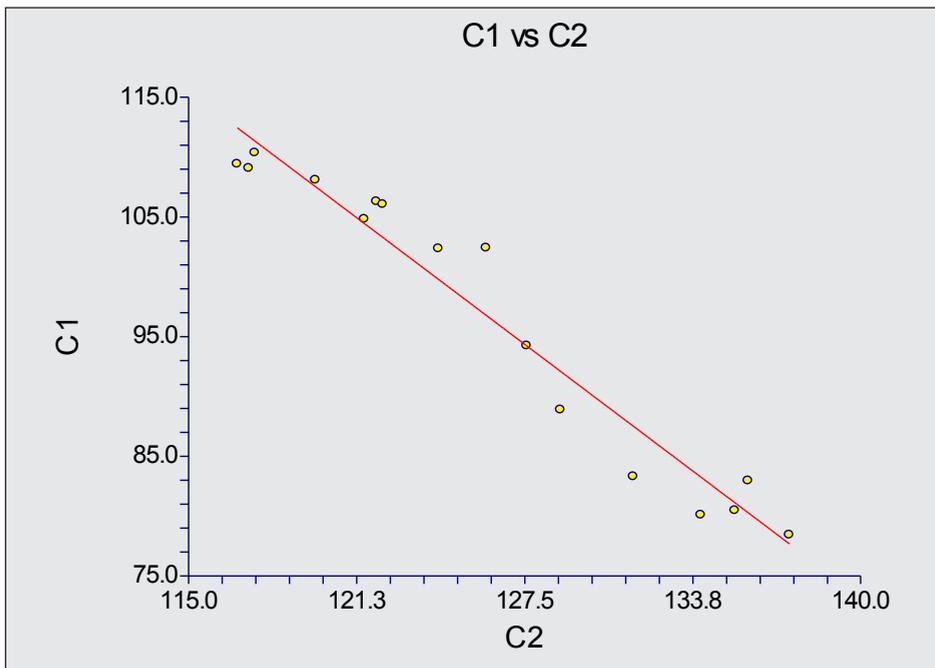
Modelo de Regresión	R ²
$\hat{Y}_j = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 II_{1,j} = 310.12 - 1.69 II_{1,j}$	0.9482
$\hat{Y}_j = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 FIX_{1,j} = 184.79 - 7.58 FIX_{1,j}$	0.6451
$\hat{Y}_j = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_{1,j} + \hat{a}_2 X_{2,j} = 302.57 - 1.52 II_{1,j} - 1.19 FIX_{2,j}$	0.9547

Fuente: Elaboración propia.

Es interesante observar en la Tabla 3, que el coeficiente de correlación para el modelo que considera sólo a la variable independiente FIX es muy bajo con respecto al modelo que sólo considera como variable independiente el II. Además, es posible observar que el coeficiente de correlación del modelo que considera como variables independientes tanto el FIX como el II, es ligeramente superior al modelo que sólo considera la variable II. De lo anterior es posible afirmar *grosso modo*, que la variable FIX no proporciona mucha información sobre el comportamiento (lineal) del ICC.

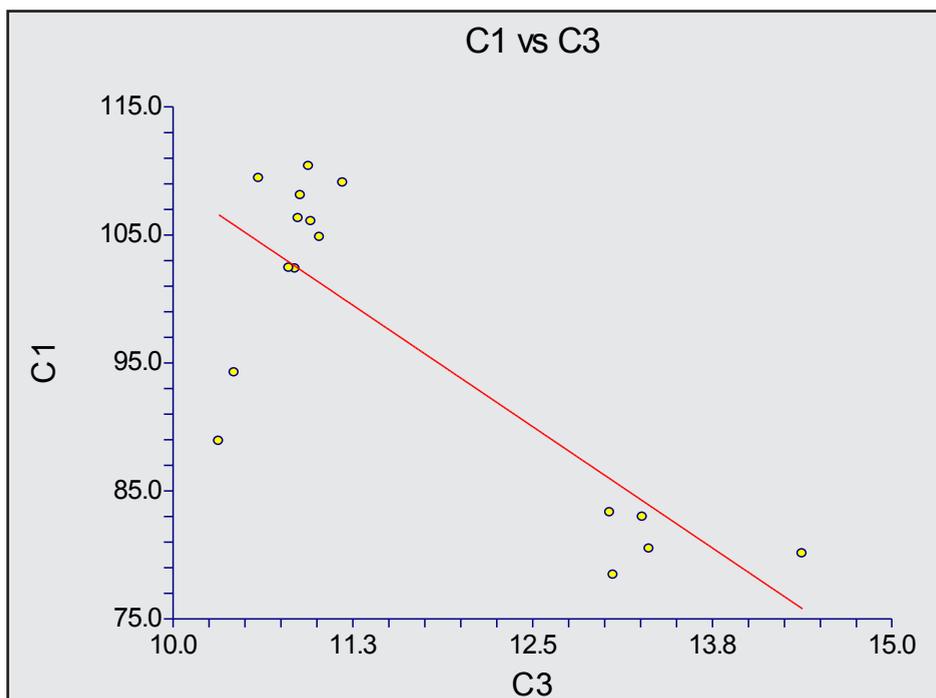
En las Figuras 1 y 2 se muestran las rectas ajustadas por MCO de los dos primeros modelos, es interesante observar en los resultados, que las ordenadas al origen en los tres modelos obtenidos por MCO, tienen un valor mayor de 180, lo cual no proporciona una interpretación adecuada al problema.

Figura 1. Gráfica de la recta de ajuste por MCO, C1=ICC, C2 = II.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Gráfica de la recta de ajuste por MCO, C1=ICC, C3=FIX.



Fuente: Elaboración propia.

Cabe mencionar que en un sentido estadístico estricto, con el modelo de regresión por MCO, sólo es permitido pronosticar dentro del rango de valores observados, aunque en la práctica es usual utilizar este modelo ya sea para interpolar o extrapolar, pero como en todo método de pronóstico, hay que tener cuidado, ya que se considera estacionariedad de las observaciones. En cambio, con los modelos borrosos, este tipo de valores se pueden considerar dentro del intervalo de confianza posibilístico, es decir, un intervalo borroso.

Para el modelo por MCO, se obtuvieron los valores a 95% de confianza (probabilístico), expuestos en la Tabla 4.

Tabla 4. Límites de los intervalos de confianza para el MCO.

Parámetro	Límite inferior	Límite superior
a_0	272.13	333.01
a_1	-1.87	-1.17
a_2	-3.09	0.70

Fuente: Elaboración propia.

2. Modelo de Tanaka-Ishibuchi ($\hat{Y}_j \subseteq Y_j, \forall j$), optimizando \hat{a}_{iC} y optimizando $\hat{a}_{iR}, i = 0,1,2$. Para este modelo se encontraron los estimadores borrosos de la forma $\langle \hat{a}_{iC}, \hat{a}_{iR} \rangle, i = 0,1,2$, mediante el modelo dado por la ecuación 14 y las restricciones dadas por 15 a 17, obteniéndose:

$$\hat{Y} = \langle 91.396, 0 \rangle + \langle 0, 0 \rangle II + \langle 0, 2.11 \rangle FIX,$$

con un valor de la función objetivo de $z = 391.63$.

En la Figura 3 se muestra la gráfica, donde:

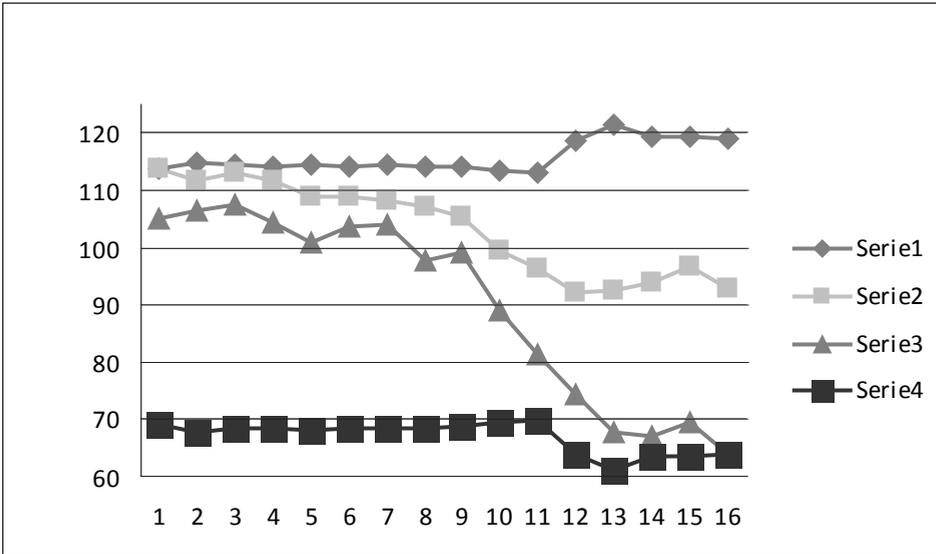
$$\text{Serie 1: } \hat{Y} = 91.396 + 2.11FIX_{2j},$$

$$\text{Serie 2: } Y_{jC} + Y_{jR}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{Serie 3: } Y_{jC} - Y_{jR}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{Serie 4: } \hat{Y} = 91.396 - 2.11FIX_{2j},$$

Figura 3. Gráfica del modelo de Tanaka-Ishibuchi ($\hat{Y}_j \subseteq Y_j, \forall j$) para el ejemplo.



Fuente: Elaboración propia.

Se graficaron los valores considerando el intervalo de confianza de 95% para estimadores de los parámetros obtenidos y presentados anteriormente, junto con los valores del modelo estimado por MCO, junto con el intervalo borroso proporcionado por Tanaka e Ishibuchi, y se obtuvo la gráfica de la Figura 4, donde:

$$\text{Serie 1: } \hat{Y}_j = 333.00 - 1.17I_{1,j} + 0.70FIX_{2,j}.$$

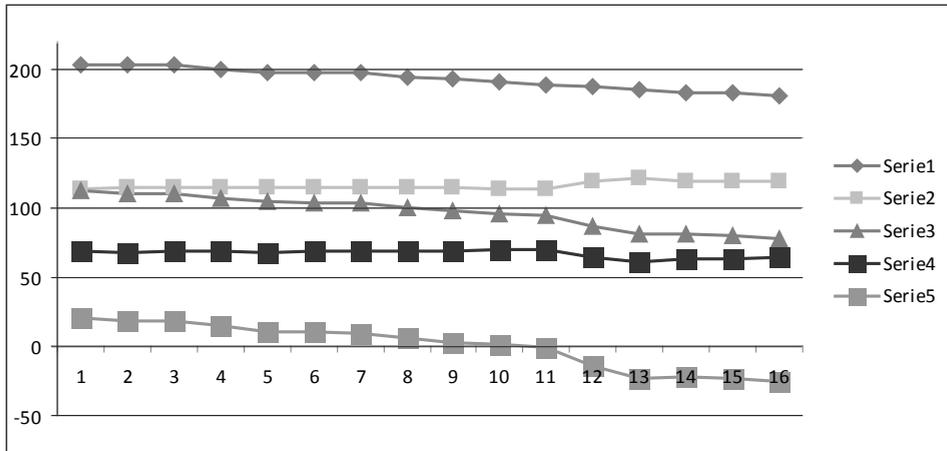
$$\text{Serie 2: } \hat{Y}_j = 91.396 + 2.11FIX_j,$$

$$\text{Serie 3: } \hat{Y}_j = 302.57 - 1.52I_{1,j} - 1.19FIX_{2,j}.$$

$$\text{Serie 4: } \hat{Y}_j = 91.396 - 2.11FIX_j$$

$$\text{Serie 5: } \hat{Y}_j = 272.13 - 1.87I_{1,j} - 3.09FIX_{2,j}.$$

Figura 4. Comparación del intervalo borroso vs. intervalo probabilístico.



Fuente: Elaboración propia.

3. Modelo de Sakawa-Yano ($\hat{Y}_j = Y_j, \forall j$), optimizando tanto \hat{a}_{iC} como \hat{a}_{iR} , $i = 0,1,2$. Para este modelo se encontraron los estimadores borrosos de la forma $(\hat{a}_{iC}, \hat{a}_{iR}), i = 0,1,2$, mediante el modelo dado por la ecuación 18 y las restricciones dadas por 19 a 21, obteniéndose:

$$\hat{Y} = <100.498, 0> + <0,0> II + <0, 0.639> FIX,$$

con un valor de la función objetivo de $z = 118.90$.

En la Figura 5 se muestra la gráfica donde:

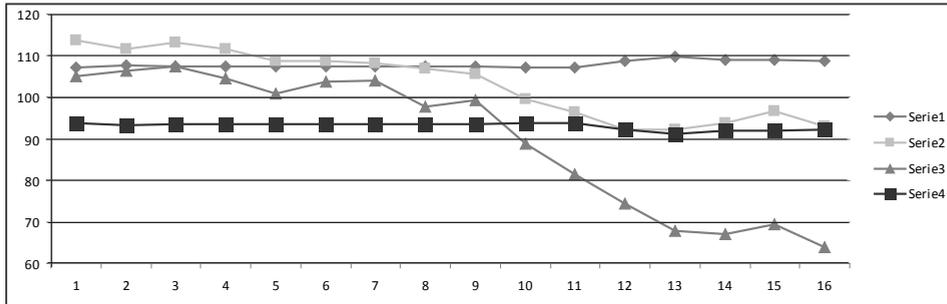
$$\text{Serie 1: } \hat{Y} = 100.498 + 0.639FIX_j,$$

$$\text{Serie 2: } Y_{jC} + Y_{jR}, \quad j = 1,2, \dots, n,$$

$$\text{Serie 3: } Y_{jC} - Y_{jR}, \quad j = 1,2, \dots, n,$$

$$\text{Serie 4: } \hat{Y} = 100.498 - 0.639FIX_j,$$

Figura 5. Gráfica del modelo de Sakawa-Yano ($\hat{Y}_j = Y_j, \forall j$) para el ejemplo.



Fuente: Elaboración propia.

Se graficaron los valores considerando el intervalo de confianza de 95% para estimadores de los parámetros obtenidos y presentados anteriormente, junto con los valores del modelo estimado por MCO, junto con el intervalo borroso proporcionado por Sakawa-Yano, obteniéndose la gráfica de la Figura 6, donde:

$$\text{Serie 1: } \hat{Y}_j = 333.00 - 1.17II_{1,j} + 0.70FIX_{2,j}.$$

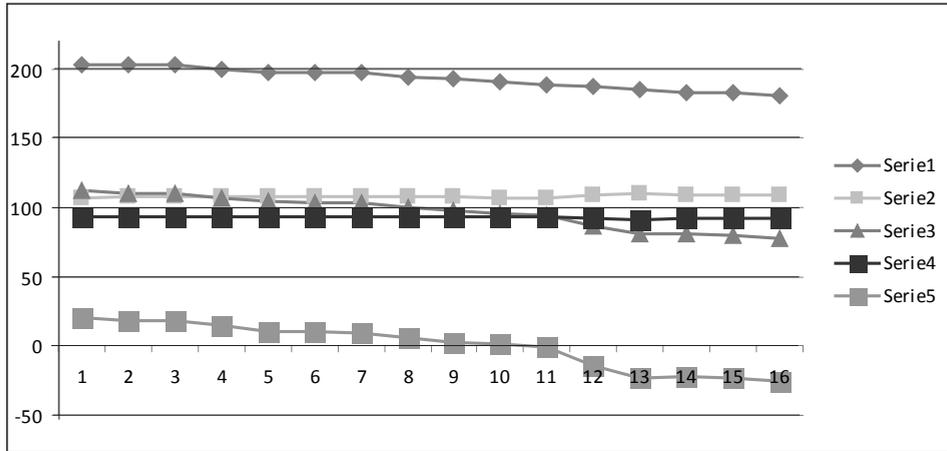
$$\text{Serie 2: } \hat{Y}_j = 100.498 + 0.639FIX_j.$$

$$\text{Serie 3: } \hat{Y}_j = 302.57 - 1.52II_{1,j} - 1.19FIX_{2,j}.$$

$$\text{Serie 4: } \hat{Y}_j = 100.498 - 0.639FIX_j.$$

$$\text{Serie 5: } \hat{Y}_j = 272.13 - 1.87II_{1,j} - 3.09FIX_{2,j}.$$

Figura 6. Comparación del intervalo borroso vs. el intervalo probabilístico.



Fuente: Elaboración propia.

En las figuras 3 y 5 se aprecian los valores (intervalos) observados con respecto a los valores (intervalos) calculados para los modelos borrosos utilizados. En las figuras 4 y 6 se muestran los intervalos de confianza posibilísticos, la curva de ajuste por MCO y los intervalos de confianza probabilísticos a 95%. Se observa que los intervalos de confianza posibilísticos obtenidos por los modelos borrosos, tienen menor amplitud que los probabilísticos a 95%.

5. Conclusiones

Recordemos que un primer paso fue “fuzzificar” la variable respuesta para poder utilizar la modelación borrosa al tomar el valor promedio más menos una desviación estándar.

Como se deduce de los resultados, dos de los modelos de regresión por MCO tienen un coeficiente de correlación alto, pero a pesar de esto, se observa que tiene una ordenada al origen de más de 300, lo que no parece ser un buen modelo del comportamiento real del ICC con respecto del II y del FIX.

En cambio, los modelos borrosos Tanaka-Ishibuchi y Sakawa-Yano, muestran ser más apropiados para este estudio, porque al considerar que a partir de un valor del ICC de 91.396 (100.498) existirá una variación de aproximadamente 2.11 (0.639) unidades por cada punto porcentual en que se incremente el FIX, lo que parece más lógico para este problema en particular. Conside-

rando adicionalmente la información que se obtuvo de los modelos de MCO, se completa el estudio diciendo que la variación será negativa. El modelo de Tanaka-Ishibuchi es el que tiene el valor menor de la incertidumbre total.

En este trabajo no se consideraron los modelos borrosos donde se obtenían *a priori* los centros de los parámetros por MCO, por que como se observó, al menos el valor de la ordenada al origen obtenida por MCO, no tiene una buena interpretación con respecto al problema original.

Como una observación interesante para los modelos por MCO, la variable más importante fue Π , contrariamente a los modelos borrosos en el que fue la variable FIX . De la observación anterior, podemos decir que, sólo se están presentando varios modelos, los cuales en realidad pueden considerarse como complementarios para realizar el estudio, y que como modelos, nos permiten tener un mejor conocimiento del fenómeno real.

Cabe mencionar que este estudio se puede ampliar considerando otros criterios de "fuzzificación", así como otros tipos de números borrosos y diferentes modelos.

Bibliografía

- Banxico, 2010. [Web en línea]. Disponible desde Internet en: <http://www.banxico.org.mx/PortalesEspecializados/tiposCambio/TiposCambio.html> [con acceso el 10 de marzo de 2010].
- Buckey, J.J. e Y. Qu (1990). "On using α -cuts to evaluate fuzzy equations". *Fuzzy Sets and Systems*, 38, pp. 309-312.
- De Andrés Sánchez, J. y A. Terceño Gómez (2002). *Programación matemática y regresión lineal con instrumentos de la teoría de los subconjuntos borrosos*. Universidad Rovira i Virgili/Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales/ Departamento de Gestión de Empresas.
- _____ (2002a). *La utilización de la regresión borrosa para la predicción económica: Un análisis comparativo con mínimos cuadrados ordinarios*. Universidad Rovira i Virgili/Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales/ Departamento de Gestión de Empresas.
- _____ (2003). "Estimating a term structure of interest rates for fuzzy financial pricing by using 3 fuzzy regression methods". *Fuzzy Sets and Systems*, 139 (2), pp. 313-331.

- De los Cobos Silva, S.G., J. Goddard Close, M.A. Gutiérrez Andrade y A. Terceño Gómez (2005). "Comparación de métodos de regresión usual, borrosa y de pronóstico, para tramos carreteros: Caso de estudio". *XII Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión Empresarial Fuzzy (SIGEF)*, pp. 517-527.
- Duboids, D. y H. Prade (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Nueva York, Academic Press.
- Fedrizzi, M. y W. Ostasiewicz (1993). "Towards fuzzy modelling in economics". *Fuzzy Sets and Systems*, 54, pp. 259-268.
- INEGI. 2010a. [Web en línea]. Disponible desde Internet en: <http://www.inegi.org.mx> [con acceso el 10 de marzo de 2010].
- INEGI. 2010b. [Web en línea]. Disponible desde Internet en: <http://dgcnesyp.inegi.org.mx> [con acceso el 10 de marzo de 2010].
- Johnston, J. (1987). *Métodos de econometría*. Barcelona, Vicens Vives.
- Kaufmann, A., J. Gil Aluja y A. Terceño (1994). *Matemática para la economía y la gestión de empresas*. Barcelona, Foro Científico.
- Sakawa, M. y H. Yano (1992). "Fuzzy regression and its applications", en J. Kacprzyk y M. Fedrizzi (eds.). *Fuzzy regression analysis*. Heidelberg, Physica-Verlag, pp. 91-101.
- Savic, D. y W. Pedrycz (1992). "Fuzzy linear models: construction and evaluation". en J. Kacprzyk y M. Fedrizzi (eds.). *Fuzzy regression analysis*. Heidelberg, Physica-Verlag, pp. 47-60.
- Tanaka, H. (1987). "Fuzzy data analysis by possibilistic linear models". *Fuzzy Sets and Systems*, 24, pp. 363-375.
- _____ y H. Ishibuchi (1992). "A possibilistic regression analysis based on linear programming". en J. Kacprzyk y M. Fedrizzi (eds.). *Fuzzy regression analysis*. Heidelberg, Physica-Verlag, pp. 47-60.
- Wang, H.F. y R.C. Tsaur (2000). "Insight of a fuzzy regression model". *Fuzzy Sets and Systems*, 112, pp. 355-369.
- Yen, K.K., S. Ghoshray y G. Roig (1999). "A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients". *Fuzzy Sets and Systems*, 106, pp. 167-177.

Integración fraccionaria y valor en riesgo

Francisco López Herrera*

Edgar Ortiz**

Raúl de Jesús Gutiérrez***

1. Memoria larga y mercados financieros	33
2. Metodologías ARFIMA Y BACKTESTING	39
3. Resultados empíricos	43
4. Conclusiones	47

Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de evaluadores anónimos y aceptan la responsabilidad por cualquier deficiencia del artículo.

* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración, División de Investigación. franciscolopezherrera@yahoo.com.mx

** Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias Políticas y Sociales. edgaro@servidor.unam.mx

*** Universidad Autónoma del Estado de México, Facultad de Economía. rig2005mx@yahoo.com.mx

RESUMEN

Investigaciones recientes sobre la volatilidad de los mercados de valores resaltan los problemas asociados con la correlación de precios dependiente en el tiempo, así como sus implicaciones en el comportamiento estocástico de los rendimientos. Numerosos enfoques y modelos empíricos han sido aplicados para examinar dicho comportamiento, pero concentrándose en el caso de los países desarrollados. Pocos estudios se han avocado a analizar la presencia de memoria larga en los mercados emergentes. Este trabajo intenta superar esas limitaciones mediante el examen de la memoria larga de los rendimientos diarios del índice de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) para el periodo enero de 1983 a diciembre de 2009. Se aplican modelos de la familia ARCH para analizar la volatilidad del mercado y para modelar los rendimientos se especifica un modelo ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average). Se realizan varias estimaciones suponiendo diferentes distribuciones para los errores (distribución normal, t de Student y t de Student asimétrica). Posteriormente, las volatilidades estimadas se utilizan para calcular el Valor en Riesgo (VaR) para las posiciones larga y corta. La evidencia empírica confirma la presencia de memoria larga manifiesta en la significancia del parámetro de integración fraccionaria para los rendimientos observados. Este resultado sugiere la posibilidad de predecir los precios futuros y obtener ganancias extraordinarias, contrario a lo que afirma la teoría de los mercados eficientes. Finalmente, es de destacar que el análisis efectuado sugiere que los modelos de volatilidad asimétrica podrían medir mejor el riesgo de mercado, especialmente cuando se considera que el proceso de los errores sigue una distribución t de Student sesgada.

Palabras clave: Valor en Riesgo, riesgo de mercado, memoria larga, modelos ARFIMA, modelos GARCH.

Clasificación JEL: C01, C13, C18, C22, C58, G11, G14, G32

ABSTRACT

Recent studies on the volatility of stock markets stress problems associated with time varying correlations of prices and their implications to the stochastic behavior of returns. Numerous empirical approaches and models have been applied to examine that behavior, but emphasizing the case of the developed countries. Few studies have been devoted to identify the presence of long memory in emerging markets. This work is aimed to overcome such limitation through the examination of the long memory behavior of daily returns of the Mexican Stock Market Index for the period January 1983 to December 2009. ARCH family models are used to analyze the volatility of the market and an ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average) model is specified to model the returns. Estimations are made assuming different distributions for the errors (normal, Student t , and asymmetric Student t distributions). Then, the estimated volatilities are used to compute the Value at Risk (VaR) for both long and short positions. The empirical evidence confirms the presence of long memory manifested in the significant level of the fractional differencing parameter for the observed returns. This finding suggests the possibility of predicting future prices and obtaining abnormal profits, contrary to the assertions from the efficient markets theory. The analysis also suggests that the asymmetric volatility models could be better fitted to measure market risk, especially when a Student t skewed distribution is assumed for the error process.

Keywords: Value at Risk, market risk, long memory, ARFIMA models, GARCH models.

JEL classification: C01, C13, C18, C22, C58, G11, G14, G32

1. Memoria larga y mercados financieros

Las series que se dice tienen memoria larga o dependencia de largo plazo se caracterizan porque observaciones muy distantes en el tiempo están correlacionadas de manera no trivial, por lo cual al estimar empíricamente las funciones de autocorrelación se puede observar un decaimiento lento en ellas debido a los efectos multiplicadores de largo plazo de *shocks* transitorios presentes en esas series. La posible presencia de memoria larga en los rendimientos y volatilidad de los mercados financieros ha recibido marcada atención en la literatura financiera de las últimas décadas. Su existencia indica que la información presente está altamente correlacionada con información pasada; esto es, las realizaciones de las series no son independientes en el tiempo de tal manera que rendimientos distantes influyen en realizaciones futuras. De esta forma, la presencia de memoria larga en una serie financiera facilita la predicción y abre la posibilidad de obtener utilidades especulativas, al contrario de lo que podría esperarse de acuerdo con las predicciones de la teoría de los mercados eficientes en cuanto a la aleatoriedad en los cambios observables en los precios. Otra implicación importante es la aplicación de los modelos para el análisis y la administración del riesgo que requieren de series de varianzas o volatilidades de los rendimientos, como es el caso del Valor en Riesgo (VaR) que es ampliamente utilizado como medida del riesgo de mercado. La identificación del comportamiento de memoria larga en los rendimientos de los activos financieros que son parte de un portafolio de inversión debe producir resultados más conservadores y confiables en comparación con los que se obtienen en la medición del VaR cuando no se toma en cuenta la presencia de memoria larga en la distribución de los rendimientos.

Un enfoque importante para detectar la presencia de memoria larga ha sido el de los modelos de series de tiempo ARMA con integración fraccionaria (ARFIMA), introducidos por Granger (1980) y Granger y Joyeux (1980). La evidencia presentada en cuanto a la existencia de memoria larga en los rendimientos accionarios es mixta; por ejemplo, Mills (1993) muestra evidencia de su presencia en el mercado estadounidense, en tanto que Lo (1991) ofrece

evidencia contraria. Por tanto, es posible afirmar que, en general, la existencia de memoria larga en los mercados desarrollados sigue siendo un debate abierto, porque hay evidencia significativa de memoria larga en las volatilidades de los rendimientos de esos mercados. La evidencia sobre los mercados emergentes confirma, aunque con algunas excepciones, la presencia de memoria larga tanto en los rendimientos como en las volatilidades. Baillie y Kapetanios (2005) identifican varios mercados en los cuales se observan efectos de memoria larga. Otros estudios sobre memoria larga, con énfasis en los rendimientos accionarios, incluyen Jacobsen (1996), Lobato y Savin (1998), Barkoulas, Baum y Travlos (1991), Tolvi (2003), Caporale y Gil-Alana (2004), Lux y Kaizoji (2007), Gil-Alana (2006). Lo (1991), Crato y de Lima (1994), Lobato y Savine (1998) y Caporale y Gil-Alana (2004) no encuentran evidencia de memoria larga.

Cabe destacar el estudio de Huang y Yang (1999) acerca de los índices NYSE y NASDAQ, en el que al utilizar datos intradía y aplicar una técnica modificada de rango re-escalado (R/S) comprueban la existencia de memoria larga en estos dos mercados. De manera similar, Conrad (2007), utiliza especificaciones FIGARCH y HYGARCH y también encuentra efectos significativos de memoria larga en la volatilidad del mercado de valores de Nueva York (NYSE). Finalmente, Cuñado, Gil-Alana, y Pérez de Gracia (2008) exploran el comportamiento del índice S&P 500 para el período de agosto de 1928 a diciembre de 2006. Sus resultados sugieren que los cuadrados de los rendimientos presentan un comportamiento de memoria de largo plazo. Su evidencia también indica que la volatilidad es más persistente en los mercados a la baja que en los mercados a la alza.

Lo (1991) y Cheung y Lai (1995), Yamasaki *et al.* (2005) y Wang *et al.* (2006) no encuentran evidencia de memoria larga en una muestra de acciones de Estados Unidos. Mills (1993) muestra evidencia de memoria larga para una muestra mensual de rendimientos del mercado de valores del Reino Unido. Igualmente, Andreano (2005), aplicando la metodología de Bollerslev y Jubinski (1999) encuentra evidencia de la presencia de memoria larga en los rendimientos del mercado de valores de Milán, para una muestra que va de enero de 1999 a septiembre de 2004. Igualmente, Tolvi (2003) reporta evidencia de memoria larga en el caso del mercado de valores de Finlandia. Lillo y Farmer (2004) demuestran que para el mercado de valores de Londres los signos y orden de las series obedecen a un proceso de memoria larga. Al contrario, Lobato y Savin (1998) no encuentran evidencia de memoria larga para el índice

S&P usando series diarias para una muestra de julio de 1962 a diciembre de 1994. No obstante, usando los cuadrados de los rendimientos diarios, Lobato y Savin (1998), Barkoulas, Baun y Travlos (2000) encuentran evidencia de memoria larga, lo que confirma las conclusiones de Ding *et al.* (1993), quienes afirman que los rendimientos y volatilidad de los mercados financieros pueden ser bien descritos por los procesos de memoria larga. Sin embargo, alimentando la controversia en resultados Sadique y Silvapulle (2001) presentan resultados mixtos al examinar una muestra de seis países: Japón, Corea, Malasia, Singapur, Australia, Nueva Zelanda y Estados Unidos. Sus resultados sugieren que los rendimientos de los mercados de Corea, Malasia, Singapur y Nueva Zelanda, básicamente mercados emergentes, muestran dependencia de largo plazo. Evidencia similar es presentada por Henry (2002) en su investigación de dependencia a largo plazo en los rendimientos de los índices de nueve mercados. Henry encontró evidencia de memoria larga en cuatro mercados, dos de ellos desarrollados, Alemania y Japón, y en los mercados de Corea del Sur y de Taiwan; pero no encontró memoria larga en los mercados de Estados Unidos, Reino Unido, Singapur, Hong Kong y Australia.

De hecho, en el caso de los mercados de capital emergentes, congruente con su menor nivel de eficiencia, la evidencia, en general, confirma la existencia de memoria larga en la mayoría de los mercados analizados. Assaf (2004, 2006), Assaf y Cavalcante (2005), Bellalah *et al.* (2005), Kilic (2004), y Wright (2002) aplican un modelo FIGARCH para determinar dependencia a largo plazo en la volatilidad de cinco mercados emergentes (Egipto, Brasil, Kuwait, Túnez, Turquía) y Estados Unidos. En todos los casos los FIGARCH estimados producen un parámetro de larga memoria muy significativo, con lo cual se confirman la presencia de memoria larga en la volatilidad de estos mercados. Jayasuriya (2009) encuentra memoria larga en la volatilidad de los rendimientos en una amplia muestra de 23 mercados emergentes y de frontera de varias regiones. Aplicando un modelo EGARCH con integración fraccionaria su evidencia revela memoria larga para la muestra completa que comprende de enero de 2000 a octubre de 2007. Sin embargo, no encuentra evidencia de memoria larga en un análisis por subperíodos, particularmente en el más reciente, para gran parte de los mercados analizados, lo que sugiere una tendencia hacia la eficiencia derivada de su desarrollo y de la competitividad bursátil mundial.

Los análisis de los mercados de valores emergentes a nivel individual arrojan similares resultados con algunas excepciones notables. Di Sario *et al.*

(2008) y Kasman y Torun (2007) evidencian la existencia de memoria larga en los rendimientos y volatilidad del mercado de Estambul. No obstante, aplicando métodos paramétricos FIGARCH y no paramétricos Kilic (2004) encuentra evidencia opuesta a la que generalmente se reporta de mercados emergentes, incluyendo el caso de Turquía. Su estudio revela que los rendimientos diarios no poseen características de memoria larga; sin embargo, como en el caso de mercados de capitales desarrollados, su estudio evidencia una dinámica de memoria larga en la varianza condicional, la que puede ser adecuadamente modelada con el modelo FIGARCH. Kurkmaz, Cevic y Özatac (2009) confirman estos resultados. Usando pruebas de ruptura estructural en la varianza y el modelo ARFIMA-FIGARCH no encuentran evidencia de memoria larga en los rendimientos, pero si en la volatilidad.

Con respecto a mercados emergentes asiáticos, Cajueiro y Tabak (2004) demuestran que los mercados de Hong Kong, Singapur y China presentan dependencia de largo plazo en sus rendimientos, hecho que ha sido confirmado para el caso de China. Analizando el índice del mercado Shenzhen de China, Lu, Ito y Voges (2008) encuentran evidencia significativa que señala la presencia de memoria larga y falta de eficiencia en este mercado. Aplicando modelos fraccionariamente integrados, Cheong (2007; 2008) recaba evidencia sobre memoria larga en los rendimientos absolutos, rendimientos al cuadrado y la volatilidad del mercado de valores de Malasia. También al investigar el mercado de Kuala Lumpur para el período 1992-2002, Cajueiro y Tabak (2004) encuentran memoria larga en su volatilidad, con un índice de Hurst con magnitud de 0.628. Cheong *et al.* (2007) comprueban con modelación GARCH la presencia de asimetría y memoria larga en la volatilidad también para el Kuala Lumpur Stock Exchange usando datos diarios para el período 1991-2005, con cuatro subperíodos. Tan, Cheong y Ye (2010) también reportan memoria larga en el mercado de Malasia. Aplicando la técnica de Geweke y Porter-Hudak (1983) los autores encuentran que durante 1985-2009 en que tuvieron lugar varios periodos a la alza y a la baja, el comportamiento de memoria larga fue persistente durante los primeros períodos anteriores a la crisis de 1997. Finalmente, en el caso de India, examinando series de volumen de operación, Kumar (2004) comprueba la presencia de memoria larga. Debido a la heterocedasticidad condicional en las series, Kumar aplica modelos ARFIMA-GARCH y obtiene resultados robustos sobre la presencia de memoria larga. Igualmente, Banerjee y Sahadeb (2006) encuentran evidencia de memoria larga en este mercado al analizar datos del índice SENSEX; en su estudio,

el modelo de integración fraccionaria GARCH es el que mejor se ajusta respecto a la volatilidad.

Confirmando estos resultados, Barkoulas, Baum y Travlos (2000) analizan el comportamiento de memoria larga en el mercado de valores de Atenas utilizando el análisis de regresión espectral. Los autores presentan evidencia estadísticamente significativa sobre la existencia de memoria larga en el mercado de valores griego. Sin embargo, Vougas (2004) encuentra evidencia débil sobre la presencia de memoria en el mercado de Atenas, usando un modelo ARFIMA-GARCH estimado vía máxima verosimilitud condicional.

En el caso de los mercados emergentes de América Latina la investigación sobre memoria larga en sus rendimientos y volatilidad ha sido exigua, Cavalcante y Assaf (2002) examinan el mercado de valores de Brasil y concluyen enfáticamente que la volatilidad del mercado se caracteriza por la presencia de memoria larga en tanto que encuentran poca evidencia en el caso de los rendimientos. Cajueiro y Tabak (2004) afirman que la presencia de dependencia a largo plazo en los rendimientos de los activos financieros es un hecho estilizado. Al examinar una muestra de acciones individuales en la lista del mercado de valores de Brasil, encuentran que variables específicas de las empresas explican, al menos parcialmente, la memoria larga en ese mercado.

Un par de estudios pioneros dan cuenta de la presencia de memoria larga en la BMV. Islas Camargo y Venegas Martínez (2003) al aplicar un modelo de volatilidad estocástica encuentran memoria larga en la volatilidad del índice del mercado mexicano de valores, y muestran además, los impactos negativos que puede tener este comportamiento para la cobertura con opciones europeas. Venegas Martínez e Islas Camargo (2005) presentan evidencia de memoria larga en los mercados de valores de Argentina, Brasil, Chile, México y Estados Unidos. Más recientemente López Herrera, Venegas Martínez y Sánchez Daza (2009) examinan la existencia de memoria larga tanto en los rendimientos del índice de la BMV como en la volatilidad de dichos rendimientos. La evidencia empírica que aportan con base en diversas pruebas no paramétricas y parametrizaciones de modelos de series de tiempo con integración fraccionaria en las ecuaciones de media y varianza, sugiere la presencia de dependencia de largo plazo tanto en los rendimientos como en la volatilidad de este mercado. Por otra parte, tanto López, Villagómez y Venegas (2009) como Villagómez (2010), encuentran evidencia mixta de memoria larga al estudiar los rendimientos de un conjunto de acciones mexicanas y el IPC, descubren,

también, que en el caso de las volatilidades es mayor la cantidad de evidencia que sugiere la presencia de memoria larga en los rendimientos de las acciones analizadas.

Otras investigaciones recientes también han estudiado los beneficios de la determinación de memoria larga en el análisis del riesgo. Giot y Laurent (2001) modelan el VaR para los rendimientos diarios de una muestra que incluye los índices CAC40 (Francia), DAX (Alemania), NASDAQ (Estados Unidos), Nikkei (Japón) y SMI (Suiza). También computan la falla esperada y el promedio múltiple para medir el VaR. Aplican el modelo APARCH el cual produce mejoras considerables en la predicción de VaR con horizontes de un día para las posiciones larga y corta. En un estudio similar So y Yu (2007) también examinan el desempeño de varios modelos GARCH incluyendo dos de integración fraccionaria. Incluyen los rendimientos de los índices NASDAQ de Estados Unidos y FTSE del Reino Unido y comprueban que las estimaciones de VaR con los modelos estacionarios y de integración fraccionaria son superiores a las obtenidas con el modelo de Riskmetrics con un nivel de confianza de 99 por ciento. Degiannakis (2004) compara el desempeño del VaR con modelos tipo GARCH tales como GARCH, IPARCH, APARCH y FIAPARCH. Su evidencia indica que en cuanto a los mercados de valores, el desempeño del VaR con FIAPARCH fue el mejor que los demás en los mercados de valores. El análisis del VaR que llevó a cabo Kang y Yoon (2008) aplicando Riskmetrics, confirma la relevancia de tomar en cuenta la asimetría y las colas pesadas en la distribución de los rendimientos de las acciones corporativas de tres importantes empresas en la lista del mercado de valores de Corea del Sur.

Al analizar la importancia de la curtosis y el sesgo para la determinación del VaR con mayor precisión, Brooks y Pesard (2003) comparan el VaR para el caso de cinco mercados de Asia y el índice S&P 500. Los modelos aplicados son Riskmetrics, semivarianza, GARCH, TGARCH, EGARCH y las extensiones multivariadas de los modelos tipo GARCH considerados. Sus resultados sugieren que la incorporación del efecto de asimetría genera mejores predicciones de la volatilidad, lo que a su vez mejora las estimaciones del VaR. Tu, Wong y Chang (2008) examinan el desempeño de modelos VaR que incorporan el sesgo en el proceso de innovaciones. Aplican el modelo APARCH basado en la distribución t-student sesgada y concluye que éste es el mejor modelo para la estimación del VaR, tanto para la posición corta, como para la larga, para los mercados de Hong Kong, Singapur, Australia, Corea, Malasia, Tailandia, Filipinas, Indonesia, China y Japón, aunque su desempeño no es satisfactorio en todos los casos.

En un estudio similar, McMillan y Speigh (2007) examinan series diarias de ocho mercados del área Asia-Pacífico, además de los de Estados Unidos y del Reino Unido para contar con un marco de referencia comparativo. Adoptando niveles de confianza muy restrictivos, los modelos que toman en cuenta los efectos de memoria larga mitigan subestimaciones sobre el VaR, comunes en los modelos que no consideran la asimetría y curtosis propia de la distribución de las series financieras.

2. Metodologías ARFIMA y BACKTESTING

MODELOS ARFIMA

Mediante el trabajo de Granger (1980), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981) se desarrolló el concepto de integración (o diferenciación) fraccionaria para modelar procesos de series de tiempo con memoria larga. Los modelos resultantes se denominan ARFIMA (*autoregressive fractionally integrated moving average*) y se diferencian de los modelos ARMA estacionarios y ARIMA en que en la función de los rezagos $(1 - L)^d$ el número d es diferente de cero (como en un ARMA estacionario) o de 1 como en el caso de un modelo ARMA integrado (ARIMA o proceso de raíz unitaria). Entonces, se dice que un proceso es ARFIMA (p, d, q) si los datos se generan por el proceso:

$$\phi(L)(1-L)^d = \psi(L)\varepsilon_t \quad (1)$$

donde d es un número no entero y

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j \quad (2)$$

donde $b_0 = 1$ y el j -ésimo coeficiente autorregresivo, b_j , está dado por:

$$b_j = \frac{-d\Gamma(j-d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(j+1)} = \frac{j-d-1}{j} b_{j-1}, \quad j \geq 1 \quad (3)$$

MODELOS ARCH

Es un hecho conocido que los rendimientos accionarios diarios, al igual que otras series de rendimientos financieros, muestran varianza (volatilidad)

cambiante en el tiempo y la tendencia a que los cambios grandes en los precios sean seguidos por cambios también grandes y los cambios pequeños por cambios pequeños. La tendencia a que los cambios de precios se agrupen como racimos se origina como consecuencia de la dependencia temporal de los rendimientos de los activos. También se ha observado que la distribución de los rendimientos financieros diarios tiende a mostrar colas pesadas en comparación con la distribución normal. Por tal motivo se ha popularizado el uso del modelo ARCH propuesto inicialmente por Engle (1982) y generalizado posteriormente por Bollerslev (1986), siendo conocido a partir de entonces como el modelo GARCH; en su versión más general este modelo GARCH (p,q) se representa por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t \\ z_t &= i.i.d.N(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

De acuerdo con el GARCH (p, q) , la varianza condicionada se explica como una función lineal de los cuadrados de los errores pasados y las varianzas condicionadas pasadas. Para asegurar que las varianzas condicionadas positivas sean positivas en todo t , se requiere $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, q$ y $\beta_j \geq 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots, p$. Por otra parte, la condición para que el modelo sea estacionario de segundo orden es necesario $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, si el valor de la suma es mayor o igual a 1 se tendrá un proceso con persistencia fuerte. El caso en el cual $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1$ da lugar al proceso conocido como GARCH integrado o, simplemente, IGARCH.

Aunque los modelos ARCH y GARCH pueden capturar de manera conveniente la volatilidad cambiante y los agrupamientos de volatilidad de los rendimientos, así como las colas pesadas de la distribución de los mismos, no capturan el efecto asimétrico consistente en que los rendimientos negativos son comparativamente más grandes que los rendimientos positivos aunque la magnitud del *shock* que los provoca pueda ser igual en ambos casos. Este hecho es lo que se ha dado en llamar *efecto apalancamiento* y para capturarlo se han desarrollado modelos asimétricos de la familia GARCH, uno de los cuales

es el modelo de Glosten, Jagannathan y Runkle (1993), conocido popularmente como modelo GJR y que se puede expresar de manera general como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2 \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (5)$$

en el cual se tiene que S_{t-1}^- es una variable *dummy* con valor de 1 cuando el *shock* es negativo y de 0 en cualquier otro caso.

Un modelo más general es el APARCH presentado por Ding, Granger y Engle (1993), en el que se combina un exponente variante con el coeficiente de asimetría que se requiere para capturar el *efecto apalancamiento*. El modelo APARCH (p, q) puede escribirse como:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (6)$$

El APARCH tiene como ventaja adicional a su flexibilidad, que varios modelos pueden ser casos particulares de esa especificación.

VALOR EN RIESGO Y MEMORIA LARGA

En términos de la administración y análisis del riesgo, las pérdidas potenciales también están vinculadas al comportamiento de memoria larga de la volatilidad de los rendimientos de los activos de un mercado. Así, la predicción de pérdidas potenciales identificando el comportamiento de memorias larga y corta para los rendimientos y volatilidad de un activo debe producir resultados más precisos y confiables que los obtenidos con la aplicación de las metodologías tradicionales de VaR. Integrando los avances sobre el análisis de riesgo el presente trabajo examina el impacto de los modelos ARFIMA, en la estimación del VaR. Las estimaciones del VaR, para el caso de los rendimientos de la BMV, con el horizonte de un día hacia adelante se obtienen con el paquete G@ARH 4.2 (Laurent y Peters, 2006), corriéndolo sobre el programa Ox 5.0, desarrollado por Doornik (2001; 2007) y que se basa en C++. Las estimaciones obtenidas son validadas con la metodología de *backtesting*. La validación de la calidad y exactitud estadística de un modelo VaR requiere de un proceso de *backtesting*, con el fin de demostrar si la medida de riesgo cumple con ciertas propiedades teóricas requeridas por las autoridades reguladoras para estimar suficientes requerimientos de capital. Este proceso consiste en comparar las estimaciones del VaR con respecto a las pérdidas actuales del siguiente periodo.

Suponiendo que $n = \sum_t^T I_{t+1}$ representa el número de días dentro de un periodo T , donde las pérdidas del portafolio excedieron el valor del VaR estimado, mientras que I_{t+1} es una serie de fallos del VaR que puede expresarse de la siguiente forma para cada posición:

$$\text{Larga:} \quad I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_{t+1} < \text{VaR}_{t+1} \mid t \\ 0, & \text{si } R_{t+1} \geq \text{VaR}_{t+1} \mid t \end{cases}$$

$$\text{Corta:} \quad I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } R_{t+1} > \text{VaR}_{t+1} \mid t \\ 0, & \text{si } R_{t+1} \leq \text{VaR}_{t+1} \mid t \end{cases}$$

Aunque en la literatura existen diversas pruebas estadísticas para llevar a cabo la validación del modelo VaR, para fines de este estudio se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes propuesta por Kupiec (1995). El estadístico de la prueba Kupiec analiza estadísticamente cuando la tasa de fallo α es igual a la tasa esperada, esto es, $\alpha = 1 - p$, en donde p es el nivel de confianza utilizado para estimar el VaR. Ahora, si T representa el número total de ensayos, entonces el número de fallos n sigue una distribución binomial con probabilidad α .

De esta manera, el estadístico de la prueba de la razón de verosimilitudes propuesto por Kupiec está definido por

$$LR = 2 \ln \left[\left(\frac{n}{T} \right)^n \left(1 - \frac{n}{T} \right)^{T-n} \right] - 2 \ln \left[(\alpha)^n (1 - \alpha)^{T-n} \right]$$

el cual se distribuye como una variable chi cuadrada con un grado de libertad bajo la hipótesis nula $H_0 : \frac{n}{T} = \alpha$. En otras palabras, la hipótesis nula implica que el modelo VaR es altamente confiable para estimar el riesgo y los requerimientos de capital mínimos, mientras que la hipótesis alternativa rechaza el modelo VaR cuando genera un número de fallos suficientemente grande o pequeño.

3. Resultados empíricos

Para el análisis se estimó el rendimiento del día t restándole al logaritmo del precio de ese día el logaritmo del precio del día previo y multiplicando esa diferencia por 100; es decir: $100*(\ln P_t - \ln P_{t-1}) = r_t$. La muestra de rendimientos va del primer día hábil de 1983 hasta el último día de operaciones de 2009, en total 6755 observaciones. Las volatilidades de los rendimientos se estimaron mediante los modelos de la familia ARCH descritos en una sección previa, estimando los parámetros correspondientes considerando para los errores tres distribuciones distintas (normal, Student y Student sesgada), en todos los casos se estimó la ecuación de la media mediante un modelo AR(2) integrado fraccionariamente.

En el Cuadro 1 se observan los resultados de la estimación de los modelos de la familia ARCH, estimados con un modelo ARFI(2) para la ecuación de la media. Casi todos los parámetros tienen valores estimados que son altamente significativos, incluso a 1%, aportando, por tanto, evidencia altamente significativa de la presencia de memoria larga en los rendimientos del mercado bursátil mexicano.

En este análisis, el potencial estadístico de cada modelo VaR para estimar apropiadamente el riesgo de mercado es determinado en términos de la tasa de fallo y los p -values de la prueba de Kupiec. De esta manera, la tasa de fallo se define como el porcentaje de rendimientos empíricos que exceden el VaR estimado para cualquier posición financiera. En este sentido, una tasa de fallo para el p -percentil más grande que el nivel α % conlleva a subestimar el riesgo de los rendimientos, mientras que una tasa de fallo menor al nivel α % sobreestima el riesgo por parte del modelo VaR implementado. Por otra parte, un p -value menor o igual a 0.05 es evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula del potencial estadístico de los modelos VaR para medir la exposición al riesgo.

El análisis de los resultados de los Cuadros 2 y 3 muestra que los modelos simétricos basados en la distribución normal condicional presentan un bajo potencial estadístico para estimar el VaR en ambas posiciones financieras. En este caso, la subestimación de la exposición al riesgo es claramente notable para niveles de confianza de 99% y 99.5%, mientras que los modelos GARCH, IGARCH y APARCH sobreestiman el VaR a un nivel de confianza del 95% para las posiciones corta y larga, respectivamente. Este hecho frecuentemente es esperado como consecuencia del exceso de curtosis y los diferentes niveles de asimetría que presentan los rendimientos de las series financieras. Aunque,

Cuadro 1. Modelo ARFI (2) con diferentes modelos ARCH.

		GARCH (1,1)	GARCH (1,1)	GJR (1,1)	APARCH (1,1)
Errores	μ	0.210049	0.209365	0.138539	0.139045
con	d_{Arfima}	0.058881	0.057954	0.085686	0.085162
distribución	ϕ_1	0.159626	0.159542	0.137237	0.137845
gaussiana	ϕ_2	-0.076916	-0.075585	-0.082367	-0.082235
	w	0.102092	0.066583	0.105078	0.107979
	α	0.133607	0.15499	0.076207	0.123564
	β	0.835582	0.84501	0.837309	0.835758
	γ			0.109769	0.215185
	δ				2.065445
Errores	μ	0.195432	0.19503	0.150934	0.150534
con	d_{Arfima}	0.079041	0.077855	0.091588	0.091746
distribución	ϕ_1	0.140169	0.1408	0.128465	0.128322
t	ϕ_2	-0.093573	-0.09323	-0.094231	-0.094261
	w	0.092756	0.068614	0.096399	0.094195
	α	0.136205	0.15591	0.086927	0.13529
	β	0.837757	0.84409	0.834155	0.835505
	γ			0.104839	0.19799
	δ				1.949414
	g.l.	5.874431	5.280416	6.132263	6.134289
Errores	μ	0.19779	0.19824	0.152703	0.15230
con	d_{Arfima}	0.07921	0.07808	0.091547	0.09171
distribución	ϕ_1	0.14021	0.14084	0.128559	0.12841
student	ϕ_2	-0.09346	-0.09310	-0.09415	-0.09418
sesgada	w	0.09278	0.06867	0.096365	0.09415
	α	0.13615	0.15583	0.086865	0.13521
	β	0.83783	0.84417	0.834215	0.83557
	γ			0.104789	0.19804
	δ	1.94910			
	$\xi_{(asimetría)}$	0.00331 ^{ns}	0.00412 ^{ns}	0.0024	0.00239 ^{ns}
Todos los coeficientes son significativos a 1%, con excepción de los que están marcados con ns = No significativo.					

los modelos simétricos basados en la distribución normal condicional no son rechazados a un nivel de confianza de 97.5%, puesto que presentan un alta tasa de éxito para medir adecuadamente el riesgo verdadero para cualquier posición financiera, excepto para el modelo IGARCH de la posición corta. De esta manera, el uso de estos modelos basados en el supuesto de normalidad puede generar catastróficas pérdidas a los inversionistas que participan en los mercados accionarios al subestimar el riesgo verdadero.

Por su parte, los modelos simétricos basados en la distribución condicional *student* proporcionan mejores estimaciones del riesgo para cualquier posición financiera y nivel de confianza a diferencia de los modelos simétricos basados en el supuesto de normalidad, excepto para el modelo IGARCH que sobreestima el riesgo para los niveles de confianza de 97.5%, 99% y 99.5% de la posición financiera corta. En términos generales, los valores de los *p*-values sustentan claramente que estos modelos alternativos capturan correctamente el efecto de las colas pesadas o anchas de la distribución de rendimientos ocasionada por los movimientos atípicos, en particular para la cola inferior don-

Cuadro 2. Tasa de fallo de los rendimientos que exceden al VaR.

α (%)	5%		2.5%		1%		0.5%	
Posiciones	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta
Panel A								
GARCH_n	4.77(4)	4.38(10)	2.86(8)	2.44(2)	1.70(8)	1.26(5)	1.14(8)	0.84(6)
GARCH_t	5.29(5)	4.94(1)	2.66(6)	2.30(5)	1.15(4)	0.86(2)	0.53(2)	0.37(2)
GARCH_st	5.30(6)	4.92(2)	2.66(6)	2.26(6)	1.17(5)	0.86(2)	0.55(3)	0.37(2)
Panel B								
IGARCH_n	4.50(7)	4.09(11)	2.69(7)	2.12(7)	1.51(6)	1.11(1)	1.01(6)	0.67(3)
IGARCH_t	4.99(2)	4.59(8)	2.52(1)	2.03(8)	0.93(2)	0.67(6)	0.38(4)	0.25(4)
IGARCH_st	4.99(2)	4.57(9)	2.52(1)	1.97(9)	0.95(1)	0.67(6)	0.38(4)	0.25(4)
Panel C								
GRJ_n	4.40(8)	4.77(6)	2.69(7)	2.64(3)	1.54(7)	1.39(8)	0.99(5)	0.86(7)
GRJ_t	4.93(3)	5.23(6)	2.56(2)	2.47(1)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
GRJ_st	4.99(2)	5.17(3)	2.59(4)	2.44(2)	1.08(3)	0.81(4)	0.49(1)	0.40(1)
Panel D								
APARCH_n	4.40(8)	4.75(7)	2.69(7)	2.67(4)	1.54(7)	1.38(7)	1.02(7)	0.83(5)
APARCH_t	4.93(3)	5.21(5)	2.58(3)	2.44(2)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
APARCH_st	5.00(1)	5.18(4)	2.61(5)	2.44(2)	1.08(3)	0.83(3)	0.49(1)	0.40(1)
Los números en paréntesis indican al mejor modelo por la posición (larga/corta) y el valor de α (%).								

de alcanza una tasa de éxito de 100% para la familia de modelos ARCH como se puede observar en el Cuadro 3. Sin embargo, la literatura ha demostrado empíricamente la ineficiencia de estos modelos para modelar correctamente la volatilidad en aglomeraciones de los rendimientos de las series financieras entre los que se incluyen a Bollerslev (1986), Baillie y DeGenaro (1990) y de Jong, Kemma y Kloek (1992).

Cuadro 3. Resultados de los p-values de la prueba de Kupiec.

VaR	95%		97.5%		99%		99.5%	
	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta	Larga	Corta
Panel A								
GARCH_n	0.3757	0.0174	0.0659	0.7618	0	0.0402	0	0.0003
GARCH_s	0.2868	0.8339	0.3909	0.2730	0.2123	0.2314	0.7041	0.1125
GARCH_st	0.2627	0.7476	0.3909	0.2088	0.1727	0.2314	0.5838	0.1125
Panel B								
IGARCH_n	0.0555	0.0004	0.3123	0.0384	0.0001	0.3707	0.0000	0.0655
IGARCH_t	0.9666	0.1164	0.9302	0.0103	0.5736	0.0033	0.1621	0.0014
IGARCH_st	0.9666	0.1037	0.9302	0.0037	0.6614	0.0033	0.1621	0.0014
Panel C								
GRJ_g	0.0203	0.3757	0.3123	0.4808	0	0.0023	0	0.0002
GRJ_t	0.7904	0.3979	0.7488	0.8836	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258
GRJ_st	0.9666	0.5321	0.6351	0.7618	0.5106	0.1128	0.8932	0.2258
Panel D								
APARCH_n	0.0203	0.3459	0.3123	0.3909	0	0.0032	0	0.0005
APARCH_t	0.7904	0.4293	0.6910	0.7618	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258
APARCH_st	0.9889	0.4965	0.5813	0.7618	0.5106	0.1456	0.8932	0.2258

El análisis de los resultados de las tasas de fallo y los p -values de la prueba de Kupieck, indican que casi todos los modelos asimétricos proporcionan estimaciones más confiables del VaR para cualquier posición financiera y nivel de confianza, en particular para los modelos GARCH, GRJ, APARCH basado en las distribuciones student tanto simétrica como sesgada. Aquí, un hallazgo importante por destacarse es que los modelos GRJ y APARCH con distribución student sesgada no sólo proporcionan estimaciones del VaR más confiables, sino también muy similares; este hecho es sustentado estadísticamente por la similitud entre las tasas de fallo y los p -values del estadístico de la prueba de Kupieck de cada modelo como se puede observar en las paneles A y B del Cuadro 3.

No obstante los resultados del análisis, el alto desempeño no es del todo satisfactorio en todos los modelos, por ejemplo, el modelo GJR con innova-

ciones normales subestima la cuantificación del riesgo de los rendimientos negativos y positivos para niveles de confianza de 99% y 99.5%, mientras que sobreestima el riesgo de los rendimientos negativos a un nivel de confianza de 95%. Por su parte, el modelo IGARCH con distribución student sesgada sobreestima el riesgo de la posición corta para los niveles de confianza de 97.5%, 99% y 99.5%, respectivamente.

4. Conclusiones

En este trabajo de investigación se emplearon modelos de la familia ARCH basados en las distribuciones normal, t de Student y t de Student sesgada, con el fin de estimar la volatilidad y el valor en riesgo de las posiciones financieras larga y corta de los rendimientos de la BMV. Los resultados empíricos son muy variados para cada posición y nivel de confianza debido a que la diferencia entre los modelos estimados no es muy significativa en varios de los casos. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que los modelos asimétricos podrían tener un gran potencial para medir de manera más precisa el riesgo verdadero de los rendimientos positivos y negativos para cualquier nivel de confianza, especialmente cuando se aplica la distribución t de Student sesgada, muy posiblemente explicado porque los rendimientos de la BMV se han caracterizado por experimentar una alta volatilidad, exceso de curtosis y diferentes niveles de asimetría.

Afines con la evidencia proporcionada por otros estudios sobre anomalías del mercado y modelación de series financieras, los resultados del presente estudio tienen importantes implicaciones para la investigación sobre la fijación de precios de los activos financieros, así como para la optimización de portafolios y análisis de riesgos. Además de comprobar ineficiencia del mercado, la presencia de memoria larga invalida los tradicionales modelos de media-varianza para la optimización de portafolios de inversión, así como los modelos tradicionales de valuación de activos, el Capital Asset Pricing Model (CAPM) y el Arbitrage Pricing Model (APT) por que las formas tradicionales de inferencia estadística no son válidas ante la presencia de autocorrelaciones significativas de los precios en momentos distantes. La minimización de pérdidas potenciales mediante metodologías tradicionales como el VaR también debe ser considerada con mayor detenimiento; finalmente la valuación de productos derivados podría no ser adecuada si se aplican modelos tradicionales basados en procesos martingala.

Respuestas a estos problemas ya se encuentran en la literatura financiera con la aplicación de modelos que consideran momentos de orden superior de las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros, modelos ARCH en diversas variantes para tomar en cuenta el comportamiento heterocedástico de las distribuciones de los rendimientos, y la teoría de valores extremos y de cópulas para llevar a cabo medidas alternativas que pueden ser más precisas del riesgo de mercado. Como la aplicación de modelos tradicionales de valuación de los activos y análisis del riesgo aún prevalece en México, los resultados de este estudio sugieren que se debe dar paso no sólo a la aplicación de modelos ya probados en otras latitudes, sino sobre todo a la creación de modelos idóneos para la optimización de portafolios y análisis de riesgo fundamentados en distribuciones asimétricas como sugiere la evidencia empírica del presente estudio.

La presencia de memoria larga en la BMV también tiene importantes implicaciones para comprender y analizar el desempeño de la economía resaltando el comportamiento de su mercado de capitales. Como la dinámica de los rendimientos está estrechamente vinculada con las actitudes y expectativas, de los inversionistas, la predictibilidad de los rendimientos propicia la inversión especulativa la cual en manifestaciones extremas, con que una exuberancia irracional y burbujas financieras y consiguientes *cracks* bursátiles y crisis financieras. Además, en congruencia con los resultados del presente estudio, puesto que los rendimientos bursátiles son dependientes en el tiempo, las decisiones de consumo, inversión y ahorro pueden volverse extremadamente sensibles a los horizontes de inversión prevalecientes en el mercado accionario, desvinculándose de los circuitos y ciclos de la economía real en la generación de crecimiento, pero profundizando las fases de alzas y caídas de la economía real, producto subyacente de la actividad especulativa, observable en particular, con la creación de complejos productos estructurados en las economías avanzadas.

Finalmente, los hallazgos del presente estudio son relevantes para los inversionistas institucionales que participan en mercados emergentes, debido a que se ha demostrado empíricamente que estos agentes económicos no sólo están expuestos a los *crashes* bursátiles, sino también a riesgos durante los auges económicos como se documenta en De Jesús y Ortiz (2009). Por extensión, este problema también afecta a los inversionistas individuales debido al efecto rebaño. La agenda de futuras investigaciones debe incluir el análisis de memoria larga de la volatilidad y su transmisión entre mercados regionales,

el análisis de la medición del riesgo de mercado con diferentes horizontes de inversión aplicando alternativas metodológicas y variantes más congruentes con el comportamiento de los mercados específicos.

Bibliografía

- Andreano, M.S. (2005). "Common long memory in the Italian stock market". *Quaderni di statistica*, 7, pp. 107-119.
- Assaf, A. (2004). "A FIGARCH modeling of the emerging equity market of Egypt". *International Journal of Applied Business and Economic Research*, 2 (1), pp. 67-80.
- _____ (2006). "Persistence and long-range dependence in the emerging stock market of Kuwait". *Middle East Business and Economic Review*, 18, pp. 1-17.
- _____ y J. Cavalcante (2005). "Long range dependence in the returns and volatility of the Brazilian stock market". *European Review of Economics and Finance*, 4, pp. 5-20.
- Baillie, R.T. y De Genaro (1990). "Stock returns and volatility". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 203-214.
- _____ y G. Kapetanios (2005). "Testing for neglected nonlinearity in log memory models". *Queen Mary Working Paper*, 327, University of London.
- Barkoulas, J.T., C.F. Baum y N. Travlos (2000). "Long memory in the Greek stock market". *Applied Financial Economics*, 10, pp. 177-84.
- Bellalah, M., C. Aloui y E. Abaoub (2005). "Long-range dependence in daily volatility on Tunisian stock market". *International Journal of Business*, 10, pp. 191-216.
- Banerjee, A. y S. Sahadeb (2006). "Long memory property of stock returns: evidence from India". Working Paper, 589, Indian Institute of Management.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- _____ y D. Jubinski (1999). "Equity trading volume and volatility: latent information arrivals and common long-run dependencies". *Journal of Business and Economics Statistics*, 17, pp. 9-21.
- Brooks y Pesard (2003). "The effect of asymmetries in stock index return Value-at-risk estimates". *Journal of Risk Finance*, 4, pp. 29-42.

- Cajueiro, D.O., y B.M. Tabak (2004). "The Hurst's exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient". *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 336, 521-537.
- _____ y B.M. Tabak (2005). "Possible causes of long-range dependence in the Brazilian stock market". *Physica A...*, 345, pp. 635-645.
- Caporale, G.M. y L.A. Gil-Alana (2004). "Long-range dependence in daily stock returns". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 375-383.
- Cavalcante, J. y A. Assaf (2002). *Long Range Dependence in the Returns and Volatility of the Brazilian Stock Market, Working Paper*, Banco Nacional do Desenvolvimento, Río de Janeiro.
- Cheong, W.C. (2007). "A generalized discrete-time long memory volatility model for financial stock exchange". *American Journal of Applied Sciences*, 4, pp. 970-978.
- _____ (2008). "Volatility in Malaysian stock exchange: an empirical study using fractionally integrated approach". *American Journal of Applied Sciences*, 5, pp. 683-688.
- _____, A.H. Shaari Mohd Nor y Z. Isa (2007). "Asymmetry and long memory volatility: some empirical evidence using GARCH". *Physica A...*, 373, 351-364.
- Cheung, Y. y K. Lai (1995). "A Search for Long Memory in International Stock Market Returns". *Journal of International Money and Finance*, 14, 597-615.
- Conrad, C. (2007). "Non-negativity conditions for the Hyperbolic GARCH model". *KOF Working Paper*, 162, Swiss Federal Institute of Technology-KOF, Swiss Economic Institute, Zurich.
- Crato, N. y P.J.F. de Lima (1994). "Long-range dependency in the conditional variance of stock returns". *Economics Letters*, 45, pp. 281-285.
- Cuñado, J., L.A. Gil-Alana y F. Pérez de Gracia (2008). "Stock market volatility in U.S. bull and bear markets". *Journal of Investment and Banking*, 1 (1), pp. 24-33.
- Degiannakis, S. (2004). "Volatility forecasting: evidence from a fractional integrated asymmetric power ARCH Skewed-t model". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 1333-1342.
- Ding, Z., C.W.J. Granger y R.F. Engle (1993). "A long memory property of stock market returns and a new model". *Journal of Empirical Finance*, 1, pp. 83-106.
- Di Sario, R., H. Saraoglu, J. McCarthy y U.H. Li (2008). "Long memory in the volatility of an emerging equity market; the case of Turkey". *International Financial Markets, Institutions & Money*, 18, pp. 305-312.
- Doornik, J.A. (2001). *An object oriented matrix programming language*. Londres, Timberlake Consultant Press.

- Doornik, J.A. (2007). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*. 3ª. ed. Londres, Timberlake Consultants Press.
- Engle, R.F. (1982). "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". *Econometrica*, 50 (4), pp. 987-1007.
- Geweke, J. y S. Porter Hudak (1983). "The estimation and application of long memory time series models". *Journal of Time Series Analysis*, 4, pp. 221-238.
- Gil-Alana, L.A. (2006). "Fractional integration in daily stock market indexes". *Review of Financial Economics*, 15, pp. 28-38.
- Giot y Laurent (2001), "Value at Risk for long and short trading positions". *Journal of Applied Econometrics*, 18, pp. 641-664.
- Glosten, L.R.R., D.E. Jagannathan y D.E. Runkle (1993). "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks". *Journal of Finance*, 48, pp. 1779-1801.
- Granger, C.W.J. (1980). "Long memory relationships and the aggregation of dynamic models". *Journal of Econometrics*, 14 (2), pp. 227-238.
- _____ y R. Joyeux (1980). "An introduction to long memory time series models and fractional differencing". *Journal of Time Series Analysis*, 1, pp. 15-29.
- Hosking, J. (1981). "Fractional differencing". *Biometrika*, 68 (1), pp. 165-176.
- Henry, O.T. (2002). "Long memory in stock returns: some international evidence". *Applied Financial Economics*, 12, pp. 712-725.
- Huang, B.N. y C.H. Yang (1999). "An examination of long-term memory using intraday stock returns". *Technical Report*, 99-03, Clarion University of Pennsylvania, EUA.
- Islas Camargo, A. y F. Venegas Martínez (2003). "Pricing derivative securities with prior information on prior long memory volatility". *Economía Mexicana*, 12, pp. 103-134.
- Jacobsen, B. (1996). "Long-term dependence in stock returns". *Journal of Empirical Finance*, 3, pp. 393-417.
- Jayasuriya, S.A. (2009). "A Sub Period Analysis of Long Memory in Stock Return Volatility". *9th Global Conference on Business and Finance*.
- Kang, S y S.M. Yoon (2008). "Value-at-Risk analysis of the long memory volatility process: the case of individual stock returns". *The Korean Journal of Finance*, 21, pp. 4-18.
- Kasman, A. y D. Torun (2007). "Long memory in the Turkish stock market return and volatility". *Central Bank Review*. Central Bank of the Republic of Turkey, pp. 14-27.

- Kilic, R. (2004). "On the long memory properties of emerging capital markets: evidence from Istanbul stock exchange". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 915-922.
- Kumar, A. (2004). "Long Memory in Stock Trading Volume: Evidence from Indian Stock Market". *Working Paper*, Indira Gandhi Institute of Development Research (IGIDR)-Economics.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models". *The Journal of Derivatives*, 3, pp. 73-84.
- Kurtmaz, T., E.I. Cevic y N. Özatac (2009). "Testing for long memory in ISE using ARFIMA-FIGARCH Model and Structural Break Test". *International Research Journal of Finance and Economics*, 26, pp. 192-196.
- Laurent S. y J.P. Peters (2006). *GARCH 4.2, Estimating and Forecasting ARCH Models*. Londres, Timberlake Consultants Press.
- Lillo, F. y J.D. Farmer (2004). "The long memory of the efficient market". *Studies on nonlinear Dynamics and Econometrics*, 8, pp. 1-33.
- Lo, A.W. (1991). "Long-term memory in stock prices". *Econometrica*, 59, pp. 1279-1313.
- Lobato, I. y N.E. Savin (1998). "Real and spurious long-memory properties of stock market data". *Journal of Business and Economics Statistics*, 15, pp. 261-268.
- López Herrera F., J.I. Villagómez Bahena y F. Venegas Martínez (2009). "Dependencia de largo plazo en rendimientos y volatilidades de acciones mexicanas". *Tiempo Económico*, 4 (13), 5-17.
- , F. Venegas Martínez y A. Sánchez Daza (2009). "Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales". *Análisis Económico*, 56, pp. 129-146.
- Lu, S.Q., T. Ito y K. Voges (2008). "An analysis of long memory in the SSE's components index". *Journal of Economics Banking and Finance*, pp. 1-13.
- Lux, T. y T. Kaizoji (2007). "Forecasting volatility and volume in the Tokio stock market: long memory, fractality and regime switching". *Journal of Economic Dynamics & Control*, 31, pp. 1803-1843.
- McMillan, D.G. y A.E.H. Speigh (2007). "Value-at-Risk in emerging markets: comparative evidence for symmetric, asymmetric, and long memory GARCH models". *International Review of Finance*, 7, pp. 1-19.
- Mills, T.C. (1993). "Is there long-term memory in UK stock returns". *Applied Financial Economics*, 3, pp. 303-306.
- Sadique, S. y P.Silvapulle (2001). "Long-term memory in stock returns: international evidence". *International Journal of Economics and Finance*, 6, pp. 50-67.

- So, M.K.P. y P.I.H. Yu (2007). "Empirical analysis of GARCH models in Value at risk estimation". *Journal of International Markets, Institutions and Money*, 16, pp. 180-197.
- Tan, S.H., L. Chong y P.F. Ye (2010). "Long memory properties in stock prices. Evidence from the Malaysian stock market". *European Journal of Finance and Administrative Sciences*, 18, pp. 77-84.
- Tolvi, J. (2003). "Long memory in a small stock market". *Economics Bulletin*, 7, pp. 1-13.
- Tu, A.H., W.K. Wong y M.C. Chang (2008). "Value-at Risk for short and long positions of Asian stock markets". *International Research Journal of Finance and Economics*, 22, pp. 135-143.
- Vougas, D.V. (2004). "Analysis long memory and volatility of returns in the Athens stock exchange". *Applied Financial Economics*, 14, pp. 457-460.
- Yamasaki, K., L. Munchnik, S. Havlin, A. Bunde y H.E. Stanley (1995). "Scaling and volatility in memory return intervals in financial markets". *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102, pp. 9424-9428.
- Venegas Martínez, F. y A. Islas Camargo (2005). "Volatilidad de los mercados bursátiles de América Latina: efectos de largo plazo". *Comercio Exterior*, 55, pp. 936-947.
- Villagómez Bahena, J.I. (2010). "Memoria a largo plazo en los rendimientos y volatilidades de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores", en M.R. Martínez Preece y F. López Herrera (coords.). *Administración de riesgos. Volumen 1. Banca, mercados, empresa y modelos financieros*. México, UAM-A (Biblioteca de Ciencias Sociales. Serie Estudios).
- Wang, F., K. Yamasaki, S. Havlin y H.E. Stanley (2006). "Scaling and memory intraday volatility return intervals in stock markets". *Physical Review*, 73 (2), pp. 026117-1-026117-8.
- Wright, J.H. (2002). "Log-periodogram estimation of long memory volatility dependences with conditionally heavy tailed returns". *Econometric Reviews*, 21, pp. 397-417.

Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables

Cesar Emilio Contreras Piedragil*

Francisco Venegas-Martínez**

1. Introducción	57
2. Planteamiento del modelo de valuación	58
3. Precio de una opción europea de compra	60
4. Posibles valores de parámetros en la opción de compra.	62
5. Precio de una opción europea de venta	65
6. Pago continuo de dividendos	65
7. Impacto en precios por colas pesadas y asimetría	66
8. Impacto en precios por parámetro de escala	68
9. Conclusiones	69

* Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, Escuela de Economía.
cecont@yahoo.com

** Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Economía.
fvenegas1111@yahoo.com.mx

RESUMEN

Este trabajo presenta una propuesta para valorar opciones con distribuciones α -estables en el dominio del espacio y del tiempo. La valuación toma como punto de partida la medida neutral al riesgo para distribuciones estables propuesta por McCulloch (2003). Posteriormente se recurre a diversos métodos numéricos que permiten aproximar las funciones de densidad y de distribución de variables aleatorias α -estables tal y como lo sugieren Nolan (2009) y Borak y Weron (2005).

Clasificación JEL: G11, G12, G13.

Palabras clave: Productos derivados, análisis de riesgos.

ABSTRACT

This paper presents a proposal for valuing options with α -stable distributions in the domain of space and time. The valuation takes as its starting point the risk-neutral measure for stable distributions proposed by McCulloch (2003). Subsequently, various numerical methods useful to approximate the density and distribution functions of α -stable random variables, as suggested by Nolan (2009) and Borak and Weron (2005), are applied.

JEL Classification: G11, G12, G13.

Keywords: Derivatives, risk analysis.

1. Introducción

El modelo de Black-Scholes-Merton, (1973) tiene como punto de partida que el precio del activo subyacente del producto derivado es gobernado por un movimiento geométrico browniano (tendencia exponencial y fluctuaciones normales), lo cual conduce, al aplicar el lema de Itô¹, a rendimientos logarítmicos normalmente distribuidos. El modelo de Black-Scholes-Merton ha sido claramente un punto de referencia para muchas propuestas de valuación de opciones. Muchos de los modelos disponibles en la literatura especializada, generalmente, modifican alguno de los supuestos originales del modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). Las nuevas propuestas se generan por el hecho de que el modelo no captura algunas de las características que se presentan en las series financieras. Dentro de las características no capturadas por el modelo de Black-Scholes-Merton se tienen las asimetrías que presentan las distribuciones empíricas de los rendimientos, así como el gran peso en sus colas véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008). Estas características son provocadas por la frecuencia y la magnitud con que se presentan movimientos extremos en los rendimientos, tanto positivos como negativos.

La ecuación diferencial parcial asociada al modelo de Black-Scholes-Merton es una ecuación que se transforma, bajo cambios de variables, en la ecuación clásica de difusión de calor, la cual al ser resuelta y después de invertir los cambios de variables conduce a la determinación del precio teórico de una opción europea de compra. Lo anterior establece la analogía entre el comportamiento de la difusión de calor y el comportamiento de los rendimientos de los subyacentes. Esta analogía permite intentar remediar carencias presentes en el modelo de Black-Scholes-Merton mediante la generalización de la ecuación de difusión clásica a una ecuación de difusión "anómala". La ecuación de difusión anómala se obtiene mediante caminatas aleatorias a tiempo continuo en donde los tiempos entre los pasos son aleatorios; véase, por ejemplo, Montroll y Weiss (1965). Los modelos de caminatas aleatorias a tiempo con-

¹ Véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008) para una discusión completa del lema de Itô.

tinuo con tiempos aleatorios en saltos de partículas son empleados en física estadística para modelar difusión anómala donde una nube de partículas se esparce a una tasa diferente a la del movimiento browniano clásico, lo cual puede conducir a distribuciones asimétricas con colas pesadas. El comportamiento de la difusión anómala se asocia a una distribución α -estable simétrica o a una distribución α -estable si la difusión es influenciada por campos de fuerzas externas, véanse al respecto Li (2003); Gorenflo y Mainardi (1998); y Meztler y Klafter (2000). La difusión anómala tiene características que se pueden aprovechar para modelar hechos estilizados en el comportamiento de los rendimientos, por lo que es factible suponer que los rendimientos son distribuidos de manera α -estable.

El presente trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera, en la próxima sección se presenta el planteamiento del modelo de valuación de opciones con distribuciones estables; en la sección 3 se emplea su ajuste exponencial en una función de densidad estable, neutral al riesgo, para caracterizar el precio de una opción europea de compra; en la sección 4 se revisan algunos casos particulares de los posibles valores que pueden tomar los parámetros en la prima de una opción de compra; en la sección 5 se analiza el caso de una opción de venta; en la sección 6 se discute sobre el caso de una opción con pago continuo de dividendos; en la sección 7 se discute acerca del impacto en el precio de la opción por colas pesadas y asimetría de las distribuciones estables y se lleva a cabo un análisis comparativo con el modelo clásico de Black-Scholes-Merton; por su parte, en la sección 8 se examina el impacto en el precio de la opción por parámetro de escala; por último, en la sección 9 se presentan las conclusiones en donde se destacan las ventajas y limitaciones de la valuación sobre activos subyacentes con distribuciones estables.

2. Planteamiento del modelo de valuación

Para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el enfoque probabilista con distribuciones estables, se supone inicialmente que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que los rendimientos logarítmicos en un mundo neutral al riesgo son conducidos por

$$d \ln S_t = (r - \beta \gamma^\alpha \sec \theta) \tau + d\tilde{Y}_t \quad (1)$$

donde \tilde{Y}_t tiene función de densidad

$$f_{sm}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma t^{1/\alpha})$$

asociada a la función de cumulantes (el logaritmo de la función característica)

$$\psi_{sm}(k) = -\gamma_1^\alpha t \text{Sec}\theta(ik)^\alpha + \gamma_2^\alpha t \sec\theta \{1 - (1 - ik)^\alpha\}$$

con

$$\gamma_1^\alpha = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)\gamma^\alpha, \gamma_2^\alpha = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)\gamma^\alpha \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Si se escribe $\psi(\kappa) = \ln \phi(\kappa)$, en virtud de que $\phi(\kappa)$, satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\kappa)| d\kappa < \infty$$

se tiene entonces que

$$f_{sm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \phi(\kappa) d\kappa$$

La expresión anterior es conocida como la transformada inversa de Fourier. En este caso, el precio o la prima, $C(S_t, t)$, de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento T , está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco, es decir,

$$C(S_t, t) = e^{-r\tau} E_t[\max(S_T - K, 0) | F_t] = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \max(x - K, 0) f_{sm}(x) dx$$

donde F_t es la información disponible al tiempo t y $\tau = T - t$ es el periodo de maduración. Un resultado importante para el cálculo de la prima de la opción es que la función de densidad de la medida estable neutral al riesgo satisface.

$$f_{srn}(-x; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = e^{-\beta\gamma^\alpha \text{Sec}\theta\tau} e^x f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \quad (2)$$

La función $f_{srn}(-x; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha})$ no se debe entender como la reflexión (aún cuando se exprese como tal) de la función $f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha})$, puesto que la expresión (2) indica que la función es un ajuste exponencial de la función de densidad estable neutral al riesgo. El ajuste exponencial se presenta claramente en el caso de que se considere una distribución estable extrema negativa, es decir, $f_{srn}(-x; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha})$, la cual resulta ser una distribución estable extrema positiva ajustada exponencialmente.

3. Precio de una opción europea de compra

Si se emplea el ajuste exponencial de la función de densidad estable neutral al riesgo obtenida en la sección anterior, fórmula (2), y la ecuación estocástica que conduce a los rendimientos logarítmicos en el universo neutral al riesgo expresados en la ecuación (1), se tiene que el precio o prima de la opción de compra europea está dado por

$$\begin{aligned} C(S, t) &= e^{-r\tau} E_t \left[\max(S_t e^{(r-\beta \text{sec}\theta)\tau + \tilde{Y}_t} - K, 0) \right] \\ &= e^{-r\tau} K E_t \left[\max\left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta \text{sec}\theta)\tau + \tilde{Y}_t} - 1, 0\right) \right] \\ &= e^{-r\tau} K \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta \text{sec}\theta)\tau + \tilde{Y}_t} - 1, 0\right) dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\ &= e^{-r\tau} K \int_{-d}^{\infty} \left(\frac{S_t}{K} e^{(r-\beta \text{sec}\theta)\tau + \tilde{Y}_t} - 1\right) dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\ &= e^{-r\tau} S_t \int_{-d}^{\infty} e^{(r-\beta \text{sec}\theta)\tau + \tilde{Y}_t} dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\ &= S_t \int_{-d}^{\infty} e^{-\beta \text{sec}\theta\tau + \tilde{Y}_t} dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S_t \int_{-d}^{\infty} e^{-\beta \sec \theta \tau + \tilde{Y}_\tau} f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_\tau \\
 &\quad - Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_\tau \\
 &= S_t \int_{-d}^{\infty} f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_\tau
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$dF_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) = f_{srn}(\tilde{Y}_t; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_t$$

y donde el límite inferior de las integrales se obtiene a partir del valor d dado por

$$d = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \beta \gamma^\alpha \sec \theta) \tau, \tag{4}$$

el cual depende del parámetro β y del parámetro α ($\theta = \frac{\alpha\pi}{2}$). Así, la prima de una opción europea de compra se puede expresar como:

$$C(S_t, t) = S_t \Phi_{srn}(d; \alpha, -\beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) - Ke^{-r\tau} \Phi_{srn}(-d; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) \tag{5}$$

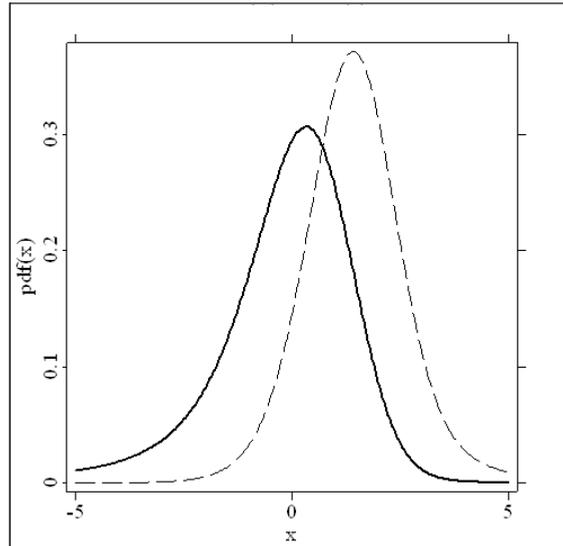
con

$$\Phi_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \{1 - F_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma)\} \tag{6}$$

La fórmula para obtener el precio de una opción europea de compra, dada en (5), a diferencia de la fórmula de Black-Scholes-Merton, depende de dos distribuciones distintas. Si se realiza la analogía con la fórmula de Black-Scholes-Merton, $\Phi_{srn}(-d; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha})$ proporciona la probabilidad de que la opción sea ejercida. Por otra parte, esta función también puede ser entendida como la función que proporciona el importe necesario a financiarse al tipo de interés libre de riesgo para replicar la opción, mientras que $\Phi_{srn}(d; \alpha, -\beta, \gamma \tau^{1/\alpha})$ proporciona la cantidad de activo subyacente requerido para el portafolio

lio replicante. La Gráfica 1 muestra las distribuciones del modelo estable $f_{srn}(x; \alpha, -\beta, \gamma, 0)$ y $f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma, 0)$ donde se consideraron los valores $\alpha = 1.5$, $\beta = -0.5$ y $\gamma = 1$.

Gráfica 1. Modelo estable.



$$f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma, 0) = f_{srn}(x; 1.5, -0.5, 1, 0) \text{ (línea continua)}$$

$$f_{srn}(x; \alpha, -\beta, \gamma, 0) = f_{srn}(x; 1.5, 0.5, 1, 0) \text{ (línea discontinua)}$$

4. Posibles valores de parámetros en la opción de compra.

Casos particulares

En esta sección se revisan algunos casos particulares de los valores de los parámetros en la prima de una opción:

a) Caso $\beta = -1$

En el modelo log-estable de momentos finitos de Carr y Wu (2003), se tiene que $f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha})$ y $f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha})$ corresponden a una distribución estable extrema positiva ajustada exponencialmente y extrema negativa, respectivamente, en consecuencia

$$\begin{aligned}
 f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) &= f_{srn}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, 1, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\
 &= f_{is}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -1, \gamma\tau^{1/\alpha}, 0, 1) \\
 &= f_{is}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, 1, \gamma\tau^{1/\alpha}, 0, -1)
 \end{aligned} \tag{7}$$

y

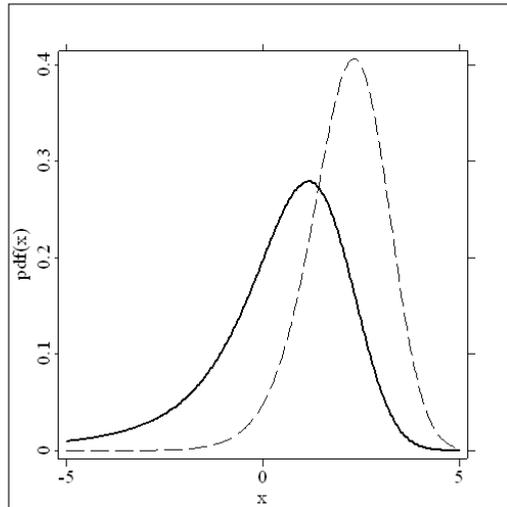
$$\begin{aligned}
 f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) &= f_{srn}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, -1, \gamma\tau^{1/\alpha}) \\
 &= f_s(\tilde{Y}_\tau; \alpha, -1, \gamma\tau^{1/\alpha})
 \end{aligned} \tag{8}$$

El valor d en (4) se calcula como $d = \ln \frac{S_t}{K} + (r - \gamma^\alpha \sec \theta)\tau$. Por tanto, a partir de (3) y (5), se tiene que

$$\begin{aligned}
 C(S_t, t) &= S_t \int_{-d}^{\infty} f_{is}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, 1, \gamma\tau^{1/\alpha}, -1) d\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_s(\tilde{Y}_\tau; \alpha, -1, \gamma\tau^{1/\alpha}) d\tilde{Y}_\tau \\
 &= S_t \Phi_{is}(d; \alpha, 1, \gamma\tau^{1/\alpha}, -1) - Ke^{-r\tau} \Phi_s(-d; \alpha, -1, \gamma\tau^{1/\alpha})
 \end{aligned} \tag{9}$$

Las funciones (7) y (8), involucradas en la valuación bajo este modelo, se presentan en la Gráfica 2.

Gráfica 2. Modelo log-estable momentos finitos.



$$f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma, 0) = f_s(x; 1.5, -1, 1, 0) \text{ (línea continua)}$$

$$f_{srn}(x; \alpha, -\beta, \gamma, 0) = f_{is}(x; 1.5, 1, 1, 0, -1) \text{ (línea discontinua)}$$

b) Caso normal $\alpha = 2$ y $\beta = 0$

En el caso de que los rendimientos logarítmicos tengan una distribución normal, la función de densidad estable neutral al riesgo resulta ser una distribución normal de donde se obtiene que $d = \ln \frac{S_t}{K} + r\tau$ (con $\beta = 0$) y

$$f_{sm}(-\tilde{Y}_\tau; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; \frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) \quad (10)$$

y

$$f_{sm}(\tilde{Y}_\tau; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) = f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; -\frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) \quad (11)$$

que al sustituirse en (3), proporciona la fórmula de Black-Scholes-Merton:

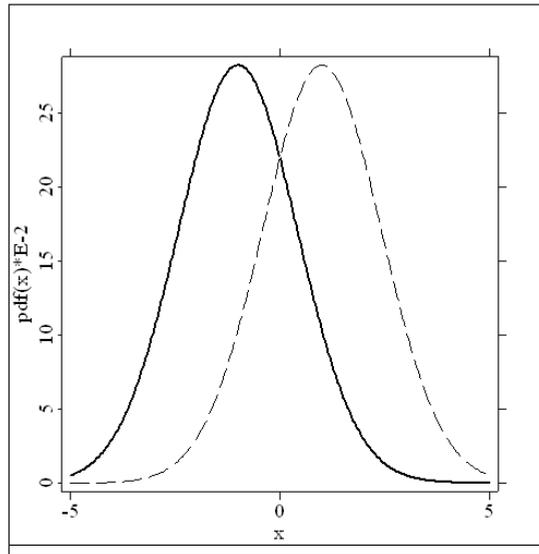
$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= S_t \int_{-d}^{\infty} f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; \frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) d\tilde{Y}_\tau - Ke^{-r\tau} \int_{-d}^{\infty} f_{normal}(\tilde{Y}_\tau; -\frac{\sigma^2}{2}\tau, \sigma^2\tau) d\tilde{Y}_\tau \\ &= S_t \int_{-d_1}^{\infty} f_{normal}(\varepsilon; 0, 1) d\varepsilon - Ke^{-r\tau} \int_{-d_2}^{\infty} f_{normal}(\varepsilon; 0, 1) d\varepsilon \\ &= S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Las funciones (10) y (11) involucradas en la valuación normal bajo el modelo estable se presentan en la Gráfica 3.

Gráfica 3. Modelo Black-Scholes-Merton.



$$f_{srn}(x; \alpha, \beta, \gamma, 0) = f_{normal}(x; -1/2, 1) \text{ (línea continua)}$$

$$f_{srn}(x; \alpha, -\beta, \gamma, 0) = f_{normal}(x; 1/2, 1) \text{ (línea discontinua)}$$

5. Precio de una opción europea de venta

El análisis anterior también puede ser extendido a la valuación de opciones europeas de venta. En efecto, si $P(S_t, t)$ denota el precio de una opción europea de venta, empleando la condición de paridad *put-call*,

$$P(S_t, t) + S_t = C(S_t, t) + Ke^{-r\tau}$$

se obtiene

$$P(S_t, t) = Ke^{-r\tau} F_{srn}(-d; \alpha, \beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) - S_t F_{srn}(d; \alpha, -\beta, \gamma\tau^{1/\alpha}) \quad (13)$$

6. Pago continuo de dividendos

Si se supone que el activo subyacente es una acción que paga dividendos de manera continua a una tasa constante conocida q , entonces se tiene que

$$d \ln S_t = (r - q - \beta \gamma^\alpha \sec \theta) \tau + d\tilde{Y}_t \quad (14)$$

y el precio de la opción en (5) y el valor d en (4) se escriben ahora, respectivamente, como

$$C(S_t, t) = S_t e^{-q\tau} \Phi_{srn} (d; \alpha, -\beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) - K e^{-r\tau} \Phi_{srn} (-d; \alpha, \beta, \gamma \tau^{1/\alpha}) \quad (15)$$

$$d = \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - q - \beta \gamma^\alpha \sec \theta) \tau \quad (16)$$

7. Impacto en precios por colas pesadas y asimetría

Se realiza un primer análisis del impacto en los precios de opciones por el uso de distribuciones estables considerando la diferencia de precios entre el modelo estable y el modelo de Black-Scholes-Merton. En el modelo estable se consideraron diferentes valores para el índice de estabilidad y el parámetro de asimetría, los cuales se presentan en el siguiente Cuadro.

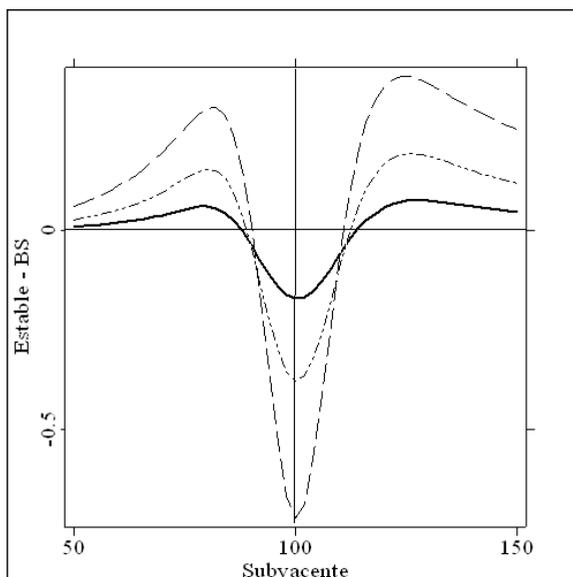
Cuadro 1. Valores de los parámetros.

Parámetros		Valor
Precio del subyacente	(S_t)	50-150
Precio de ejercicio	(K)	100
Parámetro de escala	(γ)	0.26
Periodo de maduración	(τ)	1/12

El modelo BSM se obtiene con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 0$ y resulta de ajustar el parámetro de escala por $\sqrt{2}$. Cuando se emplean distribuciones estables simétricas ($\beta = 0$, también conocidas como vuelos de Lévy), se observa que los precios obtenidos por el modelo BSM son inferiores a los correspondientes al modelo estable en una posición “dentro del dinero” y “fuera del dinero” y a medida que se alcanza una posición “en el dinero”, la valuación de la opción bajo el modelo estable es inferior al modelo. El comportamiento es explicado

por el hecho de que la función de densidad de la distribución normal tiene mayor masa de probabilidad en valores adyacentes al precio de ejercicio, y las funciones de densidad de las distribuciones estables tienen mayor masa en las colas. Obsérvese que a medida que el parámetro α se aproxima a 2, la diferencia desaparece, mientras que si el valor se aleja de 2, la diferencia es más acentuada. Este comportamiento se ilustra en la Gráfica 4.

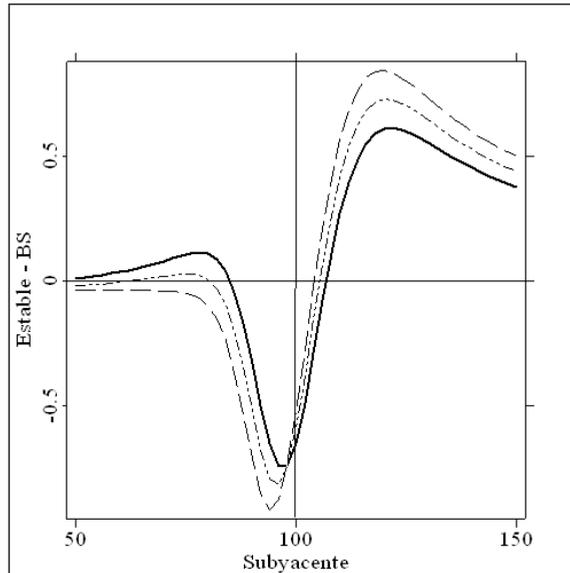
Gráfica 4. Estable simétrica.



$\alpha = 1.9$ (línea continua), $\alpha = 1.8$ (punteada) y $\alpha = 1.75$ (discontinua).

El efecto de la asimetría (considerando un índice de estabilidad de $\alpha = 1.5$) en la valuación de la opción se aprecia en la Gráfica 5. Para este caso, las primas obtenidas por el modelo estable se incrementan considerablemente (con respecto al modelo de Black-Scholes-Merton) a medida que el parámetro β se aproxima a -1 (límite de asimetría) en una posición “dentro del dinero”, consecuencia del traslado de la masa de probabilidad hacia la derecha por la asimetría negativa. Comportamientos similares son obtenidos por Cartea y Howison (2009) en su fórmula de valuación en el dominio de las frecuencias.

Gráfica 5. Estable asimétrica.

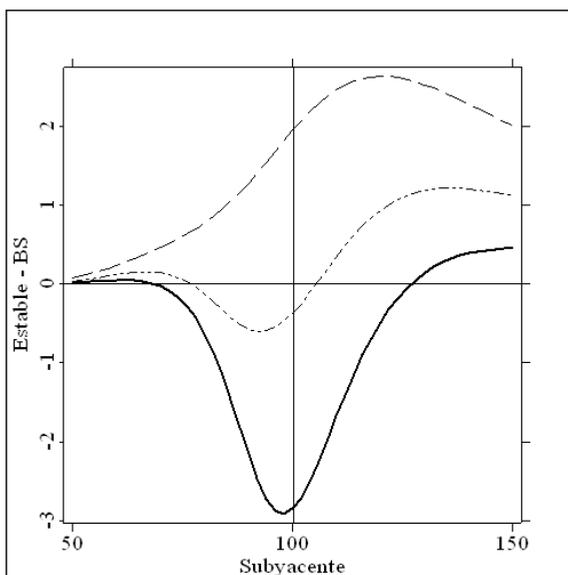


$\beta = -0.5$ (línea continua), $\beta = -0.75$ (punteada) y $\beta = -1$ (discontinua).

8. Impacto en precios por parámetro de escala

En finanzas la volatilidad es de primordial importancia en la valuación de opciones. En el análisis realizado hasta el momento sobre el comportamiento de los precios de opciones, en el modelo estable, se ha supuesto que el parámetro de escala está relacionado con la volatilidad mediante un ajuste por $\sqrt{2}$. En este punto se debe recordar que las distribuciones estables carecen de segundo momento. Sin embargo, en procesos como la normalización o estandarización en distribuciones estables, el parámetro γ toma el papel de “medida de dispersión”, papel que se extiende al concepto de volatilidad en el ámbito financiero, con lo cual se asocia la volatilidad del subyacente con el parámetro de escala de la distribución estable. No obstante, esta volatilidad está directamente asociada al índice de estabilidad y al parámetro de asimetría. El impacto de la volatilidad en el modelo estable se ilustra en la Gráfica 6. En esta gráfica se aprecia que los precios del modelo estable en posiciones cercanas “en el dinero” aumentan a medida que la volatilidad crece llegando a superar los precios del modelo BSM.

Gráfica 6. Parámetro de escala.



$\gamma = 0.16$ (línea continua), $\gamma = 0.26$ (punteada) y $\gamma = 0.36$ (discontinua).

9. Conclusiones

A la fecha, los modelos estables de valuación de opciones han estado circunscritos al dominio de las frecuencias, lo que conlleva la necesidad de tener conocimiento de transformadas de Fourier y sus inversas, así como de contornos de integración con el fin de aplicar estos modelos de valuación. Lo anterior es consecuencia de que la única expresión analítica simple para el análisis de las distribuciones estables corresponde a la función característica. En este trabajo se ha presentado una propuesta para valorar opciones con distribuciones α -estables basada en la medida estable neutral al riesgo propuesta por McCulloch (2003). La propuesta, a diferencia de las hasta ahora presentadas en la literatura, desarrolla una fórmula de valuación al dominio del espacio y tiempo, permitiendo adaptarse más a la forma de valorar del modelo Black-Scholes-Merton. El empleo del modelo estable de valuación requiere, además, de los parámetros financieros relevantes (precio spot del subyacente, precio de ejercicio, tasa de interés, período de maduración y volatilidad) utilizados

por el modelo de Black-Scholes-Merton, incorporar dos parámetros adicionales el índice de estabilidad y el correspondiente a la asimetría. Por lo tanto, la fórmula de valuación hace uso de una mínima cantidad de información para su aplicación capturando características como colas pesadas y asimetrías presentes en las series financieras, características que el modelo Black-Scholes-Merton no captura.

Aun cuando no se cuenta con una expresión simple de la función de densidad de una distribución estable, sí se tiene una representación numérica; la cual permite aproximar la prima de la opción en el espacio y el tiempo, y permite realizar los cálculos involucrados en la valuación como son: la aproximación de funciones de densidad y distribución.

Bibliografía

- Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Borak, S., W. Hardle y R. Weron (2005). *Stable Distributions, SFB 649 Economic Risk*. Berlín.
- Carr, P. y L. Wu (2003). "The finite moment log stable process and option pricing". *The Journal of Finance*, vol. 52, núm. 2, pp. 753-777.
- Cartea, A. y S. Howinson (2009). "Option Pricing with Lévy-Stable Processes Generated by Lévy-Stable Integrated Variance". *Quantitative Finance*, vol. 9, núm. 4, pp 397-409.
- Gorenflo, R. y F. Mainardi (1988). "Fractional Calculus and Stable probability Distributions". *Arch. Mechanincs*, vol. 50, pp. 377-388.
- Li, X. (2003). *Fractional differential equations and stable distributions. Applied Probability Trust*.
- McCulloch, J.H. (2003). *The Risk-Neutral Measure under Log-Stable Uncertainty*. Working Paper.
- Merton, R.C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 1-2, pp. 125-144.
- Metzler, R. y J. Klafter (2000). "The random walk guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach". *Phys. Reports*, vol. 339, núm. 1, pp. 1-77.
- Montroll, E.W. y G.H. Weiss (1965). *J. Math. Phys*, vol. 6, pp. 167-178.

Nolan, J.P. (2009). *Stable distributions: Models for Heavy Tailed Data*. [Web en línea]. Disponible desde Internet en: www.academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf [sin fecha de acceso].

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. 2ª. ed. Cengage Learning, México.

Estimación de la esperanza de la función de penalización descontada en procesos de riesgo con medida de intensidad continua: El caso de la probabilidad de ruina en tiempo finito

María Guadalupe Cordero Parra*

1. Introducción	75
2. Procesos de Poisson no estacionarios	75
3. Procesos de riesgo y la esperanza de la función de castigo descontada	80
4. Estimación de la probabilidad de ruina	81
5. Resultados	83
6. Conclusiones	84

* Instituto Politécnico Nacional.
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Zacatenco.
lupitacdeh@hotmail.com

RESUMEN

La esperanza de la función de castigo descontada se emplea en una amplia familia de problemas en el contexto de la teoría de riesgo actuarial, la valuación de opciones en finanzas y la reclamación contingente del tiempo de ejercicio óptimo. Modelar la tasa de reclamaciones como una función dependiente del tiempo es una extensión del proceso clásico de riesgo que desemboca en la probabilidad de ruina bajo procesos de Poisson no estacionarios. En este trabajo la probabilidad de ruina como un caso especial de la esperanza de la función de castigo descontada es estimada empleando métodos de Monte Carlo y se muestran ejemplos con distribuciones de Pareto y Weibull, para las reclamaciones y medida de intensidad continua bajo horizonte finito.

ABSTRACT

The expected discounted penalty function is useful in a wide family of problems related to insurance risk theory, finance valuation of options and the contingent claim of optimal exercise time. Modeling the arrival claim rate as a time dependent function is an extension of the classical risk process that yields to the probability of ruin under non stationary Poisson process. In this paper the probability of ruin within finite time horizon is estimated using Monte Carlo methods as a special case of the expected discounted penalty function and examples with Pareto and Weibull distributions for the claims and continuous intensity measure are provided.

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo primordial estimar la probabilidad de ruina bajo un horizonte de tiempo finito, en el cual se considera un proceso de riesgo donde el proceso de llegada de las reclamaciones sigue un proceso de Poisson no estacionario, es decir, la tasa de llegada no es constante en el tiempo. Se plantea la probabilidad de ruina como un caso especial de la esperanza de la función de castigo descontada, que abarca una amplia familia de problemas en el contexto de la teoría de riesgo actuarial (Sheldon Lin y Wang, 2009) y la valuación de opciones de catástrofe en finanzas (Jaimungal y Wang, 2006). En la segunda sección, se plantea el marco teórico de los procesos de Poisson no estacionarios; en la tercera, se definen los procesos de riesgo y la esperanza de la función de castigo descontada; en la cuarta sección se formula el algoritmo de simulación para la estimación de la probabilidad de ruina; en la quinta sección se muestran resultados de las estimaciones para los casos no-estacionario/Pareto y no-estacionario/Weibull. Finalmente se presentan las conclusiones y las referencias.

2. Procesos de Poisson no estacionarios

DEFINICIÓN 2.1 Un proceso estocástico $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo (Ross, 1983) si:

- (i) $N_t \geq 0$.
- (ii) N_t toma valores enteros.
- (iii) Si $s < t$, entonces $N_s \leq N_t$.
- (iv) Para $s < t$, $N_t - N_s$ es el número de eventos que ocurrieron en el intervalo $(s, t]$.

DEFINICIÓN 2.2 El proceso de conteo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson no estacionario con función de intensidad $\lambda(t) > 0, t \geq 0$ si:

- (i) $N_0 = 0$.
- (ii) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes.
- (iii) $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.
- (iv) $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

Sea

$$a(t) := \int_0^t \lambda(s) ds,$$

la medida de intensidad de $\{N_t\}_{t \geq 0}$.

TEOREMA 2.3 Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Poisson no estacionario y sean $t, s \geq 0$, entonces $N_t - N_s$ se distribuye Poisson con esperanza $a(t + s) - a(s)$.

Demostración: Sea

$$P_n(s) := P(N_{t+s} - N_t = n).$$

Entonces

$$P_0(s + h) = P(N_{t+s+h} - N_t = 0)$$

$$P_0(s + h) = P(N_{t+s} - N_t = 0, N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0),$$

aplicando la definición 2.2 (ii) al lado derecho tenemos

$$P_0(s + h) = P(N_{t+s} - N_t = 0)P(N_{t+s+h} - N_{t+s} = 0),$$

luego de la definición 2.2 (iii) y (iv)

$$P_0(s + h) = P_0(s)[1 - \lambda(t + s)h + o(h)],$$

de aquí que

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h},$$

tomamos el límite cuando $h \rightarrow 0$, luego

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s),$$

es decir,

$$\ln P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)du$$

y esto implica

$$P_0(s) = e^{-[a(t+s)-a(t)]}. \quad (2.1)$$

Análogamente para $n \geq 1$

$$P_n(s+h) = P(N_{t+s+h} - N_t = n)$$

$$P_n(s+h) = P_n(s)[1 - \lambda(t+s)h] + P_{n-1}(s)[\lambda(t+s)h] + o(h).$$

Luego

$$\frac{P_n(s+h) - P_n(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_n(s) + \lambda(t+s)P_{n-1}(s) + \frac{o(h)}{h},$$

tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ y multiplicando ambos lados por

$$e^{a(t+s)-a(t)},$$

$$e^{a(t+s)-a(t)}[P_n'(s) + \lambda(t+s)P_n(s)] = \lambda(t+s)e^{a(t+s)-a(t)}P_{n-1}(s),$$

luego

$$\frac{d}{dt} \left(e^{a(t+s)-a(t)} P_n(s) \right) = \lambda(t+s) e^{a(t+s)-a(t)} P_{n-1}(s). \quad (2.2)$$

Cuando $n = 1$ y usando 2.1

$$\frac{d}{dt} \left(e^{a(t+s)-a(t)} P_1(s) \right) = \lambda(t+s),$$

de forma equivalente

$$P_1(s) = [(a(t+s) - a(t)) + c] e^{-(a(t+s)-a(t))}. \quad (2.3)$$

Evaluamos en $s = 0$ para calcular la constante c

$$P_1(0) = P(N_{t+0} - N_t = 1) = 0,$$

sustituyendo en 2.3

$$(a(t+0) - a(t) + c) e^0 = 0,$$

es decir,

$$c = 0.$$

Luego

$$P_1(s) = (a(t+s) - a(t)) e^{-(a(t+s)-a(t))}.$$

Para demostrar que $P_n(t) = e^{-(a(t+s)-a(t))} (a(t+s) - a(t))^n / n!$ se usó inducción matemática.

Asumimos que la fórmula de $P_1(s)$ vale para $n - 1$, entonces al emplear (2.2)

$$\frac{d}{dt} \left(e^{a(t+s)-a(t)} P_n(s) \right) = \frac{\lambda(t+s) (a(t+s) - a(t))^{-1}}{(n-1)!},$$

que implica

$$e^{(a(t+s)-a(t))} P_n(s) = \frac{(a(t+s) - a(t))^n}{n!} + c,$$

pero

$$P_n(0) = P(N_{t+0} - N_t = n) = 0$$

por tanto

$$P_n(t) = e^{-(a(t+s)-a(t))} (a(t+s) - a(t))^n / n!$$

Es importante resaltar que el teorema 2.3 implica que

$$E(N_t) = E(N_t - N_0) = a(t).$$

PROPOSICIÓN 2.4 $a(t)$ es una función no decreciente y continua por la derecha.

Demostración: Como $N_{t+s} \geq N_t$ entonces $EN_{t+s} \geq EN_t$, es decir,

$$a(t+s) \geq a(t).$$

Sea t_n una sucesión tal que $t_n \downarrow t$, entonces $N_{t_n} \downarrow N_t$ porque N es continua por la derecha. Por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{t_n \downarrow t} a(t_n) = a(t).$$

DEFINICIÓN 2.5 La inversa de la medida de intensidad es

$$a^{-1}(t) := \sup\{s | a(s) \leq t\}.$$

Observe que a^{-1} es continua por la derecha. Si además a es continua, a^{-1} es creciente y $a \circ a^{-1}(t) = t$, $t < a(\infty)$.

PROPOSICIÓN 2.6 Sea N un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad a continua con $a(\infty) = \infty$. Entonces el proceso de conteo $\underline{N} := N \circ a^{-1}$ es un proceso de Poisson estacionario con $\lambda = 1$.

Demostración: Como a^{-1} es creciente \underline{N} tiene incrementos independientes. Por otra parte, el teorema 2.3 implica que $\underline{N}_t - \underline{N}_s = N_{a^{-1}(t)} - N_{a^{-1}(s)}$ se distribuye Poisson con esperanza.

$$a(a^{-1}(t)) - a(a^{-1}(s)) = t - s.$$

3. Procesos de riesgo y la esperanza de la función de castigo descontada

En la teoría clásica de riesgo (Beard, Pentikainen y Pesonen, 1984) se modela el comportamiento de una póliza mediante un proceso estocástico que depende del capital inicial x , la constante de ingreso c y los parámetros de la distribución de los montos de las reclamaciones Y_i y de la tasa de arribo λ de un proceso de Poisson estacionario.

DEFINICIÓN 3.1 El proceso de riesgo clásico que modela el capital en el momento t es

$$X_t = x + ct - \sum_{i=0}^{N_t} Y_i .$$

Una forma natural de calcular (Hoyos Reyes, 2001) la constante de ingreso es tomando el producto de un factor de recargo por el valor esperado de la pérdida

$$c = (1 + \rho)E\left[\sum_{i=0}^{N_t} Y_i\right] ,$$

donde ρ es el factor de recargo que se interpreta como el sobreprecio que la aseguradora fija para evitar que el capital eventualmente sea negativo, es decir, para evitar la ruina.

DEFINICIÓN 3.2 Bajo la medida de probabilidad P^x la probabilidad de ruina es

$$\psi(x) := P^x(\tau < \infty),$$

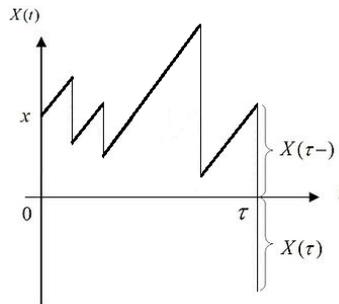
donde $\tau = \inf\{t | X_t < 0\}$ es el momento en que la ruina ocurre.

DEFINICIÓN 3.3 La esperanza de la función de castigo descontada (Gerber y Shiu, 1998) es

$$m(x) := E^x\left[e^{-\delta\tau} \omega(x_{\tau-}, x_{\tau}) \mathbb{I}\{\tau < \infty\}\right]$$

Donde δ es una tasa de interés y $\omega(x_{\tau-}, x_{\tau})$ es una función de penalización que representa los costos económicos del asegurador en el momento de la ruina asumiendo que dependen del superávit $X_{\tau-}$ en el instante de la ruina y el déficit en la ruina X_{τ} (véase la Figura 1).

Figura 1. Superávit y déficit en el momento de la ruina.



Para calcular la probabilidad de ruina empleando $m(x)$ basta considerar $\delta = 0$ y $\omega(x_{\tau-}, x_{\tau}) = 1$.

DEFINICIÓN 3.4 La probabilidad de ruina en un horizonte de tiempo finito T es

$$\psi(x, T) = m(x),$$

con $\delta = 0$ y $\omega(x_{\tau-}, x_{\tau}) = \mathbb{I}\{\tau \leq T\}$.

4. Estimación de la probabilidad de ruina

ALGORITMO 4.1 Estimación de la probabilidad de ruina con horizonte finito T , bajo un proceso de Poisson no estacionario con medida de intensidad a continua.

OBJETIVO: Generar las n realizaciones del proceso de riesgo X_t , donde el proceso de llegada de las reclamaciones es Poisson no estacionario, para formular $\hat{\psi}(x, T)$ el estimador de Monte Carlo (EMC) de $\hat{\psi}(x, T)$.

ENTRADA: n, T, x, ρ, a, F_Y .

SALIDA: $\hat{\psi}(x, T)$.

MÉTODO:

$i \leftarrow 1$.

$R \leftarrow 0$.

Hasta que $i > n$ haz:

$$X \leftarrow 0.$$

$$t \leftarrow 0.$$

$$Z \leftarrow 0.$$

$$W \leftarrow 0.$$

Mientras $(X \leq x)$ y $(t < T)$ haz:

Generamos $S \sim \exp(1)$.

Generamos $Y \sim F_Y$.

$$W \leftarrow W + S.$$

$$t \leftarrow a^{-1}(W).$$

$$Z \leftarrow Z + Y.$$

$$X \leftarrow Z - (1 + \rho) \cdot EY \cdot a(t).$$

Si $X > x$ entonces $R \leftarrow R + 1$.

Fin Mientras.

$$i \leftarrow i + 1.$$

Fin Hasta.

$$\hat{\psi}(x, T) \leftarrow R/n.$$

DEFINICIÓN 4.2 Llamamos S_{EMC} a la desviación estándar del EMC es decir,

$$S_{EMC} = \sqrt{VAR(\hat{\psi}(\theta, t))}.$$

DEFINICIÓN 4.3 La *Tolerancia* del EMC $\hat{\psi}(\theta, t)$ es el radio del intervalo de confianza del estimador con 99% de confianza,

$$Tol_{0.01} = 2.575 S_{EMC}.$$

DEFINICIÓN 4.4 El %*Tol* es el porcentaje de variación de la *Tolerancia* respecto al EMC $\hat{\psi}(\theta, t)$,

$$\%Tol = 100 \frac{Tolerancia}{\hat{\psi}(\theta, t)}.$$

5. Resultados

EJEMPLO 5.1 Proceso de riesgo con llegadas de acuerdo a un proceso de Poisson no estacionario con reclamaciones distribuidas *Pareto*(α, β) .

Se considera una medida de intensidad $a(t) = t^2$, por lo que $\lambda(t) = 2t$, y se realizaron 10^4 simulaciones empleando el método de la transformada inversa para simular los montos de las reclamaciones.

Tabla 1. Estimación de la probabilidad de ruina caso no-estacionario/Pareto.

ρ	x	α	β	T	$\Psi(x, T)$	S_{EMC}	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	3	0.5	10	0.2114	4.08×10^{-3}	1.05×10^{-2}	4.97
0.01	10	3	0.5	20	0.4872	4.99×10^{-3}	1.29×10^{-2}	2.64
0.05	10	3	0.5	20	0.2851	4.51×10^{-3}	1.16×10^{-2}	4.07
0.01	20	4	2	10	0.4251	4.94×10^{-3}	1.27×10^{-2}	2.99
0.05	20	4	2	10	0.3220	4.67×10^{-3}	1.20×10^{-2}	3.74
0.05	20	4	2	30	0.4865	4.99×10^{-3}	1.28×10^{-2}	2.64

EJEMPLO 5.2 Caso no estacionario/distribución de Weibull.

La distribución de Weibull resulta particularmente interesante porque no existe la función generadora de momentos si $\alpha < 1$. Para simular los montos

de las reclamaciones se emplea el método de la transformada inversa. Se realizaron 10^4 simulaciones en cada realización para la estimación del EMC, con una medida de intensidad igual al ejemplo 5.1.

Tabla 2. Estimación de la probabilidad de ruina caso no-estacionario/Weibull.

ρ	x	α	β	T	$\psi^*(x,T)$	S_{EMC}	$Tol_{0.01}$	%Tol
0.01	10	0.5	1	10	0.7082	4.55×10^{-3}	1.17×10^{-2}	1.65
0.01	10	0.5	1	50	0.9221	2.68×10^{-3}	6.90×10^{-3}	0.75
0.03	20	0.5	1	50	0.8325	3.73×10^{-3}	9.62×10^{-3}	1.15
0.01	50	2	3	20	0.1102	3.13×10^{-3}	8.06×10^{-3}	7.31
0.03	40	2	3	20	0.1223	3.27×10^{-3}	8.43×10^{-3}	6.89
0.03	40	2	3	30	0.2127	4.09×10^{-3}	1.05×10^{-2}	4.95

6. Conclusiones

Los procesos de Poisson no estacionarios nos permiten modelar problemas donde la tasa de llegada depende del tiempo, lo que se traduce en una mejor aproximación a la realidad. Los problemas de riesgo en el contexto de la esperanza de la función de castigo descontada son relevantes en aplicaciones actuariales y financieras, la extensión al problema de la probabilidad de ruina en tiempo finito bajo una medida de intensidad discontinua será materia de trabajos posteriores. Los resultados permiten, bajo necesidades particulares, realizar un análisis de escenarios considerando que el algoritmo descrito puede emplearse utilizando diferentes distribuciones para los montos de las reclamaciones y de diversas medidas de intensidad continuas.

Referencias

- Beard, R.E., T. Pentikainen y E. Pesonen (1984). *Risk Theory*. Nueva York, Chapman and Hall.
- Gerber, H.U. y E.S.W. Shiu (1998). "On the time value of ruin". *North American Actuarial Journal*. Society of Actuaries. Vol. 2, núm. 1. EU, pp. 48-78.
- Hoyos Reyes, L.F. (2001). "Monte Carlo approach to insurance ruin problems using conjugate processes". *Morfismos*. IPN-Cinvestav-Departamento de Matemáticas. Vol. 5, núm. 2. México, 2001, pp. 37-50.
- Jaimungal, S. y T. Wang (2006). "Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses". *Insurance: Mathematics and Economics*. Elsevier. Vol. 38, núm. 3. Holanda, junio, pp. 469-483.
- Sheldon Lin, X., y Wang, T. (2009). "Pricing perpetual American catastrophe put options: A penalty function approach". *Insurance: Mathematics and Economics*. Elsevier. Vol. 44, núm. 2. Holanda, abril, pp. 287-295.
- Ross, Sheldon M. (1983). *Stochastic Processes*. Nueva York, John Wiley & Sons.

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO



Red para el análisis de riesgos financieros

Convocatoria abierta

La revista Estocástica: finanzas y riesgo, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. Estocástica es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- ❖ Administración y análisis de riesgos financieros.
- ❖ Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- ❖ Diseño de instrumentos financieros.
- ❖ Econometría financiera.
- ❖ Finanzas computacionales.
- ❖ Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- ❖ Finanzas matemáticas.
- ❖ Ingeniería financiera.
- ❖ Innovación financiera.
- ❖ Mercados financieros.
- ❖ Modelado del comportamiento de instrumentos derivados.
- ❖ Modelado financiero.
- ❖ Modelado matemático de riesgos.
- ❖ Modelos de regulación financiera.
- ❖ Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- ❖ Teoría financiera.
- ❖ Valuación de activos financieros

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica del departamento de administración de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros

Departamento de
Administración 

