

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés estocástica bajo una medida "forward" neutral al riesgo

Raúl de Jesús Gutiérrez
Miguel A. Díaz Carreño

Full cooperation to solve environmental problems using financial markets

Wojciech Szatzschneider
Teresa Kwialkowska

Valuación de una nota estructurada que liga el rendimiento de un índice bursátil con los pagos de un bono y un derivado

Ambrosio Ortiz-Ramírez
Francisco Venegas-Martínez
Francisco López-Herrera

Impacto económico del aumento en el precio de la gasolina en México: un análisis de cointegración y vectores autorregresivos

Miguel Cervantes Jiménez
Pablo López Sarabia
Jocelyne Montiel Alejo

2

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO

Número **2**

Directorio

Rector General

Dr. Enrique Pablo Alfonso
Fernández Fassnacht

Secretaria General

Mtra. Iris Edith Santacruz Fabila

Rectora de la Unidad Azcapotzalco

Mtra. Gabriela Paloma Ibañez Villalobos

Secretario de la Unidad

Ing. Darío Eduardo Guaycochea
Guglielmi

Director de la División De Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Sánchez Daza

Secretario Académico

Mtro. Lucino Gutiérrez Herrera

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Lic. Santiago Ávila Sandoval

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández Lerma
Dr. Francisco Venegas-Martínez
Dr. Edgar Ortiz
Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Andrade
Dra. Patricia Saavedra Barrera
Dr. Francisco López Herrera
Dr. Wojciech Szatzschneider Smigielska

Comité Editorial

Presidente

Dr. Luis Fernando Hoyos Reyes

Editora

Mtra. Marissa R. Martínez Preece

Miembros

Dra. María G. Henaine-Abed
Mtro. Carlos Zubieta Badillo

Estocástica: Finanzas y Riesgo. Año 2, número 1, enero -junio de 2012, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración, Red para el Análisis de Riesgos Financieros. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, D.F., y Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, D.F.; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Mtra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN en trámite, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Sistemas, Dra. María Guadalupe Henaine Abed; fecha de última modificación: 30 de enero de 2012. Tamaño del archivo 4.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación, sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Presentación

Con este segundo número, la Red para el Análisis de Riesgos Financieros continúa estableciendo un espacio de colaboración para que los investigadores en finanzas, administración y modelado de riesgos financieros compartan sus resultados de investigación original.

En este número, el lector encontrará cuatro documentos de investigación relevantes en el estudio y práctica de estas áreas de conocimiento. En dos de estos artículos, los autores desarrollan modelos de valuación para instrumentos financieros. El primero desarrolla metodologías estocásticas para valorar opciones y, utilizando información empírica, concluye que existen divergencias entre los valores estimados de las opciones y los valores observados en los mercados. En el segundo artículo, los autores proporcionan un modelo cerrado para la valuación de una nota estructurada que satisface los modelos de Black-Scholes y Merton.

Los dos trabajos de investigación restantes están vinculados con temas que actualmente reciben singular atención. En el primero de éstos, los autores aplican metodologías financieras para explorar soluciones a los problemas del medio ambiente. Proponen que a través de la emisión de “certificados de mejora” que se comercialicen en mercados financieros, es posible estimular la cooperación entre agentes económicos en forma tal que la dinámica propia de los mercados determine el valor “correcto” de las mejoras ambientales. Por otra parte, el último artículo se refiere al efecto económico asociado a la política seguida por el gobierno mexicano de incrementar gradualmente los precios de las gasolinas. Los autores desarrollan un modelo econométrico que les permite concluir que, contrario a lo que la mayoría de los analistas económicos suponen, estos incrementos no se traducen en incrementos de precios generalizados en la economía.

Esperamos que los lectores de Estocástica: finanzas y riesgo encuentren en este número, material de investigación original que estimule y promueva el desarrollo de las finanzas, el análisis, la administración y el modelado de riesgos financieros.

Comite Editorial.

CONTENIDO

Introducción

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés estocástica bajo una medida **forward** neutral al riesgo

Raúl de Jesús Gutiérrez
Miguel A. Díaz Carreño

7

Full cooperation to solve environmental problems using financial markets

Wojciech Szatyschneider
Teresa Kwialkowska

35

Valuación de una nota estructurada que liga el rendimiento de un índice bursátil con los pagos de un bono y un derivado

Ambrosio Ortiz-Ramírez
Francisco Venegas-Martínez
Francisco López-Herrera

49

Impacto económico del aumento en el precio de la gasolina en México: un análisis de cointegración y vectores autorregresivos

Miguel Cervantes Jiménez
Pablo López Sarabia
Joceline Montiel Alejo

63

Soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones con tasa de interés estocástica bajo una medida **forward** neutral al riesgo

Raúl de Jesús Gutiérrez*

Miguel A. Díaz Carreño**

Fecha de recepción: 5 de abril de 2011

Fecha de aceptación: 27 de mayo de 2011

* Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Economía.
rjg2005mx@yahoo.com.mx

** Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Economía.

RESUMEN

El impacto de la naturaleza no lineal y el comportamiento estocástico de la tasa de interés se reflejan directamente en la fijación de precios de los productos derivados, particularmente en los contratos con vencimientos largos. Este trabajo de investigación propone modelos analíticos para la valuación de opciones sobre acciones cuando la tasa de interés tiende a ser estocástica bajo una medida martingala equivalente o *forward* neutral al riesgo. El modelo de equilibrio toma en cuenta la interacción entre los movimientos de los precios del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de riesgo crédito, capturando las dos fuentes de incertidumbre en una sola a través del término de difusión de la dinámica del precio *forward*. Además, el modelo de solución cerrada es aplicado a los precios diarios de América Móvil. El periodo de los datos cubre del 2 de enero de 2004 al 9 de mayo de 2011. En general, los resultados numéricos indican que los valores de las opciones están sobreestimados o subestimados con respecto a los valores de mercado en la mayoría de los casos.

Palabras claves: Valuación de opciones, tasa de interés estocástica, procesos de difusión, medidas martingala.

ABSTRACT

The nonlinear dynamics and the stochastic behaviour of the interest rate have a stronger impact on the pricing of derivatives securities, particularly for long-maturity option contracts. This paper proposes closed-form solutions for the pricing of equity options when the interest rate is stochastic under the existence of an equivalent martingale measure or risk-neutral forward measure. The arbitrage-free pricing model allows for capturing the dependence structure between the rates of return of the underlying stock and the default-free zero coupon bond, i. e. the two uncertainty sources can be simplified as one uncertainty source by means of the diffusion term of the forward price dynamics. In addition, we apply the solutions of model to the daily data of America Movil over the period 2 January 2004 to 9 May 2011. Overall, the numerical results show that the values of the options are overestimated or underestimated with respect to the market values in most of the cases.

Keywords: Derivatives pricing formula, stochastic interest rate, diffusion processes, martingale measure.

1. Introducción

En el campo de las finanzas cuantitativas, el modelo de forma cerrada de Black-Scholes ha sido extensamente aplicado para los propósitos de valuación, administración y control de riesgos de portafolios de derivados por los participantes en los mercados organizados y OTC en las últimas décadas, incluso para la valuación de opciones reales (Trigeorgis, 1996). Por ello, la sólida teoría es considerada la base financiera para los métodos contemporáneos de valuación de opciones bajo la premisa de la ausencia de oportunidades de arbitraje. La esencia de la teoría de Black-Scholes (1973) consiste en construir un portafolio libre de riesgo formado por una posición larga en el mercado de opciones y una posición corta en el mercado de contado (acción o activo riesgoso), la cual debe ser replicada en intervalos de tiempo infinitesimales. El resultado principal de esta perfecta estrategia de cobertura libre de riesgo es la ecuación diferencial parcial parabólica lineal, cuya solución analítica es la fórmula para la valuación de opciones bajo los supuestos de que la dinámica del precio del activo subyacente está gobernada por un movimiento Browniano geométrico y la tasa de interés es conocida y constante a través del tiempo. Este último supuesto asumido en el marco de Black-Scholes se atribuye al hecho de que el comportamiento de las tasas de interés tiende a ser más estable a través del tiempo en relación al comportamiento observado en los mercados accionarios.

Sin embargo, literatura financiera-económica ha encontrado suficiente evidencia estadística acerca del claro comportamiento no-lineal y no-estacionario de las tasas de interés, es decir, que éstas evolucionan como un proceso estocástico bajo la hipótesis de reversión a la media (Nelson y Plosser, 1982; Choi y Wohar, 1991; Anderson, 1997; Chiang y Chiang, 1995 y 1999; Chapman y Pearson, 2000; Bandi, 2002; Shively, 2005). En consecuencia, varios modelos de equilibrio o libres de arbitraje han sido desarrollados y utilizados por académicos para entender y capturar el comportamiento dinámico de las tasas de interés durante las últimas décadas. En este sentido, la amplia literatura se divide en tres grupos: el primer grupo de modelos continuos utiliza un factor

o una simple fuente de incertidumbre para explicar la evolución dinámica de la tasa de interés de corto plazo, sugerido inicialmente por Merton (1973) y posteriormente extendido por Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985).¹

Por su parte, Brennan y Schwartz (1979), Schaefer y Schwartz (1987), Longstaff y Schwartz (1992) y Fong and Vasicek (1991), con base en modelos de dos factores, sostienen que la variabilidad en las tasas de interés a diferentes plazos se explica mejor cuando son incorporados más de dos variables explicativas o factores estocásticos. No obstante, el interés por relajar el débil ajuste en la actual estructura de plazos de las tasas de interés derivado por los modelos de un factor ha generado varias extensiones debido a las implicaciones que pueden tener en la valuación de productos derivados más complejos. Al respecto, Hull y White (1990) proponen un modelo exógeno de tres factores al introducir parámetros como función del tiempo en el modelo de Vasicek, el cual captura más apropiadamente la estructura de dependencia entre las tasas de interés de diferentes vencimientos y los patrones de volatilidad reales.² Por lo anterior, el tema de la propiedad estocástica de la tasa de interés de corto plazo ha recibido especial atención en la literatura financiera, dado que el supuesto de tasa de interés constante tiene consecuencias trascendentales en las estrategias de cobertura perfecta para reducir el riesgo e incluso invalidar la aplicación de modelos de valuación de opciones bajo una medida martingala equivalente única, particularmente en los contratos de opciones con vencimientos largos debido a los efectos de apalancamiento y la naturaleza no-lineal de los instrumentos derivados.

En esta investigación se propone un modelo de forma cerrada para la valuación de opciones en el marco de Black-Scholes y Merton cuando la dinámica del precio del activo riesgoso está gobernada por un movimiento Browniano geométrico y la tasa de interés libre de riesgo es estocástica. El modelado de la fuente de incertidumbre de la tasa de interés es directamente a través del comportamiento estocástico del precio de un bono cupón cero libre de riesgo crédito, el cual también sigue un movimiento Browniano geométrico con varianza determinística y con el mismo vencimiento al de la opción. El procedimiento de valuación consiste en determinar un proceso de difusión

¹ Otro modelo de un factor, pero con volatilidad creciente y distribución lognormal para el nivel de la tasa de interés, es propuesto por Dothan (1998).

² En este contexto es importante resaltar que Ho y Lee (1986) fueron los pioneros en proponer un modelo de tasas de interés exógeno. Sin embargo, la evolución de la estructura de plazos de las tasas de interés está gobernada por un modelo basado en el supuesto de un árbol binomial.

que capture las dos fuentes de incertidumbre del activo riesgoso y del bono cupón cero en una sola fuente de incertidumbre bajo una medida *forward* de probabilidad neutral al riesgo. Cabe resaltar que el modelo de forma cerrada derivado es muy similar al propuesto por Björk (2004) de acuerdo con la teoría de arbitraje en tiempo continuo. Otra de las contribuciones es que el modelo extendido es aplicado a datos diarios de la acción de América Móvil L (AMXL) que cotiza en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), utilizando la volatilidad correlacionada condicional estimada a través de los modelos GARCH multivariados.

Esta investigación está estructurada de la siguiente forma. En la segunda sección se establecen los supuestos básicos del modelo de Black-Scholes. En la sección 3 se deriva la dinámica del proceso de difusión que captura las dos fuentes de incertidumbre. En la cuarta sección se obtiene el modelo de valuación de opciones en el contexto tradicional de Black-Scholes asumiendo tasa de interés estocástica. La sección 5 describe brevemente los modelos GARCH multivariados utilizados para la estimación de la volatilidad correlacionada condicional. Los resultados numéricos de la aplicación del modelo de forma cerrada son proporcionados en la sección 6. En la última sección se presentan las conclusiones y comentarios.

2. Supuestos básicos y dinámicas de los activos

Con el propósito de obtener soluciones de forma cerrada tratables, los supuestos tradicionales de la economía de Black-Scholes son empleados, pero con una extensión en la economía a fin de capturar la fuente de incertidumbre de la tasa de interés en un contexto neutral al riesgo. De esta manera, los principales supuestos del modelo son introducidos y discutidos a continuación.

Considerando una economía de operación continua, la incertidumbre en los mercados financieros se captura a través de la introducción de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y una filtración $F = \{\mathfrak{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$, en donde S_t representa el valor del activo riesgoso en el tiempo t . La dinámica estocástica de S_t en el espacio de probabilidad neutral al riesgo es conducida por un movimiento Browniano geométrico de la siguiente forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sigma_s dX_t \quad (1)$$

donde el parámetro que define a la tendencia instantánea μ_s representa el rendimiento esperado, σ_s es la desviación estándar del rendimiento esperado del activo riesgoso S_t , los cuales son constantes a través del tiempo. Este proceso se caracteriza por tener incrementos temporales independientes que se distribuyen como una variable aleatoria normal con media $E[dX_t]=0$ y varianza $Var[dX_t]=dt$ en el mismo espacio de probabilidad, y se define como una función del movimiento Browniano estándar o proceso de Wiener, es decir, X_t .

Considerando un mercado en donde se emiten y negocian instrumentos financieros libres de riesgo crédito que cotizan a descuento, es decir, bonos cupón cero con precio de mercado $B_{t,T}$ en el tiempo t y vencimiento en el tiempo T , y que regresan el valor nominal de una unidad monetaria al vencimiento, $B_{T,T}=1$. De manera similar, la dinámica del valor del bono cupón cero libre de riesgo crédito está gobernada por un movimiento Browniano geométrico definido de la siguiente forma:

$$\frac{dB_{t,T}}{B_{t,T}} = \mu_B dt + \sigma_B dZ_t \quad (2)$$

donde los parámetros μ_B y σ_B representan el rendimiento esperado y la volatilidad de la tasa instantánea de rendimiento del bono cupón cero libre de incumplimiento $B_{t,T}$. La variable aleatoria Z_t es también un proceso de Wiener con incrementos temporales independientes que se distribuyen normal con $E[dZ_t]=0$ y $Var[dZ_t]=dt$.

De esta manera, este supuesto muestra que la fuente de incertidumbre del precio del bono cupón cero conducido por la ecuación diferencial estocástica (2), es equivalente a modelar la incertidumbre de la tasa de interés libre de riesgo bajo la misma medida de probabilidad neutral al riesgo (Liao y Huang, 2005). En este contexto no se especifica un modelo estocástico para la tasa de interés de corto plazo, aunque modelos como Vasicek (1997) y Cox *et. al.* (1985) pueden ser utilizados en este marco con sólo modificar el término de difusión en la ecuación diferencial estocástica anterior.

Por su parte, otros supuestos que delimitarán el marco y los alcances de este trabajo de investigación son que los mercados de los activos financieros tratables están libres de fricciones, es decir, la operación en el mercado es continua y se asume que no existen costos de transacción, impuestos o pago de dividendos y no hay limitaciones en las ventas en corto. Asimismo, los agentes económicos participantes pueden endeudarse y prestar a la misma tasa de

interés instantánea libre de riesgo. Finalmente, asumiendo que un conjunto de activos financieros se pueden negociar continuamente en el mercado, el activo financiero B_t representa la cantidad de dinero depositada en una cuenta bancaria o invertida en el mercado de dinero en el tiempo $t \geq 0$, cuya evolución es conducida por la ecuación diferencial

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt \quad (3)$$

con $B_0 = 1$ y donde $r = \{r_t, t \in [0, T]\}$ representa el proceso de la tasa de interés instantánea de corto plazo predecible para $t \in [0, \infty)$. En consecuencia, el monto del activo financiero B_t en el tiempo $t > 0$ es igual a

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (4)$$

donde r_t es una función positiva del tiempo lo que implica que el valor de la cuenta bancaria B_t también sea una función determinística del tiempo, continua y creciente.

3. Proceso de difusión bajo la medida forward

En esta sección, el principal objetivo es derivar la dinámica conjunta de las dos fuentes de incertidumbre, capturándolas en una sola fuente de incertidumbre bajo una medida de probabilidad *forward* neutral al riesgo. En este contexto, el término de difusión o volatilidad del nuevo proceso estocástico captura apropiadamente ambas fuentes de incertidumbre a través de la correlación entre los movimientos del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de incumplimiento.

Dado que las dinámicas de los procesos S_t y $B_{t,T}$ pueden ser expresadas en términos de dos procesos de Wiener X_t y Z_t correlacionados entre sí con $Cov[dX_t, dZ_t] = \rho dt$ y donde ρ es un número real, entonces se puede definir una función que depende de ambas fuentes de incertidumbre y el tiempo, es decir, $f(S_t, B_{t,T}, t)$.

Aplicando el Lema de Itô, las reglas del cálculo estocástico y sustituyendo las dinámicas de los precios del activo riesgoso y bono cupón cero libre de incumplimiento se tiene la siguiente ecuación:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu_s S_t + \frac{\partial f}{\partial B_{t,T}} \mu_B B_{t,T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial B_{t,T}^2} \sigma_B^2 B_{t,T}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial B_{t,T}} \rho \sigma_s \sigma_B S_t B_{t,T} \right) dt + \partial f$$

Asumiendo que los precios de S_t y $B_{t,T}$ se distribuyen lognormal, entonces la función que depende de ambos factores de riesgo se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(S_t, B_{t,T}, t) = \ln \left(\frac{S_t}{B_{t,T}} \right) \quad (6)$$

donde el argumento de la función logarítmica se puede definir como el precio *forward* sobre el activo riesgoso negociado en el tiempo t y con fecha de entrega en el tiempo T , es decir,

$$F_t = \frac{S_t}{B_{t,T}} \quad (7)$$

Tomando las derivadas parciales de la ecuación (6) y sustituyéndolas en la ecuación (5) se tiene que

$$d \ln(F_t) = \left(\mu_s - \mu_B - \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \sigma_B^2 \right) dt + \sigma_s dX_t - \sigma_B dZ_t \quad (8)$$

Para simplificar la dinámica del *forward* suponemos que los términos de difusión que corresponden a la parte aleatoria de la ecuación (8) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_s dX_t - \sigma_B dZ_t = \sigma_F dW_t$$

donde la varianza de la diferencia de los procesos de Wiener X_t y Z_t correlacionados se puede expresar en términos de la varianza del precio *forward*, la cual captura la correlación entre los precios del activo riesgoso y el bono cupón cero libre de riesgo crédito, esto es,

$$\begin{aligned} \text{Var}[dX_t - dZ_t] &= \text{Var}[dX_t] + \text{Var}[dZ_t] - 2\text{Cov}[dX_t, dZ_t] \\ &= (\sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B) dt = \sigma_F^2 dt \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, la tendencia instantánea y la volatilidad de la dinámica del precio *forward* se pueden definir de la siguiente forma:

$$\sigma_F^2 = \sigma_S^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_B \quad 9)$$

y

$$\mu_F = \left(\mu_S - \mu_B - \frac{1}{2}\sigma_S^2 + \frac{1}{2}\sigma_B^2 \right) \quad (10)$$

En consecuencia, la dinámica del precio *forward* sobre el activo riesgoso en el tiempo t está conducida por la ecuación diferencial estocástica

$$d \ln(F_t) = \mu_F dt + \sigma_F dW_t \quad (11)$$

De acuerdo con el supuesto de que los precios *forward* siguen una distribución lognormal, entonces la ecuación diferencial estocástica (11) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dF_t}{F_t} = \mu_F dt + \sigma_F dW_t \quad (12)$$

donde σ_F es la volatilidad de la tasa de rendimiento instantánea del precio *forward*, la cual se define como una función creciente dependiente del tiempo. En este sentido, el comportamiento estocástico de la tasa de interés de corto plazo tiene un efecto importante en la naturaleza de los precios de las opcio-

nes, particularmente cuando aún falta bastante tiempo para la expiración de la opción o en la celebración del contrato.

De esta manera, el potencial de la medida *forward* coadyuva a capturar, de manera eficiente, las dos fuentes de incertidumbre definidas por el activo riesgoso y el bono cupón cero libre de incumplimiento en una sola fuente de riesgo.

4. Valuación de opciones bajo una medida *forward* neutral al riesgo

La extensa investigación en matemáticas financieras demuestra que el supuesto de mercado completo (libre de oportunidades de arbitraje) es un concepto estándar de restricción en los modelos de Black-Scholes y Merton. De hecho, el supuesto fundamental de esta teoría sustenta la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo o medida martingala equivalente. En otras palabras, los precios de las opciones financieras se comportan como martingalas, al existir suficientes contratos que ayudan a cubrir o replicar cualquier activo subyacente a través estrategias de inversión dinámicas autofinanciables (Harrison y Kreps, 1979; Harrison y Pliska, 1981, 1983; Duffie, 1996).³

Sin embargo, la relajación de este supuesto aunado a la introducción de nuevas fuentes de incertidumbre con respecto al movimiento Browniano puede conducir a modelos de valuación inapropiados en la cobertura completa o perfecta del riesgo intrínseco. En el caso de un modelo de difusión con tasa de interés estocástica, el mercado puede ser completo o incompleto. Si el mercado es incompleto, en ese momento la medida martingala equivalente deja de ser única. Asimismo, la cobertura perfecta en el marco de Black-Scholes y Merton es inalcanzable debido a que la medida martingala equivalente es fijada por el propio mercado a través de los precios de mercado de las opciones, subestimando así las primas dentro y fuera del dinero y sobreestimándolas en el dinero. Para solucionar este problema se establece la relación entre el concepto económico de ausencia de arbitraje y la propiedad matemática de la existencia de una medida neutral al riesgo o medida martingala equivalente demostrada por Harrison y Pliska (1981).

³ En este contexto, la definición de estrategia de inversión autofinanciable es alcanzada cuando sólo cambia de valor ante cambios en los precios del activo subyacente, es decir, no se obtienen flujos adicionales después del tiempo inicial

En la teoría financiera, la interpretación de que los cambios futuros en los precios de los activos financieros son totalmente impredecibles alimentado por el hecho de que en un tiempo determinado, la información más reciente manejada en los mercados financieros es considerada la más importante, por lo que el incremento esperado es cero. Sin embargo, la mayoría de los precios de los activos financieros no siempre tienden a comportarse como martingalas debido a que no son completamente impredecibles. Esto se atribuye, en cierta forma, a que los inversionistas que participan en los mercados financieros esperan que los precios de los bonos y las acciones aumenten con el tiempo, mientras que en el caso de los productos derivados (futuros y opciones) disminuyan (Neftci, 2000). Aunque, los activos financieros pueden ser transformados en martingalas al eliminar la tendencia instantánea, también conocida como la prima al riesgo que demandan los inversionistas cuando se encuentran correlacionados positivamente con el riesgo de mercado; sin embargo, esta tarea no es fácil en la práctica financiera, en particular en la valuación de productos derivados.

De acuerdo con el cálculo de Itô y el supuesto de que los precios de los activos financieros siguen una distribución lognormal, consideremos que la solución única de la ecuación diferencial estocástica (12) se puede expresar de la siguiente forma:⁴

$$F_t = F_0 \exp\left(\sigma_F W_t + \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right) \quad (13)$$

En este caso, la solución única representada por el precio *forward* no se comporta como martingala, puesto que todo proceso estocástico que aumenta en el promedio es una supermartingala (Neftci, 2000). Sin embargo, para transformar esta solución única a una martingala, es necesario eliminar la prima al riesgo o tendencia instantánea sin alterar la estructura de la volatilidad del activo subyacente mediante un cambio de medida de probabilidad, de tal manera que al descontar el precio *forward* por la tasa libre de riesgo se comporte como una medida martingala equivalente.

De esta manera, la existencia de una medida martingala equivalente única para la solución del precio *forward* es demostrada por el teorema de Girsanov a través de la siguiente proposición.

⁴ Para un estudio más profundo de los diferentes tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, véase Elliot (1982) y Karatzas y Shreve (1991).

Proposición 1.

Si consideramos que $F_t = F_0 \exp\left(\sigma_F W_t + \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right)$ es una solución única de la dinámica del precio *forward* $\forall t \in [0, T]$ y $\hat{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu_F}{\sigma_F}\right)t$ es una transformación lineal, entonces $F_T = F_t \exp\left(\sigma_F (\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right)$ es una martingala.⁵

En consecuencia, el estudio de la teoría de martingalas constituye una herramienta clave en la valuación de productos derivados, ya que en ellas va implícita el concepto de no arbitraje que permite el desarrollo de múltiples modelos financieros de equilibrio.

En el contexto de medida de probabilidad *forward* neutral al riesgo, la fijación de los precios en las opciones se puede tratar a través de soluciones de forma cerrada bajo supuestos básicos. Por ejemplo, el valor de una opción *call* o *put* en el tiempo t con precio de ejercicio K y fecha de expiración en el tiempo $T > t$, utilizando la dinámica del precio *forward* sobre el activo subyacente se obtiene a través del valor esperado condicional del precio *spot* con vencimiento en T dado un conjunto de información disponible hasta el tiempo t bajo una medida martingala Q equivalente, es decir,

$$V(t, T) = vE^Q \left[\exp\left(\int_t^T r_s ds\right) (F_T - K)_+ | \mathfrak{F}_t \right] \quad (14)$$

donde $(F_T - K)_+$ es la función máximo del perfil de pagos de la opción en el tiempo T , con $v = 1$ para un *call* y $v = -1$ para un *put*.

Un hecho que cabe resaltar es que la valuación de la opción bajo una medida *forward* es más conveniente en el presente contexto, estableciendo que el precio *forward* en el tiempo T se comporta como una martingala bajo esta misma medida de probabilidad. De esta forma, el valor de la opción se puede expresar de la siguiente manera:

⁵ Para una demostración matemática más detallada de la proposición 1, véase De Jesús (2001).

$$V(t) = vE^Q[B_{t,T}(F_T - K)_+ | \mathfrak{F}_t] \quad (15)$$

donde $B_{t,T}$ es un bono cupón cero libre de riesgo crédito.

Puesto que F_t es una variable aleatoria \mathfrak{F}_t -medible y $\hat{W}_T - \hat{W}_t$ es independiente de \mathfrak{F}_t bajo la medida de probabilidad Q , entonces es posible conocer el precio de la opción en el tiempo t como una función del precio *forward* y el tiempo.

$$\begin{aligned} V(t) &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)_+ \middle| \mathfrak{F}_t\right] \\ &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F\hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)_+ \middle| \mathfrak{F}_t\right] \\ &= vB_{t,T}E^Q\left[\left(F_t \exp\left(\sigma_F\hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)\right) - K\right)1_{F_T \geq K}\right] \end{aligned} \quad (16)$$

donde $1_{F_T \geq K}$ es una función indicadora con valor igual a 1 si $F_T \geq K$ y cero si sucede lo contrario, cuyo valor esperado es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra (Geman, Karaoui y Rochet, 1995).

Dado que la condición de la función indicadora⁶ se cumple y el movimiento Browniano estándar se distribuye normal $N(0, T-t)$ bajo la medida de probabilidad Q y $\hat{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ con $Z \sim N(0, 1)$ bajo la probabilidad Q se tiene que.

⁶ Para una demostración matemática detallada de la condición de la función indicadora, véase De Jesús (2001).

$$\begin{aligned}
 &= vB_{t,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(\sigma_F \hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega : Z+d_2 \geq 0\}} \right] \\
 &= vB_{t,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(\sigma_F \hat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega : Z \geq -d_2\}} \right], Z \sim N(0,1) \\
 &= vB_{t,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega : -Z \geq -d_2\}} \right], -Z \sim N(0,1) \\
 &= vB_{t,T}E^Q \left[\left(F_t \exp \left(z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) 1_{\{W \in \Omega : Z \leq d_2\}} \right] \\
 &= vB_{t,T} \int_{-\infty}^{d_2} \left(F_t \exp \left(-z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) - K \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= vB_{t,T} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_t \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 - z \sigma_F \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \sigma_F^2 (T-t) \right) dz \\
 &\quad - vB_{t,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz
 \end{aligned}$$

Factorizando el argumento de la función exponencial de tal manera que sea un binomio cuadrado perfecto se tiene que

$$\begin{aligned}
 V(t) &= vB_{t,T} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_t \exp \left[-\frac{1}{2} (z + \sigma_F \sqrt{T-t})^2 \right] dz - vB_{t,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= v \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t \exp \left[-\frac{1}{2} (z + \sigma_F \sqrt{T-t})^2 \right] dz - vB_{t,T} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) dz \\
 &= vS_t N(d_1) - vB_{t,T} KN(d_2) \tag{17}
 \end{aligned}$$

donde la segunda integral de la ecuación (17) representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal. De manera similar, la primera integral también se puede transformar a la distribución acumulada normal realizando el siguiente cambio de variable $w = z + \sigma_F \sqrt{T-t}$. Obviamente este cambio de variable genera un cambio de límites de integración.

En consecuencia, el precio de una opción *call* o *put* sobre un activo riesgoso con tasa de interés estocástica determinado por el método de valuación *forward* neutral al riesgo se puede expresar de la siguiente forma:

$$V(t) = vS_t N(vd_1) - vB_{t,T} KN(vd_2) \quad (18)$$

donde $N(d)$ es la distribución acumulada normal evaluada en los parámetros d_1 y d_2 , los cuales se expresan de la siguiente manera:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_{t,T}}\right) + \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_{t,T}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}$$

Aunque existen dos factores de riesgo para la valuación de opciones en este contexto, capturados por la varianza del precio *forward* sobre el activo riesgoso. Estos modelos de forma cerrada no requieren de distribuciones acumuladas normales estándar, en un marco multivariado, para demostrar que las probabilidades de las opciones se encontrarán dentro del dinero. De hecho, si la volatilidad σ_F es constante y la tasa de interés libre de riesgo es plana o constante, es decir, $B_{t,T} = \exp(-r(T-t))$. El modelo de forma cerrada definido por la ecuación (18) se reduce al tradicional modelo de valuación de opciones de Black-Scholes. Finalmente, la ecuación (18) tiene una gran similitud al resultado de Björk (2004), quien también deriva un modelo de forma cerrada para la valuación de opciones sobre acciones cuando la tasa de interés se comporta estocásticamente.

5. Modelos multivariados de varianza condicional

La estimación y predicción de la varianza condicional juega un papel fundamental en diversas aplicaciones financieras, particularmente en aquellas relacionadas con la administración de riesgos, el análisis de portafolios de inversión y la valuación de activos financieros y productos derivados. La extensión del análisis de la volatilidad condicional de series financieras univariadas a través de la familia de los modelos ARCH-GARCH (Engle, 1982 y Bollerslev, 1986) al contexto de la modelación de la covarianza condicional de series financieras multivariadas ha sido un natural avance en la teoría financiera. Por ejemplo, existe una familia de modelos GARCH multivariados que describen todos los elementos de la covarianza condicional o volatilidad correlacionada dinámica, entre ellos se incluyen el modelo VEC diagonal propuesto por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), el modelo de correlación condicional constante de Bollerslev (1990), el modelo BEKK desarrollado por Engle y Kroner (1995) y el modelo de correlación condicional dinámica propuesto por Engle (2002). En esta investigación se aplicaran los modelos VEC diagonal y BEKK para estimar la volatilidad correlacionada condicional.

5.1 Modelo VEC Diagonal

El modelo VEC diagonal de Bollerslev, Engle y Wooldridge (1998) se caracteriza por ser un una versión parsimoniosa del modelo GARCH multivariado general. Este modelo permite la modelación de covarianzas cambiantes en el tiempo a partir de una forma vectorial, expresada de la siguiente forma:

$$vech(H_t) = vech(C) + \sum_{i=1}^p A_i vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^q B_i vech(H_{t-i}) \quad (19)$$

donde H_t representa a la matriz de covarianza condicional en el tiempo t y $vech$ se define como el operador que agrupa las columnas de la parte triangular inferior de una matriz simétrica en un vector.

De esta manera, la especificación GARCH multivariada sugiere que H_t sea una función lineal de los residuales cuadrados y cruzados rezagados, así como de los valores rezagados de los elementos de H_t . Sin embargo, algunos problemas surgen al momento de la diagonalización del modelo, porque la

restricción de la dependencia dinámica propicia sesgos en la estimación de los parámetros ubicados en la parte superior de la diagonal de la matriz. Esto es, únicamente los choques en el activo i pueden afectar la varianza condicional del activo i y la correlación condicional entre los activos i y j , pero no la volatilidad del activo j . Este supuesto es muy limitado y, obviamente, una desventaja para el modelo VEC diagonal, pero necesario para garantizar que la matriz de covarianza condicional sea positiva definida.

5.2 Modelo BEKK

Para solucionar el problema de la restricción de los parámetros aunado a la restricción de la matriz positiva definida, Engle y Kroner (1995) proponen una nueva reparametrización para la matriz de covarianza condicional H_t , es decir, el modelo BEKK,

$$H_t = C'C + \sum_{i=1}^p A_i \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A'_i + \sum_{j=1}^q B_j H_{t-1} B'_j \quad (20)$$

donde C es una matriz triangular inferior de constantes, mientras que A_i y B_j son matrices de dimensión de $N \times N$. Los parámetros contenidos en la diagonal de las matrices A_i y B_j capturan los efectos de los choques pasados propios y la volatilidad pasada del activo i sobre su volatilidad condicional. Por su parte, los parámetros fuera de la diagonal de las matrices A_i y B_j recogen los efectos cruzados de mercado en la volatilidad, también conocida como volatilidad *spillover*.

Asimismo, esta especificación alternativa de la ecuación de la covarianza condicional permite capturar la dependencia dinámica entre las series de las volatilidades y garantizar que la matriz de covarianza condicional sea positiva definida; no obstante, dicho modelo presenta debilidades. En primer lugar, no existe una interpretación directa de los parámetros de las matrices A_i y B_j con respecto a los valores rezados de las volatilidades o choques. La segunda debilidad es que el número de parámetros a estimar en el modelo BEKK aumenta rápidamente con el incremento de p y q , limitando así el número de activos financieros. Finalmente, la modelación de la matriz de covarianza condicional presenta serias complicaciones, puesto que la evidencia empírica ha demostrado que la mayoría de los parámetros estimados no son significativos estadísticamente.

6 Aplicación para el mercado mexicano de derivados

En esta sección se aplica el modelo de valuación de opciones incorporando la naturaleza estocástica de la tasa de interés y la volatilidad correlacionada condicional estimada a través de los modelos GARCH multivariados.

6.1 Datos y estimación de los parámetros de los modelos GARCH multivariados

Para el análisis de la volatilidad correlacionada condicional se utilizan los precios diarios de cierre del título de capital de América Móvil L (AMXL) y los precios de los Cetes a 91 días del mercado secundario. El periodo muestral cubre del 2 de enero de 2004 al 9 de mayo de 2011, totalizando 1854 observaciones. La selección del periodo de estudio es consistente con la fecha del 22 de marzo de 2004, día en que iniciaron las operaciones de opciones sobre AMXL en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). La serie financiera de AMXL se obtuvo de la base de datos de Bloomberg, mientras que la serie de los precios de Cetes fue obtenida de la base de datos de Banco de México.

Las ecuaciones de la media y la covarianza condicional son estimadas simultáneamente a través del método de máxima verosimilitud usando los rendimientos diarios de las series financieras de AMXL y Cetes. Para facilitar el análisis de los resultados, las series financieras de los Cetes y AMXL son representadas por los índices 1 y 2, respectivamente. El Cuadro 1 proporciona los resultados de los parámetros estimados de los modelos seleccionados con innovaciones normales durante el periodo de estudio. Los modelos GARCH bivariados convergen después de 70 iteraciones para el modelo BEKK y 86 iteraciones para el modelo VEC diagonal. Las relaciones de los rendimientos son capturadas por los parámetros estimados c_1 y c_2 en los dos modelos. En ambos casos, el parámetro c_1 no es significativo estadísticamente, lo cual indica que la media no condicionada de los rendimientos de los precios de Cetes a 91 días es igual a cero en el largo plazo, es decir, no es positiva. Analizando los resultados de las ecuaciones de la covarianza condicional se puede observar que los parámetros estimados de la diagonal de la matriz C son todos significativos, excepto los parámetros ω_{11} para el modelo VEC diagonal y ω_{22} para el modelo BEKK. Por su parte, todos los elementos de la diagonal de las matrices A y B , que capturan los efectos ARCH y GARCH, son altamente significativos para los dos modelos GARCH bivariados. Este hecho sustenta que los efectos ARCH y GARCH son esenciales en ambas series financieras.

Cuadro 1. Parámetros estimados de los modelos GARCH multivariados.

Panel A. Modelos estimados						
Modelo BEKK				Modelo VEC diagonal		
Parámetros	Valor	Errores	Valor-p	Valor	Errores	Valor-p
c_1	-0.0023	0.0022	0.3129	-0.0006	0.0023	0.7937
c_2	0.0985**	0.0478	0.0396	0.1093***	0.0387	0.0048
ω_{11}	0.0039**	0.0019	0.0426	0.0000	0.0000	0.7611
ω_{12}	0.4673***	0.1636	0.0043	0.0018	0.0026	0.4897
ω_{22}	-0.0009	0.7997	0.8751	0.0392***	0.0096	0.0000
α_{11}	0.1294***	0.0228	0.0000	0.0174***	0.0062	0.0051
α_{21}	-0.0829	0.5715	0.5384	0.0271	0.0367	0.4604
α_{12}	0.0005	0.0006	0.4859	—	—	—
α_{22}	0.2887***	0.0224	0.0000	0.0658***	0.0070	0.0000
β_{11}	0.9897***	0.2442	0.0000	0.9820***	0.0067	0.0000
β_{21}	-0.4099*	0.2442	0.0934	0.4990	0.6731	0.4585
β_{12}	-0.0002	0.0003	0.4886	—	—	—
β_{22}	0.9347***	0.0096	0.0000	0.9254***	0.0063	0.0000

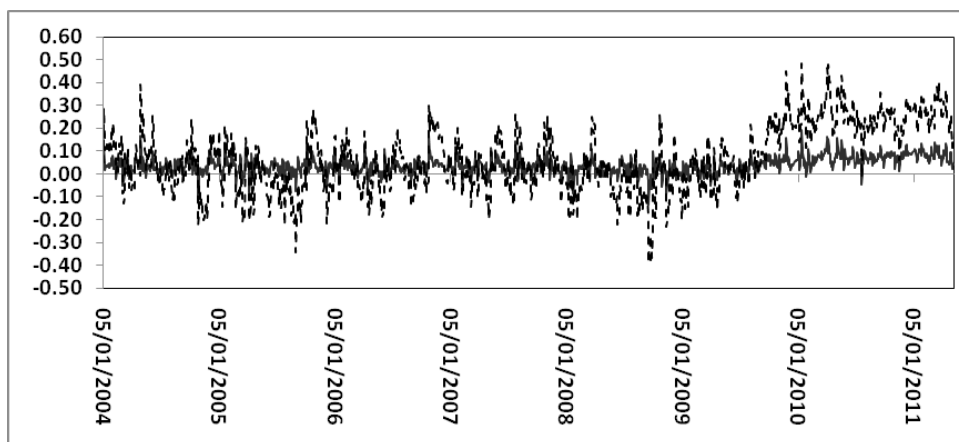
Panel B. Pruebas estadísticas				
Prueba	Modelo BEKK		Modelo VEC diagonal	
	Δ CETES	Δ AMXL	Δ CETES	Δ AMXL
Q(12)	3169(0.000)	11.71(0.469)	3160(0.000)	9.84(0.629)
Q ² (12)	2538(0.000)	9.99(0.616)	2534(0.000)	8.53(0.741)
Q*(12)	2561(0.000)		2554(0.000)	
AIC	2446		2377	
BIC	2518		2438	

Nota: Los términos ***, ** y * indican significancia estadística para los niveles de 1%, 5% y 10%, respectivamente. Los valores $Q(12)$, $Q^2(12)$, y $Q^*(12)$, y son los estadísticos de la prueba de Ljung-Box para las series de los residuales estandarizados, estandarizados cuadrados y la prueba multivariada de los residuales estandarizados cuadrados con 12 rezagos. Los valores en paréntesis son los valores-p. AIC y BIC representan el criterio de información de Akaike y criterio de Schwarz, respectivamente.

Los elementos fuera de la diagonal de las matrices A y B capturan los efectos cruzados de mercado, también conocidos como choques *spillover* y *volatilidad spillover* entre las dos series financieras. La carencia de significancia estadística en los parámetros estimados α_{12} , α_{21} , β_{12} y β_{21} muestra claramente que no existe transmisión de información bidireccional entre los mercados de renta variable y renta fija, es decir, las correlaciones condicionales entre las dos series financieras no están determinadas por los valores rezagados de

las volatilidades y residuales. Este hallazgo es sustentado por las correlaciones condicionales entre ambas series financieras como se puede apreciar en la Gráfica 1. Las correlaciones dinámicas presentan un comportamiento no estacionario y mixto, esto es, periodos de crecimiento significativos, pero con cambios de tendencia rápidos, incluso alcanzando valores negativos, particularmente para el caso del modelo BEKK.

Gráfica 1: Comportamiento de la correlaciones condicionales.



Para validar la robustez de los modelos BEKK y VEC diagonal en los aspectos de la correlación serial, la media y la covarianza condicional se aplican tres pruebas estadísticas, la de Ljung-Box para los residuales estandarizados simples y cuadrados y la extensión multivariada de la prueba de Ljung-Box univariada para los residuales estandarizados cuadrados. Los resultados de las pruebas estadísticas de los modelos estimados son reportados en el panel B del Cuadro 1. Los valores- p de las tres pruebas de Ljung-Box para los residuales estandarizados y estandarizados cuadrados menores al nivel de significancia convencional del 5% indican la existencia de fuerte correlación serial en la serie financiera de Cetes y, al mismo tiempo, confirmar que los modelos BEKK y VEC diagonal no son apropiados para capturar la dinámica en el primero y segundo momento de las series financieras. Otro hallazgo derivado de los resultados de los parámetros estimados es que los modelos BEKK y VEC diagonal son estacionarios. La estacionaridad en los modelos VEC diagonal y BEKK es alcanzada cuando las sumas $\alpha_{ii} + \beta_{ii}$ y $\alpha_{ii}^2 + \beta_{ii}^2$ son menores a 1, es decir, 0.999, 0.991, 0.996 y 0.957, respectivamente. Finalmente, una alternativa para la selección del modelo óptimo es comparar los valores de los criterios

de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC). En términos de ajuste, el modelo VEC diagonal supera al modelo BEKK debido a que presenta valores AIC y BIC más pequeños (2377 contra 2446 y 2438 contra 2518).

6.2 Fijación de precios de opciones sobre América Móvil

A fin de determinar el desempeño del modelo de valuación de opciones con tasa de interés estocástica en el Mercado de Derivados Mexicano. En este análisis numérico se usa la información del boletín diario de transacciones del mercado de opciones publicado por el MexDer del día 9 de mayo de 2011. Asimismo, las tasas de interés libres de riesgo son interpoladas a través de la estructura de plazos de Cetes del mercado secundario, las cuales son consistentes con los plazos al vencimiento de las opciones *call* y *put*, es decir, 39, 129, 221 y 312 días, respectivamente. La volatilidad correlacionada estimada con el modelo VEC diagonal es aproximadamente del 23.95% anual y el precio de cierre de AMXL equivale a 30.25 pesos mexicanos. Los precios de ejercicio reportados en el boletín diario van desde 30 hasta 40 pesos mexicanos, incluyendo opciones *call* o *put* tanto fuera como dentro del dinero ligeramente, profundamente y muy profundamente.

Los precios de las opciones de mercado y teóricas para los cuatro vencimientos de AMXL son reportados en los Cuadros 2 y 3. Analizando los resultados de ambos cuadros para los vencimientos del 17/06/2011, 15/09/2011 y 17/12/2011 se puede apreciar que la diferencia entre los precios de mercado y teóricos disminuyen a medida que el precio de ejercicio se incrementa. Este hecho se alcanza a reflejar más cuando la opción *call* se encuentra muy profundamente fuera del mercado, mientras que en las opciones *put* se incrementa a medida que se encuentran muy profundamente dentro del dinero.

En este sentido, el modelo de valuación extendido alcanza su mejor desempeño para las opciones *put* ligeramente fuera y dentro del mercado con precios de ejercicio de 30 a 34, excepto para el vencimiento del 17/06/2011 y precios de ejercicio de 30 y 31, y para el vencimiento del 15/09/2011 con precio de ejercicio de 32. Por su parte, los precios teóricos de las opciones *call* son muy similares a los precios de mercado cuando éstas se encuentran muy profundamente fuera del mercado, excepto para el precio de ejercicio de 40 del 16/12/2011. Este hecho se atribuye a que las diferencias entre los precios de mercado y teóricos son menores a 10 centavos y las volatilidades implícitas se encuentran alrededor de la volatilidad correlacionada condicional estimada por el modelo VEC diagonal (23.95%).

Cuadro 2. Precios de opciones de AMXL para los vencimientos del 17/06/11 y 15/09/11.

K	Precio Call		Precio Put		Diferencia		Volatilidad Implícita	
	MexDer	Modelo	MexDer	Modelo	Call	Put	Call	Put
17/06/2011								
30	0.890	1.152	0.610	0.764	-0.262	-0.154	16.97	20.11
31	0.440	0.688	1.170	1.295	-0.248	-0.125	17.58	20.49
32	0.200	0.377	1.930	1.980	-0.177	-0.050	18.15	21.64
33	0.080	0.190	2.820	2.788	-0.110	0.032	18.68	23.48
34	0.030	0.088	3.780	3.681	-0.058	0.099	19.17	25.95
35	0.010	0.037	4.760	4.626	-0.027	0.134	19.61	29.00
36	0.000	0.010	5.760	5.599	-0.010	0.161	20.01	32.58
37	0.000	0.005	6.760	6.585	-0.005	0.175	20.37	36.64
38	0.000	0.002	7.760	7.577	-0.002	0.183	20.69	41.13
39	0.000	0.001	8.770	8.571	-0.001	0.199	20.96	46.03
40	0.000	0.000	9.780	9.566	0.000	0.214	21.19	51.30
15/09/2011								
30	1.770	2.092	1.360	1.373	-0.322	-0.013	19.19	23.66
31	1.250	1.607	1.780	1.873	-0.357	-0.093	18.84	22.31
32	0.850	1.209	2.340	2.459	-0.359	-0.119	18.67	21.42
33	0.560	0.892	3.040	3.126	-0.332	0.086	18.68	20.97
34	0.370	0.645	3.870	3.864	-0.275	-0.006	18.88	20.97
35	0.240	0.458	4.780	4.661	-0.218	0.119	19.26	21.41
36	0.160	0.319	5.750	5.507	-0.159	0.243	19.82	22.31
37	0.120	0.219	6.750	6.390	-0.099	0.360	20.56	23.65
38	0.090	0.147	7.750	7.303	-0.057	0.447	21.49	25.43
39	0.070	0.098	8.750	8.238	-0.028	0.512	22.60	27.67
40	0.060	0.064	9.750	9.189	-0.004	0.561	23.89	30.35

Nota: El Cuadro 2 reporta los precios de mercado y teóricos de las opciones de AMXL, sus diferencias, las volatilidades implícitas derivadas de las expectativas de los participantes en el mercado de opciones para cada precio de ejercicio y vencimientos del 17/06/11 y 15/09/11.

Finalmente, el modelo extendido que captura el efecto estocástico de la tasa de interés muestra un bajo desempeño al sobrestimar o subestimar los precios de las opciones *call* y *put* con plazos largos de vencimiento (321 días), excepto para los precios de ejercicio de 30 a 32 de las opciones *call*. La desviación significativa entre los precios de mercado y teóricos no sólo está asociada directamente a la inapropiada estimación de la volatilidad correlacionada condicional, sino también al incremento de la tasa de interés porque la teoría sustenta que a medida que aumenta la tasa de interés disminuye el precio de la opción *put* y, al mismo tiempo, se incrementa el precio de la opción *call*. Aunque en este análisis existen algunas excepciones donde ocurre lo contra-

Cuadro 3. Precios de opciones de AMXL para los vencimientos del 16/12/11 y 15/03/12.

K	Precio Call		Precio Put		Diferencia		Volatilidad Implícita	
	MexDer	Modelo	MexDer	Modelo	Call	Put	Call	Put
16/12/2011								
30	2.680	2.798	1.640	1.727	-0.118	-0.087	22.31	22.62
31	2.100	2.308	2.130	2.209	-0.208	-0.079	21.53	22.50
32	1.630	1.884	2.710	2.757	-0.254	-0.047	21.02	22.35
33	1.250	1.522	3.360	3.369	-0.272	0.009	20.77	22.19
34	0.950	1.218	4.090	4.037	-0.268	-0.053	20.78	22.00
35	0.740	0.966	4.900	4.758	-0.226	0.142	21.05	21.80
36	0.590	0.760	5.790	5.524	-0.170	0.266	21.59	21.58
37	0.490	0.592	6.750	6.329	-0.102	0.421	22.38	21.33
38	0.430	0.458	7.750	7.167	-0.028	0.583	23.44	21.07
39	0.390	0.351	8.750	8.033	0.039	0.717	24.75	20.79
40	0.380	0.268	9.750	8.922	0.112	0.828	26.33	20.49
15/03/2012								
30	3.380	3.397	2.390	1.969	-0.017	0.421	23.27	27.44
31	2.850	2.905	2.870	2.438	-0.055	0.432	23.02	27.12
32	2.370	2.468	3.400	2.961	-0.098	0.439	22.77	26.80
33	1.960	2.083	3.980	3.538	-0.123	-0.442	22.52	26.47
34	1.590	1.749	4.630	4.164	-0.159	-0.466	22.27	26.15
35	1.280	1.459	5.340	4.835	-0.179	-0.505	22.02	25.82
36	1.211	1.020	5.548	6.100	0.191	-0.552	21.77	25.50
37	0.790	1.000	6.920	6.297	-0.210	0.623	21.52	25.17
38	0.822	0.610	7.810	7.080	0.212	0.730	21.27	24.85
39	0.470	0.672	8.750	7.891	-0.202	0.859	21.02	24.52
40	0.350	0.548	9.750	8.727	-0.198	1.023	20.77	24.20

Nota: El cuadro 3 reporta los precios de mercado y los teóricos de las opciones de AMXL, sus diferencias, las volatilidades implícitas derivadas de las expectativas de los participantes en el mercado de opciones para cada precio de ejercicio y vencimientos del 16/12/11 y 15/03/12.

rio, por ejemplo, para los precios de ejercicio de 33 a 36 en las opciones *call* y para el precio de ejercicio de 40 en las opciones *put*.

7. Conclusiones

Un gran número de estudios empíricos sustentan el insuficiente desempeño del modelo de Black-Scholes para proporcionar una cobertura perfecta del riesgo intrínseco debido a la relajación del supuesto de tasa de interés determinística. Este trabajo de investigación propone soluciones de forma cerrada para la valuación de opciones sobre activos riesgosos introduciendo el

comportamiento estocástico de la tasa de interés bajo una medida martingala neutral al riesgo equivalente. La medida *forward* juega un papel fundamental en la determinación de distribuciones acumuladas normales univariadas para probar que las probabilidades de las opciones se encontrarán dentro del dinero. Asimismo, la técnica martingala como método alternativo a la aproximación de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas lineales reduce los cálculos matemáticos significativamente, con sólo controlar las tendencias instantáneas de los movimientos Brownianos geométricos, es decir, la prima al riesgo de los activos riesgosos sin necesidad de alterar la estructura de la volatilidad bajo el concepto de no arbitraje. Por su parte, los resultados empíricos muestran el potencial del modelo de valuación propuesto al mejorar el desempeño de los modelos de valuación de opciones de un factor en el marco de Black-Scholes, cuando se aplica a opciones sobre América Móvil que se encuentran muy profundamente fuera del mercado *call* y ligeramente fuera y dentro del mercado *put* para vencimientos de corto y mediano plazos a pesar de que la volatilidad correlacionada condicional no es estimada apropiadamente por el modelo VEC diagonal. Sin embargo, el modelo de valuación es inconsistente para determinar los precios de las opciones *call* y *put* cuando se encuentran muy profundamente fuera del mercado y muy profundamente dentro del mercado, particularmente en las opciones con largos plazos al vencimiento. Los hallazgos del presente análisis son de suma importancia para los participantes en el mercado de opciones que buscan la cobertura perfecta del riesgo aplicando modelos convencionales para la valuación de derivados, pero que no son suficientes para recoger las diversas fuentes de incertidumbre que afectan a los precios de las opciones. Finalmente, futuros trabajos de investigación pueden incluir el desarrollo de modelos más sofisticados que permitan capturar apropiadamente la interacción intertemporal de la volatilidad correlacionada de los rendimientos de las acciones y bonos cupón cero para cada precio de ejercicio de las opciones *call* y *put*.

Bibliografía

- Anderson, H. M. (1997). "Transaction costs and non-linear adjustment towards equilibrium in the US Treasury bill market", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59, pp. 465-484.

- Bandi, F. M. (2002). "Short-term interest rate dynamics: a spatial approach", *Journal of Financial Economics*, 65, pp. 73-110.
- Björk, T. (2004). "Arbitrage Theory in Continuous Time", *Oxford University Press*.
- Black, F. y M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (3), pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1990). "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH approach", *Review of Economics and Statistics*, 72, pp. 498-505.
- _____, R. F. Engle y J. M. Wooldridge (1988). "A capital asset pricing model with time-varying covariances", *The Journal of Political Economy*, 96, pp. 116-131.
- _____. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.
- Brennan, M. J. y E. S. Schwartz (1979). "A continuous time approach to the pricing of bonds", *Journal of Banking & Finance*, 3, pp. 133-155.
- Chapman, D. A. y N. D. Pearson (2000). "Is the short rate drift actually nonlinear?", *Journal of Finance*, 55, pp. 355-388.
- Chiang, T. C. y J. J. Chiang (1995). "Empirical analysis of short-term euro-currency rates: evidence from a transfer function error correction model", *Journal Economic and Business*, 47, pp. 335-351.
- _____. "On the nonlinear specification of short-term interest rates behavior evidence from euro-currency markets", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 12, pp. 351-370.
- Choi, S. y M. E. Wohar (1991). "New evidence concerning the expectations theory for the short end of the maturity spectrum", *Journal of Financial Research*, 14, pp. 83-92.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985). "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- De Jesús, R. (2001). "Modelación de productos derivados aplicando el método martingala", *Tesis de Maestría*, UNAM.
- Dothan L. U. (1978). "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 59-69.
- Duffie, D. (1996). "Dynamic Asset Pricing Theory", 2a. ed. *Princeton*: Princeton University Press.
- Elliot, R. J. (1982). "Stochastic Calculus and Applications", *Springer-Verlag New York, Inc.*

- Engle, R. F. (2002). "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, pp. 339-350.
- . y K. F. Kroner (1995). "Multivariate simultaneous GARCH", *Econometric Theory*, 11, pp. 122-150.
- . "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.
- Fong, H.G. y O.A. Vasicek (1991). "Fixed income volatility management", *Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 41-46.
- Geman, E., N. E. Karaoui y J. Rochet (1995). "Change of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing", *Journal of Applied Probability*, Vol. 32, pp. 443-458.
- Harrison, J. M. y D. M. Kreps (1979). "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.
- . y R. S. Pliska (1981). "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, pp. 215-260.
- . "A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets", *Stochastic Processes and their Applications*, 15, pp. 313-316.
- Ho, T. S. Y. y S. B. Lee (1986). "Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-29.
- Hull, J. y A. White (1990). "Pricing interest rate derivative securities", *The Review Financial Studies*, 3(4), pp. 327-343.
- Karatzas, I. y S. E. Shreve (1991). "Browniano motion and stochastic calculus", *Springer-Verlag*, London.
- Liao, S. L. y H. H. Huang (2005). "Pricing Black-Scholes options with correlated interest rate risk and credit risk: an extension", *Quantitative Finance*, 5(5), pp. 443-457.
- Longstaff, F. A. y E. S. Schwartz (1992). "Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model", *Journal of Finance*, 47, pp. 1259-1282.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-83.
- Neftci, S. (2000). "An introduction to the mathematics of financial derivatives", Second Edition, *Academic Press*, New York.

- Nelson, C. R. y C. I. Plosser (1982). "Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications", *Journal of Monetary Economics*, 10, pp. 139-162.
- Schaefer, S. y E. Schwartz (1987). "Time-dependent variance and the pricing of bond options", *Journal of Finance*, 42(5), pp. 11 13-28.
- Shively, P. A. (2005). "The nonlinear dynamics of interest rates", *Applied Financial Economics Letters*, 1, pp. 71-74.
- Trigeorgis, L. (1996). "Real options: managerial flexibility and strategy in Resource allocation". *The MIT Press*, Cambridge, MA.
- Vasicek, O. (1977). "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

Full cooperation to solve environmental problems using financial markets

Wojciech Szatzschneider*
and Teresa Kwialkowska**

Fecha de recepción: 10 de marzo de 2011

Fecha de aceptación: 9 de mayo de 2011

* Universidad Anáhuac, México Norte, Escuela de Actuaría,
wojciech@anahuac.mx

** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Departamento de Filosofía.
tkwiatkowska@yahoo.com

RESUMEN

El presente estudio muestra que el camino más eficiente para mejorar el medio ambiente en cualquier área y en cualquier dimensión es con el uso de una versión *suave* de la metodología de Agente-Principal mediante la emisión de certificados de mejora que abarquen entidades grandes y así estimular la transferencia de tecnologías. Comparamos soluciones óptimas en dos casos: acción conjunta y acción tipo fusión. *Fusión* significa que un agente puede hacer mejoras en el dominio de otro. Analizamos modelos específicos y relativamente sencillos en los que se pueden obtener resultados explícitos. Estos modelos los usamos como modelos de referencia, puesto que su justificación práctica, incluyendo la calibración de los parámetros, representa el mayor defecto en aplicaciones de fenómenos ambientales. Aunque la metodología podría ser aplicada, en teoría a muchos problemas ambientales, el presente estudio está enfocado básicamente a problemas de contaminación. Trabajaremos con procesos de difusión introduciendo el factor de cooperación.

Keywords Cooperation between agents, pollution, diffusion processes.
Mathematical Subject Classification: 65K10, 69J60, 62P12.

ABSTRACT

This study shows that the most efficient way to improve the natural environment, is by using a "soft" version of the Principal-Agent methodology by means of the emission of improvement certificates that embrace large entities and therefore stimulate the transference of technologies. We compare two cases of optimal solutions, collusive optima and fusion optima. "Fusion" means that one agent-owner of a certificate- can make improvements in another agent's domain, (which we'll call "land"). We analyze specific and relatively simple models for which explicit or almost explicit solutions can be reached. We use these models as reference models only because their practical justification, including the calibration of parameters, is its major flaw when applied to environmental phenomena. Although the methodology could, in theory, be applied to several environmental problems, this study deals basically with pollution. We work with diffusion processes, introducing the cooperation factor.

Introduction

There have been many attempts to use financial markets to combat or diminish environmental deterioration. Among the most significant are the following:

1. Emission trading (known as cap-and-trade) related to permits to pollute.
2. Economic evaluation based on “willingness to pay” known as full “cost-benefit” analysis.
3. Establishment of property of rights, i.e. the privatization of nature.
4. Valuing the environment through contingent valuation. (Hanemann, 1994).

However, none of the above mentioned approaches have rendered the desired effects.

1. The main deficiency of the “permits to pollute” approach is that it does not stimulate any cooperation. If someone finds a new method to capture carbon (just to give one example), there is no reason to believe that he or she would share this invention with others instead of profiting by selling permits. Besides, it leads to a wild market with strong governmental intervention, for example, assigning initial quota, this is called the *grandparent effect*.
2. Full economical analysis needs very precise models but natural phenomena are far too complex and depend on too many processes to be fully understood or measured. M. Sagoff rightly stressed that “(...) the immense effort economists have invested over decades in trying to measure the benefits of environmental resources and services has resulted and can result only in confusion”, (Sagoff, 2004).

3. Establishing property rights that require institutional arrangements and procedures that are difficult to accomplish, should not be proposed as a solution to the “tragedy of the commons”. Natural resources are hard to privatize. Even dealing with deforestation (this being a problem that mostly affects developing countries), the attempt to set property rights encounters increasing social problems rather hard to solve.
4. The Contingent valuation method (CVM) is used to estimate economic values of all kinds of ecosystems and environmental goods by asking how much one would be willing to pay for a specific good. Unfortunately the answers were closely related to the educational level of people involved and the kind of questions asked.

Although the comprehensive conservation of the biological diversity requires a strategy that goes beyond cost-benefit analysis –the monetary valuation can play a supportive role in environmental policy, but its multiple practical and normative problems have to be considered when using such a method, above all in developing countries where people are too poor to think about environmental degradation. Philip E. Graves wrote: “To the extent that we value public goods, we also realize that getting extra income to buy them will accomplish nothing”, (Graves, 2003). It was A. Fitzsimmons who, in his controversial book *Defending illusions*, pointed out the possibility of creating markets on environmental topics. He assumed that the Wetland Protection Certificated could be bought and sold, and that a market may be established by the US Congress (1999).

In this article we assume that an environmental fund has already been created and could be used by two parties. To describe these entities we’ll use the word *land*. By the same token, we propose a “conditional carrot” approach, based on a free market made out of certificates of improvements. Trading exclusively good certificates cannot endow environmental goods with market values.

Presently, we analyze different aspects of cooperation in three mathematical models:

1. Elementary deterministic model.
2. Squared Bessel processes with linear improvements only. We show how state dependent agents’ actions can reduce the cooperation

factor needed to make fusion worthy. We also explain how to analyze and value certificates in this particular setting.

3. General processes with external factor independent of agents' actions, (Cadenillas *et al*, 2004).

We use the *soft* version of the Principal –Agent methodology, being Nature the Principal and the Agents would be the individuals or institutions (most of them with nil participation). Certificates can be sold or given out free of charge (for instance in the case of poor countries or natural environmental damage). To make it easier, we analyze the case of two *lands* only, but the method could be extended to include many *lands* in a simple way.

In all cases, we consider that the payment would increase when pollution levels diminish. Principal problem-optimality of certificates, needs precise estimation of social costs of pollution, and these estimations seem to be *hardly accessible*. That's why we call our approach *soft*. While we use the easiest example of equal *lands*, no problem arises on how much each land ought to contribute to the funds, or how to distribute possible gains. The corresponding fund should be large enough to create positive total net gain. In the opposite case, there is a possibility of debt, or falling in a kind of default, which should be analyzed with more sophisticated techniques-like put options. Unused funds could be used to finance other projects. A different approach, with the use of the Principal-Agent method has been considered by D'Amato and Franckx, (D'Amato, Franckx, 2003). They wrote: "We have considered there the regulation of a (private or public) agent by an EPA (Environmental Protection Agency). This EPA is constrained to basing its incentive scheme (both rewards and punishments) on environmental performance, and allocate funds to alternative projects with environmental benefits. The private agent can allocate its effort to environmental protection or to its core task". While we consider only environmental improvements, we go further in cooperation topics. At the same time, our approach does not need precise specification of parameters, as the above quoted study requires.

The approach presented here, pretends to open the path toward practical solutions to prevent environmental destruction.

1. Very simple deterministic model.

To explain what we understand by *fusion* let us start with two simple examples of identical lands.

These examples with general parameters have been studied by Ray, who compared competitive Nash and collusive equilibria, (Ray, 2001). The mismatch between the equilibria above mentioned disappears automatically with emissions of certificates of improvement.

The real advantage of fusion could be appreciated in more complicated stochastic models.

Let each "land" emit pollution level and loss function are given by

$$A(1 - X_i)^2 + \frac{X_i^2}{2},$$

where the second term represents its social cost that is unknown, and set just for illustration purpose, and the first term is the cost for abatements.

In this example we assume that pollution in one land doesn't affect the counterpart. Now optimal $X_i^* = \frac{A}{1+A}$ and the total level of pollution is $2X_i^*$.

Consider fusion and assume that joint loss function is given by:

$$\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2} + \frac{(2 - Y)^2}{2} A_1,$$

where $Y = X_1 + X_2$.

If we assume that $A_1 = \frac{1}{B}A$, then for $B > 2$ we get

$$\frac{4A_1}{1 + 2A_1} < \frac{2A}{1 + A}.$$

We will call B *cooperation factor* (for unequal lands can be smaller than two).

On the other hand, when we consider neighboring lands (pollution in one affects the other in a straightforward way), and social loss function $\frac{(X_1+X_2)^2}{2}$, then $X_i^* = \frac{A}{2+A}$, and total level of pollution equals $2X_i^*$.

In the case of fusion the total loss being

$$A_1 \frac{(2 - Y)^2}{2} + \frac{Y^2}{2}$$

and once again the total level of pollution is smaller when $A_1 = \frac{1}{B}A$, $B > 2$.

Therefore, emissions of certificates of improvement in the form

$$S - \frac{(X_1 + X_2)^2}{2}$$

will lead directly to fusion if $B > 2$.

2. Cooperation in the case of $BESQ_\beta^\delta$ processes.

In this part we would like to show how to value different certificates and explain how to do it for state dependent actions (linear with fixed parameters) the cooperation factor needed to make fusion worthy would be smaller than 2. (Similar conclusions can be obtained in more general models).

To begin with, we would like to formulate some basic facts about these processes and comment the modeling in this setting.

$BESQ_\beta^\delta$ process is defined by

$$dX(t) = 2\sqrt{X(t)}dW(t) + (2\beta X(t) + \delta)dt, \quad X(0) > 0.$$

(We will set $X(0) = 1$).

We assume that $\delta \geq 0$, but at this moment do not specify the sign of β . If $\beta = 0$ then $X(t)$ becomes squared Bessel process of dimension δ . For more properties of $BESQ_{\beta}^{\delta}$ see (Revuz & Yor, 1999). $\beta < 0$ $BESQ_{\beta}^{\delta}$ is known in finance as CIR model (from Cox, Ingersoll & Ross) for instantaneous interest rates.

$BESQ_{\beta}^{\delta}$ processes can be obtained as a heavy traffic approximation of corresponding Piecewise Deterministic Markov Processes with some environmental motivation.

Pollution levels are increasing with time, but at some random moments actions are taken to combat it. See (Sztatzschneider & Jeanblanc, 2002) for details of application to forest issues.

In our example we will compare agents actions for certificates of the form

$$S - \int_0^1 (X(s) + Y(s))^2 ds.$$

For $X(s), Y(s)$ independent $BESQ_{\beta}^{\delta}$ processes, $X(s) + Y(s)$ become $BESQ_{\beta}^{2\delta}$ process.

There are well known formulas for $E(X(s))$, $Var(X(s))$, and $E\left(e^{\sigma \int_0^1 X(s) ds}\right)$ for $\beta < 0$ and sufficiently small positive σ , see appendix for calculations of the expectation for negative σ .

Therefore, one can design many reasonable certificates with explicit valuations.

Now, if agents actions are limited to making δ smaller, then the cooperation factor B will still be two, as before. But if an agent can make δ and β smaller (we call this action linear improvements), then the B needed will be smaller than two. Exact calculations clearly depend on chosen parameters.

Coming back to our example:

$$dX(t) = 2\sqrt{X(t)}dW_1(t) + (2\beta X(t) + \delta)dt,$$

$$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dW_2(t) + (2\beta Y(t) + \delta)dt.$$

Assume that an agent can make improvements in his (her) land, changing $\delta \rightarrow \delta - \frac{1}{2}\delta_1$, with total cost of improvements (for both lands) $2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\delta_1\right)^2 dt$ and in the case of fusion $\frac{1}{B} \int_0^1 \delta_1^2 dt$, arriving in both cases at the same pollution levels. To make pollution level smaller, one has to cut off costs, so must be greater than two.

Assume now that one agent can make improvements changing $\beta \rightarrow \beta - \beta_1$, and $\delta \rightarrow \delta - \frac{1}{2}\delta_1$, $\beta_1 > 0$, $\delta - \delta_1 > 0$,

$$\text{Let } E(X(t)) = f(t) \text{ and } E(X^2(t)) = g(t).$$

The cost of improvements is individually $\int_0^1 \left(\beta_1 X(s) + \frac{\delta_1}{2}\right)^2 ds$ and the same is true for $Y(s)$, while in the case of fusion the total cost is

$$\frac{1}{B} \int_0^1 [\beta_1(X(s) + Y(s)) + \delta]^2 ds.$$

Therefore, the joint cost in the collusive case is:

$$2\beta_1^2 g(t) + 2\beta\delta f(t) + \frac{\delta_1^2}{2},$$

and in the fusion:

$$\frac{1}{B} (2\beta_1^2 g(t) + 2\beta_1^2 f^2(t) + 4\delta\beta_1 f(t) + \delta_1^2)$$

and clearly even for $B < 2$ the cost of improvements would be smaller.

The exact calculation of will be performed in the next section for a different model.

3. The case of external factor.

In this case we work with different lands and borrow the general idea from (Cadenillas *et al*, 2004).

We will deal with a more general case. However we solve exclusively the Agent Problem.

The pollution level is modeled as

$$dS(t) = \delta u(t)dt + \square dt + \odot dW(t),$$

$S(0) > 0$, \square , and \odot is here fixed adapted to Brownian filtration processes, independently of the agent's action $u(t)$.¹

Assume also that there will be a unique strong solution to this equation for our choice of $u(t)$ that will be specified soon and $S(t) > 0$, $0 \leq t \leq 1$.

This model will produce a very simple optimal solution for in the case of certificates:

$$F - \int_0^1 S(u)du.$$

Let us rewrite $\int_0^1 S(u)du$ as

$$S - S(0) - \int_0^1 (1-t)dS(t) = \tilde{S} - \int_0^1 \pi_t dS(t).$$

The Agent's problem is to maximize

$$E \left[U \left(\tilde{S} - \int_0^1 (1-t)dS(t) \right) - \int_0^1 G(u(s))ds \right],$$

being U some unspecified increasing utility function of the Agent.

¹ Los símbolos \square y \odot fueron elegidos por los autores para subrayar la robustez del modelo

$$\text{Let } P_t = \int_0^1 \pi_u dS(u), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Now

$$d\left(P_t - \int_0^t G(U(s))ds\right) = \pi_t \square dt + \pi_t \odot dW(t) + [\delta \pi_t u_t - G(u_t)]dt.$$

Because neither \square , \odot nor π_t depends on u_t , and assuming a quadratic cost of improvements $G_t = \frac{u_t^2}{2}$, we obtain that the optimal agent's action is $\hat{u}_t = \delta \pi_t$ and is independent of the utility U .

We would like to compare fusion versus collusive optimality.

Let

$$dS_1(t) = \delta_1(t-1) + \odot_1 dW_1(t) - \square_1 dt$$

$$dS_2(t) = \delta_2(t-1) + \odot_2 dW_2(t) - \square_2 dt,$$

W_1, W_2 being independent.

Joint expectation (assuming that stochastic integrals are true martingales) is:

$$E\left(\int_0^1 (\square_1 + \square_2)dt\right) - \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

while fusion solution for $E(S_1 + S_2)$ would give $E\left(\int_0^1 (\square_1 + \square_2)dt\right) - \frac{\delta^2}{2}$ so fusion provides better results meanwhile $\delta > \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$.

Conclusions

The choice of certificates could be the subject of separate studies and matched in some sense to the social costs of pollution. However, it is very difficult to estimate them correctly. Therefore, for the first two applications the approach

can be any of the proposed. We leave to the market the exact costs of improvements.

It is frequent in quantitative finance that the design of financial products anticipates their valuation. We propose first to apply, and later to discuss and analyze the performance of the certificates of improvements. For one agent's problem see (Szatzschneider & Kwiatkowska, 2010). More detailed description of fusion can be found in (Szatzschneider & Kwiatkowska, 2009).

References

- Cadenillas, A., Civitanic, J., Zapatero, F. (2004). "Leverage Decision and Manager Compensation with Choice of Effort and Volatility", *Journal of Financial Economics* 73 (1), pp. 71-92.
- D'Amato, A., Franckx, L. (2003). "Environmental policy as a multi-task principal-agent problem", *Working papers* No. 12, Faculty of Economics and Applied Economic Sciences, Center for Economic Studies, Energy, Transport and Environment, Katholieke Universiteit Leuven 12.
- Graves, P.E. (2003). "Valuing public goods". *Working paper*, University of Colorado.
- Hanemann, M. (1994). "Valuing the Environment Through Contingent Valuation", *Journal of Economic Perspectives*, 8, pp. 19 - 43.
- Jeanblanc, M., Szatzschneider, W. (2002). "Environment & Finance: why we should make the environment a part of the financial markets", *Revista Mexicana de Economía y Finanzas* 1 (2), pp. 131-142.
- Kwiatkowska, T., Szatzschneider, W. (2009). "How to rescue the environment: the uncommon idea", *China-USA Business Review*, 8 (9), pp. 58-64.
- Musiela, M., Rutkowski, M. (2009). "Martingale Methods in Financial Modelling", *Series: Stochastic Modelling and Applied Probability*, Vol. 36, 2nd. Ed., Springer.
- Ray, I. (2001). "Game Theory and the Environment: Old Models, New Solution Concepts". In Sahu, N.C., and Choudhury, A K. (eds.) *Dimensions of Environmental and Ecological Economics*. University Press (India), New Delhi.
- Revuz, D., Yor, M. (1999). "Continuous Martingales and Brownian Motion", *A series of comprehensive studies in mathematics*, Vol. 23, Springer.
- Sagoff, M. (2004). *Price, Principle and the Environment*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Szatzschneider, W., Jeanblanc, M. (2002). "Environment and Finance. Why we should make the environment a part of the financial environment", *Revista Mexicana de Economía y Finanzas* 1 (2).

_____, W., Kwiatkowska, T. (2010). "Principal Agent approach to environmental improvements policies". Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Vol. 90, pp. 193 - 201.

_____, W. (2002). "The Cox Ingersoll and Ross extended model", *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, 1(4).

Appendix

Let

$$dY(t) = 2\sqrt{Y(t)}dW_2(t) + (2\beta Y(t) + \delta)dt,$$

set $Y(0) = 1$ (to simplify).

We will formulate here the result that will be useful to prove Theorem 2.

THEOREM 1

Let $\sigma > 0$

$$E \left(e^{-\sigma \int_0^1 Y(t)dt} \right) = \varphi(1)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\varphi'(0) - \beta(\delta + 1) \right) \right] \quad (1)$$

where φ is the solution of

$$\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)} = \beta^2 + 2\sigma, \quad s \in (0,1), \quad \varphi(0) = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} = \beta \text{ (left hand derivative)} \quad (3)$$

This theorem is a particular case of one presented in (Sztatzschneider, 2002) and also appears in (Musiel & Rutkowski, 2009).

Clearly it is very easy to calculate φ :

$$\varphi(s) = Ae^{cs} + (1 - A)e^{-cs}$$

with $c = \sqrt{2\sigma + \beta^2}$ and is calculated from (3).

This result has been obtained with the use of exponential martingales, Girsanov, and integration by parts.

Theorem 2

Assume $\beta < 0$. The formula (1) is valid for $E\left(e^{\sigma \int_0^1 Y(t)dt}\right)$, $\sigma > 0$, with the following modifications:

Case 1: $\beta^2 - 2\sigma > 0$

In this case $\varphi(s)$ has the same form as in theorem 1, with $c = \sqrt{2\sigma + \beta^2}$.

Case 2: $\beta^2 - 2\sigma = 0$

$$\text{Now } \varphi(s) = \frac{\beta}{1-\beta} s + 1.$$

Case 3: $0 < 2\sigma - \beta^2 < \frac{\pi^2}{4}$

$$\text{Set } \gamma = \sqrt{2\sigma - \beta^2},$$

$$\varphi(1) = \frac{\gamma}{\gamma \cos \gamma - \beta \sin \gamma}$$

$$\varphi(0) = \gamma \left(\frac{\gamma \sin \gamma + \beta \cos \gamma}{(\gamma - \beta) \cos \gamma} \right).$$

Proof:

Apply the same martingale method as in theorem 1.

Case 1: The proof is done exactly as in theorem 1.

Cases 2 and 3: The bounded solution of (2) and (3) exists in $(0,1)$, and also for Case 3, $\cos \gamma s + A \sin \gamma s$ with A calculated as before from $\frac{\varphi'(1)}{\varphi(1)} = \beta < 0$.

Valuación de una nota estructurada que liga el rendimiento de un índice bursátil con los pagos de un bono y un derivado

Ambrosio Ortiz-Ramírez*

Francisco Venegas-Martínez**

Francisco López-Herrera***

Fecha de recepción: 20 de mayo de 2011

Fecha de aceptación: 10 de junio de 2011

* Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
a7ortiz@yahoo.com.mx

** Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Economía.
fvenegas1111@yahoo.com.mx

*** Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Contaduría y Administración, División de Investigación.
francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx

RESUMEN

En esta trabajo se valúa una nota estructurada que incluye un bono cupón cero y que paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal predeterminado. Dicha nota tiene además inmerso un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o contratos *forward*. Específicamente se proporciona una fórmula cerrada del precio de dicha nota; el precio, como es de esperarse, satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973).

Clasificación JEL: G13, C65.

Palabras clave: Productos derivados, notas estructuradas, modelación matemática.

ABSTRACT

This paper provides the value of a structured note including a zero coupon bond and paying at the maturity date the logarithmic return of a stock index applied to a predetermined nominal. The note also has embedded a portfolio of European (call and put) options and/or forward contracts. Specifically, it is provided a closed formula of the value of the note; the price as expected, satisfies the Black-Scholes (1973) and Merton (1973) partial differential equation.

Keywords:JEL Classification: G13, C65

Contingent claims, structured notes, mathematical modeling.

1. Introducción

En las últimas décadas, los mercados financieros han experimentado profundas transformaciones debido al avance en las tecnologías de información y al creciente desarrollo de innovaciones financieras. Estas últimas diseñadas para satisfacer necesidades específicas de inversionistas y emisores. Entre las innovaciones destacan: los productos derivados sofisticados y notas estructuradas, siendo estas últimas híbridos entre bonos, índices bursátiles y derivados. La literatura especializada sobre valuación de notas estructuradas es todavía escasa; véanse, al respecto, los trabajos de: Carlin (2009); Henderson y Pearson (2007); Palmer (2006); Shefrin y Statman (1993); y Stoimenov y Wilkens (2005).

En casi todas las economías, desarrolladas o no, las notas estructuradas han cobrado especial interés en los mercados financieros. En términos generales, las notas estructuradas, comparadas con los bonos (cuponados o no), pueden producir mejores alternativas de inversión para los fondos de pensiones, tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y empresas paraestatales (con facultades legales para invertir) pues en dichas notas se ligan pagos asociados a bonos y a índices bursátiles, lo cual genera alternativas de inversión con rendimientos potencialmente superiores a los que prevalecen en el mercado de dinero, sobre todo cuando las tasas de interés se mantienen bajas, o a la baja, durante periodos prolongados de tiempo.¹ En México, existe un mercado OTC creciente de certificados de depósito (CEDEs) estructurados con derivados, entre los que destacan: CEDE *call spread*; CEDE *put spread*; CEDE dual; CEDE gana si sube; CEDE gana si baja; CEDE TIIE *collar*; CEDE TIIE *floor*; CEDE *cap*; CEDE *knock out, down and out*; CEDE *knock out, up and out*; CEDE *knock out, up and out, down and out (no touch)*; CEDE doble barrera (al *hit* acumulable); CEDE extendible; y CEDE *swaption*, entre muchos otros.²

¹ Véase, por ejemplo, Das (1996).

² Más detalles sobre estas notas aparecen en Venegas-Martínez (2007).

Sin duda, el mercado norteamericano de notas estructuradas es el que ha crecido más en los últimos años, esto debido a que cuando las tasas de interés no son atractivas a los inversionistas, las notas estructuradas cuyos pagos están ligados a algún índice bursátil constituyen una alternativa de inversión con rendimientos por arriba de lo que ofrece el mercado de deuda. Asimismo, muchas de las notas estructuradas en el mercado son emitidas por empresas paraestatales (con líneas de crédito abiertas por parte de alguna institución gubernamental) por lo que tienen calidad crediticia alta y, en consecuencia, el riesgo crédito (o riesgo de incumplimiento) es mínimo. En conclusión, los mercados de notas estructuradas son atractivos para los inversionistas por sus potenciales rendimientos y su alta calidad crediticia. Es también relevante subrayar que las notas estructuradas ofrecen al emisor y a los inversionistas un medio para aislar y redistribuir riesgos. De hecho, una de las causas de su creciente demanda es su capacidad para generar justamente la exposición al riesgo que el cliente esté dispuesto a tolerar y que, al mismo tiempo, se mantengan sus objetivos de inversión.

Como era de esperarse, las características de estos instrumentos introducen varias complicaciones técnicas para su valuación. A diferencia de la valuación de opciones en donde se requiere algún supuesto sobre el comportamiento del subyacente, la valuación de notas estructuradas requiere de supuestos sobre el comportamiento combinado del bono y el subyacente ligado a los pagos. En esta investigación se valúa una nota estructurada que incluye un bono cupón cero y que paga además al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal (predeterminado), la cual además tiene inmerso un portafolio de opciones europeas y/o un contratos *forward*. Este trabajo proporciona una fórmula analítica (cerrada) del precio de dicha nota. El precio de la nota, como es de esperarse, satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973).

Este trabajo se encuentra organizado como sigue. En la próxima sección se describe, en detalle, la nota estructurada bajo estudio. A través de las secciones 3 y 4 se valúa la nota. Por último, en la sección 5 se proporcionan las conclusiones.

2. Descripción de la nota

Considere una nota estructurada que se pacta al tiempo t y vence en T . La nota incluye un bono cupón cero, de nominal M , el cual paga una tasa de interés

continuamente capitalizable r , y además paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a otro un nominal N . Posteriormente se combina con un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o un contrato *forward* del mismo vencimiento pero diferentes precios de ejercicio y de entrega. En lo que sigue se hará referencia a la nota incompleta (sólo el bono y pago de rendimiento logarítmico) antes de combinarla con opciones o contratos *forward* y a la nota completa después de combinarla. Con base en la descripción anterior, la función de pago al vencimiento (o valor intrínseco) de la nota incompleta está dada por:

$$V(S_t, t) = N \ln(S_t) + M. \quad (1)$$

El primer sumando expresa el rendimiento logarítmico de un índice bursátil, de nivel S_t , aplicado al nominal N y el segundo representa el pago al vencimiento, M , del bono cupón cero. Se supondrá que el nivel del índice accionario satisface una ecuación diferencial estocástica de primer orden (el movimiento geométrico browniano) de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

donde μ es el parámetro de tendencia (rendimiento medio anual del índice), σ es la volatilidad anualizada del índice (desviación estándar del rendimiento anual), $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento browniano (o proceso de Wiener) definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, F, (F_t^W)_{t \in [0, T]}, P)$. En este caso, el espacio medible en cuestión es $(\Omega, F) := (R, B(R))$ donde $B(R)$ es la σ -álgebra estándar de Borel sobre R (los números reales). La medida de probabilidad satisface.

$$dP(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{w^2}{2t}\right\} dw.$$

La filtración $(F_t^W)_{t \in [0, T]}$ es una familia de σ -álgebras tales que $F_t^W \subset F$ para toda t . Esta familia es creciente en el sentido de que $F_s^W \subset F_t^W$ cuando $s \leq t$. Así, una filtración puede ser vista como un arreglo dinámico de información y F_t^W representa la información relevante disponible al tiempo t . El hecho de

que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. Se cumple además que W_t tiene incrementos independientes normales con medias cero y varianzas iguales a los incrementos en el tiempo. Al tiempo $t = 0$, se define $W_0 = 0$. El proceso $dW_t \sim N(0, dt)$ modela las fluctuaciones propias de los rendimientos (riesgo de mercado) del índice bursátil y, como se sabe, satisface:

$$E[dW_t] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$$

En este caso se cumple que

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt. \quad (3)$$

Es decir, el rendimiento logarítmico del índice accionario tiene distribución normal. De acuerdo con la descripción de la nota incompleta se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$S_t \geq 1 \quad (4)$$

Claramente, cualquier índice bursátil satisface (4). Se pedirá también que la volatilidad sea pequeña de tal forma que

$$\sigma \ll 1 \quad (5)$$

Por otro lado, observe que debido a la consideración de un rendimiento esperado μ , las ecuaciones (2) y (3) no son independientes de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ , y menor la volatilidad a fin de que el premio $\lambda = (\mu - r) / \sigma$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$, así, $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento), r . Ahora bien, si se escribe (2) como

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t), \end{aligned}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo $\lambda = 0$, se tiene que las ecuaciones (2) y (3) se transforman, respectivamente, en

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2')$$

y

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (3')$$

en cuyo caso, se tiene que el movimiento browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. Una posible interpretación de (2') es que los agentes estarían dispuestos a omitir su parámetro de preferencias, μ , y recibir r con tal de que la volatilidad, σ , se mantenga constante. La valuación de instrumentos financieros con (2') es también llamada valuación neutral al riesgo.³

3. Valuación de la nota incompleta

En esta sección se valúa la nota incompleta. La condición inicial de la nota incompleta, tomando en cuenta (2'), está dada por

$$V(1, t) = (N + M)e^{-r(T-t)} + Nr(T-t) - \frac{1}{2}N\sigma^2(T-t) \quad (6)$$

Observe que el segundo y tercer sumando están asociados a la tendencia en (3). Note además que si $S_t = 1$, entonces el valor del contrato, en $t = 1$, es el

³ El teorema de Girsanov (1960) proporciona una justificación teórica de (2'), véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008).

valor presente de la suma de los nominales más los intereses del nominal N y el ajuste por la tendencia de acuerdo con (3). La siguiente proposición proporciona el valor de la nota incompleta que combina capital y deuda

Proposición 1.

El precio, en un mundo neutral al riesgo, de la nota estructurada incompleta está dado por

$$V(S_t, t) = e^{-r(T-t)} N \left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right] + M e^{-r(T-t)}. \quad (7)$$

Además $V(S_t, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton.

Demostración: Claramente la ecuación (7) cumple con las condiciones de frontera (1) y (6). En virtud de (5) se obtiene que

$$r - \frac{1}{2} \sigma^2 > 0 \quad (8)$$

y dado $S_t \geq 1$, entonces $\ln(S_t) > 0$. Por lo tanto, el precio $V(S_t, t)$ permanece siempre positivo. Asimismo, al ser $V(S_t, t)$ un producto derivado con un único pago al vencimiento debe cumplir con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r V, \quad (9)$$

junto con las condiciones de frontera (1) y (6). En efecto, si se denota

$$V(S_t, t) = N f(S_t, t) + M B(t, T) \quad (10)$$

donde

$$f(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right]. \quad (11)$$

y

$$B(t, T) = Me^{-r(T-t)}, \quad (12)$$

Entonces se tiene que las derivadas parciales de $f(S_t, t)$ satisfacen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = rf - e^{-r(T-t)} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right), \quad \frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{e^{-r(T-t)}}{S_t^2} \quad (13)$$

y se puede verificar, fácilmente, que cumplen con

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = rf \quad (14)$$

Asimismo es fácil ver que $B(t, T) = Me^{-r(T-t)}$ también satisface (9), es decir,

$$\frac{\partial B}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = rB \quad (15)$$

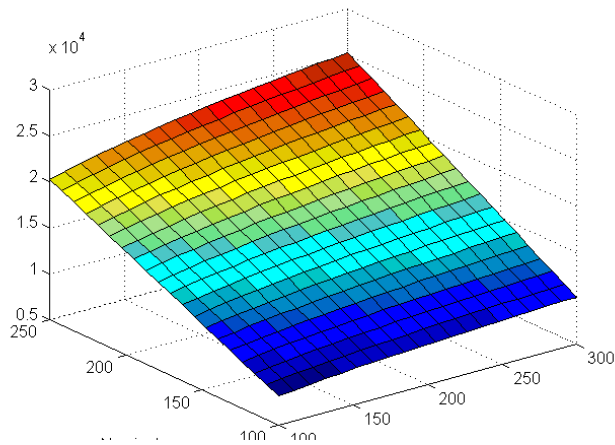
ya que B no depende de S_t , en cuyo caso se cumple trivialmente que

$$\frac{\partial B}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 B}{\partial S_t^2} = 0 \quad (16)$$

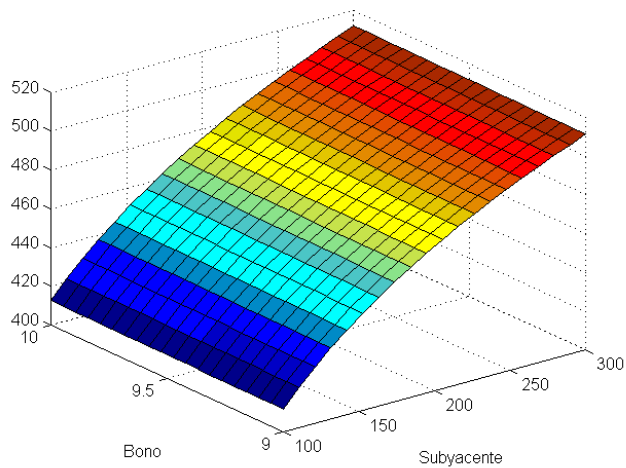
De hecho, como es de esperarse, $dB = rBdt$. Es decir, el cambio porcentual (rendimiento) del precio del bono se calcula con la tasa de interés por el plazo, esto es, se desanualiza la tasa de interés. Observe ahora que (9) es una ecuación diferencial parcial lineal, se sigue que cualquier combinación lineal de soluciones de (9), como lo son (11) y (12), son también solución de (9).

En la Gráfica 1 se muestra el comportamiento del valor de la nota incompleta ante variaciones en: (a) nominal y activo subyacente, (b) precio del bono y activo subyacente y (c) parámetro de volatilidad y activo subyacente.

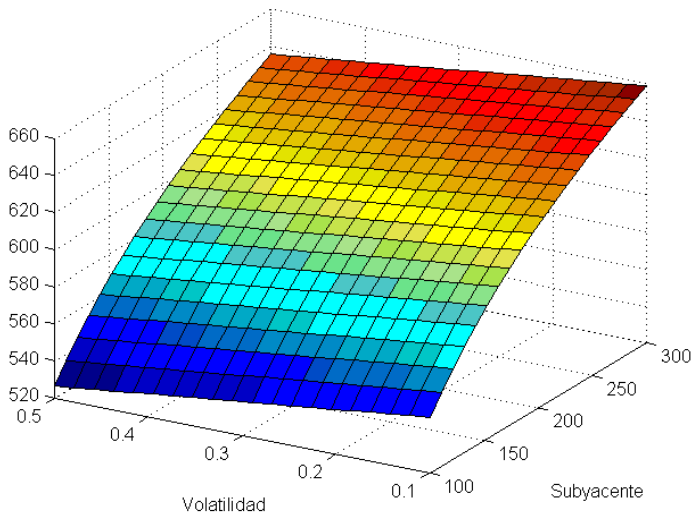
Gráfica 1. Comportamiento del precio (eje vertical) la nota incompleta ante variaciones de diferentes parámetros (ejes horizontales): (a) nominal y activo subyacente, (b) precio del bono y activo subyacente y (c) parámetro de volatilidad y activo subyacente.



(a)



(b)



(c)

4. Valuación de la nota completa

A la nota estructurada de la sección anterior se le pueden agregar opciones europeas (de compra o venta) y contratos *forward*, todos con el mismo vencimiento T , pero con diferentes precios de ejercicio y de entrega. El precio de la nota ampliada o completa se proporciona en la siguiente proposición,

Proposición 2.

Si

$$\Pi_t = w_1 c(S_t, t) + w_2 p(S_t, t) + w_3 F(S_t, t) \quad (17)$$

es el valor, al tiempo t , de un portafolio de w_1 unidades de opciones de compra con precio de ejercicio K_1 y prima $c(S_t, t)$, w_2 unidades de opciones de venta con precio *strike* K_2 y precio $p(S_t, t)$ y w_3 unidades de contratos *forward* con precio de entrega K_3 y valor $F(S_t, t) = S_t - K_3 e^{-r(T-t)}$ donde

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad p(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1)$$

y $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\varepsilon \sim N(0,1)$, es decir,

$$\Phi(d) = P_\varepsilon \{ \varepsilon \leq d \} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 - \Phi(-d),$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

entonces

$$U(S_t, t) = Nf(S_t, t) + MB(t, T) + \Pi_t \quad (18)$$

es el valor, en un mundo neutral al riesgo, de la nota completa y satisface

$$\frac{\partial U}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = rU \quad (19)$$

con condiciones de frontera

$$U(1, t) = (N + M)e^{-r(T-t)} + Nr(T-t) - \frac{1}{2}N\sigma^2(T-t) + w_1 \max(1 - K_1, 0) \\ + w_2 \max(K_2 - 1, 0) + w_3(1 - K_3)$$

y

$$U(S_t, t) = N \ln(S_t) + M + w_1 \max(S_t - K_1, 0) + w_2 \max(K_2 - S_t, 0) + w_3(S_t - K_3).$$

Demostración: La prueba es inmediata ya que $c(S_t, t)$, $p(S_t, t)$ y $F(S_t, t)$ satisfacen (19) con valores intrínsecos $\max(S_t - K_1, 0)$, $\max(K_2 - S_t, 0)$ y $S_t - K_3$, respectivamente. Además, en la proposición 1 ya se demostró que el primer sumando de (19), dado por $Nf(S_t, t) + MB(t, T)$, también satisface (19).

Por último, observe ahora que la nota completa, con precio dado en (18), tiene ahora inmerso un portafolio de opciones europeas y/o contratos *forward*, lo que la hace más atractiva para inversión y/o cobertura. Esta nota también permite acceder a diferentes mercados (deuda, capital y derivados) sin tomar directamente posiciones en los mismos. Por supuesto, una limitación de la nota es que ésta está sujeta al incumplimiento del emisor cuando la posición corta tiene baja calidad crediticia.

5. Conclusiones

La valuación de una nota estructurada tiene un nivel de complejidad que requiere no sólo del entendimiento del comportamiento del mercado, sino también del conocimiento de herramientas y técnicas especializadas de valuación. Las notas para las que existe una fórmula cerrada de su valor son, en general, notas *vanilla* asociadas con las fórmulas de valuación de Black-Scholes (1973) y/o de Black, F. (1976). Cuando se abandona el mundo *vanilla*, las complicaciones técnicas y metodológicas aparecen y se necesitan herramientas más sofisticadas para la determinación de precios. En este trabajo se ha encontrado una fórmula analítica de una nota estructurada que tiene inmerso un portafolio de opciones europeas (de compra o venta) y/o contratos *forward* e incluye un bono cupón cero y paga al vencimiento el rendimiento logarítmico de un índice accionario aplicado a un nominal dado.

Bibliografía

- Black, F. (1976). "The Pricing of Commodity Contracts". *Journal of Financial Economics*, vol. 3, núm. 1-2, pp. 167-179
- . y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Carlin, B. (2009). "Strategic Price Complexity in Retail Financial Markets". *Journal of Financial Economics*, vol. 91, núm. 3, pp. 278-287.
- Das, S. (1996). "Structured Notes and Derivative Embedded Securities", *Euromoney Publications*.
- Girsanov, I. V. (1960). "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, vol. 5, pp. 285-301.
- Henderson, B. J. and N. Pearson (2007). "Patterns in the Payoffs of Structured Equity Derivatives", Working paper, AFA 2008 New Orleans Meetings.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, vol. 4, núm. 1, pp. 141-183.
- Palmer, B. (2006). "Equity-Indexed Annuities: Fundamental Concepts and Issues", *Working Paper*. 45.
- Shefrin, H. y M. Statman (1993). "Behavioural Aspects of the Design and Marketing of Financial Products", *Financial Management*, vol. 22, núm. 2, pp. 123-134.
- Stoimenov, P. A. and S. Wilkens (2005). "Are Structured Products 'Fairly' Priced? An Analysis of the German Market for Equity-Linked Instruments". *Journal of Banking and Finance*, vol. 29, núm. 12, pp. 2971-2993.
- Venegas-Martínez, F. (2007). "Mercados de notas estructuradas: un análisis descriptivo y métodos de valuación", *El Trimestre Económico*, vol. 74(3), núm. 295, pp. 615-661.
- . (2008). "Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre", 2a. ed. Cengage, México.

Impacto económico del aumento en el precio de la gasolina en México: un análisis de cointegración y vectores autorregresivos

Miguel Cervantes Jiménez*

Pablo López Sarabia**

Jocelyne Montiel Alejo***

Fecha de recepción: 3 de mayo de 2011

Fecha de aceptación: 9 de junio de 2011

* Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Economía.
E-mail miguel@economia.unam.mx

** Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Contaduría y Administración y Facultad de Economía.
E-mail lopez_sarabia@hotmail.com

*** Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Economía.
E-mail flayos@hotmail.com

RESUMEN

El artículo muestra que el alza de precios de las gasolinas de bajo y alto octanaje no ha causado inflación general en México. Por medio de un modelo de corrección de error (VEC), utilizando la información del índice nacional de precio al consumidor (INPC) y los índices de precios de la gasolina de bajo y alto octanaje para el periodo de 2002 a 2009. La prueba de causalidad de Granger muestra que los índices de la gasolina del tipo Magna y Premium, así como sus variaciones porcentuales anualizadas no provocaron inflación (INPC). La función de impulso-respuesta y el análisis de descomposición de la varianza del modelo VEC sobre los índices y VAR sobre las variaciones indican que hay un efecto poco significativo sobre el desempeño del índice nacional de precios durante los primeros cuatro meses, esto se debe al reducido gasto de las familias en gasolina (3.7% del gasto total) combinado con la inelasticidad de la demanda de gasolina, así como al escaso peso de la gasolina como insumo en el proceso productivo (0.18% en bienes intermedios y 0.55% en bienes finales) y la determinación de los precios de las gasolinas por parte del Gobierno federal. Aunque los índices de las gasolinas y general de precios están cointegrados, su impacto sobre el INPC no es significativo, lo que refleja el control de precios de las gasolinas en México.

Palabras Clave: modelos econométricos, vector autorregresivo, cointegración, precio gasolina, inflación.

Clasificación JEL: C5, D9, I1, Q3.

ABSTRACT

This article shows that the rise in the cost of low and high octane gasoline has not caused inflation in Mexico. Through an error correction model (VEC), using information from the consumer price index (CPI) and the low and high octane gasoline index for the period 2002 to 2009, the Granger-Causality test shows that CPI and Magna and Premium gasoline indexes, as well as annualized percentage changes did not cause inflation. The impulse response function and the decomposition analysis of variance in the VEC and VAR models indicate that there is not a significant effect on the level of the consumer price index during the first four months, this is due to low household spending on gasoline (3.7% of total) combined with the inelasticity of gasoline demand and the small weight of the fuel as an input in the production process (0.18% in intermediate goods and final goods

0.55%) and the pricing of gasoline by the Federal Government. Although the gasoline indexes and the consumer price index are cointegrated, their impact on the CPI is not significant, reflecting the price control of gasoline in Mexico.

Key words: *Econometric models, autoregressive vector, cointegration, gasoline cost, inflation.*

JEL Classification: *C5, D9, I1, Q3.*

1. Introducción

Con frecuencia leemos en los diarios la frase “gasolinazo” cuando sube el precio de la gasolina. En la mente de los ciudadanos priva la idea, que el alza del precio del carburante genera presiones inflacionarias, la que se sustenta en la siguiente secuencia de eventos: el aumento del precio de la gasolina, por una parte, incide en el alza del precio del transporte como taxis y colectivos que utilizan gasolina (otros ocupan gas LP), por otra parte, incrementa el costo de la producción de bienes y servicios que emplean a la gasolina como insumo, pero sobre todo por el alza de sus costos de transportación. Sin embargo, en el caso mexicano, esta secuencia de eventos se interrumpe por la intervención del gobierno en la fijación de precios.

La investigación económica ha identificado múltiples variables que causan inflación, destacando el ingreso nacional, la oferta monetaria, el tipo de cambio, el salario, la tasa de interés, los índices de precios al productor de México y Estados Unidos, los precios administrados y concertados por el gobierno, un componente inercial de la inflación doméstica (Yacamán, 1982; Arias y Guerrero, 1988; Galindo y Guerrero, 2000; Esquivel y Razo, 2002; Cuevas, 2008), así como el precio de las gasolinas (Loría, Ramírez y Galán, 2009).

Específicamente sobre los efectos de la gasolina, Iraheta, Medina y Blanco (2008) evaluaron con tres metodologías la influencia del precio de la gasolina en varios países centroamericanos, Urbina (2001) midió el efecto del precio de la gasolina en la inflación general, Antelo y Martínez (1996) analizaron los efectos del incremento del precio de los combustibles en el sector industrial,

primario y terciario, Jemio y Cupé (1996) evaluaron la incidencia del precio de la gasolina en el índice generalizado de precios y en las ramas de actividad económica y Cupé (2003) estimó su impacto en el efecto multiplicador y en las expectativas de inflación de los consumidores.

En este marco, el objetivo del artículo es mostrar que los índices mensuales de las gasolinas de bajo (Magna) y alto octanaje (Premium), no han tenido un impacto en el índice de precios al consumidor de México (INPC), por medio de un modelo de corrección de error (VEC) y en sus variaciones anualizadas mediante un modelo de vectores autorregresivos (VAR), para el periodo 2002 a 2009.

La estructura del artículo se integra por tres apartados, en el primero se expone la evidencia empírica de la influencia del precio de la gasolina en la inflación general, así como algunos aspectos teóricos neoclásicos de dicho efecto; en el segundo se construye un modelo econométrico VEC y VAR para contrastar la hipótesis de que el alza de precios de las gasolinas de bajo y alto octanaje no han causado inflación, y en el tercero se proponen tres motivos que impiden la transmisión del alza de precios a la inflación, a saber, el reducido gasto de las familias en gasolina y la inelasticidad de la demanda de gasolina, el escaso peso de la gasolina en el total de insumos empleados por los productores y la fijación del precio de las gasolinas por parte del gobierno federal. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones.

1. Evidencia empírica y aspectos teóricos de la influencia del precio de la gasolina en la inflación general

1.1 Evidencia empírica del efecto del precio de la gasolina en la determinación de la inflación general

La mayoría de los estudios empíricos que miden el impacto de los precios de los hidrocarburos en la inflación se han realizado en América Latina. En este tenor, en primer lugar se exponen los trabajos extranjeros y, en segundo lugar, los estudios nacionales.

Iraheta, Medina y Blanco (2008) estimaron el impacto de los precios de los combustibles en la inflación general de Costa Rica, El Salvador, Guatemala, Honduras, Nicaragua y República Dominicana de 1997 a 2008, con tres metodologías econométricas, VAR estructurales, regresiones sucesivas y datos de panel. Concluyen que el impacto de las variaciones del precio del petróleo en los combustibles ha sido moderado debido a que en muchos de los países

de estudio se tienen subsidios o la carga en el precio de los combustibles está en la carga impositiva o en la determinación gubernamental, lo que consideran rigideces domésticas. Sus estimaciones muestran que la inflación tiene un coeficiente de correlación superior con el precio del crudo que con los combustibles, cuyo impacto es marginal. Bajo la técnica de regresiones sucesivas deducen que la inflación de los países de la región responde levemente a las variaciones en los precios de los combustibles. Con el VAR estructural identifican que las respuestas de la inflación ante impulsos en las variaciones de los precios de los combustibles se originan en promedio en los tres primeros meses, posteriormente se diluyen asintóticamente a cero.

Antelo y Martínez (1996), con la técnica de Vectores Autorregresivos (VAR) estudian la causalidad entre algunas variables macroeconómicas como el déficit público y la inflación respecto a la variación de los precios de la gasolina, concluyendo que el impacto de un incremento del precio de los combustibles es muy bajo en los sectores primario y terciario, mientras que presenta un mayor efecto, aunque relativamente reducido, en el sector industrial; los mayores efectos se registran en las actividades de energía eléctrica, refinación y transporte. Otro hallazgo importante indica que cuando los precios de los hidrocarburos se establecen como un elemento adicional de la política antiinflacionaria se deteriora la situación fiscal y, contrario a lo que se busca, genera presiones inflacionarias; no por el impacto sobre los precios generalizados, sino por la presión que ejerce en las expectativas inflacionarias de los agentes económicos que consideran a la gasolina como un bien clave para la actividad económica.

Jemio y Cupé (1996), analizaron los precios de los hidrocarburos y su impacto en la inflación boliviana mediante la inversa de la matriz de Leontief transpuesta y la matriz de insumo-producto ampliada, para evaluar los impactos de incrementos en los precios de insumos o factores básicos de producción (precio de gasolina, salarios), variables de política económica (tipo de cambio, impuestos) o de *shocks* externos (*commodities*) sobre el índice general de precios medidos por el índice de precios al consumidor y por el deflactor implícito del PIB, así como los impactos en cada uno de los sectores productivos de la economía. Los autores consideran que esta metodología captura el proceso multiplicador que se trasmite por la presión de costos, en su tercer escenario suponen un incremento en el precio de la gasolina de 10%, con un impacto de 0.7% en el índice generalizado de precios. Además demuestran que el mayor impacto del precio de la gasolina se presenta en 3 de las 35 ramas de actividad económica, fundamentalmente en el transporte.

Cupé (2003) considera que el INPC está constituido por subgrupos clave, tales como productos agrícolas, productos no comerciables, industriales, servicios y bienes derivados de hidrocarburos (consideran a la gasolina como el mejor ejemplo); mediante un Modelo Vectorial de Corrección de Error (VEC) llega a la conclusión de que la gasolina tiene una reducida ponderación en la canasta básica y que su importancia para el índice de precios generalizados se debe al efecto multiplicador y a las expectativas de inflación de los consumidores, por lo que un incremento de 1% al precio de la gasolina genera una inflación de 0.369% en derivados de hidrocarburos y transporte y un efecto *passthrough* de 0.016% para los demás subgrupos.

La Dirección de Investigaciones Económicas a Largo Plazo (DIEP, 2008), del Banco Central de Ecuador, ocupó un modelo de Vector Autorregresivo con Variables Exógenas (VARX) en donde incluyó el precio de la gasolina, concluyendo que los principales factores que impactan al índice general de precios son el tipo de cambio y los precios internacionales.

En España, Juan Ruiz (2004) concluyó que un aumento en el precio del petróleo afecta directamente al índice de precios del consumidor por encontrarse en la contabilidad de dicho índice e indirectamente por los costos de producción, es decir afecta por la transmisión del costo y de los multiplicadores.

En México, los estudios se han enfocado en identificar los determinantes de la inflación, tal es el caso de Yacamán (1982), Arias y Guerrero (1988), Galindo y Guerrero (2000), Esquivel y Razo (2002), Galindo (2004), Galindo (2007) y Cuevas (2008). Específicamente sobre el efecto del precio de la gasolina, Urbina (2001) elaboró un modelo econométrico lineal para el periodo de 1994 a 2001, en el que además de otras variables incluyó el índice de precios al productor de la gasolina, concluyendo que la gasolina afecta positivamente a la inflación en 0.068 unidades en el corto plazo y 0.32 unidades en el largo plazo. Recientemente, Loría, Ramírez y Galán (2009) emplearon la metodología VAR estructural con datos de 1970 a 2010, concluyendo que el alza del precio de la gasolina afecta positivamente la inflación general con una duración de 14 meses.

1.2 Simulación del efecto del alza del precio de la gasolina en la elección del consumidor y del productor

En este apartado se utiliza la teoría neoclásica del consumidor y del productor para representar, mediante el simulador computacional *micro@conomía*,¹ el

¹ Software desarrollado y registrado por Miguel Cervantes.

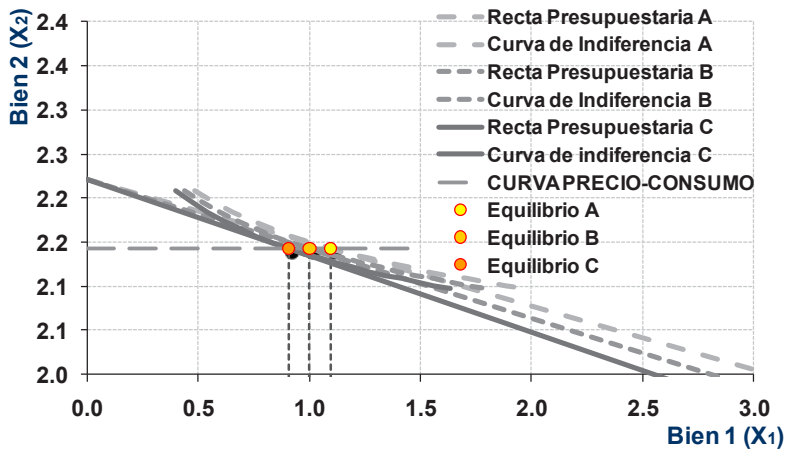
efecto del alza del precio de la gasolina en la elección de consumo y de producción, obteniéndose los siguientes resultados:

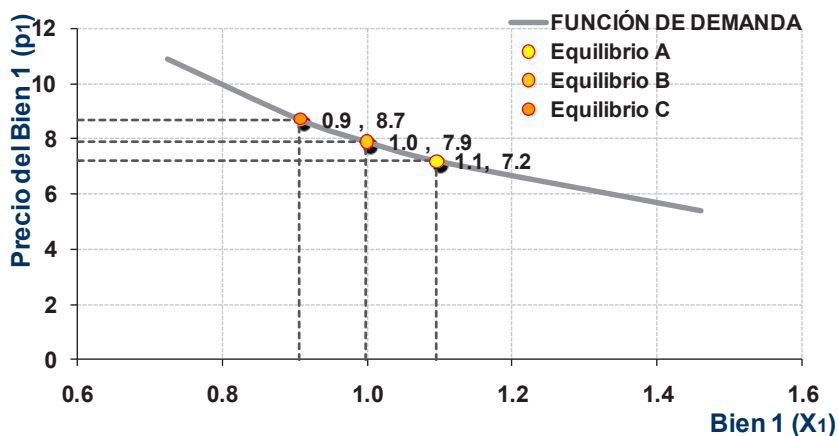
Para el consumidor se utilizó la siguiente función de utilidad tipo Cobb-Douglas:

$$u = u(x_1, x_2) = x_1^{0.03} x_2^{0.97} \quad (1)$$

En donde x_1 es la gasolina, el exponente 0.03 representa el gasto de gasolina respecto del gasto total obtenido del ponderador del hidrocarburo aportado por el índice nacional de precios al consumidor, x_2 es un bien compuesto por $n-1$ bienes de consumo y el exponente 0.97 representa el gasto proporcional de todos los bienes excluyendo la gasolina. Incorporando la restricción presupuestaria, la simulación permite concluir que cuando el precio de la gasolina aumenta, la cantidad demandada disminuye, pero menos que proporcionalmente, debido a que es un bien inelástico; de tal forma que los agentes sustituyen el consumo de otros bienes porque el consumo de gasolina permanece prácticamente inalterado.

Gráfica 1. Curva precio-consumo y la función de demanda de gasolina.





Fuente: Elaboración propia con base en el simulador computacional.² [micro@conomia](#)

La evidencia empírica en México demuestra que la elasticidad precio de la demanda es inelástica (Mendoza, 2005). Haro e Ibarrola (2000) la calculan en un rango de -0.153 a -0.639 en diversas zonas del país, e Ibarra y Sotrés (2008) la estiman en rangos de -0.15 a -1.06 para estados no fronterizos y de -0.04 a -2.37 en estados fronterizos.

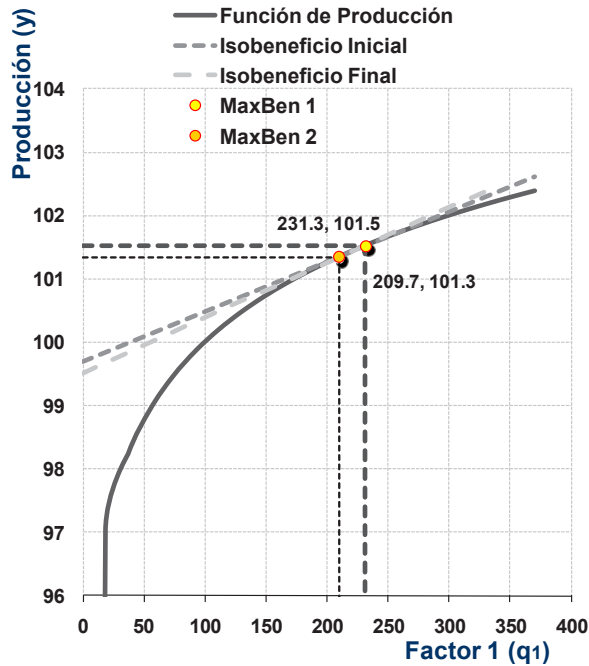
Por otra parte, para ilustrar el efecto del alza de precio de la gasolina en el volumen de producción de un bien en general se utiliza la siguiente función de producción tipo Cobb-Douglas:

$$x = Aq_g^{0.018} q_2^{0.982} \quad (2)$$

En donde la elasticidad de sustitución de la cantidad de gasolina utilizada como insumo (q_g) se obtiene de la ponderación que aporta el Banco de México en el Índice de Precios al Productor y el exponente para el otro factor (q_2) es el ponderador de todos los insumos menos la gasolina. El simulador computacional permite anticipar que cuando el precio de la gasolina aumenta 10% el volumen de producción disminuye tan sólo 0.3%. Esto se debe a la baja participación del carburante como insumo.

² La numeración en los ejes aparece redondeada debido a las especificaciones del software empleado.

Gráfica 2. Maximización de beneficio de una empresa que utiliza gasolina como insumo.



Fuente: Elaboración propia con base en el simulador computacional **Micro@conomía**.

Con estas simulaciones se muestra que la demanda de gasolina es inelástica y que el efecto de la variación de su precio para el productor es minúsculo, por lo que su oferta de bienes se mantiene prácticamente constante.

2. Modelo econométrico de la influencia del precio de las gasolinas en la inflación general

Una vez identificadas las causas de la inflación en estudios internacionales y en México y simulados los efectos del alza de los precios en la demanda y la producción bajo una teoría neoclásica, en este apartado se modela el impacto de la gasolina de bajo octanaje (Magna) y de alto octanaje (Premium) en el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), por medio de un modelo de vectores autorregresivos (VAR) y uno de corrección de error (VEC), con la

finalidad de identificar si el alza de precio de las gasolinas genera efectos en la inflación general, en el periodo 2002 a 2009.

Los datos utilizados en las estimaciones tienen una frecuencia mensual y corresponden al Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), al Índice Nacional de Precios de la Gasolina de bajo octanaje conocida como Magna (INPCMAGNA) y al Índice Nacional de Precios de la Gasolina de alto octanaje denominada Premium (INPCPREMIUM), todas las series fueron obtenidas del Banco de México.

La inflación general se obtuvo de la tasa de crecimiento anualizada del INPC y se clasificó con la etiqueta INFLACION, situación similar se realizó con la inflación de la gasolina Magna que se nombró INFLAMAGNA y, finalmente la inflación de la gasolina Premium denominada INFLAPREMIUM.³

Se realizaron las pruebas de raíz unitaria del tipo Aumentada Dickey Fuller (ADF) con tendencia e intercepto en niveles y primeras diferencias a un nivel de significancia de 5%, para cada uno de los índices y las inflaciones, a fin de ver si las series consideradas son estacionarias y con base en ello determinar si es factible realizar un modelo de corrección de error que incorpore las relaciones de largo plazo o uno de vectores autorregresivos que incluya la dinámica en el tiempo.

Los resultados del Cuadro 1 muestran que las series de índices y variaciones porcentuales acumuladas en niveles fueron no estacionarias al presentar una raíz unitaria, al nivel de significancia de 5%. Mientras que en primeras diferencias las series fueron estacionarias, por lo que en ambos casos se tratan de series integradas de orden 1, $I(1)$, y así es factible buscar si existe una relación de largo plazo entre las variables.

En el Cuadro 2 se observa que los índices de precios general y de gasolinas presentan una ecuación de cointegración, por lo que al ser series no estacionarias, pero integradas de orden 1, se procedió a estimar el modelo de corrección de error para ver el efecto de largo plazo. Mientras que las series de inflación no presentaron ninguna relación de largo plazo, por lo que se procedió a estimar un modelo de vectores autorregresivos para ver los efectos dinámicos de las series en el corto plazo.

Los modelos fueron estimados en el paquete econométrico EViews 7, los rezagos óptimos se determinaron mediante el criterio de Akaike en el caso

³ Las inflaciones se estimaron como la tasa de crecimiento de los índices de manera acumulada en el año, por ejemplo $INFLACION=(INPC/INPC(-12))-1$.

Cuadro 1. Prueba de raíz unitaria con Dickey Fuller Aumentada (ADF)

Variable	Estadístico ADF	Valor Crítico 5%	P-value 1 cola	Clasificación
<u>Índices</u>				
INPC				
- Niveles	-2.3621	-3.4642	0.3964	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-5.5416	-3.4642	0.0001	Estacionaria
INPCMAGNA				
- Niveles	-3.2986	-3.4635	0.0735	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-8.2760	-3.4649	0.0000	Estacionaria
INPCPREMIUM				
- Niveles	-2.0380	-3.4649	0.5720	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-9.8751	-3.4649	0.0000	Estacionaria
<u>Inflación anualizada</u>				
INFLACION				
- Niveles	-2.3660	-3.4734	0.3939	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-5.0739	-3.4734	0.0005	Estacionaria
INFLAMAGNA				
- Niveles	-3.1816	-3.4726	0.0962	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-8.4622	-3.4734	0.0000	Estacionaria
INFLAPREMIUM				
- Niveles	-2.5727	-3.4726	0.2938	No estacionaria
- Primera diferencia D()	-7.4925	-3.4744	0.0000	Estacionaria

Nota: Prueba ADF con tendencia e intercepto a un nivel de significancia del 5%.

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

Cuadro 2. Prueba de cointegración de Johansen para índices de inflación de gasolinas

Sample (adjusted): 2002M09 2009M08 Included observations: 84 after adjustments Trend assumption: Linear deterministic trend Series: INPC INPCMAGNA INPCPREMIUM Lags interval (in first differences): 1 to 1	Sample (adjusted): 2003M10 2009M08 Included observations: 71 after adjustments Trend assumption: Linear deterministic trend Series: INFLACION INFLAMAGNA INFLAPREMIUM Lags interval (in first differences): 1 to 2																									
<u>Índices</u>	<u>Inflación</u>																									
Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)																										
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Hypothesized</th> <th colspan="2">Trace</th> <th colspan="2">0.05</th> </tr> <tr> <th>No. of CE(s)</th> <th>Eigenvalue</th> <th>Statistic</th> <th>Critical Value</th> <th>Prob.**</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>None *</td> <td>0.242178</td> <td>34.7413</td> <td>29.79707</td> <td><u>0.0124</u></td> </tr> <tr> <td>At most 1</td> <td>0.115645</td> <td>11.44752</td> <td>15.49471</td> <td>0.1854</td> </tr> <tr> <td>At most 2</td> <td>0.013294</td> <td>1.124222</td> <td>3.841466</td> <td>0.2890</td> </tr> </tbody> </table>		Hypothesized	Trace		0.05		No. of CE(s)	Eigenvalue	Statistic	Critical Value	Prob.**	None *	0.242178	34.7413	29.79707	<u>0.0124</u>	At most 1	0.115645	11.44752	15.49471	0.1854	At most 2	0.013294	1.124222	3.841466	0.2890
Hypothesized	Trace		0.05																							
No. of CE(s)	Eigenvalue	Statistic	Critical Value	Prob.**																						
None *	0.242178	34.7413	29.79707	<u>0.0124</u>																						
At most 1	0.115645	11.44752	15.49471	0.1854																						
At most 2	0.013294	1.124222	3.841466	0.2890																						
Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level * denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level **MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values																										
Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)																										
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Hypothesized</th> <th colspan="2">Trace</th> <th colspan="2">0.05</th> </tr> <tr> <th>No. of CE(s)</th> <th>Eigenvalue</th> <th>Statistic</th> <th>Critical Value</th> <th>Prob.**</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>None *</td> <td>0.242178</td> <td>23.29378</td> <td>21.13162</td> <td><u>0.0244</u></td> </tr> <tr> <td>At most 1</td> <td>0.115645</td> <td>10.3233</td> <td>14.2646</td> <td>0.1916</td> </tr> <tr> <td>At most 2</td> <td>0.013294</td> <td>1.124222</td> <td>3.841466</td> <td>0.2890</td> </tr> </tbody> </table>		Hypothesized	Trace		0.05		No. of CE(s)	Eigenvalue	Statistic	Critical Value	Prob.**	None *	0.242178	23.29378	21.13162	<u>0.0244</u>	At most 1	0.115645	10.3233	14.2646	0.1916	At most 2	0.013294	1.124222	3.841466	0.2890
Hypothesized	Trace		0.05																							
No. of CE(s)	Eigenvalue	Statistic	Critical Value	Prob.**																						
None *	0.242178	23.29378	21.13162	<u>0.0244</u>																						
At most 1	0.115645	10.3233	14.2646	0.1916																						
At most 2	0.013294	1.124222	3.841466	0.2890																						
Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level * denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level **MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values																										

Nota: Pruebas de significancia al nivel del 5%. Se ponen en itálicas, negritas y subrayado.

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

del modelo VAR y mediante el principio de parsimonia en el caso del VEC, a fin de que ambos modelos tuvieran el mismo número de rezagos óptimos que fue de 2.

El Cuadro 3 presenta la estimación del modelo de corrección de error (VEC) para los índices de precios general y de gasolina Magna y Premium. Los resultados muestran que en la ecuación de cointegración, la gasolina Magna

Cuadro 3. Modelo VEC con índices de gasolina

Vector Error Correction Estimates			
Sample (adjusted): 2002M10 2009M08			
Included observations: 83 after adjustments			
Standard errors in () & t-statistics in []			
<u>Ecuación de Cointegración</u>			
INPC(-1)	1		
INPCMAGNA(-1)	-0.709632		
	-0.22864		
	[-3.10376]		
INPCPREMIUM(-1)	-0.11394		
	-0.17478		
	[-0.65192]		
C	-20.94888		
Error Correction:	D(INPC)	D(INPCMAGNA)	D(INPCPREMIUM)
CointEq1	-0.065603	0.242462	0.069276
	-0.03299	-0.07941	-0.08091
	[-1.98857]	[3.05320]	[0.85616]
D(INPC(-1))	0.471055	-0.586615	-0.777814
	-0.11369	-0.27368	-0.27886
	[4.14317]	[-2.14343]	[-2.78930]
D(INPC(-2))	0.046504	0.076408	0.65121
	-0.12342	-0.2971	-0.30272
	[0.37679]	[0.25718]	[2.15121]
D(INPCMAGNA(-1))	-0.07953	0.220014	0.034469
	-0.05218	-0.1256	-0.12798
	[-1.52418]	[1.75168]	[0.26934]
D(INPCMAGNA(-2))	-0.032016	-0.175788	-0.090994
	-0.05382	-0.12956	-0.13201
	[-0.59483]	[-1.35680]	[-0.68929]
D(INPCPREMIUM(-1)	0.081245	-0.060551	0.14556
	-0.05023	-0.1209	-0.12319
	[1.61758]	[-0.50083]	[1.18158]
D(INPCPREMIUM(-2)	-0.012472	-0.08487	-0.330004
	-0.05083	-0.12235	-0.12466
	[-0.24537]	[-0.69366]	[-2.64714]
C	0.209723	0.716544	0.773654
	-0.0717	-0.17259	-0.17585
	[2.92512]	[4.15181]	[4.39950]
R-squared	0.282178	0.258152	0.284205
Sum sq. resids	8.303652	48.11472	49.95213
F-statistic	4.211816	3.728408	4.25408
Akaike AIC	0.728503	2.485396	2.522873
Nota: Pruebas de significancia al nivel del 5%. Valor t.05,83=1.988959			

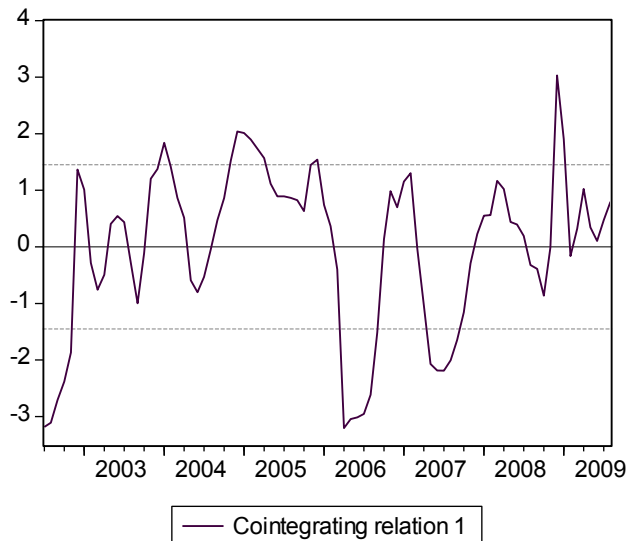
Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

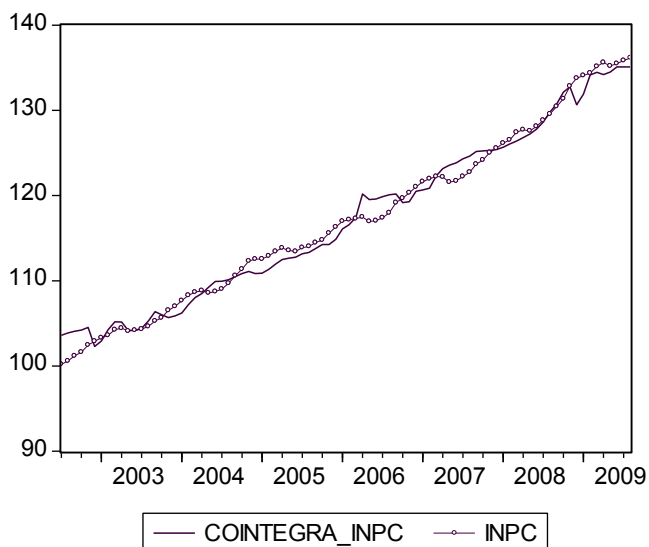
tiene un impacto en el ajuste de largo plazo en el índice de precios al consumidor, es decir muy en el largo plazo, el gobierno, al ajustar el precio de la gasolina, termina impactando al INPC, sin embargo, la ecuación de cointegración no es significativa en esta variable, situación que refleja que las variables se mueven de manera independiente por las restricciones que se detallarán en el apartado 3. La estimación econométrica también muestra que no existe una relación dinámica en el tiempo entre los índices de las gasolinas y el índice nacional de precios al consumidor.

En la Gráfica 3 se muestra que a pesar de que al nivel de significancia de 5% la ecuación de cointegración no impacta al INPC, hay una rápida convergencia en el largo plazo entre los índices.

La ecuación de cointegración al tener un coeficiente bajo, indica que las variables tienden rápidamente al equilibrio. A partir de la ecuación estimada se procede a tomar el vector de cointegración, despejado en términos del Índice de Precios al Consumidor y se muestra en la Gráfica 3 contra la variable observada, de tal manera que se puede evaluar visualmente que a pesar de existir la ecuación de cointegración ésta no tiene impacto en el INPC y por tanto el precio de la gasolina no afecta la inflación en el largo plazo.

Gráfica 3. Ecuación de cointegración y bondad de ajuste de la ecuación en el INPC





Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

Ecuación de cointegración

$$\text{INPC} = 0.709632 \cdot \text{inpcmagna} + 0.113940 \cdot \text{inpcpremium} + 20.94888 \quad (3)$$

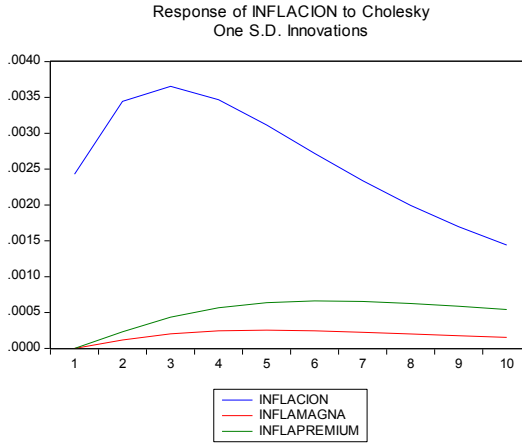
Estadístico t [-3.10376] [-0.65192]

Las funciones de impulso respuesta del modelo VEC, que se presentan en la Gráfica 4, muestran que en el caso del índice de gasolina Premium, que es la de mayor precio, comienza a tener un impacto en el INPC pasado tres meses, aunque inmediatamente disminuye su impacto, situación que puede explicarse por el control de precios que existe en las gasolinas en México. En el caso del índice de gasolina Magna, éste impacta al INPC hasta después de 4 meses, donde tarda más en disminuir su efecto de largo plazo como lo indica la ecuación de cointegración, posiblemente porque es una de las gasolinas que más se consume por ser más barata, aunque como se vio previamente, el efecto de la ecuación de cointegración no es significativo a 5% en el INPC.

El análisis de descomposición de la varianza de los índices que se presentan en el Cuadro 4 indica que la variación que tiene el INPC durante los primeros 4 meses se debe más a la variación del mismo INPC que a la de las gasolinas, situación que se modifica marginalmente después de 4 meses, lo

cual es entendible, ya que tarde o temprano el gobierno debe realizar los ajustes necesarios en el precio de las gasolinas.

Gráfica 4. Impulso respuesta de los índices de gasolinas



Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

Es importante señalar que a pesar de que los índices de precios tengan cambios, esto no implica que sus variaciones porcentuales, que es lo que denominamos inflación, sean significativos, se decidió estimar la inflación del INPC y gasolinas Magna y Premium de manera anualizada, a fin de eliminar la estacionalidad que presentan generalmente las series de corto plazo, como es el caso de las series mensuales.

Cuadro 4. Descomposición de la varianza con índices de gasolina

Variance Decomposition of INPC:				
Period	S.E.	INPC	INPCMAGNA	INPCPREMIUM
1	0.332739	100	0	0
2	0.582831	98.8494	0.028193	1.122409
3	0.782067	97.80397	0.133223	2.062803
4	0.943433	97.16534	0.514139	2.320517
5	1.076635	96.25575	1.386342	2.357912
6	1.185862	94.88269	2.751206	2.366103
7	1.275632	93.26306	4.397724	2.339215
8	1.351482	91.61541	6.10887	2.275723
9	1.418005	90.04229	7.757109	2.200602
10	1.478093	88.60242	9.267746	2.129837
Cholesky Ordering: INPC INPCMAGNA INPCPREMIUM				

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

Al no encontrarse una ecuación de cointegración en las series de variaciones porcentuales acumuladas de los precios al consumidor y las gasolinas se buscó la relación dinámica entre ellas y su causalidad estadística del tipo Granger-Sims.

Los resultados del Cuadro 5 muestran que la inflación medida por el INPC no se ve afectada en el tiempo por los incrementos a los precios de las gasolinas Magna y Premium tomando un nivel de significancia de 5%, lo que refuerza nuestra hipótesis de que hay una sobredimensión por parte de los agentes económicos en relación a que los aumentos en el precio de las gasolinas provocan un incremento en la inflación general al consumidor.

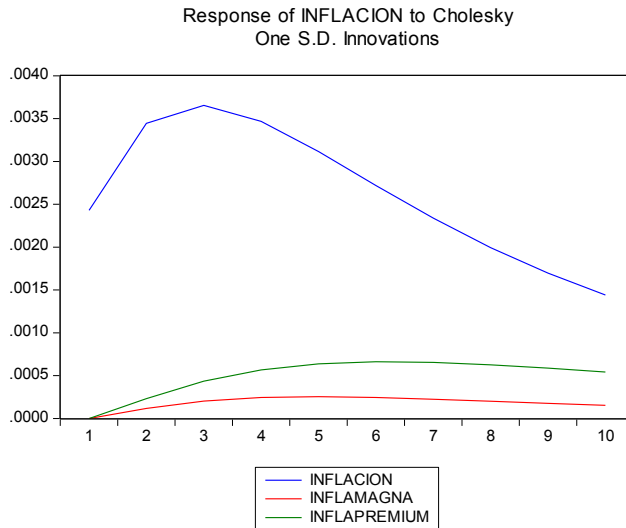
Cuadro 5. Modelo VAR con inflación de gasolina

Vector Autoregression Estimates			
Sample (adjusted): 2003M09 2009M08			
Included observations: 72 after adjustments			
Standard errors in () & t-statistics in []			
	INFLACION	INFLAMAGNA	INFLAPREMIUM
INFLACION(-1)	1.399707 -0.11059 [12.6570]	-0.383423 -0.42643 [-0.89914]	-0.403013 -0.45503 [-0.88568]
INFLACION(-2)	-0.47653 -0.11054 [-4.31093]	0.479265 -0.42625 [1.12437]	0.480606 -0.45483 [1.05666]
INFLAMAGNA(-1)	0.000589 -0.03589 [0.01642]	0.859276 -0.1384 [6.20848]	0.022098 -0.14768 [0.14963]
INFLAMAGNA(-2)	-0.002505 -0.03452 [-0.07258]	-0.058279 -0.13311 [-0.43783]	-0.032699 -0.14203 [-0.23022]
INFLAPREMIUM(-1)	0.02606 -0.03324 [0.78397]	-0.071982 -0.12818 [-0.56157]	0.957802 -0.13677 [7.00279]
INFLAPREMIUM(-2)	-0.012528 -0.03368 [-0.37197]	-0.004442 -0.12987 [-0.03420]	-0.150483 -0.13858 [-1.08588]
C	0.002713 -0.00166 [1.63726]	0.010757 -0.00639 [1.68332]	0.009194 -0.00682 [1.34831]
R-squared	0.931541	0.67294	0.721875
Sum sq. resids	0.000384	0.005705	0.006496
F-statistic	147.4116	22.29002	28.11795
Akaike AIC	-9.109979	-6.410671	-6.280866
Nota: Pruebas de significancia al nivel del 5%. Valor t. _{05,72} =1.99346357			

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

La función de impulso respuesta que se desprende del modelo VAR describe la réplica de una variable endógena a cada una de las innovaciones o *shocks* de las otras variables del modelo, mostrando así el efecto sobre los valores presentes y futuros de la variable endógena ante un *shock*, considerando una desviación estándar de las otras variables y de ella misma. Un *shock* en los rezagos de la variable gasolina Magna y Premium para el índice de precios se encuentran cercanos a cero, lo que significa que los rezagos no tienen inferencia en la variable dependiente representada por el cambio relativo del índice de precios al consumidor, como se muestra en la Gráfica 5.

Gráfica 5. Impulso respuesta con inflación de gasolinas



Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

El análisis de la descomposición de la varianza consiste en obtener distintos componentes que permitan aislar el porcentaje de variabilidad de cada variable que es explicado por la perturbación de cada ecuación, interpretándose como la dependencia relativa que tiene cada variable sobre el resto.

La columna S.E. del Cuadro 6 puede interpretarse como el error de predicción de la variación relativa acumulada del índice de precios al consumidor (y por su parte de la gasolina de bajo y alto octanaje) en diferentes periodos en el futuro. La fuente de este error de predicción es la variación en los valores actuales y futuros de las innovaciones de cada variable endógena en el modelo

VAR, como se observa el error de predicción se explica fundamentalmente por las propias variaciones del INPC más que la de las gasolinas en al menos los 3 primeros meses, situación que se modifica marginalmente en el cuarto mes, pero sin ser significativo, como lo indica el mismo modelo VAR y la prueba de causalidad que se detallará más adelante.

Las otras dos columnas del Cuadro 6 muestran el porcentaje de variación debido a cada innovación específica de gasolinas, donde cada fila suma 100%. Un periodo hacia delante, toda la innovación de INPC se debe a la propia variable en promedio un 99.62% y sólo el 0.07% se debe a los cambios en los precios de la gasolina Magna y 0.30% de la gasolina Premium, esto reafirma que la inflación medida por el índice de precios al consumidor no está tan afectada por la gasolina en comparación a como ésta le afecta a la gasolina Magna y Premium.

Cuadro 6. Descomposición de la varianza con inflación de gasolina

Variance Decomposition of INFLACION:				
Period	S.E.	INFLACION	INFLAMAGNA	INFLAPREMIUM
1	0.00243	100.00000	0.00000	0.00000
2	0.00422	99.62239	0.07618	0.30144
3	0.00561	99.05324	0.17412	0.77265
4	0.00662	98.45117	0.26107	1.28775
5	0.00735	97.87227	0.33111	1.79662
6	0.00787	97.34145	0.38510	2.27345
7	0.00824	96.87023	0.42562	2.70415
8	0.00850	96.46240	0.45542	3.08218
9	0.00869	96.11668	0.47698	3.40634
10	0.00883	95.82857	0.49237	3.67907
Cholesky Ordering: INFLACION INFLAMAGNA INFLAPREMIUM				

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

A fin de ver si existe una relación causal entre los índices de precios al consumidor y gasolinas, así como en las variaciones relativas acumuladas de los índices, se realizaron las pruebas de causalidad de Granger-Sims conjuntas que se desprenden de los modelos VEC y VAR. La prueba de hipótesis que se plantea es la siguiente: *Ho*: No hay causalidad; contra la alternativa de *Ha*: Sí hay causalidad.

El Cuadro 7 muestra que las variables gasolina Magna y Premium no son causa de la variable inflación, a un nivel de significancia de 5%, situación que refuerza el hecho de que el término “gasolinazo” es algo exagerado en relación a la evidencia estadística. En el caso de los índices se muestra un impacto del

INPC sobre la gasolina Premium, pero en ningún momento los índices de gasolinas afectan el INPC.

Los modelos VEC y VAR estimados no presentaron problemas de heterocedasticidad, así como tampoco problemas de autocorrelación serial de primer orden y superior, mismas que se muestran a detalle en el anexo estadístico.

Cuadro 7. Pruebas de causalidad de Granger con VAR y VEC

VEC Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests				VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests			
Sample: 2002M07 2009M08				Sample: 2002M07 2009M08			
Included observations: 83				Included observations: 72			
<i>Índices</i>				<i>Inflación</i>			
Dependent variable: D(INPC)				Dependent variable: INFLACION			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.	Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(INPCMAGNA)	3.011142	2	0.2219	INFLAMAGNA	0.012263	2	0.9939
D(INPCPREMIUM)	2.622602	2	0.2695	INFLAPREMIUM	0.92152	2	0.6308
All	4.1703	4	0.3834	All	1.036529	4	0.9042
Dependent variable: D(INPCMAGNA)				Dependent variable: INFLAMAGNA			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.	Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(INPC)	5.281161	2	0.0713	INFLACION	1.547142	2	0.4614
D(INPCPREMIUM)	0.812937	2	0.666	INFLAPREMIUM	1.246415	2	0.5362
All	7.076574	4	0.1319	All	2.675893	4	0.6134
Dependent variable: D(INPCPREMIUM)				Dependent variable: INFLAPREMIUM			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.	Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(INPC)	8.722318	2	<u>0.0128</u>	INFLACION	1.254096	2	0.5342
D(INPCMAGNA)	0.503754	2	0.7773	INFLAMAGNA	0.059953	2	0.9705
All	8.732742	4	0.0681	All	1.314073	4	0.8590

Nota: Pruebas de significancia al nivel del 5%. Se ponen en *italicas*, **negritas** y subrayado.

Fuente: Elaboración propia con base en información del Banco de México.

3. Motivos que impiden la transmisión del alza de precios de la gasolina a la inflación en general

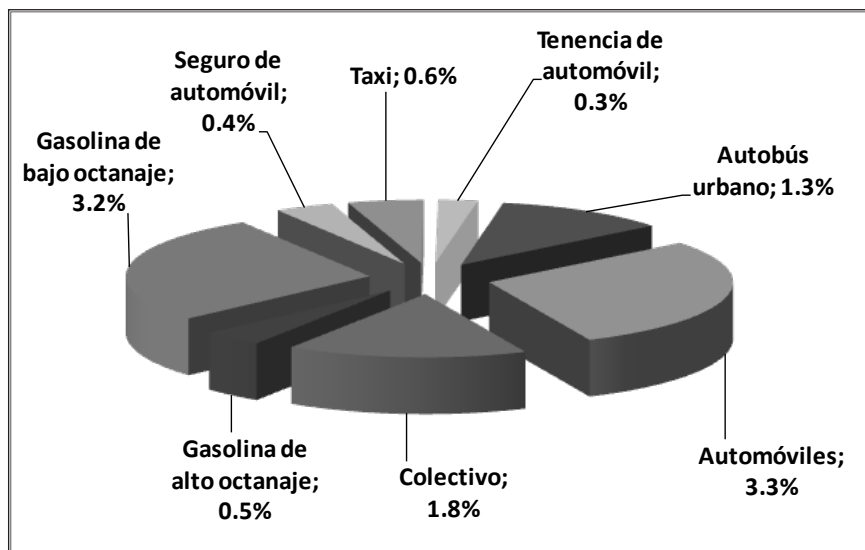
En este apartado se exponen los motivos que impiden que el alza de precios de la gasolina se transmita inmediatamente a la inflación general. Se destaca el reducido gasto de las familias en gasolina, la baja participación de la gasolina como insumo en el proceso productivo y la fijación de los precios de la gasolina por parte del gobierno federal.

3.1 El reducido gasto de las familias en gasolina

La encuesta nacional de ingreso y gasto de los hogares elaborada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) reporta que el gasto de las

familias mexicanas en los ámbitos rural y urbano se destina principalmente a erogaciones relacionadas con la vivienda (26%), los alimentos, bebidas y tabaco (23%), el transporte (13%) y la educación (12%). En el rubro transporte, la mayor parte del gasto se destina a la compra de autos, seguros y el pago de tenencia (4.1%), y un menor peso tiene el gasto en transporte colectivo (1.8%), autobús urbano (1.3%) y taxi (0.6%). El gasto total de gasolina de bajo octanaje representa 3.2% del gasto total y la de alto octanaje 0.5%; en suma, el gasto de las familias en los dos tipos de gasolina equivale al 3.7%, tal como lo ilustra la Gráfica 6. Este ponderador implica que en caso de que el precio de la gasolina aumentara en 10% su impacto en la inflación general tan sólo sería de 0.37%. Por el peso importante que ocupa el gasto en transporte en el gasto total de las familias se podría argumentar que el aumento del precio de la gasolina es completamente inflacionario. Sin embargo, habría que considerar que el transporte foráneo emplea diesel, los metropolitanos ocupan energía eléctrica y el taxi tiene una tarifa establecida por los gobiernos locales.

Gráfica 6. Ponderadores seleccionados del sector transporte



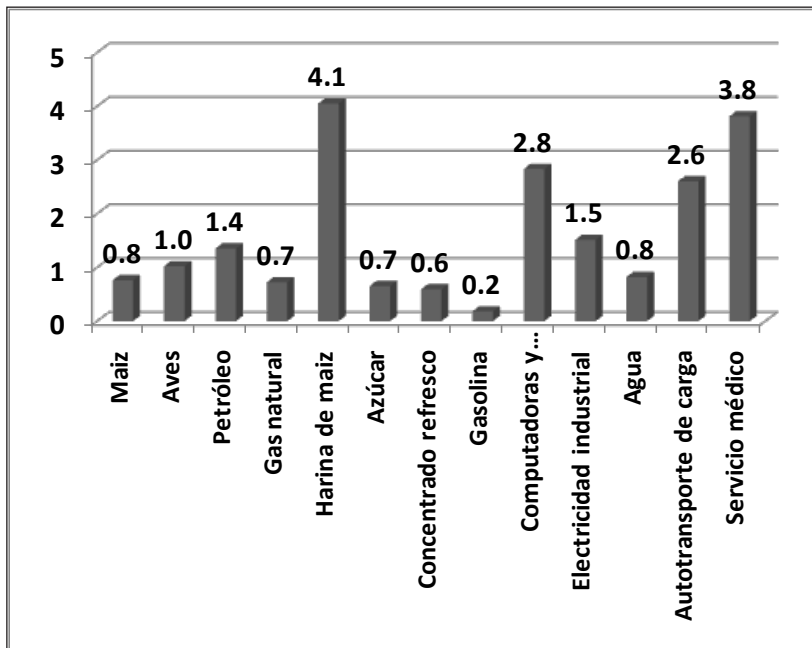
Fuente: Elaboración propia con datos de Banco de México

3.2 El reducido gasto de los productores en gasolina

El Índice Nacional de Precios al Productor (INPP) es un buen indicador para localizar presiones inflacionarias en el corto plazo, debido a que puede iden-

tificar “focos de origen” del proceso inflacionario y su desplazamiento en la cadena productiva. La Gráfica 7 muestra los bienes y servicios de mayor ponderación en cada rama (eje de ordenadas) con el fin de situar a la gasolina y mostrar su importancia relativa dentro de este índice y muestra que hay insumos más importantes que la gasolina, como es el caso del maíz, de las aves, de los accesorios para computadoras, el agua, el servicio médico. El ponderador de la gasolina en el INPP para bienes intermedios es de sólo 0.18% y el del autotransporte de carga es de 2.60%. Respecto a los bienes finales la ponderación de la gasolina asciende a 0.55%.

Gráfica 7. Ponderadores bienes intermedios seleccionados



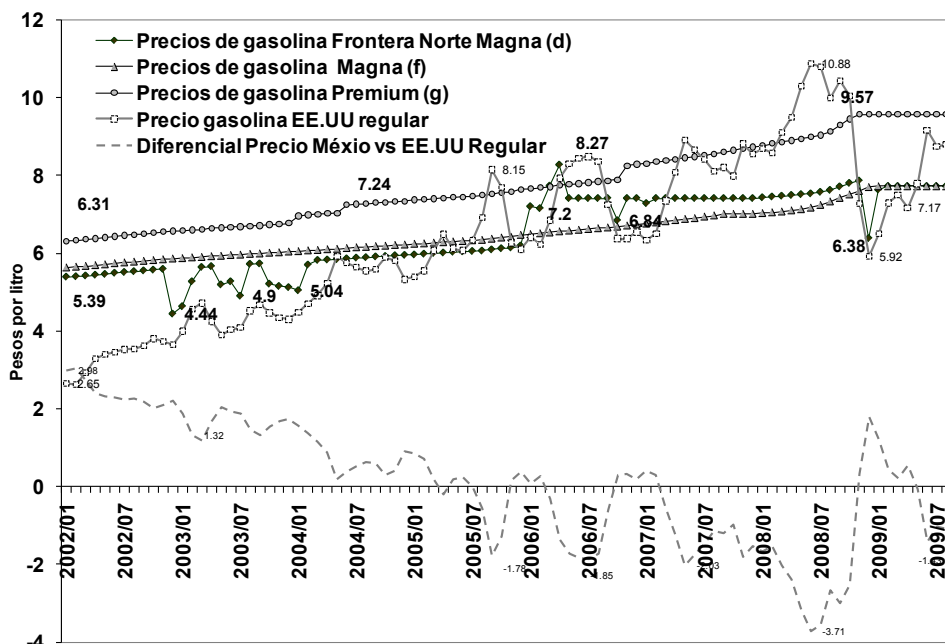
Fuente: Elaboración propia con datos del Banco de México

3.3 Los precios de las gasolinas no los determina el mercado; los fija la Secretaría de Hacienda y Crédito Público

Los precios de la gasolina en México los fija el gobierno federal mediante la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). La política de precios de los hidrocarburos se ha basado en algunos objetivos, como la recaudación fiscal, el homologar el precio por unidad de volumen (litros) y distinguir entre los

precios de la frontera con el resto del país a fin de obtener recaudación por parte de clientes no mexicanos. La Gráfica 8 muestra distintos precios de las gasolinas Magna y Premium, así como el diferencial respecto a los precios internacionales de gasolina.

Gráfica 8. Precio de gasolina Magna y Premium para frontera norte, resto del país y Estados Unidos, 2002-2009



Fuente: Elaboración propia con datos de Indicadores Petroleros PEMEX y U.S. Energy Information Administration

El precio de las gasolinas en México no se determina por las libres fuerzas del mercado, los fija el gobierno federal fundamentado en el sistema de administración regulado por la Ley Orgánica de la Administración Pública Federal, por lo que los factores externos e internos que afectarían el precio al alza o a la baja indicando la escasez relativa de los hidrocarburos no los afectan.

La Ley Orgánica de la Administración Pública Federal en el artículos 31 fracción X determina que la SHCP debe establecer y revisar los precios y tarifas de bienes y servicios de la administración pública federal. Según Reyes (2009) se consideran cuatro factores:

1. La inflación esperada: la dependencia autoriza deslizamientos mensuales en el precio de las gasolinas y el diesel para evitar rezagos respecto a los precios de producción, sin que impacte drásticamente el ingreso monetario ni pueda afectar el nivel general de precios.
2. Cuotas a la venta final de gasolinas y diesel: aumentar la recaudación de los estados y municipios por medio de la aplicación de cuotas a las ventas finales de los combustibles;⁴ el Congreso de la Unión adiciona el artículo 2-A, fracción II de la Ley del Impuesto Especial sobre Producción y Servicios aplicando los siguientes rangos:
 - Gasolina Magna 36 centavos por litro
 - Gasolina Premium 43.92 centavos por litro
 - Diesel 29.88 centavos por litro
3. Cuotas a nivel nacional: las cuotas se aplican de manera gradual conforme a las siguientes fechas: “En el mes que entre el artículo mencionado, se aplicará una cuota de 2 centavos por litro de gasolina Magna. 2 centavos por litro para gasolina Premium y 1.66 por litro para Diesel. Las cuotas mencionadas incrementarán cada mes en la proporción del párrafo anterior: A partir del 1 de enero de 2012 las cuotas previstas se disminuirán en una proporción de 9/11 para quedar en 2/11 de las cuotas contenidas en dicho artículo.”⁵
4. Ajustes por los precios internos respecto a los externos: en nuestra nación cuando los precios del petróleo aumentan, los precios de sus derivados no se incrementan de manera automática, sino de manera paulatina y sólo sí se emite algún decreto federal. En cambio en Estados Unidos, se conforma el precio por medio del mercado, por lo que cuando aumenta el precio del petróleo los ajustes se observan paralelamente.

⁴ Diario Oficial de la Federación 21 de diciembre de 2007. Decreto por el que se reforman, adicionan, derogan y abrogan diversas disposiciones de la Ley de Coordinación Fiscal, Ley del Impuesto sobre Tenencia o Uso de Vehículos y la Ley del Impuesto Especial sobre Productos y Servicios.

⁵ Ídem.

El precio de la gasolina en México se compone por los siguientes rubros:

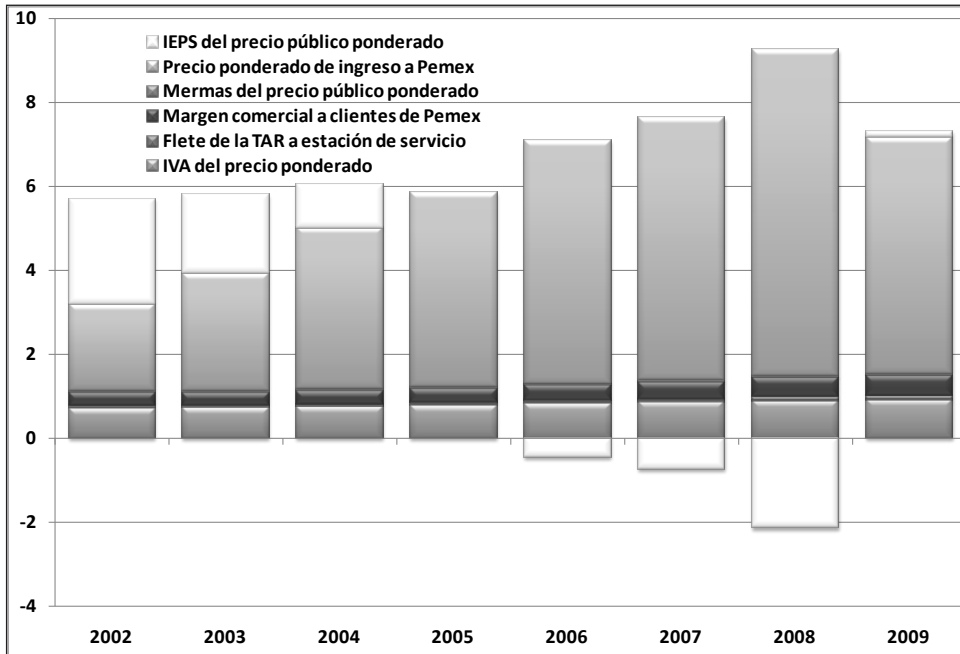
- A. Impuesto al Valor Agregado del precio ponderado, 16% para estados no fronterizos y 10% para estados fronterizos.
- B. Impuesto Especial sobre Productos y Servicios del precio ponderado, se ajusta automáticamente de acuerdo a la variación entre el precio del productor y el precio público. Se calcula considerando los siguientes elementos: “a) precio de la gasolina en el mercado *spot* de Houston y b) costos de manejo. La suma de los anteriores elementos constituye la base gravable a la cual se le aplica el impuesto especial; otra forma de definirlo es la diferencia entre el precio al público, antes del IVA y la comisión al distribuidor, y el precio del productor”.⁶
- C. Flete ponderado de la terminal de almacenamiento y reparto (TAR) a la estación de servicio, es el costo de transportación de las terminales de almacenamiento a las estaciones de servicio.
- D. Margen comercial a clientes de PEMEX, corresponde al margen comercial ponderado a estación de servicio, menos el IVA, menos el margen comercial a la estación de servicio. Se puede entender el margen comercial como “un porcentaje del precio final al consumidor y este tipo de porcentaje varía al tipo de estación de servicio. Se reconocen tres categorías por el tamaño y el tipo: dos estrellas, tres estrellas y tres estrellas con alto mantenimiento, cuya diferencia radica en el cumplimiento de los aspectos de imagen y servicio; los márgenes comerciales corresponden a un 5.7% más variable de calidad 0.22%” (Altamonte, 2004).
- E. Mermas del precio público ponderado, se calcula como un porcentaje (0.74%) del precio al público sin cuota, menos el IVA y el margen comercial a la estación de servicio.
- F. Precio ponderado de ingreso a PEMEX, el precio de ingreso de PEMEX, “este se puede obtener a través de la información publicada acerca del valor de las ventas internas de productos petrolíferos y gas natural dividido por el volumen de ventas internas de produc-

⁶ Op. cit., 9.

tos petrolíferos y gas natural, cada uno llevados a pesos por litro” (Altamonte, 2004).

La Gráfica 9 muestra la conformación del precio de la gasolina Magna en pesos por litro.

Gráfica 9. Precio gasolina Magna



Fuente: Elaboración propia con datos del Sistema de Información Energética

Hasta 2003, la conformación del precio de la gasolina estaba dominada por el Impuesto Especial sobre Producción y Servicios (IEPS) con la finalidad de que generara ingresos para la nación. A partir del 2005 se observa una reducción del IEPS, a tal grado que a finales del año su recaudación fue nula. En 2006 el impuesto se transformó en subsidio por el diferencial de los precios internos respecto a los externos, éste llegó a ser de \$3.59 por litro en julio del 2008.

De enero de 2008 a junio de 2009 se esperaba que el precio de la gasolina Premium se incrementara en 2 centavos mensuales por litro hasta alcanzar un aumento de 36 centavos por litro; la Magna 2.44 centavos por litro mensual hasta obtener una variación acumulada de 43.92 centavos por litro y el diesel 1.66 centavos por litro mensual hasta alcanzar 29.88 centavos por li-

tro al finalizar el periodo. Sin embargo, no sucedió como se tenía previsto, ya que el 27 de septiembre del 2007 el presidente de la República mediante un decreto dejó sin efectos dichas cuotas con la finalidad de propiciar la competitividad en el sector industrial (Reyes, 2009). El decreto perdió su aplicación el 31 de diciembre del mismo año, por lo que a partir del 5 de enero de 2008⁷ entró en vigor lo estipulado por el Congreso.

El modelo de precios mexicano, en contraste con el estadounidense, abre la posibilidad de que un impuesto se torne en un subsidio a favor de los consumidores mexicanos.

Conclusiones y recomendaciones

El término “gasolinazo” se hace presente en los diversos medios de comunicación cuando sube el precio del hidrocarburo, por lo que la mayoría de los ciudadanos deduce que aumentarán de manera generalizada los precios. Esto debido a que su razonamiento considera que al aumentar el precio de la gasolina aumenta el transporte de taxis y colectivos que utilizan gasolina, además de que se incrementará el costo de la producción de bienes y servicios que emplean el carburante como insumo y, en general, por el transporte de bienes y servicios.

Diferentes estudios en diversas latitudes han concluido que la variación del precio de la gasolina tiene efectos, aunque reducidos, en la inflación general y que la demanda de gasolina es inelástica. En esta investigación se generó un modelo de vector de corrección del error (VEC) y autorregresivo (VAR) para contrastar la hipótesis de que el aumento del precio de las gasolinas de bajo y alto octanaje no causa inflación general, en el periodo 2002-2009. Los resultados del modelo permiten concluir que el alza del precio de las gasolinas no genera inflación.

Existe un conjunto de hilos conductores que explican la transmisión del alza de precios de la gasolina a la inflación general. Sin embargo, en México existen tres factores principalmente que impiden dicha propagación, a saber: el reducido gasto de las familias en gasolina (3.7% del gasto total) combinado con la inelasticidad de la demanda de gasolina (al subir el precio de la gasoli-

⁷ Fueron 15 días naturales después de que se dio a conocer en el Diario Oficial de la Federación por lo estipulado en el artículo 6° de las Disposiciones Transitorias de la Ley del Impuesto Especial sobre Productos y Servicios.

na las familias gastan más en este bien porque carece de sustitutos, lo que los lleva a reducir el consumo de otros bienes), el escaso peso de la gasolina como insumo en el proceso productivo (0.18% para bienes intermedios y 0.55% para bienes finales) y, finalmente el más importante, es que el gobierno federal fija los precios de las gasolinas casi independientemente del movimiento de los precios internacionales del petróleo y las condiciones económicas del país, induciendo a la sociedad a derrochar este tipo de energéticos.

Los precios cumplen la función de racionamiento, cuando son altos inducen a los consumidores a reducir sus compras, en contraste, cuando son bajos los invitan a incrementar su consumo. En el caso de los precios de las gasolinas se recomienda que sean las libres fuerzas del mercado las que los determinen, mostrando la evolución de los precios internacionales del petróleo y las condiciones económicas nacionales, de tal manera que reflejen la escasez relativa de la gasolina y se incentive a invertir en eficiencia energética. Asimismo, el gobierno federal dejaría de perder recursos fiscales cuando el IEPS, que es un impuesto, se transforma en subsidio regresivo.

Bibliografía

- Antelo Callisperis, Eduardo; José Abel, Martínez Marden, (1996). "Políticas de precio en el sector hidrocarbúrico". *Revista de Análisis Económico UDAPE*, vol. 14, s/p. Disponible en: <http://www.udape.gov.bo/analisisEconomico/analisis/vol14/art03.pdf>
- Arias, Luis G; Víctor M. Guerrero, (1982). Un Estudio Econométrico de la Inflación en México 1970 - 1987. Documento de investigación del Banco de México, núm. 65, 61 p. Disponible en: <http://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-discursos/publicaciones/documentos-de-investigacion/banxico/%7BC5FE975B-BDBB-70F5-05A7-8A63BC863351%7D.pdf>.
- Cuevas Ahumada, Víctor M. (2008). "Inflación, crecimiento y política macroeconómica en Brasil y México: una investigación empírica". *EconoQuantum*, vol. 4, núm. 2. pp. 35-78. Disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=125013217003>.
- Cupé, Clemente Ernesto (2003). "Efecto passthrough de la depreciación sobre la inflación y términos de intercambio internos en Bolivia". *Revista de Análisis Económico UDAPE*, vol. 18, s/p. Disponible en: <http://www.udape.gov.bo/AnalisisEconomico/analisis/vol18/art06.pdf>.
- Dirección de Investigaciones Económicas y Políticas de Largo Plazo (DIEP) (2008). *Identificación de las causas de la inflación en el Ecuador*, Banco Central del

- Ecuador, Ecuador. Disponible en: http://www.bce.fin.ec/documentos/PublicacionesNotas/Notas/Inflacion/IdentificacionCausasInflacionEcuador_08_2008.pdf.
- Esquivel, Gerardo; Raúl Razo, (2002). "Fuentes de inflación en México, 1989-2000: un análisis multicausal de corrección de errores, *Colmex*, núm. 12, s/p. Disponible en: http://revistas.colmex.mx/resultados_busqueda.jsp?numero=302&scope=12.
- Galindo, Luis Miguel (2002). *Estimación y especificación de un modelo econométrico para evaluar las consecuencias de un impuesto verde a la gasolina*, Facultad de Economía, UNAM, México. pp. 1-4. Disponible en: www.undp.org/cu/eventos/instruverdes/Analisis%20de%20escenarios%20economicos.pdf.
- _____. *et. al.*, (2004). "El proceso de urbanización y el crecimiento económico en México", *Estudios Demográficos y Urbanos*. El Colegio de México, vol. 19, núm. 2. pp. 289-312. Disponible en: http://revistas.colmex.mx/revistas/11/art_11_407_4127.pdf.
- _____; Carlos Guerrero, (2000). "Los determinantes del nivel de precios en México: un enfoque heterodoxo". *Revista de Economía Política* vol. 20, núm. 4, octubre-diciembre. pp. 83-101. Disponible en: <http://www.rep.org.br/pdf/80-6.pdf>.
- _____. *et. al.* (2007). "Modelo econométrico dinámico y estable de la tasa de inflación en México con bandas de probabilidad". *Revista Comercio Exterior*, vol. 57, núm. 8, pp. 618-631.
- Haro López, Rubén; José Luís Ibarrola Pérez (2000). "Cálculo de la elasticidad precio de la demanda de gasolina en la zona fronteriza norte de México". *Gaceta de Economía ITAM*, año 6, no. 11, s/p. Disponible en: <http://gacetadeeconomia.itam.mx/Administracion/N11ARubén%20Alejandro%20Haro%20López%20y%20José%20Luis%20Ibarrola%20Pérez.pdf>.
- Ibarra Salazar, Jorge; Lidia Sotrés Cervantes, (2008). "La demanda de gasolina en México. El efecto en la frontera norte". *Revista Frontera Norte*, vol. 20, núm. 39, s/p. Disponible en: http://aplicaciones.colef.mx:8080/fronteranorte/articulos/FN39/5-F39_La_demanda_de_gasolina_en_Mexico.pdf.
- Iraheta, Manuel; Medina, Miguel y Carlos Blanco (2008). *Impacto del incremento de los precios del petróleo y los combustibles en la inflación de Centroamérica y República Dominicana*, Consejo Monetario Centroamericano, Secretaría Ejecutiva, San José, Mayo, pp, 48. Disponible en: http://www.secmca.org/INVESTIGACIONES_ECONOMICAS/InvestigacionesSECMCA/ImpactoPrecios-PetroleoyCombustiblesInflacion%20v3.pdf.
- Jemio, Luís Carlos; Ernesto, Cupé Clemente (1996). "Modelo de evaluación de impactos en precios". *Revista de Análisis Económico UDAPE*, vol. 14, s/p. Disponi-

ble en: <http://www.udape.gov.bo/analisisEconomico/analisis/vol14/art01.pdf>.

Loría, Eduardo; Jorge Ramírez, Javier Galán (2009). "La política monetaria y la inflación al revés, conferencia presentada en el Encuentro Internacional de la Asociación Keynesiana Brasileña". Septiembre de 2009. Disponible en <http://www.ppge.ufrgs.br/akb/encontros/2009/58.pdf>.

Mendoza G., Miguel Ángel (2005). "La sustitución de gasolina y el precio del petróleo en México 1988-2003". *Revista Comercio Exterior*, vol. 55, núm. 5, pp. 432-439.

Reyes, Tepach M. (2009). *Análisis de los precios y de los subsidios a las gasolinas y el diesel en México, 2007-2009*, Servicios de Investigación y Análisis; Centro de Documentación, Información y Análisis, Cámara de Diputados LX Legislatura. Disponible en: www.diputados.gob.mx/cedia/sia/se/SE-ISS-01-09.pdf.

Ruiz, Juan (2004). "Causas y consecuencias de la evolución reciente del precio del petróleo". Munich Personal Repec Archive, Banco de España. España, núm. 471. Disponible en: http://mpr.a.ub.uni-muenchen.de/431/1/MPRA_paper_431.pdf.

Urbina Hinojosa, Silvia (2001). "Un modelo de inflación para la economía mexicana, 1994, 2001", *Análisis Económico*, vol. XVI, núm. 34, s/p. Disponible en: <http://www.analysiseconomico.com.mx/pdf/3404.pdf>.

Yacamán, Jesús Marcos (1982). *Un Análisis de la Inflación en México*. Documento de investigación del Banco de México, núm. 48. pp. 20. Disponible en: <http://www.banxico.org.mx/dyn/documents/%7B3949894B-C03C-04A7-931E-36C6AE2AFD82%7D.pdf>.

Anexo Estadístico Modelo VEC y VAR

Modelo VEC

VEC Residual Heteroskedasticity Tests: No Cross Terms (only levels and squares)						
Sample: 2002M07 2009M08						
Included observations: 83						
Joint test:						
Chi-sq	df	Prob.				
98.73501	84	0.1298				
Individual components:						
Dependent	R-squared	F(14,68)	Prob.	Chi-sq(14)	Prob.	
res1*res1	0.313174	2.214724	0.0156	25.99343	0.0259	
res2*res2	0.089288	0.476203	0.9383	7.410889	0.9177	
res3*res3	0.25151	1.632116	0.0927	20.87537	0.1049	
res2*res1	0.190573	1.143572	0.3384	15.81753	0.3246	
res3*res1	0.29522	2.034572	0.0275	24.50326	0.0398	
res3*res2	0.210198	1.292678	0.2351	17.44641	0.2332	

El modelo VEC dado un nivel de significancia del 5% no presenta problemas de heterocedasticidad, así como tampoco problemas de autocorrelación serial de primer orden o superior.

VAR Residual Serial Correlation LM Tests		
Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Sample: 2002M07 2009M08		
Included observations: 72		
Lags	LM-Stat	Prob
1	7.619591	0.5729
2	5.636843	0.7756
3	18.26193	0.0323
4	8.871222	0.4492
5	8.90676	0.4459
6	5.763235	0.7634
7	7.067554	0.6301
8	9.013713	0.436
9	19.12794	0.0241
10	9.861587	0.3618
11	8.684012	0.4669
12	30.50682	0.0004

Probs from chi-square with 9 df.

Mode-lo VAR

VAR Residual Heteroskedasticity Tests: No Cross Terms (only levels and squares)						
Sample: 2002M07 2009M08						
Included observations: 72						
Joint test:						
Chi-sq	df	Prob.				
71.24352	72	0.503				
Individual components:						
Dependent	R-squared	F(12,59)	Prob.	Chi-sq(12)	Prob.	
res1*res1	0.207608	1.288176	0.2498	14.94779	0.2443	
res2*res2	0.12999	0.734612	0.7122	9.359307	0.672	
res3*res3	0.096599	0.525727	0.8895	6.955095	0.8606	
res2*res1	0.126121	0.709591	0.736	9.080736	0.696	
res3*res1	0.126929	0.714793	0.7311	9.138855	0.691	
res3*res2	0.201071	1.237403	0.2804	14.47709	0.2713	

El modelo VAR dado un nivel de significancia del 5% no presenta problemas de heterocedasticidad, así como tampoco problemas de autocorrelación serial de primer orden o inferior de orden 8.

VEC Residual Serial Correlation LM Tests		
Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Sample: 2002M07 2009M08		
Included observations: 83		
Lags	LM-Stat	Prob
1	10.63462	0.3016
2	5.651173	0.7743
3	8.732662	0.4623
4	7.066428	0.6302
5	8.889121	0.4476
6	17.0553	0.0479
7	3.323867	0.9501
8	2.965251	0.9657
9	10.9784	0.2772
10	3.468792	0.9428
11	3.859919	0.9204
12	31.97352	0.0002
Probs from chi-square with 9 df.		

Estocástica

FINANZAS Y RIESGO



Red para el análisis de riesgos financieros

Convocatoria abierta

La revista Estocástica: finanzas y riesgo, invita a someter para su posible publicación artículos originales de investigación. Estocástica es una publicación semestral cuyo objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera. Promueve la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas, en las siguientes líneas temáticas:

- ❖ Administración y análisis de riesgos financieros.
- ❖ Análisis y modelado del entorno financiero y económico.
- ❖ Diseño de instrumentos financieros.
- ❖ Econometría financiera.
- ❖ Finanzas computacionales.
- ❖ Finanzas conductuales con métodos cuantitativos.
- ❖ Finanzas matemáticas.
- ❖ Ingeniería financiera.
- ❖ Innovación financiera.
- ❖ Mercados financieros.
- ❖ Modelado del comportamiento de instrumentos derivados.
- ❖ Modelado financiero.
- ❖ Modelado matemático de riesgos.
- ❖ Modelos de regulación financiera.
- ❖ Procesos estocásticos aplicados a las finanzas.
- ❖ Teoría financiera.
- ❖ Valuación de activos financieros

Además de las líneas mencionadas se recibirán aportaciones afines, conforme a los lineamientos editoriales que aparecen en la página electrónica del departamento de administración de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco <http://estocastica.azc.uam.mx>. Los trabajos serán sometidos a dictaminación y aquellos aprobados serán programados para su publicación.

Los trabajos se recibirán en la siguiente dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Informes en el teléfono: 5318-9454 ext. 157 ó 154.

En el momento de someter a consideración un artículo, se entenderá que el autor otorga su autorización para que éste sea publicado en la revista Estocástica: finanzas y riesgo, de circulación impresa y electrónica. Asimismo, liberará de toda responsabilidad a la Universidad Autónoma Metropolitana de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que se considere con derecho sobre el artículo, respondiendo por la autoría y originalidad del mismo, asumiendo todas las consecuencias jurídicas y económicas si esto no fuera de su creación.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

Estocástica: finanzas y riesgo will consider for possible publication articles written in Spanish or English, provided they contain unpublished work. *Estocástica* is published twice a year and its objective is to contribute to developing knowledge in the areas of finance, risk management and modeling and financial engineering. *Estocástica* promotes communication of original research results, either theoretical or empirical, related to the study and practice of the above mentioned disciplines and the following research lines:

- ❖ Financial risk analysis and management
- ❖ Financial instruments design
- ❖ Financial and economic analysis and modeling
- ❖ Financial econometrics
- ❖ Computational finance
- ❖ Mathematical finance
- ❖ Behavioral finance applying quantitative methods
- ❖ Financial engineering
- ❖ Financial innovation
- ❖ Financial markets
- ❖ Derivative products modeling
- ❖ Financial modeling
- ❖ Risk mathematical modeling
- ❖ Financial regulation modeling
- ❖ Stochastic processes applied to finance
- ❖ Financial theory and assets valuation

In addition to these research lines, closely related original manuscripts will be accepted according to the editorial guidelines published in the web site of the Departamento de Administración, of the Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco: <http://estocastica.azc.uam.mx>. Research papers will be reviewed by an experts' panel and those accepted will be scheduled for publication.

Manuscripts should be sent to estocastica@azc.uam.mx. Further information may be obtained dialing 5318-9454 ext. 157 or 154.

Authors grant, by sending a research work for review and possible publication, the legal authorization to *Estocástica: finanzas y riesgo* for publishing it in print and electronic formats. In addition, authors will be fully responsible for any legal acts pursued by third parties questioning the authorship and originality of their research work freeing the Universidad Autónoma Metropolitana of any legal or economic responsibility associated to such claims.

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco

DEPARTAMENTO
DE SISTEMAS

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros

