

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Impacto de la captación, el crédito y el acceso a los servicios financieros en la actividad económica en México: Panel dinámico por entidades federativas y sectores económicos

Isela Elizabeth Téllez-León
Francisco Venegas-Martínez
Mauricio Ramírez-Grajeda

Técnicas metaheurísticas de optimización multiobjetivo para resolver el problema del portafolio de inversión

Naim Reyes-Hernández
Antonin Ponsich
Luis Fernando Hoyos-Reyes

Detecting random walk in stock market prices based on Markov chains: Examining The Mexican Stock Market Index

Juan de la Cruz Mejía-Téllez

Un modelo de opciones reales fuzzy y funciones de utilidad isoelásticas para valorar I&D en mercados incompletos

Gastón S. Milanesi

**VOLUMEN 8, NÚMERO 2
JULIO - DICIEMBRE 2018**

Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro

Unidad Azcapotzalco

Secretaría de la Unidad en funciones de rectora

Mtra. Verónica Arroyo Pedroza

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Lic. Miguel Pérez López

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Jesús Manuel Ramos García

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División

Dr. Saúl Jerónimo Romero

Dirección de este número

Dra. María G. Henaine-Abed

Dra. Marissa R. Martínez-Preece

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo

Consejo Editorial

Dr. Onésimo Hernández-Lerma

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV,
Instituto Politécnico Nacional.

Cd. de México, México

Dr. Francisco Venegas-Martínez

Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional,

Cd. de México, México

Dr. Edgar Ortiz

Facultad de Ciencias Políticas y Sociales,
Universidad Nacional Autónoma de México,

Cd. de México, México

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade

Departamento de Ingeniería Eléctrica,

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dra. Patricia Saavedra-Barrera

Departamento de Matemáticas,

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Francisco López-Herrera

Facultad de Contaduría y Administración,

Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Dan Rosen

Facultad de Ciencias Aplicadas e Ingeniería

Universidad de Toronto,

Toronto, Canadá

Dr. Diego Agudelo-Rueda

Área de Mercados Financieros,

Universidad EAFIT

Medellín, Colombia

Dr. Roberto J. Santillán-Salgado

EGADE Business School

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de
Monterrey

Campus Monterrey,

Monterrey, Nuevo León, México

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine-Abed

Departamento de Sistemas,

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Editora

Dra. Marissa R. Martínez-Preece

Departamento de Administración,

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Coeditor

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo

Departamento de Ciencias Básicas,

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 8, número 2
julio - diciembre 2018

Estocástica: finanzas y riesgo es una revista académica de acceso abierto, especializada en finanzas, dirigida a investigadores/as y académicos/as interesados/as en el análisis de los riesgos financieros y temáticas relacionadas con éstos, editada semestralmente por la Universidad Autónoma Metropolitana, en versión impresa y electrónica. Todos los artículos son sometidos a arbitraje bajo la modalidad doble ciego, los cuales pueden ser publicados en inglés o español. Su objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ESTOCÁSTICA: FINANZAS Y RIESGO. Volumen 8, número 2, julio–diciembre 2018, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200. México, Ciudad de México; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN e 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed, Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, Ciudad de México; fecha de última modificación: 29 de julio de 2018. Tamaño del archivo: 5.47 MB.

Las opiniones expresadas por los/as autores/as no necesariamente reflejan la postura del/la editor/a de la publicación.

CONTENIDO

Impacto de la captación, el crédito y el acceso a los servicios financieros en la actividad económica en México: Panel dinámico por entidades federativas y sectores económicos

Isela Elizabeth Téllez-León
Francisco Venegas-Martínez
Mauricio Ramírez-Grajeda

109

Técnicas metaheurísticas de optimización multiobjetivo para resolver el problema del portafolio de inversión

Naim Reyes-Hernández
Antonin Ponsich
Luis Fernando Hoyos-Reyes

149

Detecting random walk in stock market prices based on Markov chains: Examining The Mexican Stock Market Index

Juan de la Cruz Mejía-Téllez

183

Un modelo de opciones reales fuzzy y funciones de utilidad isoelásticas para valorar I&D en mercados incompletos

Gastón S. Milanesi

205



Impacto de la captación, el crédito y el acceso a los servicios financieros en la actividad económica en México: Panel dinámico por entidades federativas y sectores económicos

Impact of collection, credit and access to financial services on economic activity in Mexico: Dynamic panel by federal entities and economic sectors

Isela Elizabeth Téllez-León*

Francisco Venegas-Martínez**

Mauricio Ramírez-Grajeda***

(Fecha de recepción: 12 de enero de 2018; Fecha de aceptación: 26 de marzo de 2018)

RESUMEN

Se evalúa el impacto de captación, crédito y puntos de acceso financiero sobre la actividad económica de los Estados de la República Mexicana mediante un panel dinámico. Los hallazgos son: que depósitos a la vista con un rezago, depósitos a plazo y de ahorro, y las tarjetas de débito impactan la actividad económica global. El sector primario responde a créditos hipotecarios con un rezago y depósitos a la vista. El secundario responde a depósitos a la vista, a plazo y al crédito hipotecario, todos con un rezago, y a depósitos al ahorro y crédito al consumo. El terciario responde a depósitos a plazo, a la vista y crédito hipotecario, todos con un rezago, y a tarjetas de débito y crédito. Por último se determinan aquellos puntos de acceso financiero que impactan la actividad económica global.

Clasificación JEL: G2, O16, C23

Palabras clave: desarrollo financiero, intermediarios financieros, sectores económicos, datos panel, México.

* Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
tellezelizabeth_2015@yahoo.com

** Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

*** Universidad de Guadalajara
maurmez@yahoo.com.mx

ABSTRACT

This paper assesses the impact of collection, credits and financial access points on the economic activity of each of the States of the Mexican Republic through a dynamic panel data. The findings are that fixed-term deposits, savings deposits, lagged demand deposits accounts, and debit cards impact global economic activity. The primary sector responds to demand deposits accounts and lagged mortgage loans. The secondary sector responds to changes in savings deposits, consumer credit, lagged demand deposits accounts, lagged fixed-time deposits, and lagged credit mortgages. The tertiary sector responds to debit cards, lagged fixed-time deposits, lagged demand deposits accounts, credit cards and lagged mortgage loans. Finally, those financial access points impacting the global economic activity are determined.

JEL Classification: G2, O16, C23

Keywords: *financial development, financial intermediaries, economic sectors, panel data, Mexico.*

Introducción

La captación y el crédito de la banca comercial y de desarrollo y las micro-financieras es tema recurrente en la literatura especializada. Asimismo, Sarma (2008) destaca la importancia de investigar sobre diversos aspectos de la inclusión financiera relacionados con este tema y, particularmente, en lo que respecta a las políticas públicas. Si bien, es cierto que la literatura es amplia en esta materia por países se requiere todavía de un análisis más profundo por entidad federativa.

Existen diferentes aristas de análisis de la inclusión financiera, algunas investigaciones se enfocan en el tema de crédito más que en el ahorro y viceversa. Otros estudios dirigen su atención hacia ambos temas, como será el caso de este documento. La presente investigación tiene como objetivo proporcionar recomendaciones de política pública de ambos temas de la intermediación financiera. La evidencia empírica señala que una mayor inclusión financiera tenderá a contribuir con una mayor tasa de crecimiento real del Producto Interno Bruto (PIB), ya que el acceso a los servicios financieros reduce las restricciones crediticias de la población con menores ingresos e incrementa la cultura del ahorro. Esto tiende a disminuir la desigualdad de ingresos y a dinamizar la actividad de las poblaciones, región o país. Un estudio que toma en cuenta ambas aristas de los servicios financieros, es decir, los depósitos de los hogares en instituciones financieras y cuentas de crédito es analizado en Bebczuk (2008). Este autor estudia la inclusión financiera

de América Latina y el Caribe y encuentra que los microcréditos bien administrados son eficientes en el combate a la pobreza. En este sentido, Dupas y Robinson (2013), señalan la importancia de la realización de depósitos por parte de la población con bajos niveles de ingreso, ya que dichos recursos permiten amortiguar los efectos de las crisis en los hogares. De hecho se han realizado estudios para evaluar la apertura de sucursales bancarias en las zonas rurales no bancarizadas con el objetivo de examinar si dicha inclusión financiera contribuye al crecimiento de una región y, consecuentemente, disminuye la pobreza, véase por ejemplo Burgess y Pande (2005). A nivel agregado, Beck, Demirgüç-Kunt y Levine (2007) encontraron que la pobreza de un país puede variar significativamente por el grado de su desarrollo financiero. Para el caso de México, encontramos estudios sobre la apertura de sucursales y su impacto en la economía de la región en Bruhn y Love (2013) y Ruíz (2013).

Estudios por el lado de la asignación de crédito analizan el problema de asignación de los recursos financieros, subrayando la importancia de colocarlos en los sectores productivos más eficientes, véase, al respecto, Mankiw y Ball (2011). En la misma línea se encuentra los trabajos de Beck, Demirgüç-Kunt, Laeven y Levine (2004), Levine, Loayza y Beck (2000), Kalemli-Ozcan, Papaioannou y Peydró (2010) y Venegas-Martínez y Rodríguez-Nava (2014) que examinan cómo la intermediación financiera acelera el desarrollo y el crecimiento económico porque disminuye las restricciones de empresas pequeñas. Por último, el efecto sobre el crecimiento económico de la intermediación bancaria y el crédito bancario se estudia en Tinoco-Zermeño, Venegas-Martínez y Torres-Preciado (2014).¹

Otras investigaciones sobre el tema se enfocan en la medición de la inclusión financiera, como Demirgüç-Kunt y Klapper (2012), que analizan un conjunto de indicadores como: el ahorro, los préstamos, la realización de pagos y la administración de riesgos. Estos indicadores pertenecen a 148 economías y forman el Global Findex que proporciona información, a través de bases de datos e índices, sobre el uso de los servicios financieros, y el acceso a los mismos. Otro tema estudiado son los beneficios de la intermediación financiera en los programas sociales ya que esto disminuye los costos de dichos programas. En este sentido, Lindert, Linder, Hobbs y

¹ El efecto de los mercados financieros en el crecimiento económico se estudia en Aali-Bujari, Venegas-Martínez y Pérez-Lechuga (2017), y Arestis, Demetriades y Luintel (2001).

de la Brière (2007) analizan el caso de Brasil. Un rubro que es investigado con frecuencia es la inclusión financiera y su papel en la atenuación del ciclo de consumo; véase, por ejemplo, Morduch (1995). Este autor encuentra que la inclusión financiera suaviza los ciclos de ingreso y consumo. Asimismo, Gwartney, Holcombe y Lawson (2006) examinan varios países en desarrollo y encuentran que los hogares no logran suavizar sus ciclos de consumo por la volatilidad del ingreso, lo cual podría atenuarse con el acceso a servicios financieros. De igual manera, Dabla-Norris y Srivisal (2013) encuentran evidencia empírica sobre la disminución de la volatilidad del crecimiento si se incrementa la profundización financiera. Todos estos resultados sugieren que el acceso a los servicios financieros podrían hacer más eficientes las decisiones de consumo, ahorro, inversión y crédito de la población, lo cual es relevante para el diseño de políticas públicas orientadas a mejorar, a través del ahorro, el bienestar de la población con bajos ingresos. Asimismo, Han y Melecky (2013) analizan si la inclusión financiera podría mejorar la estabilidad financiera de un país. Los autores no encuentran evidencia contundente sobre la causalidad, pero señalan que un sector financiero incluyente con los hogares de menores ingresos incrementaría los ahorros, lo que permitiría a dicho sector contar con más recursos, particularmente en tiempos de estrés financiero; sin embargo, señalan que para ello es necesaria una regulación macroprudencial sólida.

Es importante mencionar que en la literatura especializada también se encuentran resultados empíricos en donde: 1) el desarrollo financiero es implicado por el crecimiento económico; 2) el desarrollo financiero no implica desarrollo financiero; y 3) los resultados son ambiguos. Al respecto, Goldsmith (1969: 48) encuentra que en muchos países se puede observar un paralelismo aproximado entre el crecimiento económico y el desarrollo financiero si se consideran períodos de varias décadas, pero destaca que no se puede establecer con confianza la dirección de causalidad, es decir, no es posible establecer si el sector financiero fue responsable de la aceleración del crecimiento económico o viceversa. Asimismo, King y Levine (1993) plantean que el desarrollo financiero es un buen indicador del crecimiento económico pero no un factor causal. Por otro lado, De Gregorio y Guidotti (1995) examinan empíricamente la relación entre el crecimiento económico y el desarrollo financiero en el largo plazo y encuentran que hay una correlación positiva en una muestra grande de países, pero el impacto no es el mismo entre éstos, y el impacto es negativo en los datos del panel para América Latina argumentando que esto se debe a la liberalización financiera en

un entorno regulatorio deficiente. Por último, Beck, Levine y Loayza (2000) encuentran que el vínculo a largo plazo entre el desarrollo de la intermediación financieros y el crecimiento del capital (físico) es débil.

La inclusión financiera en México se encuentra en un proceso gradual si se compara con otros países en desarrollo e incipiente, si se compara con economías industrializadas. La importancia de esta investigación que examina el ahorro y el crédito a través de un panel dinámico, yace en un análisis profundo por estado (entidad federativa) de la República Mexicana y por tipo de actividad económica, lo cual permitirá identificar y focalizar esfuerzos, a través de políticas públicas, en las regiones y actividades más rezagadas.

La presente investigación estima un modelo dinámico de datos panel que permite examinar la captación y el crédito por estado y tipo de actividad económica. Se identifican los puntos de acceso más empleados por estado. Entre las variables asociadas a la captación que se emplean para la estimación del modelo se encuentran: las cuentas de cheques; cuentas de ahorro; cuentas de nómina; depósitos a plazo; tarjetas de débito; depósitos de ahorro; y depósitos a la vista. Mientras que las variables asociadas al crédito son: tarjetas de crédito; crédito hipotecario; crédito grupal; crédito al consumo; y el crédito a la vivienda. Los puntos de acceso financiero estudiados son: la banca comercial; la banca de desarrollo; las cooperativas; micro-financieras; corresponsales; cajeros y terminales punto de venta.

En la primera sección se presentan, brevemente, las principales características económico-demográficas de los estados de la República Mexicana, es importante aclarar que la información sobre las series de estudio se presenta hasta el año en el cual los datos para todas las entidades de la República Mexicana están completos y disponibles. Por esta razón, en ocasiones, el último año disponible es 2010, dependiendo del tipo de información. Cuando se tuvo la oportunidad de contar con datos recientes se aclara en cada Gráfica y Cuadro. Entre las características que se examinan para cada estado de la República Mexicana se encuentran: el porcentaje de hombres y mujeres, el porcentaje de hogares, el tamaño promedio de un hogar (número de personas), porcentaje de la población en situación de pobreza, esperanza de vida, porcentaje de analfabetas, porcentaje de unidades económicas que identifican a la policía estatal en el rango de efectiva y el porcentaje de los beneficiarios por el Programa Oportunidades (Programa social del gobierno mexicano para disminuir la pobreza), la participación de cada estado en el PIB, la participación de financiamiento recibido, el número de sucursales, los créditos al consumo e hipotecarios otorgados. En la segunda sección se

presenta la metodología econométrica, la cual consiste en la estimación de un panel dinámico en el periodo 2010-2012. Desafortunadamente, sólo en este periodo se obtuvo información por estado para todas las variables en estudio. En la tercera sección se analizan y discuten los resultados empíricos obtenidos sobre la inclusión financiera, tanto por el lado del ahorro como por el del crédito (oferta y demanda de recursos financieros). Así mismo se muestra cuáles son los puntos de acceso financiero estadísticamente significativos que impactan a la actividad económica por tipo de sector económico a través de la información de los estados de la República Mexicana. Lo anterior se realiza con la finalidad de proporcionar una serie de medidas de política económica y pública que promuevan la inclusión financiera, lo cual podría contribuir a un círculo virtuoso entre desarrollo financiero, crecimiento económico y bienestar de la población. Por último se presentan las conclusiones y limitaciones de la investigación, y se proporciona un conjunto de recomendaciones en materia de política pública que impulse la inclusión financiera y sus efectos positivos en la población.

1. Características económico-demográficas de los estados

La evidencia internacional y diversos estudios teóricos y prácticos señalan que la inclusión financiera permite activar la economía en un sector o región. Por dicha razón, en esta sección se analizan, brevemente, las características económico-demográficas de los estados de la República Mexicana. A continuación en el Cuadro 1 se observa que Oaxaca es el estado con el mayor número de municipios, 570, mientras que el número mínimo de municipios es 5 y corresponde a Baja California y Baja California Sur. La superficie media de un estado es 62 mil 487 km². La mediana de la población adulta se encuentra alrededor de 71% en un estado representativo. Esto indica que es importante establecer controles en los modelos panel que estimamos, por superficie y población.

Los Cuadros 2 y 3 muestran algunas de las características económico-demográficas de los estados. Es importante destacar que el Estado de México cuenta con la mayor población, le siguen Ciudad de México, Veracruz, Jalisco, Puebla, Guanajuato y Nuevo León.

En los Cuadros 2 y 3 se observa que del total de hogares con jefe y jefa de familia la mayor proporción se encuentra en el Estado de México, Ciudad de México y Veracruz. Los estados con mayor población con educación profesional son: Ciudad de México, Estado de México, Jalisco, Veracruz, Nuevo

Cuadro 1. Características generales de los estados

	Núm_Municipios	SUP_Km ²	Pob_Adulta (% del total)
Media	76.8	62,487.0	70.9
Mediana	48.5	60,218.6	71.1
Máximo	570.0	247,087.4	78.3
Mínimo	5.0	1,477.1	65.7

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de INEGI. Indicadores económicos y demográficos por municipios.

León y Puebla. Asimismo, el porcentaje de hombres y mujeres en cada estado de la República Mexicana es casi simétrico; los estados que concentran el mayor porcentaje de hogares son: Estado de México, Ciudad de México, Veracruz, Jalisco, Puebla, Guanajuato, Chiapas, Nuevo León y Michoacán. El tamaño promedio de un hogar es de cuatro integrantes por estado. Los porcentajes más altos de la población en pobreza se encuentran en Chiapas, Oaxaca, Guerrero y Puebla. La esperanza de vida es alrededor de 75 años. El porcentaje de analfabetas ha cambiado significativamente de 1990 a 2010, éste se ha reducido a poco más de la mitad en la mayoría de los estados. El porcentaje de unidades económicas que identifican a la policía estatal en el rango de efectiva es variado, lo que significa que los estados requieren atender el tema de seguridad, lo que eventualmente crearía condiciones para una mayor profundización financiera. Por último, los estados con mayor porcentaje de familias beneficiadas por el Programa Oportunidades, durante 2010, son Veracruz, Chiapas, Puebla, Estado de México, Oaxaca, Guerrero, Michoacán y Guanajuato.

Por otro lado, en la Gráfica 1, con base en los datos disponibles, se muestra cómo contribuyen los estados al PIB. Los estados que tienen una mayor participación son: Ciudad de México, el Estado de México, Nuevo León, Jalisco, Veracruz, Campeche, Guanajuato, Coahuila, Tabasco, Puebla, Tamaulipas, Sonora, Chihuahua y Baja California. En la Gráfica 2 se muestra la distribución de sucursales bancarias por estado de la República; como era de esperarse, las grandes ciudades presentan un número considerable de sucursales.

Cuadro 2. Características económicas y demográficas de los estados de la República Mexicana

POBLACIÓN, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2000 (HABITANTES)	POBLACIÓN: HOMBRES POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2015 (PORCENTAJE DEL TOTAL DE HOMBRES)	POBLACIÓN: MUJERES POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2015 (PORCENTAJE DEL TOTAL DE MUJERES)	HOGARES POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2010	HOGARES CON JEFA DE FAMILIA, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2010	HOGARES CON JEFE DE FAMILIA, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2010	POBLACIÓN EN HOGARES, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2010 (PORCENTAJE DEL TOTAL DE LA POBLACIÓN EN HOGARES)
15,175,862	14.0	13.9	13.1	12.3	13.4	13.5
Estado de México	Estado de México	Estado de México	Estado de México	Estado de México	Estado de México	Estado de México
8,851,080	7.2	7.5	8.5	10.8	7.7	7.8
Ciudad de México	Ciudad de México	Ciudad de México	Ciudad de México	Ciudad de México	Ciudad de México	Ciudad de México
7,643,194	6.6	6.7	7.0	7.6	6.9	6.8
Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave	Veracruz de Ignacio de la Llave
7,350,682	6.6	6.5	6.4	6.4	6.4	6.5
Jalisco	Jalisco	Jalisco	Jalisco	Jalisco	Jalisco	Jalisco
5,779,829	5.0	5.2	4.9	5.0	4.8	5.2
Puebla	Puebla	Puebla	Puebla	Puebla	Puebla	Puebla
5,486,372	4.7	4.9	4.5	4.4	4.5	4.9
Guajuato	Guajuato	Guajuato	Guajuato	Guajuato	Guajuato	Guajuato
4,796,580	4.4	4.3	4.2	3.7	4.5	4.3
Chiapas	Chiapas	Chiapas	Nuevo León	Michoacán de Ocampo	Nuevo León	Chiapas
4,653,458	4.3	4.1	3.8	3.5	4.0	4.1
Nuevo León	Nuevo León	Nuevo León	Chiapas	Oaxaca	Chiapas	Nuevo León
4,351,037	3.8	3.8	3.8	3.4	3.8	3.9
Michoacán de Ocampo	Michoacán de Ocampo	Michoacán de Ocampo	Michoacán de Ocampo	Nuevo León Ocampo	Michoacán de Ocampo	Michoacán de Ocampo
3,801,962	3.3	3.4	3.3	3.2	3.3	3.4
Oaxaca	Oaxaca	Oaxaca	Oaxaca	Baja California	Oaxaca	Oaxaca
3,406,465	3.1	3.0	3.2	3.2	3.2	3.0
Chihuahua	Chihuahua	Chihuahua	Chihuahua	Chihuahua	Chihuahua	Guerrero
3,388,768	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1	3.0
Guerrero	Baja California	Guerrero	Tamaulipas	Guerrero	Tamaulipas	Chihuahua
3,268,554	3.0	2.9	3.0	3.1	3.0	2.9
Tamaulipas	Tamaulipas	Tamaulipas	Baja California	Chiapas	Baja California	Tamaulipas
3,155,070	2.9	2.8	2.9	3.0	2.8	2.8
Baja California	Guerrero	Baja California	Guerrero	Tamaulipas	Guerrero	Baja California
2,767,761	2.5	2.4	2.5	2.6	2.7	2.5
Sinaloa	Sinaloa	Sinaloa	Coahuila de Zaragoza	Sonora	Coahuila de Zaragoza	Sinaloa
2,748,391	2.5	2.4	2.5	2.6	2.5	2.4
Coahuila de Zaragoza	Sonora	Coahuila de Zaragoza	Sinaloa	Sinaloa	Sinaloa	Coahuila de Zaragoza
2,665,018	2.5	2.4	2.5	2.3	2.5	2.4
Hidalgo	Coahuila de Zaragoza	Hidalgo	Sonora	Hidalgo	Sonora	Hidalgo

2,662,480	Sonora	2.4	Hidalgo	2.4	Sonora	2.4	Hidalgo	2.4	Sonora
2,585,518	San Luis Potosí	2.3	San Luis Potosí	2.2	San Luis Potosí	2.3	San Luis Potosí	2.3	San Luis Potosí
2,238,603	Tabasco	2.0	Tabasco	2.0	Tabasco	2.0	Tabasco	2.0	Tabasco
1,955,577	Yucatán	1.8	Yucatán	1.7	Yucatán	1.8	Yucatán	1.8	Yucatán
1,827,937	Querétaro	1.6	Querétaro	1.7	Querétaro	1.6	Querétaro	1.6	Querétaro
1,777,227	Morelos	1.6	Morelos	1.6	Morelos	1.6	Morelos	1.6	Morelos
1,632,934	Durango	1.5	Durango	1.4	Durango	1.4	Durango	1.4	Durango
1,490,668	Zacatecas	1.4	Quintana Roo	1.3	Zacatecas	1.4	Zacatecas	1.3	Zacatecas
1,325,578	Quintana Roo	1.3	Zacatecas	1.3	Quintana Roo	1.3	Quintana Roo	1.2	Quintana Roo
1,184,996	Aguascalientes	1.1	Aguascalientes	1.1	Tabasco	1.0	Aguascalientes	1.1	Aguascalientes
1,169,936	Tlaxcala	1.0	Tlaxcala	1.1	Aguascalientes	1.0	Nayarit	1.1	Tlaxcala
1,084,979	Nayarit	1.0	Nayarit	1.0	Nayarit	0.9	Aguascalientes	1.0	Nayarit
822,441	Campeche	0.8	Campeche	0.7	Campeche	0.7	Campeche	0.7	Campeche
650,555	Colima	0.7	Baja California Sur	0.6	Baja California Sur	0.6	Colima	0.6	Colima
637,026	Baja California Sur	0.6	Colima	0.6	Colima	0.6	Baja California Sur	0.6	Baja California Sur

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de INEGI. Indicadores económicos y demográficos por estado, Censos 2010 y Encuesta Intercensal 2015.

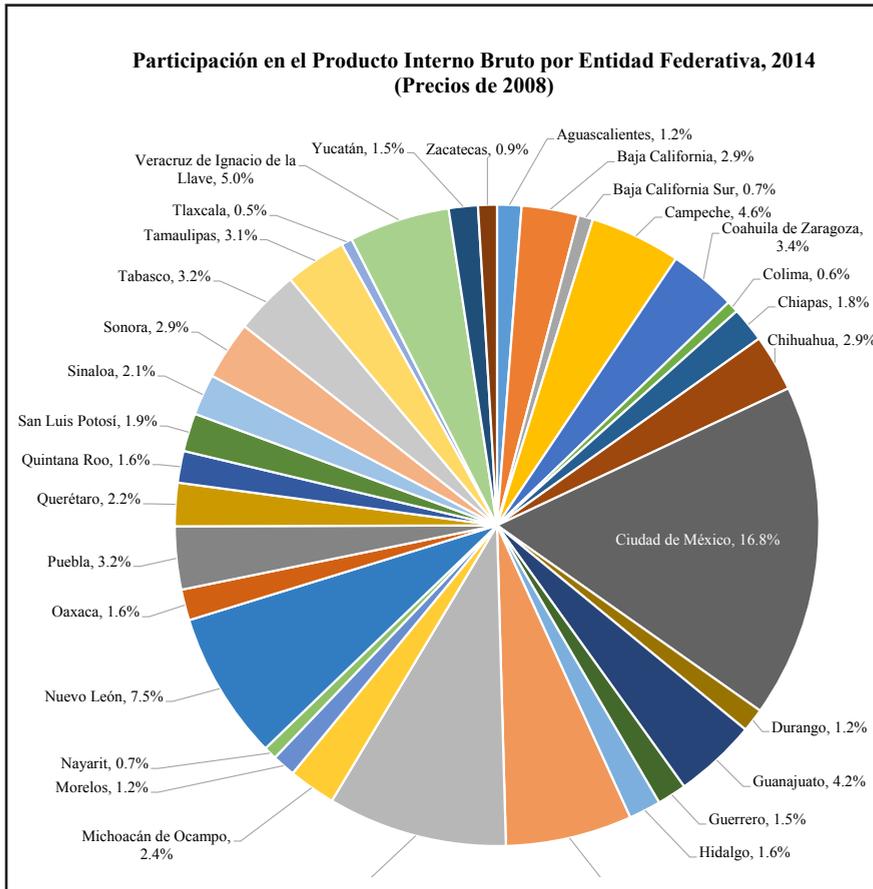
Cuadro 3. Otras características económicas y demográficas de los estados de la República Mexicana

POBLACIÓN EN SITUACIÓN DE POBREZA, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2015	POBLACIÓN DE 18 AÑOS Y MÁS CON NIVEL PROFESIONAL	ANALFABETAS, POR ESTADO DE LA REPÚBLICA, 2010	UNIDADES ECONÓMICAS QUE IDENTIFICA A LA POLICÍA ESTATAL Y CONSIDERA ALGO EFECTIVO O MUY EFECTIVO EL TRABAJO DE LA POLICÍA ESTATAL
(PORCENTAJE DEL TOTAL DE LA POBLACIÓN POR ESTADO)	(PORCENTAJE DEL TOTAL NACIONAL)	(PORCENTAJE DEL TOTAL DE LA POBLACIÓN POR ESTADO)	(PORCENTAJE)
76.2 Chiapas	14.2 Ciudad de México	17.8 Chiapas	84.8 Nuevo León
66.8 Oaxaca	13.1 Estado de México	16.7 Guerrero	76.3 Yucatán
65.2 Guerrero	6.9 Jalisco	16.3 Oaxaca	66.4 Guanajuato
64.5 Puebla	6.0 Veracruz de Ignacio de la Llave	11.4 Veracruz de Ignacio de la Llave	66.0 Aguascalientes
59.2 Michoacán de Ocampo	5.4 Nuevo León	10.4 Puebla	65.8 Querétaro
58.9 Tlaxcala	4.4 Puebla	10.2 Hidalgo	62.2 Colima
58.0 Veracruz de Ignacio de la Llave	3.3 Tamaulipas	10.2 Michoacán de Ocampo	62.0 Nayarit
54.3 Hidalgo	3.3 Guanajuato	9.2 Yucatán	61.7 Zacatecas
52.3 Zacatecas	3.2 Sinaloa	8.3 Campeche	58.3 Baja California Sur
52.3 Morelos	2.9 Chihuahua	8.2 Guanajuato	57.7 Jalisco
49.6 Estado de México	2.8 Baja California	7.9 San Luis Potosí	56.5 Oaxaca
49.6 Tabasco	2.8 Coahuila de Zaragoza	7.1 Tabasco	55.2 Hidalgo
49.1 San Luis Potosí	2.7 Sonora	6.4 Morelos	55.1 Veracruz de Ignacio de la Llave

46.6	Guanajuato	2.7	Michoacán de Ocampo	6.3	Nayarit	54.4	Puebla
45.9	Yucatán	2.5	Chiapas	6.3	Querétaro	52.5	Sinaloa
43.6	Campeche	2.2	Guerrero	5.6	Zacatecas	50.8	San Luis Potosí
43.5	Durango	2.1	Oaxaca	5.2	Tlaxcala	49.9	Baja California
40.5	Nayarit	2.0	San Luis Potosí	5.1	Colima	48.6	Coahuila de Zaragoza
39.4	Sinaloa	1.9	Tabasco	5.0	Sinaloa	48.0	Sonora
37.9	Tamaulipas	1.9	Hidalgo	4.8	Quintana Roo	47.1	Chiapas
35.9	Quintana Roo	1.7	Querétaro	4.4	Estado de México	46.2	Campeche
35.4	Jalisco	1.6	Morelos	4.4	Jalisco	46.1	Tabasco
34.8	Aguascalientes	1.6	Yucatán	3.8	Durango	45.9	Chihuahua
34.4	Chihuahua	1.3	Durango	3.7	Chihuahua	45.9	Quintana Roo
34.3	Colima	1.1	Quintana Roo	3.6	Tamaulipas	45.3	Morelo
34.2	Querétaro	1.1	Aguascalientes	3.3	Aguascalientes	44.3	Durango
30.3	Baja California Sur	1.0	Nayarit	3.2	Baja California Sur	43.7	Tamaulipas
30.2	Coahuila de Zaragoza	1.0	Tlaxcala	3.0	Sonora	43.2	Tlaxcala
29.4	Sonora	1.0	Zacatecas	2.6	Coahuila de Zaragoza	37.0	Michoacán de Ocampo
28.6	Baja California	0.8	Campeche	2.6	Baja California	36.9	Guerrero
28.4	Ciudad de México	0.7	Colima	2.2	Nuevo León	35.7	Ciudad de México
20.4	Nuevo León	0.6	Baja California Sur	2.1	Ciudad de México	25.2	Estado de México

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de INEGI. Indicadores económicos y demográficos por estado, Censos 2010 y Encuesta Intercensal 2015.

Gráfica 1

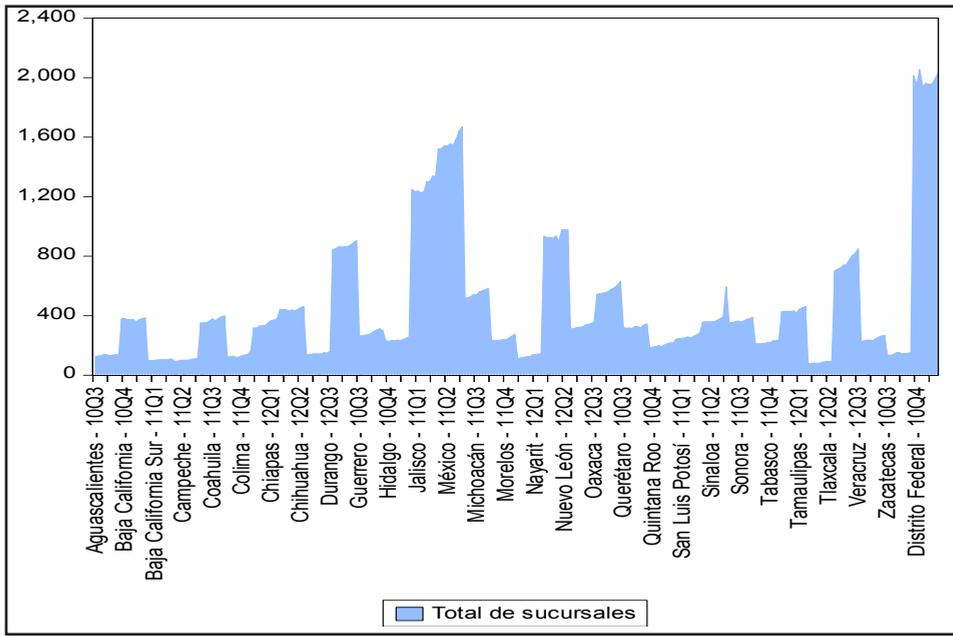


Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos del INEGI.

La Gráfica 3 muestra la concentración del crédito al consumo para cada uno de los estados de la República Mexicana. Sin duda, el crédito por consumo ha crecido en casi todos los estados, en contraste con el crédito hipotecario, véase al respecto la Gráfica 4. Con base en la muestra estudiada se observa que el crédito hipotecario se presenta en algunos estados.

El micro-financiamiento tiene la particularidad de presentarse en aquellos estados que tienen un mayor número de sucursales, véase la Gráfica 5. Aunque, se observan esfuerzos de otras entidades por incrementar los micro-financiamientos, lo cual podría ser una buena recomendación para la

Gráfica 2. Número de sucursales por estado



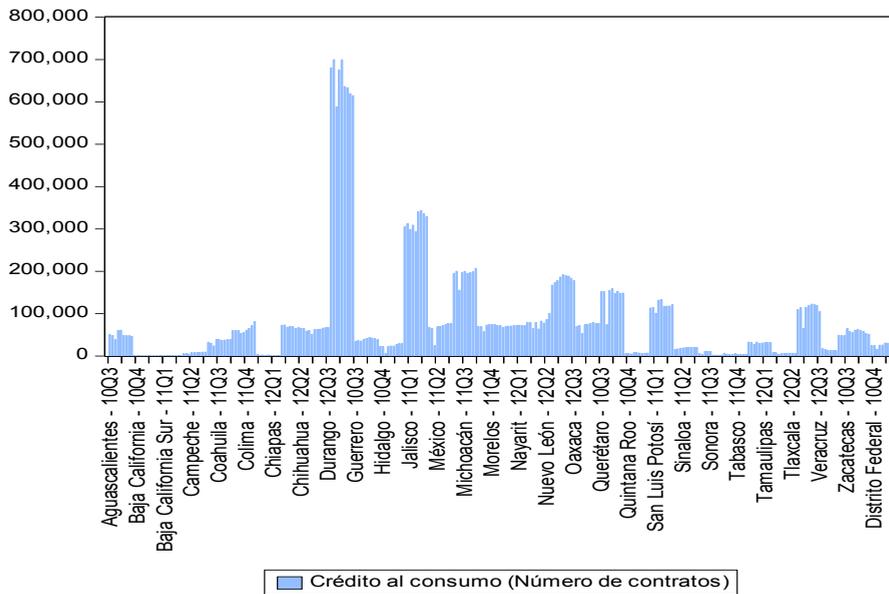
Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV. Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

política pública ya que Dev (2006), señala que el papel que desempeñan las micro-financieras es importante para dinamizar la actividad en zonas en donde los individuos no tienen un colateral encontrándose con restricciones de crédito, aunque también se advierte la importancia de nuevas regulaciones.

Asimismo, Dev (2006) señala que el reto de la inclusión financiera es que el sistema bancario explore posibilidades de negocio y, por compromiso social, genere un mayor otorgamiento de crédito a pequeñas empresas. Por último, la participación del financiamiento recibido de 1994-2011 por municipio permite tener un panorama general de las condiciones económico-financieras de cada estado; en el Apéndice A se muestra la información concerniente a dicha participación.

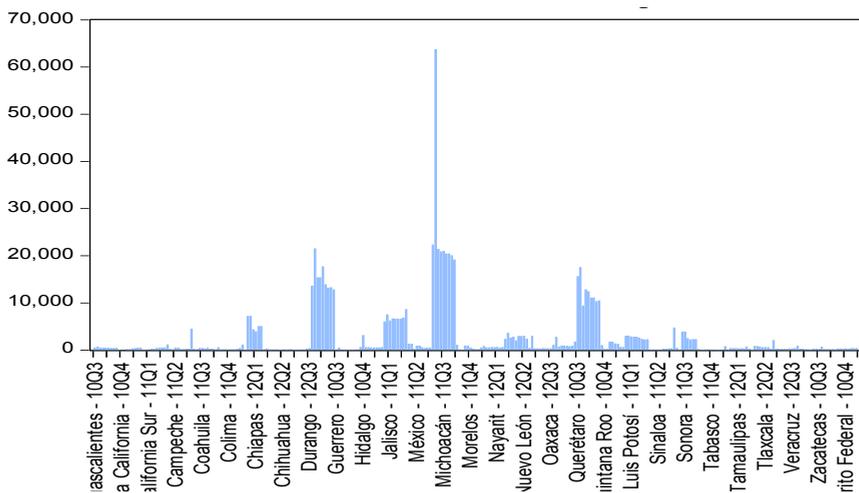
En la siguiente sección se presenta la metodología econométrica de estimación, y el análisis de los resultados empíricos del modelo panel dinámico

Gráfica 3. Número de contratos de crédito al consumo



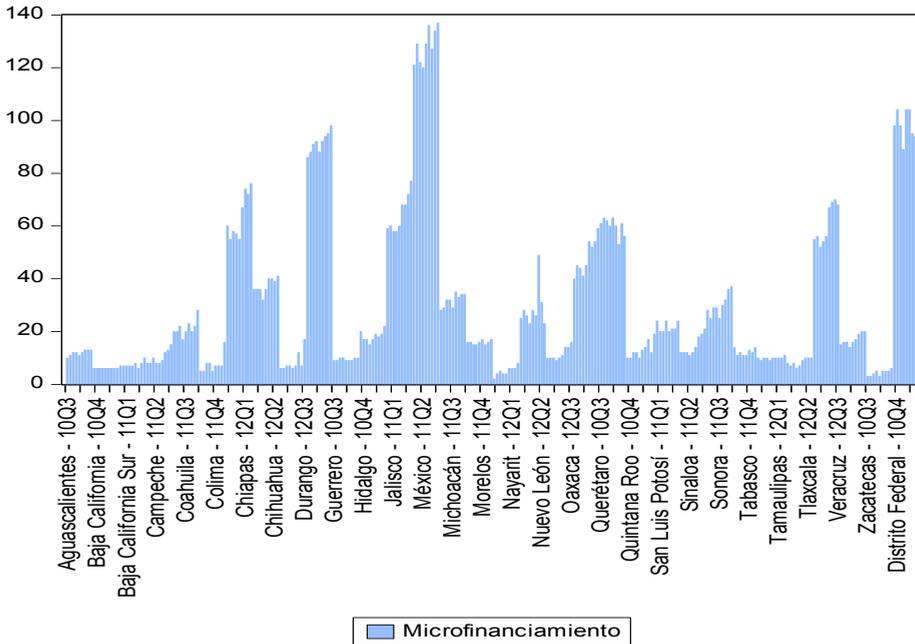
Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV. Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

Gráfica 4. Número de créditos hipotecarios



Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV. Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

Gráfica 5. Microfinanciamiento por entidad federativa



Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV. Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

propuesto para analizar captación, crédito y acceso a los servicios financieros por tipo de actividad económica, con información de los estados de la República durante 2010-2012.

2. Panel Data Dinámico-Sistema GMM²

La mayoría de los datos fueron obtenidos de la página electrónica de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), con excepción del Índice Trimestral de la Actividad Económica Estatal (ITAE) que se consultó en el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). En el Apéndice B se muestran las Gráficas en niveles del ITAE por actividad económica para

² Más detalles sobre los modelos de Panel Data Dinámico se encuentran en Arellano y Bover (1995).

cada uno de los estados de la República. En general se observa una tendencia y cierta variabilidad, por lo que se aplicó una transformación logarítmica a las series con el fin de suavizar dicha variabilidad. La metodología econométrica que se utilizará es la de Arellano y Bond (1991), ya que emplea como instrumentos las diferencias de los rezagos: por lo que también se conoce como *Difference GMM*. No se emplearon las metodologías de Arellano-Bover (1995), porque no se incluyen rezagos en niveles de las variables como instrumentos. En este caso, el modelo propuesto de datos panel dinámico está dado por:

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^P \eta_j Y_{it-j} + X'_{it} \beta + \delta_i + \varepsilon_{it}. \quad (1)$$

Para eliminar el efecto individual en (1) se toma la primera diferencia y la ecuación resultante tiene la siguiente forma:

$$\Delta Y_{it} = \sum_{j=1}^P \eta_j \Delta Y_{it-j} + \Delta X'_{it} \beta + \delta_i + \Delta \varepsilon_{it}, \quad (2)$$

donde la variable explicada, Y_{it} , es el Indicador Trimestral de la Actividad Económica Estatal (ITAE). Dado que el análisis es sectorial se emplea en cada modelo el respectivo ITAE de actividades primarias, secundarias, terciarias o el de servicios de intermediación financiera. Las variables explicativas, X_{it} , son: las cuentas de cheques, cuentas de ahorro, cuentas de nómina, depósitos a plazo, tarjetas de débito, depósitos de ahorro, depósitos a la vista, tarjetas de crédito, crédito hipotecario, crédito grupal, crédito al consumo y el crédito a la vivienda. Para analizar los puntos de acceso más utilizados se considera una especificación similar, sólo que las variables explicativas son: la banca comercial, la banca de desarrollo, las cooperativas, micro-financieras, corresponsales, cajeros y terminales punto de venta.

La estimación de la ecuación (2) es realizada por el Método Generalizado de Momentos (Generalized Method of Moments, GMM) con el *software* econométrico *Stata* 12.0. Esta estimación es eficiente y utiliza diferentes variables explicativas para el período trimestral 2010:03-2012-03. Se incluyó del lado derecho de la ecuación al rezago del ITAE por ser la variable explicada que se emplea como uno de los instrumentos. Esto para resolver pro-

blemas de autocorrelación en los errores y endogeneidad entre las variables explicativas y el ITAEE. El modelo estimado está en diferencias (tasas de crecimiento). En la siguiente sección se presentan el resultado de las estimaciones y la interpretación de los resultados.

3. Análisis de los resultados estimados

A continuación se realiza un análisis de los resultados de la estimación del modelo propuesto. En primer lugar, en el Cuadro 4 se presentan 15 especificaciones del modelo panel dinámico que corresponden al análisis para las variables que reflejan captación según los datos de la CNBV. Los primeros tres modelos corresponden a las variables de captación con respecto del ITAEE global. En estos modelos se observa que los resultados son similares cuando se controla por superficie y población. La interpretación de los resultados de la especificación (2) que controla por población adulta es que un aumento de 1% en los depósitos a plazo incrementa en 0.1% el crecimiento del ITAEE global, y el efecto del rezago en un periodo de la variable explicativa mencionada es de 0.2%. Asimismo un incremento del 1% en tarjetas de crédito aumenta 0.2% el crecimiento del ITAEE global. Los depósitos de ahorro controlando por población adulta no presentan un impacto estadísticamente significativo sobre el ITAEE global. Sin embargo, para el ITAEE secundario sí. En efecto, si se incrementan los depósitos al ahorro 1% en el ITAEE secundario, entonces se presentaría un crecimiento adicional de 0.02%. Los depósitos a la vista en el ITAEE global y en el terciario presentan efectos estadísticamente significativos y positivos. También cuando el ITAEE se rezaga un periodo se presentan mayores efectos en el ITAEE presente, aunque la dirección del signo depende del control aplicado.

El Cuadro 5 muestra el efecto del crédito al consumo, del crédito hipotecario y de las tarjetas de crédito sobre la actividad económica. El crédito hipotecario tiene un efecto positivo sobre el ITAEE global, tanto en la variable presente como en la rezagada. Las tarjetas de crédito son un caso especial porque presentan un efecto negativo sobre el ITAEE global en el periodo t , pero no en $t-1$ presentándose un efecto positivo. Al interior de los sectores, se observa que las tarjetas de crédito en $t-1$ y el crédito hipotecario influyen positivamente sobre el ITAEE primario. Mientras que para el crédito al consumo, las tarjetas de crédito en $t-1$ y el crédito hipotecario en $t-1$ tienen un impacto positivo sobre el ITAEE secundario. El ITAEE terciario sólo presenta efectos positivos de las variables de crédito rezagadas un periodo. Por

Cuadro 4. Análisis de la captación

Instrumentos	Litace			litace_Primary			
	SupKM2 (1)	Pob. adulta (2)	Pob. total (3)	SupKM2 (4)	Pob. adulta (5)	Pob. total (6)	SupKM2 (7)
Depósitos a plazo	0.0883*** (0.0271)	0.0923*** (0.0331)	0.0869** (0.0357)	0.4032 (0.2757)	-1.0044*** (0.2863)	-1.0161*** (0.3027)	0.0996 (0.1223)
Tarjetas de Débito	0.0658*** (0.0254)	0.1630*** (0.0611)	0.1547** (0.0634)	-0.5734 (0.3512)	-0.6381*** (0.2201)	-0.6545*** (0.2178)	-0.8234*** (0.2279)
Depósito al ahorro	-0.0081** (0.0033)	0.0019 (0.0034)	0.0032 (0.0030)	0.1344** (0.0607)	-0.0274 (0.0185)	-0.0316* (0.0189)	-0.0121 (0.0179)
Depósito a la vista	0.0217*** (0.0045)	0.0234*** (0.0040)	0.0249*** (0.0042)	-0.3598*** (0.1365)	0.0242 (0.0569)	0.0392 (0.0614)	-0.0632 (0.0429)
Depósitos a plazo (-1)	0.1269*** (0.0283)	0.2385*** (0.0510)	0.2436*** (0.0532)	-1.1691*** (0.3172)	-1.0898*** (0.3652)	-1.1353*** (0.3573)	0.0601 (0.1002)
Depósito a la vista (-1)	0.0141*** (0.0034)	0.0150*** (0.0022)	0.0139*** (0.0022)	-0.0904** (0.0433)	-0.1610*** (0.0615)	-0.1720*** (0.0602)	0.0789*** (0.0232)

litaee_Secundario		litaee_Terciario			litaee_Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente		
Pob. adulta	Pob. total	SupKM2	Pob. adulta	Pob. total	SupKM2	Pob. adulta	Pob. total
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
0.3466**	0.3579**	-0.0659**	-0.1772***	-0.1894***	-0.1489***	-0.1163**	-0.1391***
(0.1632)	(0.1651)	(0.0279)	(0.0662)	(0.0683)	(0.0553)	(0.0485)	(0.0496)
-0.3645***	-0.3452***	0.0231	0.0519*	0.0542*	-0.0539	-0.0409	-0.0258
(0.0964)	(0.0959)	(0.0586)	(0.0278)	(0.0297)	(0.1559)	(0.1233)	(0.1281)
0.0209*	0.0219	-0.0102***	-0.0101**	-0.0098**	0.0076	0.0122	0.0070
(0.0115)	(0.0142)	(0.0030)	(0.0046)	(0.0042)	(0.0130)	(0.0140)	(0.0159)
0.0202	0.0224	0.0281***	0.0256**	0.0254**	-0.0263	-0.0396	-0.0322
(0.0217)	(0.0225)	(0.0083)	(0.0122)	(0.0116)	(0.0350)	(0.0316)	(0.0379)
-0.0688	-0.0654	0.0077	0.0942**	0.1108***	0.2859***	0.1644	0.1719
(0.2327)	(0.2511)	(0.0252)	(0.0424)	(0.0394)	(0.0810)	(0.1539)	(0.1601)
0.0513***	0.0518***	0.0155***	0.0193***	0.0176***	-0.0187***	-0.0111	-0.0104
(0.0130)	(0.0122)	(0.0047)	(0.0067)	(0.0060)	(0.0068)	(0.0164)	(0.0172)

La estimación se realizó con el Método Generalizado de Momentos (GMM). *, ** y *** representan significancia estadística al 10, 5 y 1%. En paréntesis se encuentran los errores estándar.

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV, Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

Cuadro 5. Análisis del crédito

Instrumentos	litace			litace_Primary			
	SupKM2 (1)	Pob. adulta (2)	Pob. total (3)	Sup_KM2 (4)	Pob. adulta (5)	Pob. total (6)	SupKM2 (7)
							Panel
Tarjetas de Crédito	-0.0206*** (0.0042)	-0.0182*** (0.0036)	-0.0183*** (0.0036)	0.0863* (0.0488)	0.0397 (0.0665)	0.0441 (0.0722)	0.0084 (0.0209)
Crédito Hipotecario	0.1437*** (0.0265)	0.1367*** (0.0181)	0.1374*** (0.0181)	-3.0807*** (0.2115)	-3.1718*** (0.3066)	-3.1645*** (0.3213)	-0.4785*** (0.1008)
Crédito al consumo	0.0061 (0.0039)	0.0031 (0.0059)	0.0018 (0.0058)	-0.1347*** (0.0318)	-0.1406*** (0.0491)	-0.1564*** (0.0558)	0.0636*** (0.0204)
Tarjetas de Crédito (-1)	0.0194*** (0.0055)	0.0222*** (0.0060)	0.0235*** (0.0061)	0.1747*** (0.0471)	0.2281*** (0.0566)	0.2211*** (0.0598)	0.1269*** (0.0161)
Crédito Hipotecario (-1)	0.0814*** (0.0126)	0.0533*** (0.0140)	0.0478*** (0.0126)	2.4515*** (0.1624)	2.5215*** (0.2374)	2.5072*** (0.2445)	0.4909*** (0.0805)
Crédito al consumo (-1)	-0.0183*** (0.0040)	-0.0202*** (0.0043)	-0.0207*** (0.0047)	0.0183 (0.0267)	-0.0086 (0.0307)	0.0037 (0.0333)	-0.0959*** (0.0197)

litaee_Secundario		litaee_Terciario			litaee_Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente		
Pob. adulta (8)	Pob. total (9)	SupKM2 (10)	Pob. adulta (11)	Pob. tota (12)	SupKM2 (13)	Pob. adulta (14)	Pob. total (15)
de crédito							
-0.0046 (0.0195)	-0.0059 (0.0220)	-0.0083 (0.0110)	-0.0043 (0.0123)	-0.0037 (0.0124)	0.1219*** (0.0105)	0.1533*** (0.0173)	0.1640*** (0.0174)
-0.3788*** (0.0845)	-0.3806*** (0.0903)	-0.0939*** (0.0306)	-0.0515 (0.0494)	-0.0581 (0.0505)	0.2632*** (0.0743)	0.1277*** (0.0469)	0.1088** (0.0530)
0.0643** (0.0269)	0.0601** (0.0305)	0.0075 (0.0048)	-0.0005 (0.0069)	0.0003 (0.0069)	-0.0106 (0.0117)	-0.0555* (0.0325)	-0.0883** (0.0352)
0.1198*** (0.0162)	0.1265*** (0.0167)	0.0677*** (0.0118)	0.0613*** (0.0096)	0.0622*** (0.0098)	0.0497*** (0.0113)	0.0324 (0.0257)	0.0500* (0.0282)
0.4342*** (0.0716)	0.4198*** (0.0713)	0.1955*** (0.0269)	0.1597*** (0.0198)	0.1616*** (0.0209)	0.2243*** (0.0549)	0.2448*** (0.0626)	0.2378*** (0.0575)
-0.0921*** (0.0189)	-0.0948*** (0.0188)	0.0501*** (0.0113)	0.0607*** (0.0144)	0.0581*** (0.0147)	0.0230** (0.0063)	0.0438** (0.0208)	0.0346 (0.0228)

La estimación se realizó con el Método Generalizado de Momentos (GMM). * ** y *** representan significancia estadística al 10, 5 y 1%. En paréntesis se encuentran los errores estándar.

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV, Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

último, el ITAEE de servicios de intermediación financiera se ve afectado positivamente por todos los tipos de créditos analizados, excepto por el crédito al consumo en t .

En el Cuadro 6 se presentan los resultados de la estimación del modelo panel dinámico considerando tanto variables de captación como de crédito. El modelo que controla por la población adulta indica que las variables que tienen un efecto positivo y estadísticamente significativo sobre el ITAEE global son: las tarjetas de débito, los depósitos al ahorro (los cuales no resultaban estadísticamente significativos en el análisis que considera sólo la captación), depósitos a la vista en $t-1$, crédito hipotecario en t y $t-1$ y el crédito al consumo en $t-1$. Lo anterior indica que las variables tanto de captación como de crédito tienen, en términos generales, influencia sobre la actividad económica global. Si se consideran los tipos de sectores, los depósitos al ahorro tienen un efecto negativo sobre el ITAEE primario. Esto es un indicativo de que los depósitos a la vista son los que se deberían impulsar porque un aumento de 1% en los depósitos a la vista aumentan 0.7% el crecimiento del ITAEE primario. Los depósitos a la vista muestran un efecto positivo sobre el ITAEE primario y terciario. Además, los depósitos a la vista en $t-1$ tienen un efecto positivo sobre todos los sectores, excepto el sector primario y el de servicios de intermediación financiera. La tarjeta de débito y la de crédito tienen un efecto positivo sobre el ITAEE terciario; no obstante, la tarjeta de crédito es la única de éstas que impacta positivamente al ITAEE de servicios de intermediación financiera.

Asimismo, el Cuadro 6 muestra un indicativo de cuál es el sector que requiere de intermediación financiera para captación o crédito. Se observa que el sector primario presenta efectos positivos de incrementos en los depósitos a la vista. Las reacciones negativas se observan ante cambios en variables de crédito. No obstante, se puede observar que un incremento del 1% en el crédito hipotecario de $t-1$ incrementa el ITAEE primario en 3.5% si se controla por el tamaño del estado. El sector secundario también responde positivamente al crédito hipotecario de $t-1$ y al crédito al consumo controlando por superficie. Asimismo, el sector secundario responde a los depósitos al ahorro en t , a los depósitos a plazos en $t-1$ y a la vista en $t-1$. El sector terciario presenta respuestas positivas ante el incremento de tarjetas de débito, depósitos a la vista, depósitos a plazo y a la vista en $t-1$, tarjetas de crédito y créditos hipotecarios y al consumo en $t-1$. Por último, en el Cuadro 7, se presentan las variables más importantes en el estudio de la inclusión financiera, los puntos de acceso a los servicios financieros. En general los pun-

tos de acceso financiero, como la banca comercial, los corresponsales y las terminales punto de venta tienen un efecto positivo sobre el ITAEE global.

En el Apéndice C se presentan las pruebas de especificación de Sargan para cada modelo estimado (se probaron 60 especificaciones en total). El estadístico de Sargan indica el valor de la función objetivo GMM en parámetros estimados. El test de Sargan tiene por hipótesis nula que las restricciones sobreidentificadas son válidas, en todos los casos se observa un p -value mayor a 0.05, por lo que no se rechaza la hipótesis nula, lo cual indica que las 60 especificaciones presentadas son correctas. Esto valida las inferencias de los resultados señalados en este artículo.

Conclusiones

En esta investigación se encuentra evidencia empírica de que el acceso a los servicios financieros permite mejorar la dinámica de la actividad económica. Para ello se desarrolló un modelo panel dinámico con variables explicativas para captación, crédito y puntos de acceso a los servicios financieros. Esto con la finalidad de examinar qué lado de la intermediación financiera se requiere impulsar en cada uno de los sectores económicos, así como indagar qué puntos de acceso tienen un mayor efecto positivo sobre la actividad económica; el modelo controló por tamaño de estado y población ocupada.

Este estudio fue motivado por la literatura sobre política pública orientada hacia la inclusión financiera y se mostró, a través de un modelo panel dinámico, qué tipo de intermediación financiera requiere un determinado sector productivo. Esto proporciona elementos esenciales para el diseño de políticas públicas dirigidas hacia un incremento sustancial en inclusión financiera tomando en cuenta el sector que se beneficia. Esto en línea con Mohan (2006), que señala que un mayor crecimiento económico requiere de un sistema bancario que asigne los recursos a las actividades productivas. Señala también el autor que la inclusión financiera se impulsa por una mayor profundización financiera, lo cual es un círculo virtuoso porque un mayor número de créditos permite activar la economía de un sector o una región, lo que a su vez afecta positivamente la tasa de crecimiento de un país.

Del análisis de captación y crédito se observa que el ITAEE del sector primario responde positivamente a aumentos en los depósitos a la vista y al crédito hipotecario de $t-1$. Esto es un indicativo de que las comunidades rurales son adversas al riesgo, porque cuando ahorran prefieren un producto financiero que les devuelva en cualquier momento su ahorro; esto por

Cuadro 6. Comparativo de captación y crédito por tipo de actividad económica

Instrumentos	litace			litace_Primary			
	lsupKM2 (1)	Pob adulta (2)	Pob total (3)	lsupKM2 (4)	Pob adulta (5)	Pob total (6)	lsupKM2 (7)
	Panel de capta						
Dep. a plazo	0.0426*** (0.0145)	0.0126 (0.0165)	0.0207 (0.0192)	-0.0750 (0.1814)	-0.5525** (0.2764)	-0.5406** (0.2411)	-0.0596 (0.1395)
Tarj_Débito	0.0423 (0.0261)	0.0620* (0.0341)	0.0557* (0.0306)	-0.5089** (0.2334)	-0.6075 (0.3707)	-0.7169* (0.3730)	-0.0643 (0.1749)
Dep al ahorro	0.0059 (0.0072)	0.0166*** (0.0044)	0.0152** (0.0066)	0.0156 (0.0912)	-0.3415** (0.1618)	-0.3428** (0.1533)	0.0366 (0.0571)
Dep.a la vista -	0.0152 (0.0127)	-0.0039 (0.0079)	-0.0137 (0.0177)	0.0277 (0.1806)	0.7235** (0.2860)	0.7144*** (0.2531)	-0.0892 (0.0989)
Dep.plazo(-1)-	0.0100 (0.0188)	0.0158 (0.0159)	0.0256 (0.0207)	-0.2149 (0.1594)	-0.6712** (0.2675)	-0.6788** (0.2796)	0.0172 (0.0879)
Dep.vista (-1)	0.0260*** (0.0088)	0.0177*** (0.0052)	0.0118** (0.0057)	0.0612 (0.0491)	0.0739 (0.0732)	0.0741 (0.0713)	0.0696 (0.0494)
Tarj.Crédito	0.0255* (0.0154)	-0.0002 (0.0111)	0.0064 (0.0195)	0.2419 (0.1860)	-0.4943* (0.2627)	-0.4600** (0.2155)	0.0334 (0.1394)
Crédito_Hip .	0.0357 (0.0376)	0.0869** (0.0408)	0.0803 (0.0527)	-3.7261*** (0.4057)	-3.9244*** (0.6430)	-3.8233*** (0.6140)	-0.5902*** (0.2194)
Crédit_cons	0.0022 (0.0076)	-0.0183 (0.0150)	-0.0124 (0.0175)	-0.0944** (0.0446)	0.1069 (0.0779)	0.1170 (0.0819)	0.1564*** (0.0577)
Crd. Hip. (-1)	0.1105*** (0.0291)	0.1277*** (0.0239)	0.1060*** (0.0240)	3.4582*** (0.3200)	2.4283*** (0.4030)	2.4224*** (0.4288)	0.9806*** (0.2012)
Crd.Cons.(-1)-	0.0148 (0.0103)	-0.0199** (0.0099)	-0.0091 (0.0110)	-0.0317 (0.0313)	0.0086 (0.0624)	0.0134 (0.0622)	-0.0871** (0.0425)

litaec_Secundario		litaec_Terciario			litaec_Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente		
Pob adulta	Pob total	lsupKM2	Pob adulta	Pob total	lsupKM2	Pob adulta	Pob total
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
ción y crédito							
-0.0438	-0.0007	-0.2246***	-0.2418***	-0.2860***	-0.2055***	-0.1501**	-0.1135
(0.1059)	(0.1056)	(0.0377)	(0.0398)	(0.0621)	(0.0674)	(0.0622)	(0.1015)
-0.1422	-0.0519	0.0571**	0.0908**	0.0112	-0.0576	-0.1676***	-0.0825
(0.1014)	(0.1015)	(0.0262)	(0.0375)	(0.0666)	(0.0938)	(0.0421)	(0.0712)
0.0474***	0.0034	-0.0105	-0.0098	0.0092	-0.0734	0.0059	-0.0680*
(0.0118)	(0.0222)	(0.0081)	(0.0060)	(0.0176)	(0.0535)	(0.0198)	(0.0411)
-0.0188	-0.0251	0.0243	0.0505***	0.0027	0.1525	0.0074	0.0974
(0.0272)	(0.0582)	(0.0151)	(0.0090)	(0.0327)	(0.1177)	(0.0328)	(0.1064)
0.2451**	0.1197*	0.1049***	0.2796***	0.2037***	-0.2297***	-0.2378***	-0.2118***
(0.1054)	(0.0716)	(0.0387)	(0.0266)	(0.0578)	(0.0759)	(0.0625)	(0.0980)
0.0571**	0.0537**	0.0150**	0.0248***	0.0032	0.0178	-0.0048	0.0178
(0.0256)	(0.0269)	(0.0071)	(0.0088)	(0.0129)	(0.0196)	(0.0140)	(0.0137)
-0.0042	0.0496	0.0267**	0.0094	0.0239	0.0292	0.1197***	0.0884
(0.0569)	(0.1034)	(0.0105)	(0.0168)	(0.0228)	(0.0982)	(0.0234)	(0.1050)
-0.1778	-0.2778	-0.1102***	-0.2422***	-0.0678	0.1350	0.2799**	0.1271
(0.2295)	(0.2023)	(0.0422)	(0.0765)	(0.1169)	(0.1296)	(0.1362)	(0.0853)
0.0214	0.0619	0.0015	0.0009	-0.0025	-0.0129	-0.0028	0.0069
(0.0327)	(0.0593)	(0.0095)	(0.0179)	(0.0259)	(0.0371)	(0.0359)	(0.0592)
0.6882***	0.7521***	0.3161***	0.3773***	0.4221***	0.5225***	0.2349**	0.5972***
(0.1160)	(0.1276)	(0.0318)	(0.0484)	(0.0835)	(0.1107)	(0.0980)	(0.1373)
-0.1082***	-0.0779***	0.0152*	0.0239	0.0135	0.0368	0.0497**	0.0542*
(0.0286)	(0.0278)	(0.0083)	(0.0163)	(0.0167)	(0.0233)	(0.0235)	(0.0330)

La estimación se realizó con el Método Generalizado de Momentos (GMM). *, ** y *** representan significancia estadística al 10, 5 y 1%. En paréntesis se encuentran los errores estándar.

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV. Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

Cuadro 7. Puntos de acceso financiero más empleados

Instrumentos	litaee			litaee_Primary			
	SupKM2 (1)	Pob adulta (2)	Pob total (3)	SupKM2 (4)	Pob adulta (5)	Pob total (6)	SupKM2 (7)
Panel de acceso a los							
Banca Comercial	-0.1410*** (0.0435)	0.1216*** (0.0449)	-0.1038** (0.0503)	3.2563*** (0.7037)	-2.6363*** (0.7221)	3.5614*** (0.8601)	-0.8710*** (0.2403)
Cooperativas	0.0001 (0.0004)			0.0170 (0.0112)			0.0010 (0.0028)
Microfinancieras			-0.0303*** (0.0067)	-0.0357*** (0.0128)		-0.1965* (0.1088)	0.4498** (0.1825)
Corresponsales	0.0303*** (0.0111)	0.0160*** (0.0065)	-0.0053 (0.2456)	0.7003*** (0.0300)	0.1027*** (0.1486)	0.1760 (0.1015)	-0.0649 (0.0154)
Cajeros		-0.0905** (0.0387)			2.3338*** (0.5871)		
Terminales Punto de Venta	-0.0239 (0.0651)		-0.1239 (0.1101)	0.4647 (1.5544)		4.2309*** (1.5502)	-0.8055 (0.7796)
Banca Comercial (-1)			0.0500 (0.0337)			4.8541*** (0.5081)	
Cooperativas(-1)				-0.0010 (0.0010)			0.0101** (0.0051)
Microfinancieras(-1)	0.0016 (0.0163)	-0.0406*** (0.0096)	-0.0295*** (0.0102)	-1.0746*** (0.2090)	-0.3679*** (0.0867)	-0.7195*** (0.1885)	0.2541*** (0.0800)
Corresponsales(-1)			0.0157*** (0.0032)			-0.0414 (0.0442)	
Cajeros(-1)	0.0121 (0.0448)		0.0813 (0.0595)	-0.4599 (0.5161)		-0.7370 (1.3241)	-0.0456 (0.2505)
Terminales Punto de Venta (-1)	-0.0604 (0.0694)	0.1209** (0.0594)	-0.0653 (0.0781)	-2.1532* (1.2935)	-1.8901*** (0.5768)	-0.8554 (1.5170)	-0.3334 (0.6067)

La estimación se realizó con el Método Generalizado de Momentos (GMM). *, ** y *** representan significancia estadística al 10, 5 y 1%. En paréntesis se encuentran los errores estándar.

litaee_Secundario			litaee_Terciario		litaee_Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente		
Pob adulta	Pob total	SupKM2	Pob adulta	Pob total	SupKM2	Pob adulta	Pob total
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
servicios financieros							
-0.1575	-0.4998***	-0.0084	-0.9228***	-0.1510	-0.4016*	-0.4637*	0.1879
(0.3673)	(0.1639)	(0.0719)	(0.1085)	(0.0923)	(0.2153)	(0.2654)	(0.3558)
		-0.0006			-0.0019		
		(0.0007)			(0.0017)		
	-0.1464**	-0.0122		-0.0764***	-0.0388***		-0.0083
	(0.0567)	(0.0416)		(0.0235)	(0.0141)		(0.0398)
0.0738***	0.1062*	0.0259**	0.0881***	0.0379***	-0.0555	0.0610***	-0.0766**
(0.0589)	(0.0105)	(0.0062)	(0.0103)	(0.0423)	(0.0083)	(0.0334)	
0.2175			0.1611***			-0.9481***	
		(0.0666)			(0.0765)		
	0.6687	0.2369***		0.1415	-0.5778**		-0.3448
	(0.8716)	(0.0664)		(0.0859)	(0.2463)		(0.3529)
	0.2397			0.8002***			1.1496***
(0.4264)			(0.0899)			(0.3166)	
		0.0023			0.0000		
	(0.0021)			(0.0006)			
0.0830*	0.2059***	-0.0096	-0.0893***	0.0000	-0.0864**	0.0439	-0.0347
(0.0428)	(0.0695)	(0.0098)	(0.0191)	(0.0104)	(0.0370)	(0.0328)	(0.0471)
	-0.0534**			-0.0576***			0.0847***
(0.0238)			(0.0065)			(0.0233)	
	-0.2320	-0.0794*		-0.1256**	-0.5387***		-0.2514
	(0.2614)	(0.0421)		(0.0558)	(0.1992)		(0.2950)
0.2806	0.1034	0.3511***	0.5054***	0.2280***	0.0603	-0.3178**	0.6731***
(0.2836)	(0.7007)	(0.0737)	(0.0437)	(0.0672)	(0.1453)	(0.1460)	(0.2416)

Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de CNBV, Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

previsión de liquidez ante una eventualidad en sus cosechas. Además, se observa que el crédito hipotecario rezagado un periodo dinamiza la actividad tanto en el sector primario como en el secundario. En tanto que, en el sector secundario se prefieren los depósitos al ahorro en t , los depósitos a plazos y a la vista en $t-1$. Esto indica que son preferidos los rendimientos altos de dichos depósitos (ahorro y plazo). No obstante, los agentes de este sector tienen aversión al riesgo y una parte la ahorran en depósitos a la vista un periodo antes. Mientras que los agentes en el sector terciario emplean una variedad de servicios financieros como: las tarjetas de débito, depósitos a la vista, depósitos a plazo y a la vista en $t-1$, tarjetas de crédito y los créditos hipotecarios y al consumo en $t-1$. Este sector es el que tiene un mayor acceso a los servicios financieros, tanto por el lado de la captación como por el del crédito, por lo que una política que impulse ambos sería oportuna en este sector.

Se observa también que existe preferencia por los puntos de acceso a los servicios financieros (banca comercial, los corresponsales y las terminales punto de venta) dependiendo del tipo de actividad económica. El sector primario tendría un mayor impacto si se ampliara el acceso a la banca comercial, los cajeros, los corresponsales y las terminales punto de venta. En el sector secundario se tendría un efecto positivo si se accede a micro-financieras. El sector terciario presentaría un efecto positivo por el acceso a servicios financieros como: corresponsales, cajeros y terminales punto de venta. En tanto que el sector de intermediación financiera se beneficiaría con un mayor número de puntos de acceso como: corresponsales y terminales punto de venta. En todos los tipos de actividad económica el uso de corresponsales es positivo, ya que éstos permiten a los bancos brindar servicios de intermediación financiera a sus clientes en más puntos de acceso. Esto es, de hecho, una preferencia internacional. Un estudio que analiza particularmente este punto de acceso financiero se encuentra en Peña y Vázquez (2012).

En resumen, el acceso a los servicios financieros potenciaría la actividad económica en todos los sectores por lo que se requieren políticas públicas orientadas hacia la inclusión financiera, que tomen en cuenta las necesidades concretas de los diversos agentes económicos en cada tipo de actividad económica y en cada estado. Los resultados empíricos de la presente investigación pueden ser útiles para formular propuestas de políticas públicas relacionadas con la planeación y ejecución de programas de inclusión financiera en aquellos estados que cuentan con amplias zonas rurales en donde, principalmente, se realizan actividades del sector primario. El Consejo

Nacional de Inclusión Financiera³ (CONAIF) es el organismo encargado de diseñar e instrumentar la Política Nacional de Inclusión Financiera y sería conveniente que su estrategia de inclusión tomara en cuenta no sólo regiones objetivo, sino también las actividades económicas. En este sentido y dado que el ITAEE del sector primario responde positivamente a incrementos en los depósitos a la vista se entrevé que en los estados con comunidades rurales amplias los individuos que ahorran requieren un producto financiero que les devuelva en cualquier momento su ahorro ante una eventualidad en salud, patrimonio, cosecha, etcétera. Por esta razón, el sector público, la banca comercial y las autoridades financieras, coordinados por el CONAIF, pueden diseñar productos o instrumentos financieros líquidos accesibles a los pobladores del suroeste del país, sobre todo en Guerrero, Oaxaca y Chiapas. Esta oportunidad sería única para la banca para extender e innovar sus productos y servicios, así como participar en políticas públicas de inclusión financiera que al mismo tiempo incentiven el crecimiento del sector primario. Asimismo, se observa que el crédito hipotecario dinamiza la actividad en todos los sectores. En el caso particular del sector primario, el gobierno federal en coordinación con las autoridades financieras y la banca comercial (e incluso la banca de desarrollo) debería diseñar programas accesibles de crédito hipotecario en zonas rurales de Veracruz y Tabasco. Por lo anterior, la actividad económica del sector primario recibiría un impacto positivo si se diseñaran políticas públicas que incentiven y amplíen el acceso a los créditos, los cajeros automáticos, los corresponsales y las terminales punto de venta sobre todo en los estados más pobres que cuentan con extensas zonas rurales, entre los que destacan: Chiapas, Oaxaca, Guerrero, Puebla, Michoacán, Veracruz, Estado de México, Guanajuato y Jalisco. Finalmente, es importante destacar, que cualquier política pública de inclusión financiera debería tener como objetivo lograr que los mexicanos, en todos los estados, obtengan los beneficios que genera el sistema financiero a través de estrategias diseñadas por los sectores público y privado, coordinados por el CONAIF, en un

³ Son miembros del CONAIF, el Secretario de Hacienda y Crédito Público, el Subsecretario de Hacienda y Crédito Público, el Presidente de la Comisión Nacional de Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros, el Presidente de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, el Presidente de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, el Presidente de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, el Secretario Ejecutivo del Instituto para la Protección al Ahorro Bancario, el Tesorero de la Federación, el Gobernador del Banco de México y un Subgobernador del Banco de México.

entorno que incentive el desarrollo y la estabilidad del sistema financiero, lo que podría coadyuvar al desarrollo y crecimiento económicos de México.

Referencias bibliográficas

- Aali-Bujari, A., F. Venegas-Martínez, y G. Pérez-Lechuga (2017). "Impact of the Stock Market Capitalization and the Banking Spread in Growth and Development in Latin American: A Panel Data Estimation with System GMM". *Revista Contaduría y Administración*, vol. 62, núm. 5, pp. 1427-1441.
- Arellano M. y Bond S. (1991). "Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an Application to Employment Equations". *The Review of Economic Studies*, vol. 58, núm. 2 (Apr., 1991), pp. 277-297.
- Arellano M., Bover O. (1995). "Another look at the instrumental variable estimation of error-components models". *Journal of Econometrics*, vol. 68, Issue 1, July 1995, pp. 29-51.
- Arestis, P., P. O. Demetriades, y K. B. Luintel (2001). "Financial Development and Economic Growth: The Role of Stock Markets". *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 33, núm. 1, pp. 16-41.
- Bebczuk, R. N. (2008). "Financial Inclusion in Latin America and the Caribbean: Review and Lessons". Documentos de Trabajo del CEDLAS.
- Beck, T., Demirgüç-Kunt, A., y Levine, R. (2007). "Finance, Inequality and the Poor". *Journal of Economic Growth*, vol. 12, núm. 1, pp. 27-49.
- Beck, T., Demirgüç-Kunt, A., Laeven, L., y Levine, R. (2004). *Finance, Firm Size, and Growth*, No. w10983, National Bureau of Economic Research.
- Beck, T., Demirgüç-Kunt, A., y Levine, R. (2014). *Finance, Firm Size, and Growth*, No. w10983, National Bureau of Economic Research.
- Beck, T. R. Levine, y N. Loayza (2000). "Finance and the Sources of Growth". *Journal of Financial Economics*, vol. 58 núm. 1-2, pp. 261-300.
- Bruhn, M. y Love, I (2013), "The Economic Impact of Expanding Access to Finance in Mexico, en Robert Cull, Asli Demirgüç-Kunt y Jonathan Morduch", eds., *Banking the World: Empirical Foundations of Financial Inclusion*, Cambridge, Mass., Massachusetts Institute of Technology Press, pp. 137-56.
- Burgess, R. y Pande, R. (2005). "Do Rural Banks Matter? Evidence from the Indian Social Banking Experiment". *American Economic Review*, vol. 95 núm. 3 pp. 780-95.
- Dabla-Norris, E. and Srivisal, N. (2013). Revisiting the Link between Finance and Macroeconomic Volatility. IMF Working Papers (13/29).

- De Gregorio, J. y P. E. Guidotti (1995). "Financial Development and Economic Growth". *World Development*. vol. 23, núm. 3, pp. 433-448.
- Demirgüç-Kunt, A., y Klapper, L. F. (2012). "Measuring Financial Inclusion: The Global Findex Database". *World Bank Policy Research Working Paper*. (6025).
- Dev, S. M. (2006). "Financial Inclusion: Issues and Challenges". *Economic and Political Weekly*, pp. 4310-4313.
- Dupas, P. y Robinson, J. (2013). "Savings Constraints and Microenterprise Development: Evidence from a Field Experiment in Kenya". *American Economic Journal-Applied Economics*, 5(1): 163-92.
- Goldsmith, R. (1969). "Financial Structure and Development". Yale University Press, New Haven. USA.
- Gwartney, J., Holcombe, R., y Lawson, R. (2006). "Institutions and the Impact of Investment on Growth". *KYKLOS*, vol. 59, núm. 2, pp. 255-273.
- Han, R. y Melecky, M. (2013). "Financial Inclusion for Financial Stability: Access to Bank Deposits and the Growth of Deposits in the Global Financial Crisis". Washington, DC, Banco Mundial.
- Kalemli-Ozcan, S., E. Papaioannou, y J. L. Peydró (2010). "Financial Regulation, Financial Globalization and the Synchronization of Economic Activity, European Central Bank". *Working Paper Series*, No 1221/July.
- King, R. y R. Levine (1993). "Finance and Growth: Schumpeter Might Be Right". *Quarterly Journal of Economics*, vol. 108, núm. 3, pp. 681-737.
- Levine, R., N. Loayza, y T. Beck (2000). "Financial Intermediation and Growth: Causality and Causes". *Journal of Monetary Economics*, vol. 46, núm. 1, pp. 31-77.
- Lindert, K., Linder, A., Hobbs, J., y de la Brière, B. (2007). "The Nuts and Bolts of Brazil's Bolsa Família Program: Implementing Conditional Cash Transfers in a Decentralized Context", *Social Protection, Working Paper No. 0709*, Washington, DC, Banco Mundial, mayo.
- Mankiw, G. y Ball, L. M. (2011). "Macroeconomics and the Financial System", New York, Worth Publishers.
- Mohan, R. (2006). Economic Growth, Financial Deepening, and Financial Inclusion. Address by Dr Rakesh Mohan, Deputy Governor of the Reserve Bank of India, at the Annual Bankers' Conference 2006, Hyderabad, November 3, 2006.
- Morduch, J. (1995). "Income Smoothing and Consumption Smoothing". *Journal of Economic Perspectives*, vol. 9, núm. 3, pp. 103-114.

- Peña, P. y Vázquez, A. (2012). El Impacto de los Corresponsales Bancarios en la inclusión financiera: una primera evaluación. *Estudios Económicos CNBV*, 1.
- Ruiz, C. (2013). "From Pawn Shops to Banks. The Impact of Formal Credit on Informal Households". *World Bank Policy Research Working Paper 6634*, Washington, DC, Banco Mundial.
- Sarma, M. (2008). "Index of Financial Inclusion". *Indian Council for Research on International Economics Relations*.
- Tinoco-Zermeño, M. A, F. Venegas-Martínez y V. H. Torres-Preciado (2014). "Growth, Bank Credit, and Inflation in Mexico: Evidence from an ARDL-bounds Testing Approach". *Latin American Economic Review*, vol. 23, núm. 1, pp. 1-22.
- Venegas-Martínez, F y A. Rodríguez-Nava (2014). "Is there a Relationship between Financial Development and Economic Growth in Latin American Countries with Higher Per Capita GDP?" *AESTIMATIO International Journal of Finance*, vol. 9, pp. 8-21.

Apéndice A

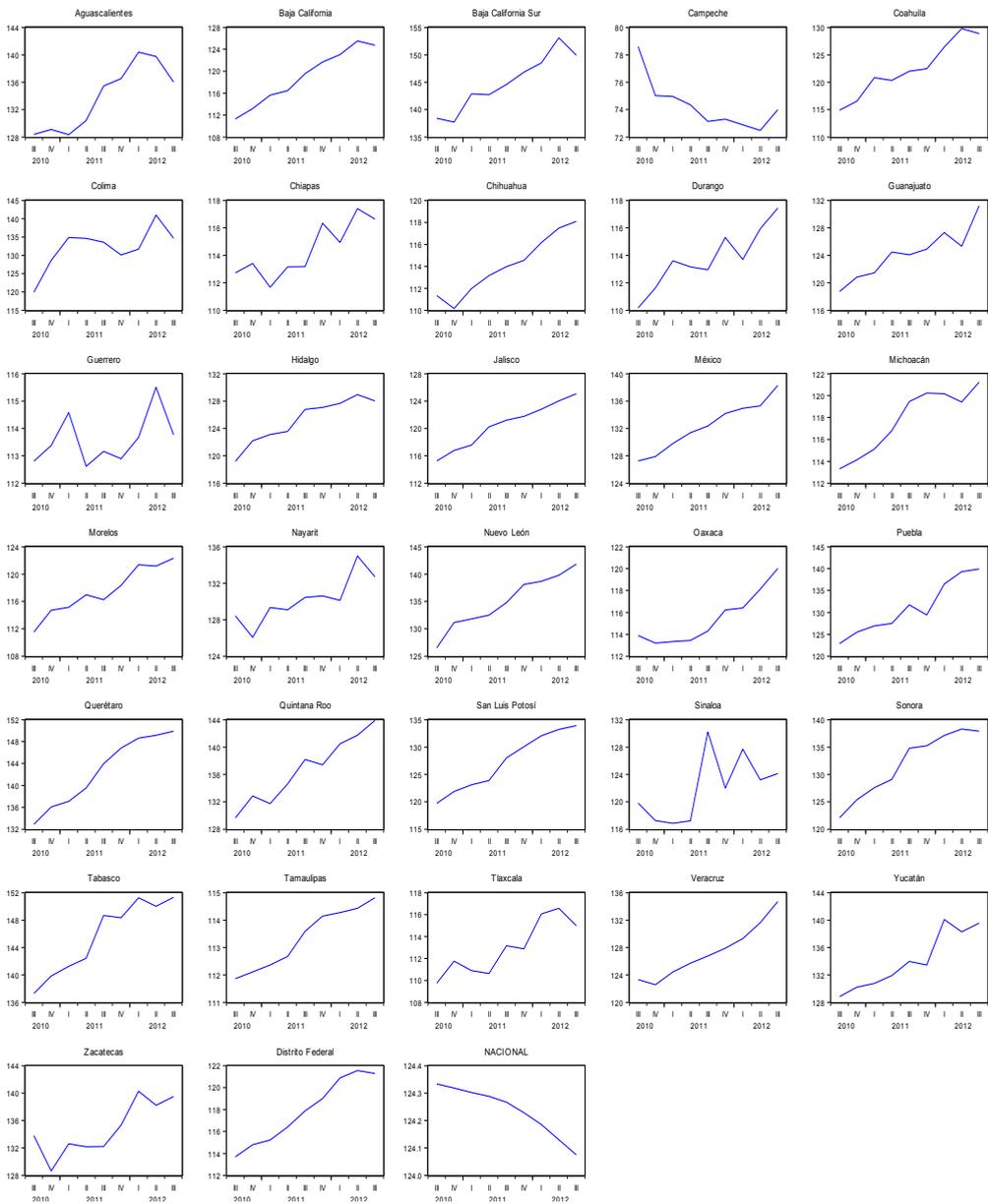
A. Participación del financiamiento recibido de 1994-2011

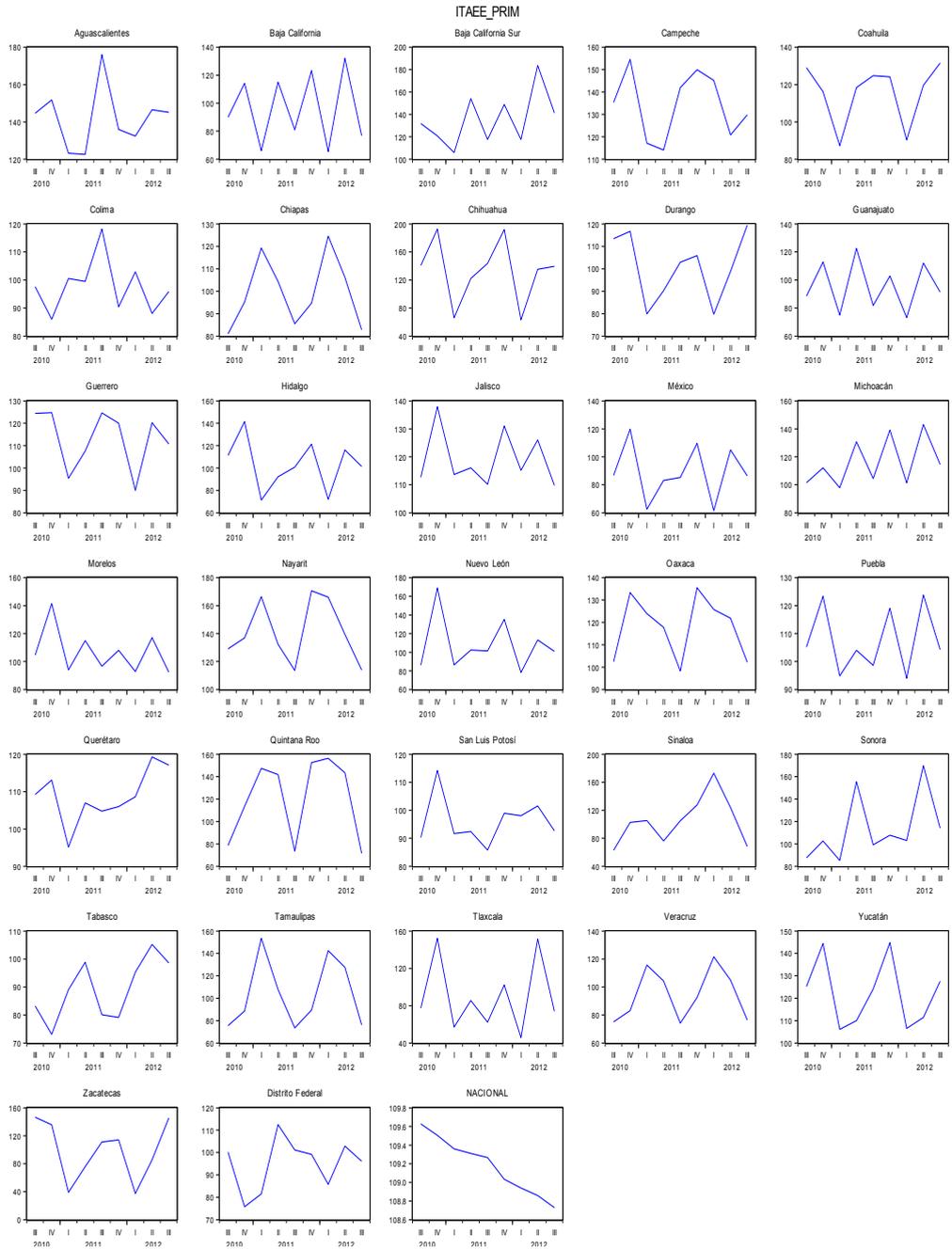
Municipio	Estado	Municipio	Estado	Municipio
2.1 Tijuana	Baja California	0.5 Mazatlán	Sinaloa	0.3 Bahía de Banderas
2.1 Juárez	Chihuahua	0.5 Ahome	Sinaloa	0.2 Xalapa
Tlajomulco de				
1.6 Zúñiga	Jalisco	0.5 Celaya	Guanajuato	0.2 Azcapotzalco
1.6 León	Guanajuato	0.5 Huehuetoca	México	0.2 Tampico
1.5 Mexicali	Baja California	0.5 Chalco	México	0.2 Pesquería
1.3 Apodaca	Nuevo León	0.5 Nuevo Laredo	Tamaulipas	0.2 Chicoloapan
1.3 Benito Juárez	Quintana Roo	0.5 Miguel Hidalgo	Distrito Federal	0.2 Tultepec
1.3 Tecámac	México	0.5 Gustavo A. Madero	Distrito Federal	0.2 Campeche
1.2 Hermosillo	Sonora	0.4 Tuxtla Gutiérrez	Chiapas	0.2 Guadalupe
1.2 Reynosa	Tamaulipas	0.4 Altamira	Tamaulipas	0.2 Coyoacán
1.2 Chihuahua	Chihuahua	0.4 Durango	Durango	0.2 Xochitepec
		Soledad de Graciano		
1.1 Puebla	Puebla	0.4 Sánchez	San Luis Potosí	0.2 Cuautlancingo
1.1 Querétaro	Querétaro	0.4 Tepic	Nayarit	0.2 Monclova
1.1 Mérida	Yucatán	0.4 Ensenada	Baja California	0.2 Cuernavaca
1.0 Culiacán	Sinaloa	0.4 Benito Juárez	Distrito Federal	0.2 El Marqués
1.0 Aguascalientes	Aguascalientes	0.4 La Paz	Baja California Sur	0.2 Manzanillo
	Veracruz de Ignacio de			
1.0 Veracruz	la Llave	0.4 Guadalajara	Jalisco	0.2 Tlalpan
1.0 Torreón	Coahuila de Zaragoza	0.4 Gómez Palacio	Durango	0.2 Gral. Zuazua
1.0 Zapopan	Jalisco	0.4 Irapuato	Guanajuato	0.2 Nicolás Romero
				San Nicolás de los
0.9 Saltillo	Coahuila de Zaragoza	0.4 Cuautitlán	México	0.2 Garza
0.9 Juárez	Nuevo León	0.4 Mineral de la Reforma	Hidalgo	0.2 Iztacalco
0.8 San Luis Potosí	San Luis Potosí	0.4 Emiliano Zapata	Morelos	0.2 Puerto Vallarta
Acapulco de				
0.7 Juárez	Guerrero	0.4 Tizayuca	Hidalgo	0.2 Temixco
0.7 García	Nuevo León	0.4 Pachuca de Soto	Hidalgo	0.2 Salamanca
0.7 Gral. Escobedo	Nuevo León	0.4 Santa Catarina	Nuevo León	0.2 Ramos Arizpe
0.7 Morelia	Michoacán de Ocampo	0.3 Tláhuac	Distrito Federal	0.2 Ciudad Madero
0.7 Zumpango	México	0.3 Tultitlán	México	0.2 Tlalnepantla de Baz
0.6 Iztapalapa	Distrito Federal	0.3 Solidaridad	Quintana Roo	0.2 Kanasín
Ecatepec de			Veracruz de Ignacio de	
0.6 Morelos	México	0.3 Coatzacoalcos	la Llave	0.2 Tapachula
0.6 Matamoros	Tamaulipas	0.3 Nogales	Sonora	0.2 Almoloya de Juárez
0.6 Monterrey	Nuevo León	0.3 Victoria	Tamaulipas	0.2 Acuña
0.6 Tlaquepaque	Jalisco	0.3 Venustiano Carranza	Distrito Federal	0.2 Atizapán de Zaragoza
0.6 Cajeme	Sonora	0.3 San Juan del Río	Querétaro	0.2 Delicias
				Ixtlahuacán de los
0.6 Guadalupe	Nuevo León	0.3 Álvaro Obregón	Distrito Federal	0.2 Membrillos
0.5 Cuauhtémoc	Distrito Federal	0.3 Los Cabos	Baja California Sur	0.2 Piedras Negras
0.5 Toluca	México	0.3 Villa de Álvarez	Colima	0.2 Uruapan

Estado	Municipio	Estado	Municipio	Estado
Nayarit	0.2 Zamora	Michoacán de Ocampo	0.1 Guasave	Sinaloa
Veracruz de Ignacio de la Llave	0.2 Cadereyta Jiménez	Nuevo León	0.1 Nextlalpan	México
Distrito Federal	0.1 Ciénega de Flores	Nuevo León	0.1 Temoaya	México
Tamaulipas	0.1 El Salto	Jalisco	0.1 Atotonilco de Tula	Hidalgo
Nuevo León	0.1 Jesús María	Aguascalientes	0.1 San Pedro Cholula	Puebla
México	0.1 Acolman	México	0.1 Zihuatanejo de	
México	0.1 Colima	México	0.1 Azueta	Guerrero
Campeche	0.1 Río Bravo	Tamaulipas	0.1 Tula de Allende	Hidalgo
			0.1 Carmen	Nuevo León
Zacatecas	0.1 Tala	Jalisco	0.1 Orizaba	Veracruz de Ignacio de la Llave
Distrito Federal	0.1 Yautepec	Morelos	0.1 Lerma	México
Morelos	0.1 Jiutepec	Morelos	0.1 Poza Rica de Hidalgo	Veracruz de Ignacio de la Llave
Puebla	0.1 Navojoa	Sonora	0.1 Cosoleacaque	Veracruz de Ignacio de la Llave
Coahuila de Zaragoza	0.1 Lerdo	Durango	0.1 Nezahualcóyotl	México
Morelos	0.1 Ciudad Valles	San Luis Potosí	0.1 Oaxaca de Juárez	Oaxaca
Querétaro	0.1 Zacatecas	Zacatecas	0.1 Huejotzingo	Puebla
Colima	0.1 Naucalpan de Juárez	México	0.1 Linares	Nuevo León
Distrito Federal	0.1 Metepec	México	0.1 Hidalgo del Parral	Chihuahua
Nuevo León	0.1 Lagos de Moreno	Jalisco	0.1 Cárdenas	Tabasco
México	0.1 San Andrés Cholula	Puebla	San Juan Bautista	
			0.1 Tuxtepec	Oaxaca
Nuevo León	0.1 Nacajuca	Tabasco	0.1 Cuautla	Morelos
Distrito Federal	0.1 Zempoala	Hidalgo	0.1 Atlixco	Puebla
Jalisco	0.1 Tulancingo de Bravo	Hidalgo	0.1 Centla	Tabasco
Morelos	0.1 Córdoba	Veracruz de Ignacio de la Llave	0.1 Cuajimalpa de	
Guanajuato	0.1 Zinacantepec	México	0.1 Morelos	Distrito Federal
Coahuila de Zaragoza	0.1 Calimaya	México	0.1 Frontera	Coahuila de Zaragoza
			0.1 Apizaco	Tlaxcala
Tamaulipas	0.1 Guanajuato	Guanajuato	0.1 San Francisco del	
México	0.1 Boca del Río	Veracruz de Ignacio de la Llave	0.1 Rincón	Guanajuato
			0.1 Santa Cruz	
Yucatán	0.1 Tlaxcala	Tlaxcala	0.1 Xoxocotlán	Oaxaca
Chiapas	0.1 Cuauhtémoc	Chihuahua	0.1 Tuxpan	Veracruz de Ignacio de la Llave
México	0.1 Salinas Victoria	Nuevo León	0.1 Fortín	Veracruz de Ignacio de la Llave
Coahuila de Zaragoza	0.1 Chiapa de Corzo	Chiapas	0.1 La Piedad	Michoacán de Ocampo
			0.1 Zapotlán el Grande	Jalisco
México	0.1 Lázaro Cárdenas	Michoacán de Ocampo	0.1 Valle de Chalco	
Chihuahua	0.1 Ayala	Morelos	0.1 Solidaridad	México
	San Luis Río		0.1 Sabinas	Coahuila de Zaragoza
Jalisco	0.1 Colorado	Sonora		
Coahuila de Zaragoza	0.1 Emiliano Zapata	Veracruz de Ignacio de la Llave		
Michoacán de Ocampo	0.1 Fresnillo	Zacatecas		

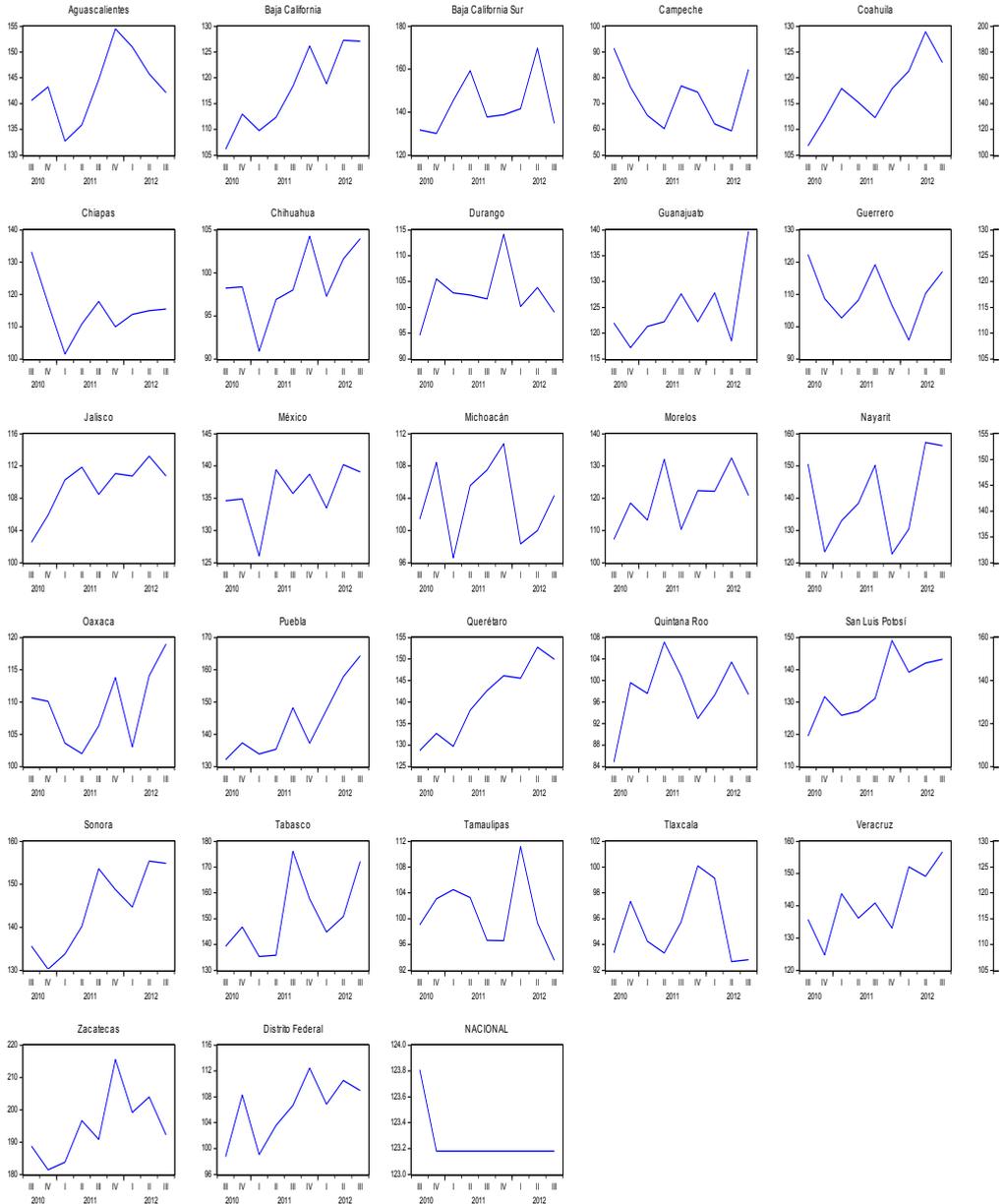
Apendice B.

Gráficas del Índice Trimestral de la Actividad Económica Estatal (ITAE)

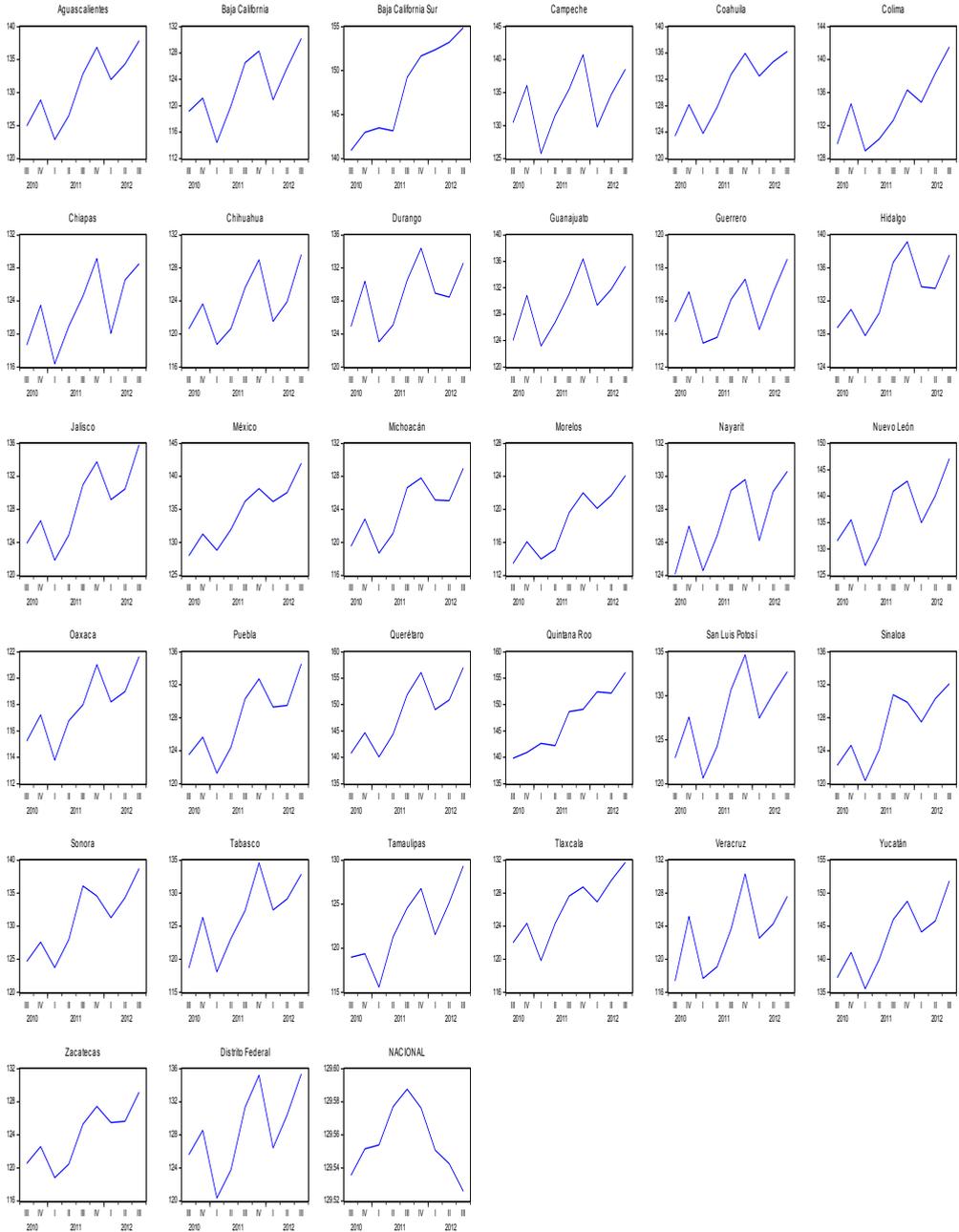




ITAAE_SEC



ITAEE_TERC



Fuente: elaboración propia con base en los datos públicos de INEGI.

Apéndice C: Pruebas de especificación de Sargan

Modelos de captación						
Test por instrumentos y sector	Total	Primario	Secundario	Terciario	Financiero	
1 Sargan statistic	26.0756	21.0471	15.3764	22.9074	23.1181	
Prob(S-statistic)	0.0980	0.2770	0.6360	0.1942	0.1861	
2 Sargan statistic	22.2634	21.0990	16.7291	21.7762	22.3754	
Prob(S-statistic)	0.2205	0.2744	0.5418	0.2421	0.2157	
3 Sargan statistic	22.0516	20.7175	16.5216	21.4020	22.2790	
Prob(S-statistic)	0.2297	0.2939	0.5562	0.2596	0.2198	
Modelos de crédito						
Test por instrumentos y sector	Total	Primario	Secundario	Terciario	Financiero	
1 Sargan statistic	27.9893	23.5073	27.2618	31.1412	24.7197	
Prob(S-statistic)	0.2162	0.4315	0.2450	0.1194	0.3649	
2 Sargan statistic	20.8034	22.5547	26.5603	30.6970	23.2523	
Prob(S-statistic)	0.5931	0.4870	0.2751	0.1304	0.4461	
3 Sargan statistic	21.0074	22.2554	26.7138	30.6693	23.9826	
Prob(S-statistic)	0.5806	0.5049	0.2683	0.1311	0.4048	
Modelos de captación y crédito						
Test por instrumentos y sector	Total	Primario	Secundario	Terciario	Financiero	
1 Sargan statistic	21.6831	29.0037	20.4412	24.0837	16.0000	
Prob(S-statistic)	0.3003	0.0659	0.3685	0.1930	0.6573	
2 Sargan statistic	16.6822	22.1993	21.9882	17.7099	26.0339	
Prob(S-statistic)	0.6735	0.2745	0.3412	0.6065	0.1647	
3 Sargan statistic	12.8876	22.3876	19.7337	17.7233	17.2972	
Prob(S-statistic)	0.8443	0.2654	0.4108	0.5410	0.5697	
Modelos sobre puntos de acceso financiero						
Test por instrumentos y sector	Total	Primario	Secundario	Terciario	Financiero	
1 Sargan statistic	23.7665	22.4143	16.1532	23.9795	14.9312	
Prob(S-statistic)	0.1259	0.1693	0.5130	0.1200	0.6004	
2 Sargan statistic	27.2856	34.7275	19.6146	28.3987	27.2651	
Prob(S-statistic)	0.2440	0.0725	0.6650	0.2011	0.2449	
3 Sargan statistic	17.9812	22.5094	18.9404	17.8042	11.4184	
Prob(S-statistic)	0.3250	0.1275	0.2718	0.3355	0.7830	

Fuente: elaboración propia con datos públicos de la CNBV.
 Indicadores de Inclusión Financiera (2015).

Técnicas metaheurísticas de optimización multiobjetivo para resolver el problema del portafolio de inversión

Metaheuristic techniques of multiobjective optimization to solve the investment portfolio problem

Naim Reyes-Hernández*

Antonin Ponsich**

Luis Fernando Hoyos-Reyes***

(Fecha de recepción: 24 de noviembre de 2017. Fecha de aprobación: 30 de abril de 2018)

RESUMEN

En este trabajo, se presenta bajo una perspectiva metaheurística el problema multiobjetivo para el portafolio de inversión, que debe minimizar el riesgo, y maximizar el rendimiento esperado. Considerando el modelo de Markowitz se resuelve el problema con dos objetivos describiendo la totalidad del frente de Pareto correspondiente. En este trabajo, se emplean cuatro técnicas metaheurísticas: SPO, NSGA-II, MOEA/D y VEGA y se efectúa un análisis comparativo sobre cinco instancias de investigación en mercados financieros de Hong Kong (Hang Sen31), Alemania (DAX85), Gran Bretaña (FTSE89), Estados Unidos de América (S&P98) y Japón (Nikkei225) empleando una base de datos de marzo de 1992 a septiembre de 1997.

Clasificación JEL: C44, C58, C61, G11

Palabras clave: técnicas metaheurísticas, optimización multiobjetivo, portafolio de inversión, frente de Pareto.

* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
naim_my@hotmail.com

** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
aspo@azc.uam.mx

*** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
hrf@azc.uam.mx

ABSTRACT

In this paper, the multiobjective problem for the investment portfolio is presented under a metaheuristic perspective, which refers to minimize de risk and maximize the expected return. Considering the Markowitz model, the problem is solved with two objectives describing the whole of the corresponding Pareto front. Four metaheuristic techniques are used: SPO, NSGA-II, MOEA/D Y VEGA and a comparative analysis is carried out on 5 research instances in financial markets of Hong Kong (Hang Sen31), Germany (DAX85), Great Britain (FTSE89), United States of America (S & P98) and Japan (Nikkei225) using a database from March 1992 to September 1997.

JEL classification: C44, C58, C61, G11

Keywords: *metaheuristic techniques, multiobjective optimization, investment portfolio, Pareto front.*

Introducción

El problema del portafolio de inversión fue estudiado y formulado por Markowitz (1952) quien propuso por primera vez un modelo matemático para este tipo de problemas, se trata de definir un portafolio eficiente, es decir, aquel que tiene un mínimo riesgo para un rendimiento dado o, equivalentemente un portafolio con un máximo rendimiento para un nivel de riesgo dado. Sin duda es una abstracción muy simple pero a la vez útil para empezar a entender las variables de interés y, de hecho, es posible utilizar técnicas de programación cuadrática para encontrar soluciones óptimas. Pero el problema se vuelve complejo cuando se integran ciertas prohibiciones, o reglas del mercado real, sobre los objetivos: el problema de optimización multiobjetivo restringido conlleva al uso de técnicas metaheurísticas. Este aspecto constituye el punto de partida y los objetivos del presente proyecto: implementar y estudiar el desempeño de diferentes técnicas metaheurísticas de optimización multiobjetivo, particularmente Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo para la solución del problema de Portafolio de Inversión. La hipótesis de investigación correspondiente enuncia que los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo representa candidatos prometedores para obtener un conjunto de carteras eficientes, asociadas a diversos compromisos entre los objetivos de rendimiento y de riesgo del portafolio seleccionado.

El presente artículo se organiza como se describe a continuación: en la siguiente sección se proporciona el marco teórico, relacionando el problema de inversión con el área de optimización multiobjetivo. En la sección 2, se incluye el desarrollo de los métodos para la selección de poblaciones no dominadas, así como la descripción de las características y el modo operativo de las metaheurísticas manejadas. La sección 3 presenta la implementación del ajuste de parámetros, se presentan las métricas que se adoptaron. Finalmente, en la sección 4 se presentan la parte experimental de la implementación de los algoritmos con los parámetros ajustados, así como representaciones gráficas del desempeño que permiten interpretar rápidamente los resultados.

1. El problema del portafolio de inversión

Para evaluar la confianza y eficiencia de las técnicas implementadas, existen varios bancos de instancias ya estudiados en la literatura especializada. En este proyecto, se propone trabajar con cinco mercados de capital propuestos en (Beasley 2015), los cuales fueron elegidos debido a que son ampliamente utilizados en la aplicación práctica dentro de la literatura. La información se muestra en la Tabla 1 y fue obtenida a partir de *stocks* de marzo de 1992 a septiembre de 1997.

Para cada instancia se tiene la siguiente información de entrada: rendimiento promedio semanal de cada activo, desviación estándar del rendimiento semanal y matriz de correlación entre activos. Para evaluar las funciones objetivo solo faltan las covarianzas entre activos, las cuales serán calculadas de la siguiente manera:

Tabla 1. Datos utilizados en la investigación (Beasley 2015)

ID	País	Instancia	Tamaño (N)
0	Hong Kong	Hang Seng31	31
1	Alemania	DAX85	85
2	UK	FTSE89	89
3	USA	S&P98	98
4	Japón	Nikkei225	225

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} s_i s_j \quad (1)$$

Donde s_i es la desviación estándar del activo y ρ_{ij} es el índice de correlación entre los activos i y j .

Además se dispone de los frentes de Pareto reales de todas las instancias, lo cual es una ventaja para poder evaluar el desempeño de las técnicas de optimización probadas más adelante.

En la presente investigación el proceso de selección de activos para un portafolio será trabajado utilizando el modelo matemático propuesto por Markowitz (1952). Éste se plantea originalmente, como un problema de optimización mono-objetivo, en el cual se pretende maximizar el rendimiento esperado, sujeto a un determinado riesgo establecido o equivalentemente minimizar el riesgo para un rendimiento establecido (Robert C. Merton, 1972).

En el marco de la presente investigación, estos valores establecidos serán denotados como metas y modificándolos, puede ser resuelto como un problema multiobjetivo o MOP (Multi Objective Problem).

El modelo de Markowitz (1952) puede formularse como un MOP, donde el vector objetivo está formado por las funciones de rendimiento esperado y riesgo (a menudo calculado como la varianza del rendimiento). De acuerdo a lo anterior, en el problema del portafolio de inversión, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ representa un conjunto de inversión específico llamado cartera y x_i es la proporción del capital que se invierte en el activo i , $f_1(\mathbf{x})$, cuantifica el riesgo de la cartera y $f_2(\mathbf{x})$ el rendimiento esperado. El modelo correspondiente se formula de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } \left\{ f_1(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right], \quad - f_2(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^N x_i \mu_i \right] \right\}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

Donde x_i es la proporción del capital que se invertirá en el activo i , σ_{ij} es la covarianza entre el activo i y el j , μ_i , es el rendimiento esperado del

activo i y N es el número de activos disponibles en el mercado. La restricción de igualdad indica que el total del capital disponible debe ser invertido en la cartera.

Dado un MOP de la forma antes presentada, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el espacio factible, decimos que una solución $\mathbf{y} \in \Omega$ donde $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ es no dominada si $\nexists \mathbf{x} \in \Omega, f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y}) \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, y al menos para alguna j $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{y})$.

Algunos autores llaman tales soluciones óptimo de Edgeworth-Pareto, pero es más común denominarla simplemente óptimo de Pareto, o soluciones Pareto-óptimas (Hernández-Lerma y Hoyos-Reyes, 2011). El conjunto P es conocido como el conjunto de Pareto y es el que se suele presentar como la solución al MOP. Su imagen en el espacio de los objetivos es el frente de Pareto real (PF o PFtrue por sus siglas en inglés).

La presente investigación se concentrará en métodos para problemas continuos no lineales, los cuales, en el estado del arte, también son referidos como de optimización difícil, debido a que no existe algoritmo eficiente o método que pueda garantizar óptimos globales (Ponsich *et al.*, 2013) de manera exacta para tales problemas. En estos casos, se recurre frecuentemente al uso de técnicas metaheurísticas para optimización global. Una clase de estas metaheurísticas son los Algoritmos Evolutivos.

2. Técnicas metaheurísticas en optimización multiobjetivo

En esta sección se abordará una de las primeras propuestas para afrontar un problema de optimización multiobjetivo. Se trata de una manera sencilla de plantear el problema desde la perspectiva monobjetivo e implementar una técnica clásica para resolverlo, en este caso un algoritmo genético (GA). Esta técnica constituye un buen punto de partida y de referencia para estudiar los alcances de otros métodos, médula de la presente investigación, los cuales fueron creados específicamente para atacar los problemas de interés en este proyecto.

2.1 La noción de función de agregación

Una función de agregación, suma lineal de pesos, combinación convexa o suma ponderada de objetivos (SPO), está definida por Zhang y Li (2007) de la siguiente manera:

Dado un vector de pesos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, con $\lambda_i \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, m$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, se puede reformular el problema de optimización multiobjetivo como un problema de optimización escalar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } g^{ws}(x|\lambda) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \\ \text{sujeto a } x &\in \Omega \end{aligned}$$

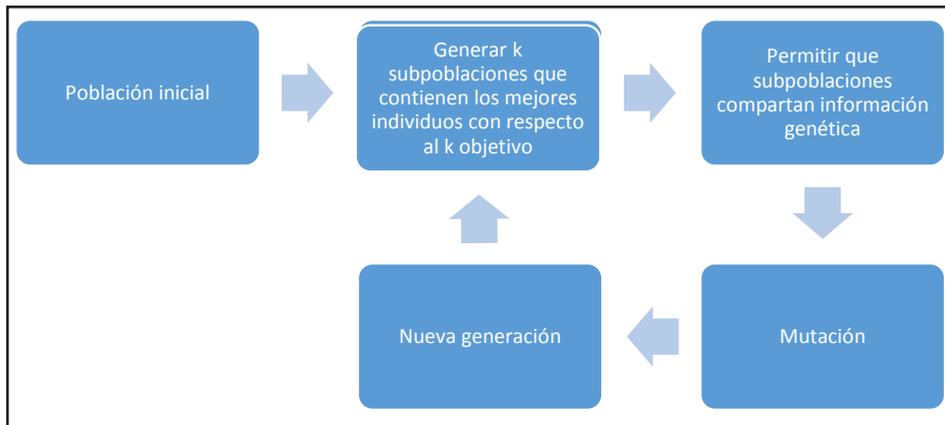
Donde Ω es el espacio factible, y x es el vector de variables. De esta forma, se está reduciendo el problema original a un problema de un sólo objetivo. Se obtiene un conjunto de diferentes vectores óptimos de Pareto al resolver el problema escalar varias veces, utilizando múltiples vectores de pesos. Esta técnica sencilla tiene, sin embargo, desventajas importantes, entre las cuales las más relevantes son:

- i) Para cada solución no dominada deseada, es necesario resolver un problema de optimización escalar, por lo que la aproximación del frente de Pareto aproximado requiere de múltiples ejecuciones del método de solución.
- ii) Debido a la reformulación del problema, no se pueden alcanzar regiones no convexas del frente de Pareto.
- iii) La selección adecuada de los vectores de pesos a utilizar es problemática, ya que, según la naturaleza (lineal o no) del problema, una distribución uniforme de dichos vectores no garantiza que las soluciones obtenidas se distribuyan uniformemente a lo largo del frente.

2.2 La estrategia VEGA

Una de las primeras propuestas hechas específicamente para MOPs es la estrategia Algoritmo Genético Evaluado por Vector-Objetivo (o VEGA, por las siglas en inglés de Vector Evaluated Genetic Algorithm), la cual fue presentada por Schaffer (1985). Su funcionamiento está basado en el paradigma de los algoritmos genéticos como su nombre lo indica, pero la característica principal yace en la parte más polémica en el entorno multiobjetivo: el modo en el que se le asigna aptitud a un individuo. Como se puede observar en la Figura 1 se realiza una fase de clasificación en la que se crean k subpoblaciones con los mejores individuos con respecto a cada uno

Figura 1. Etapas de un algoritmo basado en la estrategia VEGA



de los objetivos. Por lo tanto, los individuos muy aptos con respecto a más de un objetivo podrían aparecer en más de una subpoblación. Cabe mencionar que todas las tablas y figuras disponibles en este artículo son de elaboración propia.

En la versión del algoritmo implementada en la presente investigación, es acertado destacar los siguientes dos puntos:

- i) Se tiene como meta en un MOP determinar las soluciones no dominadas, en cada generación éstas tendrán la característica de que, por ser buenas en todos los objetivos, aparezcan en múltiples subpoblaciones y por ende tener mayor posibilidad de ser seleccionadas para cruzar.
- ii) La etapa de creación de subpoblaciones permite especializar el proceso de optimización para objetivos aislados a continuación cuando las soluciones son combinadas, dado que hay un proceso de selección por medio de torneo binario, dentro de esta subetapa el elitismo por dominancia estará presente, lo cual le permitirá al algoritmo ser más dinámico.

2.3 La estrategia Nondominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)

El método Algoritmo Genético basado en Sorteo de Dominancia (o NSGA-II, por las siglas en inglés de Nondominated Sorting Genetic Algorithm)

fue propuesto por Deb, Pratap, Agarwal, y Meyarivan (2002) y tiene una complejidad de $O(m\Psi^2)$, donde m es el número de objetivos y Ψ es el tamaño de la población. Se trata de una versión más eficiente y elitista del NSGA anteriormente propuesto por Srinivas y Deb (1995).

El NSGA-II es una estrategia en la cual es crucial el concepto de dominancia de Pareto en la evolución de las poblaciones en el tiempo. De hecho, la clasificación de soluciones no dominadas implica un costo computacional relativamente muy alto. A grandes rasgos, las etapas que conforman esta estrategia se muestran en la Figura 2.

2.3.1 Asignación de distancia crowding

Esta métrica se usa en la estrategia NSGA-II para decidir, en el caso de que sea necesario, qué individuos del último frente capaz de completar una nueva generación deben ser seleccionados. La Crowding Distance (CD) es una aptitud asignada únicamente para los elementos del último frente que no fue posible añadir a la nueva generación, de acuerdo a la Figura 3, f_4 sería tal frente.

Figura 2. Etapas de un algoritmo basado en la estrategia NSGA-II

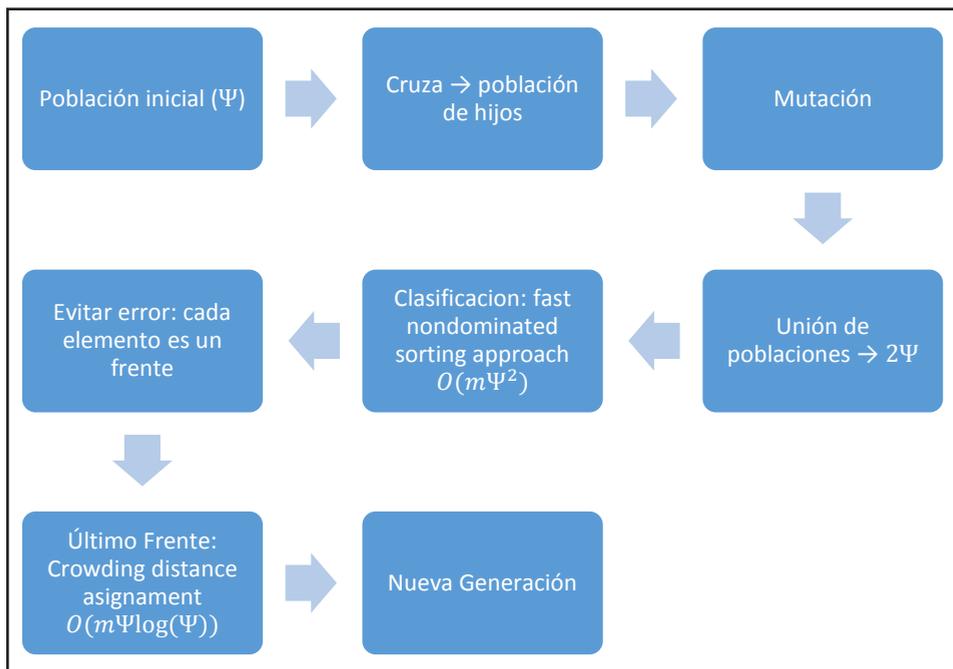
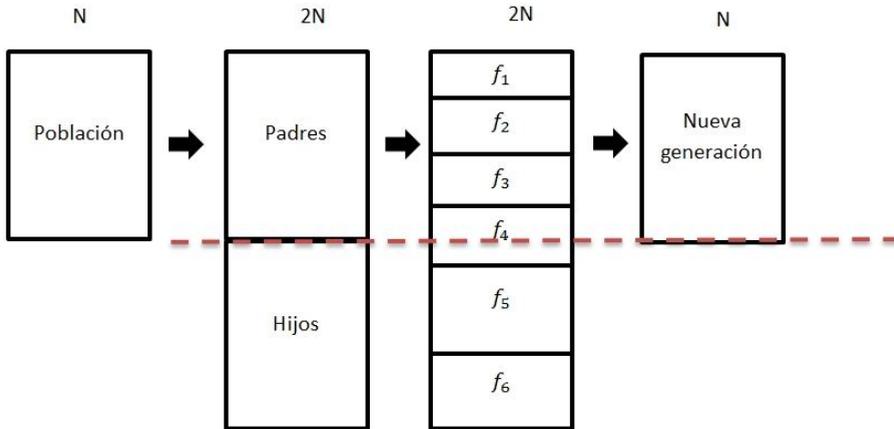


Figura 3. Generación de frentes NSGA-II



Así pues, para el frente f_4 se calcula la métrica utilizando el algoritmo NSGA-II. La CD es proporcional al perímetro del cuboide cuyos vértices están formados por las soluciones vecinas del individuo considerado, en su mismo frente. A medida que el cuboide ocupe un mayor volumen, se le carga un valor más grande a la CD del i -ésimo individuo, promoviendo su selección ya que está en una región menos densamente poblada. Nótese que, previo al cálculo de CD, es necesario normalizar los objetivos de tal manera que diferencias de magnitud entre sus valores no afecten la validez del procedimiento.

2.4 Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Descomposición (MOEA/D)

El Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo basado en Descomposición (MOEA/D, por las siglas en inglés de Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition) es una técnica propuesta por Zhang y Li (2007), basada en una reformulación del MOP en un conjunto de problemas escalares y que se resuelven simultáneamente, de esta forma el proceso de optimización se opera en un entorno monobjetivo. La estrategia explícitamente descompone el MOP en Q subproblemas de optimización escalar y se resuelve estos subproblemas simultáneamente por medio de la evolución de una población de soluciones. Cada subproblema es parametrizado por un vector de pesos,

que permite orientar la búsqueda hacia cierta región del frente de Pareto. En cada generación, la población se compone de la mejor solución encontrada hasta ese momento para cada subproblema. El MOEA/D proporciona una manera simple pero eficiente de introducir la aproximación por descomposición en el cálculo evolutivo multiobjetivo.

Resolver problemas de optimización escalar en lugar de directamente el problema de optimización multiobjetivo (MOP por sus siglas en inglés) en su conjunto, puede implicar que, cuestiones tales como la asignación de la aptitud de las soluciones (también conocida como *fitness*) y el mantenimiento de la diversidad —que causan dificultades para otros MOEAs no basados en descomposición— podrían llegar a ser más fáciles de manejar en el marco de la técnica de este apartado.

MOEA/D tiene una menor complejidad computacional en cada generación que otras técnicas de optimización multiobjetivo, dado que no implica ningún proceso de clasificación de Pareto: usando una pequeña población es capaz de producir pocas soluciones finales muy uniformemente distribuidas. El ajuste de los vectores de pesos, representa sin embargo, una tarea difícil, particularmente para problemas de 3 o más objetivos.

Las etapas del algoritmo se enseñan en la Figura 4. Se puede apreciar que después de la creación y evaluación de la población inicial, se establecen las relaciones de vecindario que existen entre los diferentes individuos de acuerdo a la cercanía entre los vectores de pesos que parametrizan cada subproblema escalar. Esto permite calcular el punto ideal (z) usado posteriormente en la función de escalarización (ver subsección siguiente) e inicializar el archivo externo (EP) reportando las soluciones no-dominadas encontradas. Posteriormente, cada iteración consiste en generar soluciones nuevas gracias a los operadores genéticos, calcular su aptitud y eventualmente integrarlas a EP. Finalmente, este ciclo generacional se repite hasta cumplirse algún criterio de paro, típicamente basado en la utilización de recursos (tiempo o número de evaluaciones de los objetivos).

2.4.1 Aproximación de intersección de frontera (BI)

Existen distintas propuestas para efectuar la descomposición (o escalarización) necesaria para la implementación del MOEA/D. En la presente investigación se ha experimentado particularmente con una de las tres consideradas por (Zhang y Li, 2007), conocida como aproximación de intersección de frontera (BI: Boundary Intersection Approach).

Bajo ciertas condiciones de regularidad, el PF de un MOP (de maximización) continuo es parte de la frontera más alta a la derecha de un objetivo fijado a alcanzar. Geométricamente, estos enfoques BI tienen como objetivo, como su nombre lo indica, encontrar puntos de intersección entre el límite superior y un conjunto de líneas que emanan del punto ideal (denotado como z^*). Si estas líneas están distribuidas de manera adecuada, se puede esperar que los puntos de intersección resultantes proporcionen una buena aproximación, uniforme, de la totalidad del PF. Cabe mencionar que este enfoque es capaz de aproximar FP no cóncavos (Jin, Y., Qu, R., y Atkin, J., 2016).

Matemáticamente, se tienen los siguientes subproblemas de optimización escalar:

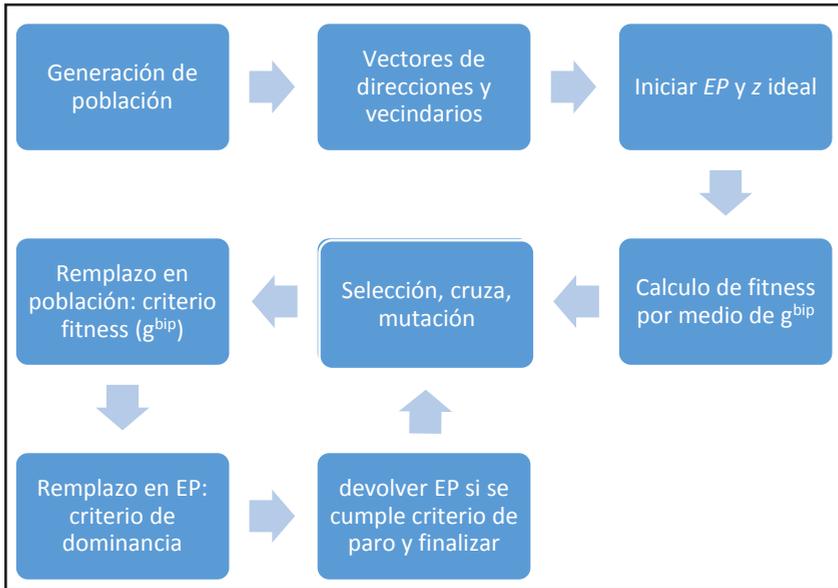
$$\begin{aligned} & \text{minimizar } g^{bip}(\mathbf{x}|\lambda, z^*) = d_1 + \theta d_2 \\ & \text{s. a.} \\ & \mathbf{x} \in \Omega \\ & \text{donde} \\ & d_1 = \frac{\| (z^* - F(\mathbf{x}))^T \lambda \|}{\|\lambda\|} \\ & d_2 = \|F(\mathbf{x}) - (z^* - d_1 \lambda)\| \\ & \theta > 0 \text{ parámetro de penalización} \end{aligned}$$

Donde el parámetro θ define el desvío (d_2) con respecto a la dirección λ (λ es determinada por el vector de pesos parametrizando el subproblema considerado) en la búsqueda del problema escalar actual, contra la velocidad a la que la solución se irá acercando al PF (d_1).

Las relaciones de vecindad entre los sub-problemas se definen en función de las distancias entre vectores de pesos. Así pues, las soluciones óptimas a dos subproblemas vecinos deben ser similares. Cada subproblema (es decir, la función BI particular a un vector λ) se optimiza en MOEA/D mediante el uso de la información sólo de sus subproblemas vecinos.

Es importante mencionar que la estrategia MOEA/D requiere además de un espacio de memoria o archivo de almacenamiento llamado *EP*, en el cuál se administran soluciones no dominadas. Se ha propuesto delimitar el tamaño del archivo por medio de CD (ver Figura 4).

Figura 4. Etapas de un algoritmo basado en la estrategia MOEA/D



3. Métricas utilizadas y ajuste de parámetros

Particularmente, en la presente investigación se decidió considerar las siguientes métricas de desempeño, debido a que al tomarlas en cuenta se engloban las características necesarias para considerar una aproximación multiobjetivo de buena calidad.

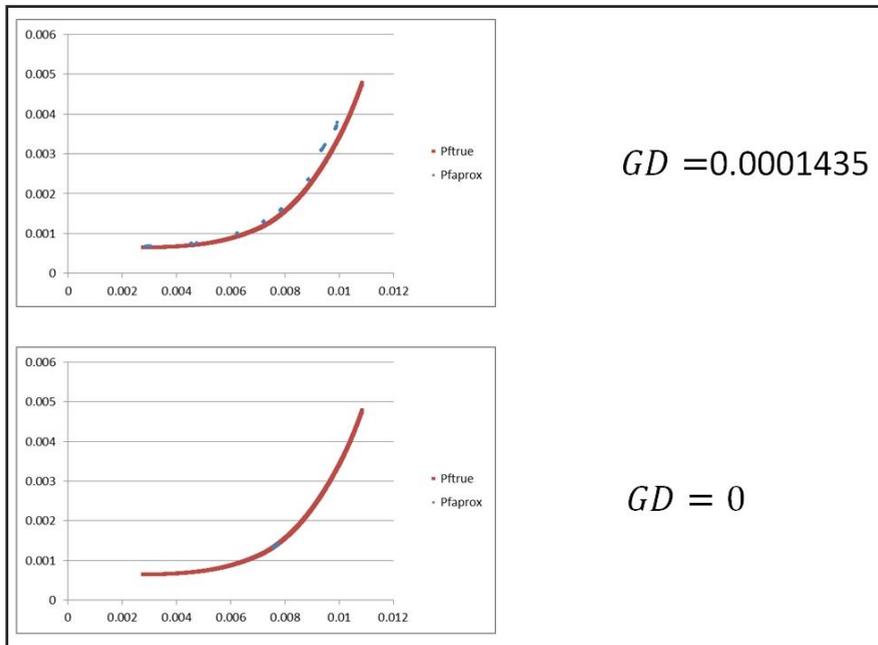
3.1 Distancia generacional

La distancia generacional (*gd* por sus siglas en inglés) se utiliza para saber en promedio qué tan lejos está el frente aproximado (*PF_{aprox}*) del real (*PF_{true}*), por lo cual se trata de una medida de convergencia. Para el cálculo de esta métrica se necesita el frente real, la fórmula es la siguiente:

$$gd = \frac{\sum_{i=1}^{|PF_{aprox}|} d_i}{|PF_{aprox}|} \quad (1)$$

Donde d_i es la distancia euclidiana (en el espacio de los objetivos) entre la i -ésima solución del PFaprox y la solución más cercana del PFtrue. Un valor cercano a cero indica buena convergencia. La pregunta que surge es ¿por qué no es suficiente tal métrica para explicar la calidad de un frente aproximado? Al observarla, se muestran dos frentes aproximados, el primero es una buena aproximación y de hecho el valor de gd es bueno (muy cercano a cero), por otro lado, el segundo frente tiene un mejor valor para la métrica, y sin embargo no es una mejor aproximación ya que contiene pocas soluciones muy cercanas, incluso parte del frente real, las cuales no podrían proporcionar indicios de la tendencia de la curva real por completo (ver Figura 5).

Figura 5. Cálculo de la distancia generacional



3.2 Dispersión eficiente de conjuntos

Llamada en inglés *Efficient Set Spacing* o simplemente *Spacing*, describe numéricamente la propagación o dispersión de los vectores de PFaprox, la fórmula para su cálculo se muestra a continuación:

$$ESS = \sqrt{\frac{1}{|PF_{aprox}|} \sum_{i=1}^{|PF_{aprox}|} (d_i - \bar{d})^2} \quad (2)$$

$$\text{donde} \begin{cases} d_i = \min_{j \in PF_{aprox}, i \neq j} \left\{ \sum_{p=1}^k |f_p^i - f_p^j| \right\} \\ \bar{d} = E(d_i) \end{cases}$$

Lo ideal, al igual que gd es un valor cercano a 0.

3.3 Hipervolumen

Es definido como el área dominada por PF_{aprox} , con respecto al espacio de los objetivos. Para dos objetivos, esto equivale a la sumatoria de todas las áreas rectangulares delimitadas por algún punto de referencia $R = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}))$, su cálculo se realiza con:

$$HV = \{ \cup_i vol_i | vec_i \in PF_{aprox} \} \quad (3)$$

Se intenta lograr que este valor sea el mayor posible para concluir que la aproximación es buena. La ventaja del uso del hipervolumen es que es una métrica compatible con la definición de optimalidad de Pareto (Zitzler *et al.*, 2003), es decir que buscar todas las soluciones Pareto óptimas de un MOP es equivalente a maximizar el hipervolumen del frente aproximado correspondiente.

En muchas aplicaciones (incluyendo la presente investigación) la magnitud en la que se mide la función objetivo suele variar en intervalos de reales numéricamente muy pequeños o muy grandes, lo cual dificulta el análisis comparativo y la observación de comportamientos para el hipervolumen. Para un mejor uso de tal métrica se definió una derivada de ésta a la cual se ha nombrado hipervolumen-percent y consiste en el porcentaje o proporción del hipervolumen del frente real que ocupa el hipervolumen aproximado usando el mismo punto de referencia para ambos frentes debido a que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x})) = (\text{retorno esperado}, \text{riesgo})$ tiene un frente de Pareto

to totalmente convexo, el punto de referencia son los valores extremos del mismo, es decir $R = (\max\{\text{retorno esperado}\}, \min\{\text{riesgo}\})$, min, es decir $HV_{perc} = \frac{HV_{aprox}}{HV_{real}} \in [0,1]$, el cual se busca sea cercano a uno.

Hasta este punto se han considerado dos métricas especializadas una en la convergencia, otra en la dispersión de forma uniforme, mientras que la tercera puede dar información sobre convergencia y dispersión. En este punto únicamente resta agregar que, para múltiples análisis, será importante conocer el número de puntos aproximados o cardinalidad del frente cercano.

3.4 Metodología para la configuración de parámetros

Se decidió utilizar la configuración de parámetros, conocida como diseño factorial completo, el cual consiste en seleccionar un conjunto de valores potenciales para cada parámetro y probar todas las combinaciones de éstos (véase el ejemplo de la Figura 5). A veces este método es también llamado “fuerza bruta”, aludiendo a que es la forma exhaustiva o más costosa de hacer una calibración, esto último debido al gran número de experimentos que deben realizarse:

$$s = q_1 q_2 \dots q_p \quad (4)$$

Donde s es el número de experimentos y q_i es el número de valores que deseamos probar para el $t = \text{ésimo}$ parámetro. Por otro lado, la información que se obtiene a partir de éste tipo de análisis es más detallada, debido a que se realiza un mayor número de pruebas, lo cual proporcionar mejores indicios acerca del juego de parámetros adecuado.

Para realizar un análisis exhaustivo, es necesario hacer una delimitación del intervalo en el que varía cada parámetro. Dado que se debe seleccionar un número muy limitado de valores dentro de tales intervalos será necesario elegirlos de manera apropiada y, posteriormente profundizar la búsqueda en el intervalo para encontrar el valor más adecuado. Debido a esto, en la presente investigación se realizaron las etapas de calibración en dos fases llamadas: valores extremos y diseño factorial completo.

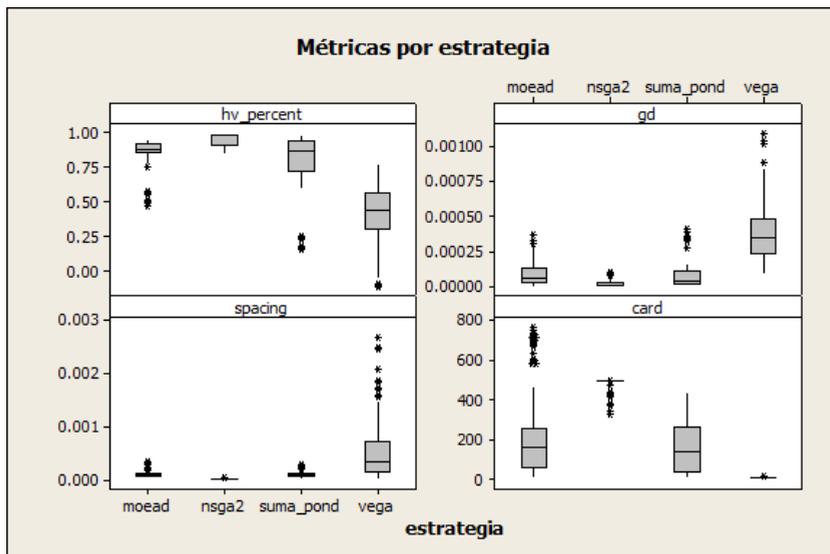
3.4.1 Presentación gráfica de resultados

La etapa de experimentación para seleccionar el método de manejo de restricciones se realizó bajo las siguientes condiciones:

- 30 experimentos por técnica de manejo de restricciones, por meta-heurística y por instancia (inst0 = Hang Seng31, inst1 = DAX85, inst2 = FTSE89, inst3 = S&P98, inst4 = Nikkei225).
- Análisis previo de ajuste de parámetros.
- Cruza y mutación en NSGA-II y MOEA/D se utiliza el método uniforme, mientras que a SPO y a VEGA les corresponde SBX.
- Criterio de paro: 1000*N* llamadas a la función objetivo, donde *N* es el número total de activos de la instancia de acuerdo al modelo matemático (de 31 a 225).
- Archivo *EP* en el MOEA/D restringido a Ψ elementos, donde Ψ es el tamaño de la población.

En la etapa experimental de la selección de método de cruza y mutación se empezó a notar, a grandes rasgos, que los métodos de mejor eficiencia fueron NSGA-II y SPO. En la presente etapa experimental, antes de analizar

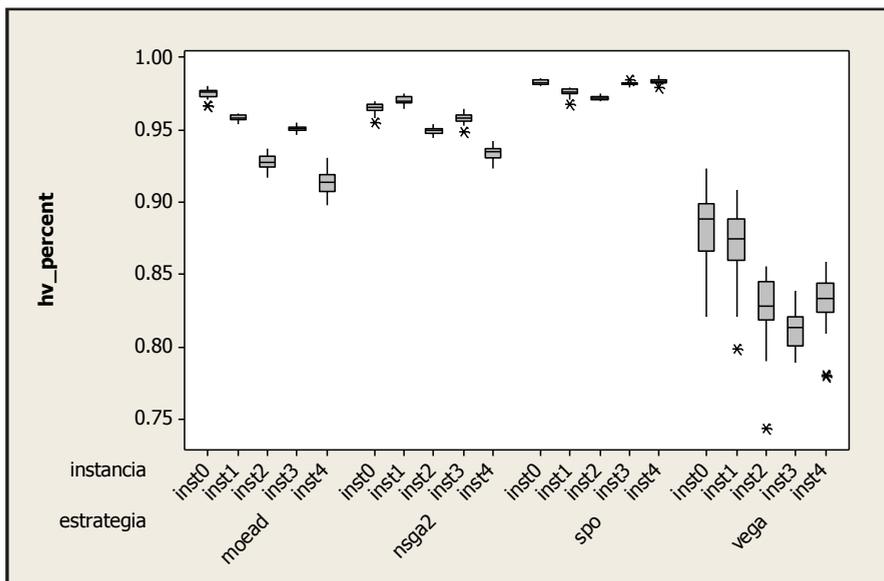
Figura 6. Métricas por estrategia



los métodos de manejo de restricciones, será aprovechada la información obtenida, para hacer algunas conclusiones generales sobre la eficiencia de los algoritmos hasta este punto de la investigación. De acuerdo a la Figura 6, la cual valora la eficiencia de cada técnica (sin importar la forma en la que se manejaron las restricciones) el orden de efectividad de mayor a menor es: NSGA2, MOEA/D, SPO y VEGA; lo anterior con respecto sólo a las métricas HV_{perc} , gd y ESS . Las cardinalidades son muy variables con respecto a cada metaheurística y no definen la calidad del frente aproximado, además, tómease en cuenta que se hace una calibración de parámetros que no suele sugerir el mismo valor para el tamaño de la población en todas las técnicas. Hasta ahora, VEGA se ha mostrado como una técnica muy inestable (en todas las métricas muchos valores atípicos, varianza muy alta).

Cada experimento realizado genera una aproximación del frente de Pareto de una instancia en particular, por lo cual no es posible presentarlos todos en el presente documento de forma gráfica. De modo que se enseñarán los frentes graficados correspondientes a la corrida mediana de cada estrategia en cada instancia de acuerdo a su desempeño en HV . Los frentes se

Figura 7. Implementación



muestran en el mismo gráfico dado que se aprecia se esta forma la cercanía con el frente real y entre estrategias, y también por separado, pues de este modo se observan mejor los rasgos en la forma del frente aproximado.

Las métricas *gd* y *ESS* pueden ser comparadas entre cada una de las estrategias pero sólo si se hace referencia a la misma instancia, en la Figura 8, 9 y 10 se muestran las métricas restantes.

De acuerdo a la métrica distancia generacional (Figura 8), nuevamente se observan los mejores resultados con SPO y los peores con VEGA. Por otro lado *ESS* en la Figura 9 suele variar con mayor dispersión aunque refleja conclusiones similares. Finalmente la particularidad de la métrica cardinalidad (Figura 10) es que SPO muestra resultados con muchos puntos, por otro lado, en NSGA-II el tamaño de la población es un factor sumamente crucial, por ende siempre se mantiene pequeña.

En las Figuras 11 a 19 están disponibles los frentes aproximados por cada técnica estudiada, sobre cada una de las instancias de interés en este estudio. Estas gráficas permiten apreciar visualmente las características de los frentes aproximados, tanto en términos de convergencia como de diversidad; mismos conceptos que capturan los indicadores presentados en los

Figura 8. Implementación Distancia Generacional

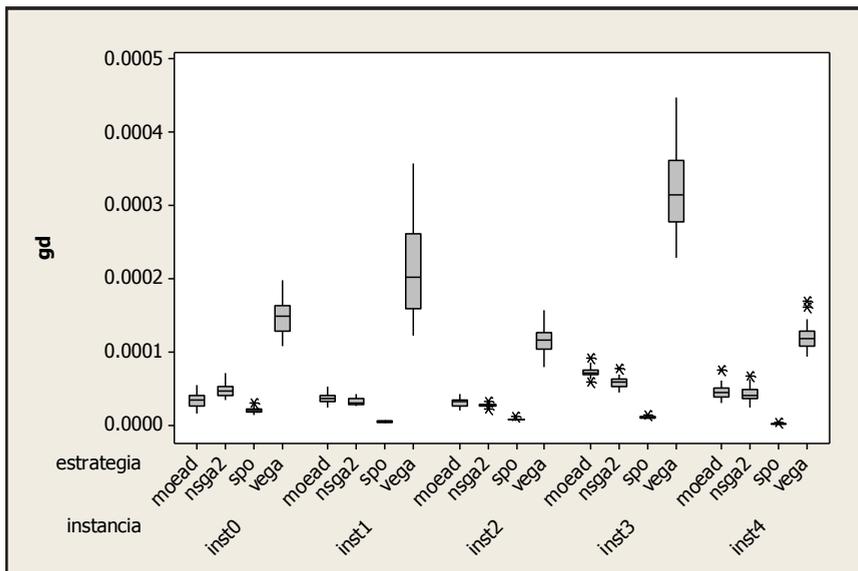


Figura 9. Implementación ESS

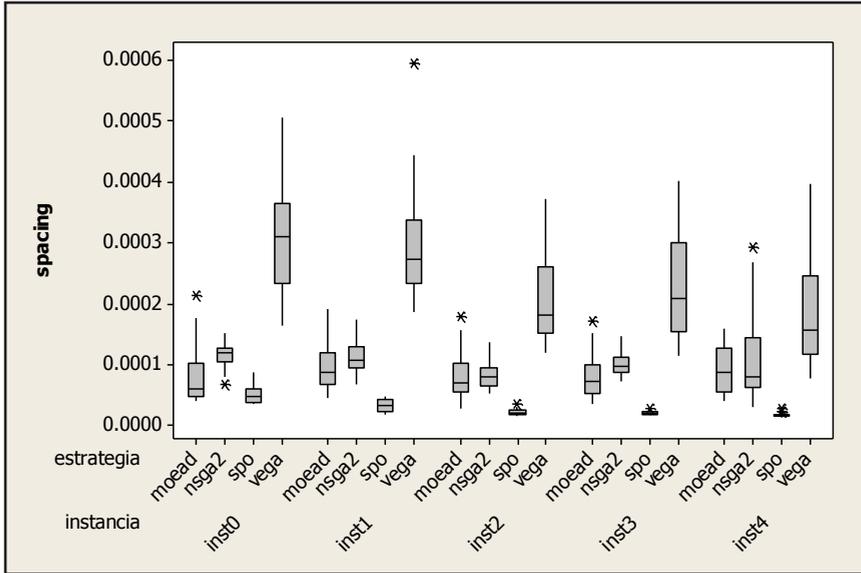
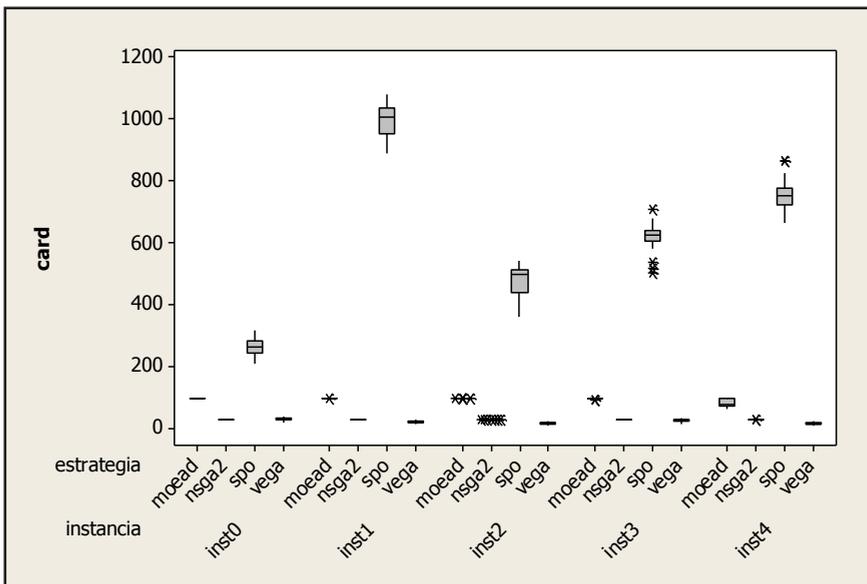


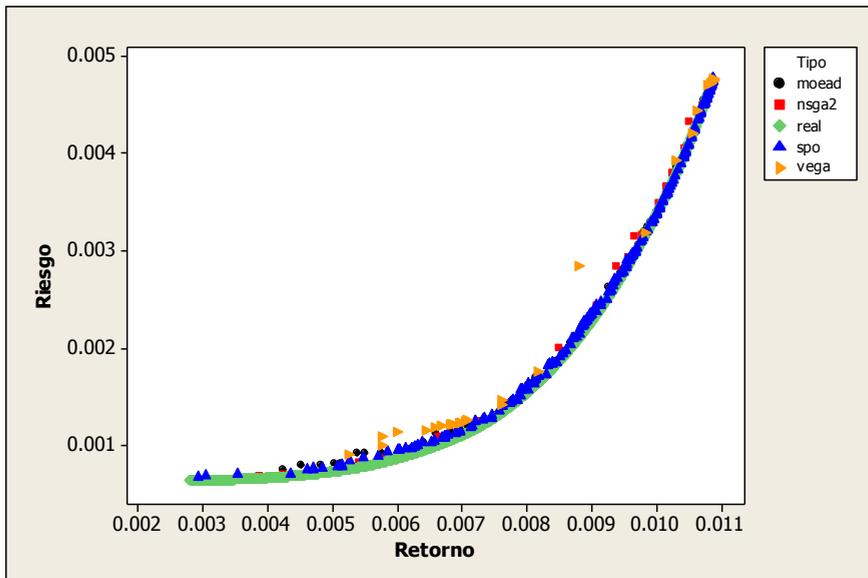
Figura 10. Implementación Cardinalidad



cuadros 1 a 6. Se puede observar en estas figuras el buen comportamiento de los algoritmos evolutivos implementados, que a excepción de VEGA logran identificar una aproximación bien distribuida del frente real. Cabe mencionar que todos los tiempos indicados en estas figuras se expresan en segundos. Finalmente, la figura 20 compara los resultados obtenidos en este estudio con los del estado del arte, en base a la métrica de Distancia Generacional.

Cabe mencionar que la métrica gd está expresada en una magnitud muy pequeña y además existe una relación inversa entre el valor de la métrica y la dificultad para mejorarla. Por lo anterior, la variación porcentual es una buena medida de la diferencia de eficiencia entre los algoritmos, dado que, a medida que el resultado (v_0) es más cercano a cero, la diferencia con respec-

Figura 11. Instancia Hang Sen 31 mediana



Cuadro 1. HV_{perc} Hang Seng31 mediana

estrategia	tiempo	hv_percent
moead	9.386440039	97.6147%
nsga2	10.27579498	96.5479%
spo	8.684428215	98.2979%
vega	9.466565847	89.2091%

Figura 12. Hang Sen31 riesgo-rendimiento

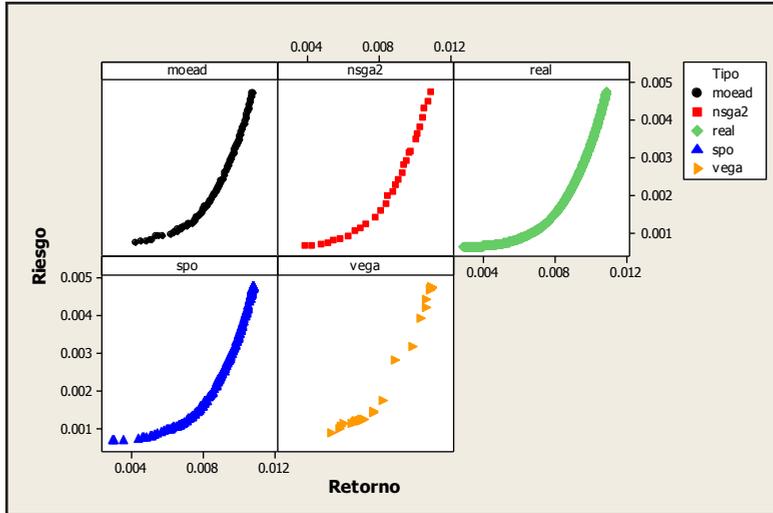
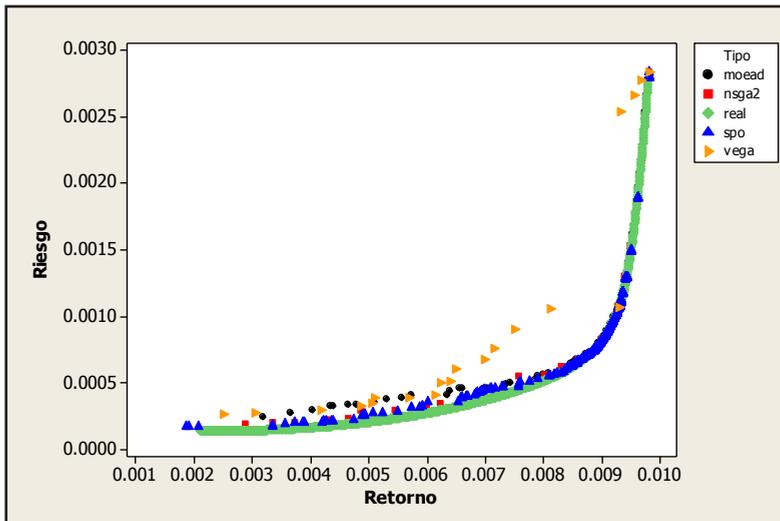


Figura 13. Instancia DAX85 mediana



Cuadro 2. HV_{perc} DAX85 mediana

estrategia	tiempo	hv_percent
moead	137.469667	95.8584%
nsga2	139.918093	97.0631%
spo	134.3552189	97.6835%
vega	137.5779932	87.5550%

Figura 14. DAX85 mediana riesgo-rendimiento

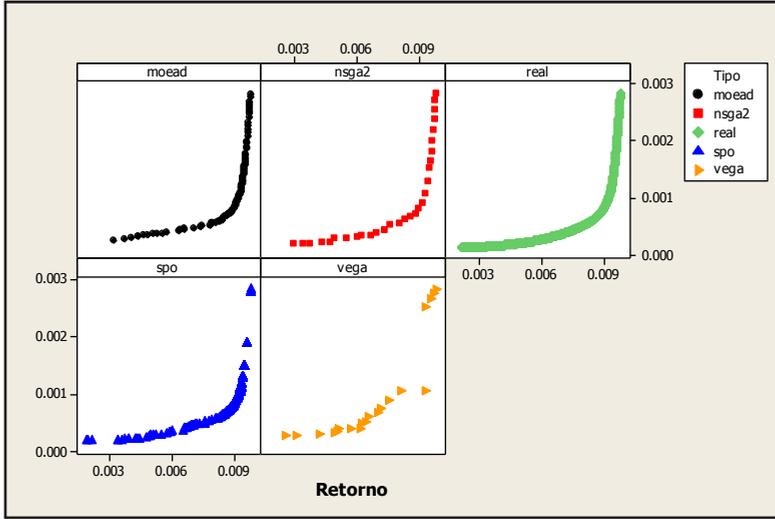
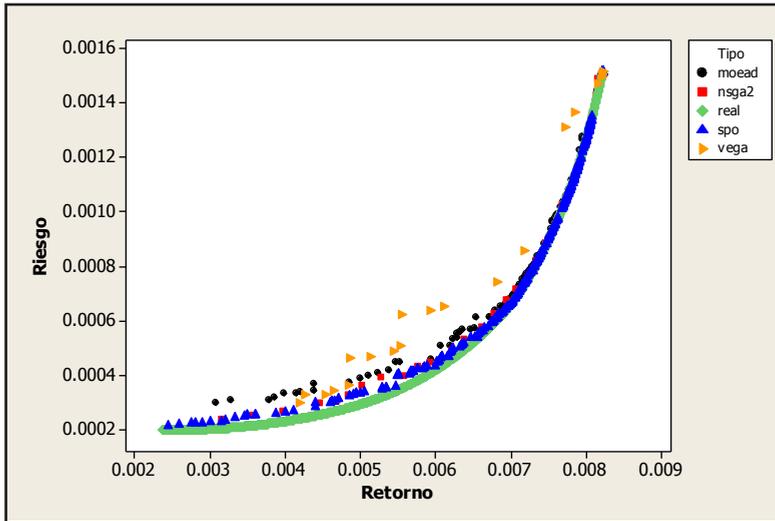


Figura 15. Instancia FTSE89 mediana



Cuadro 3. HV_{perc} FTSE89 mediana

estrategia	tiempo	hv_percent
moead	153.8806272	92.7641%
nsga2	150.2436111	94.9682%
spo	154.263298	97.2482%
vega	154.0000622	82.8718%

Figura 16. FTSE89 mediana riesgo-rendimiento

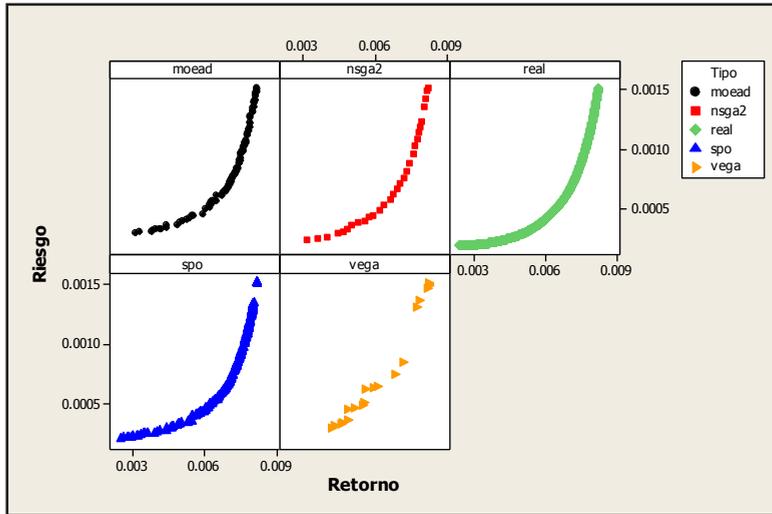
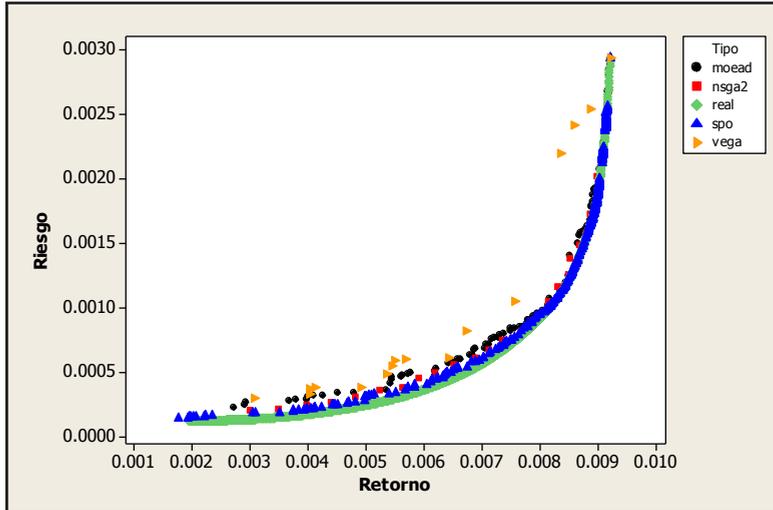


Figura 17. Instancia S&P98 mediana



Cuadro 4. HV_{perc} S&P98 mediana

estrategia	tiempo	hv_percent
moead	201.986851	95.0938%
nsga2	198.9523768	95.7831%
spo	204.486424	98.1723%
vega	202.1144722	81.3964%

Figura 18. S&P98 mediana riesgo-rendimiento

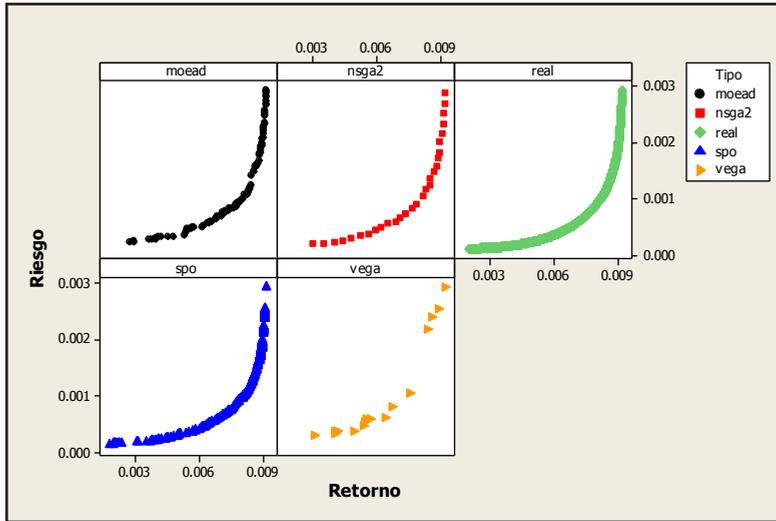
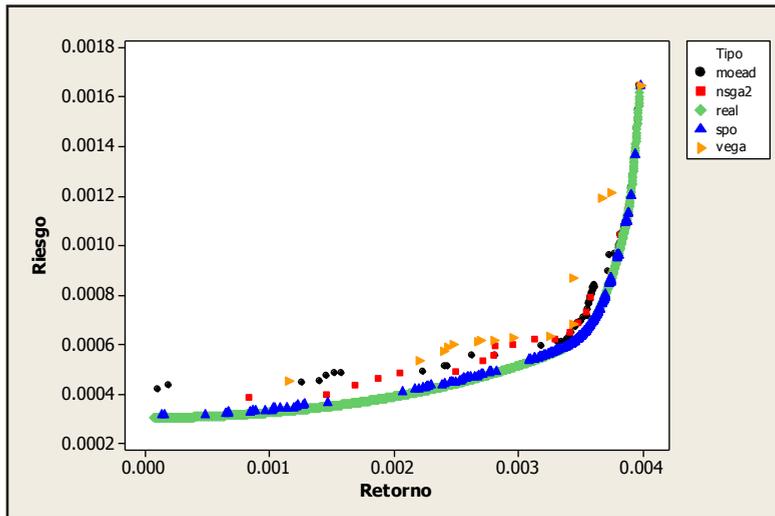


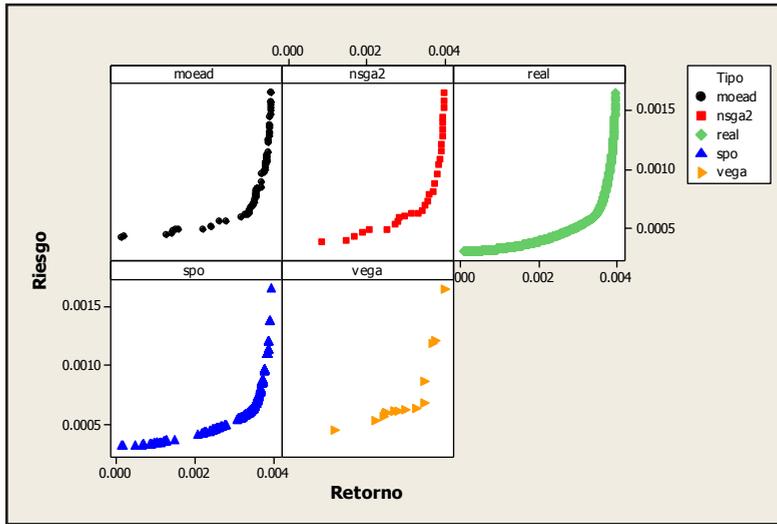
Figura 19. Nikkei225 mediana



Cuadro 5. HV_{perc} Nikkei225 mediana

estrategia	tiempo	hv_percent
moead	2398.413085	91.4709%
nsga2	2289.414533	93.4996%
spo	2605.19272	98.4124%
vega	2406.257872	83.4054%

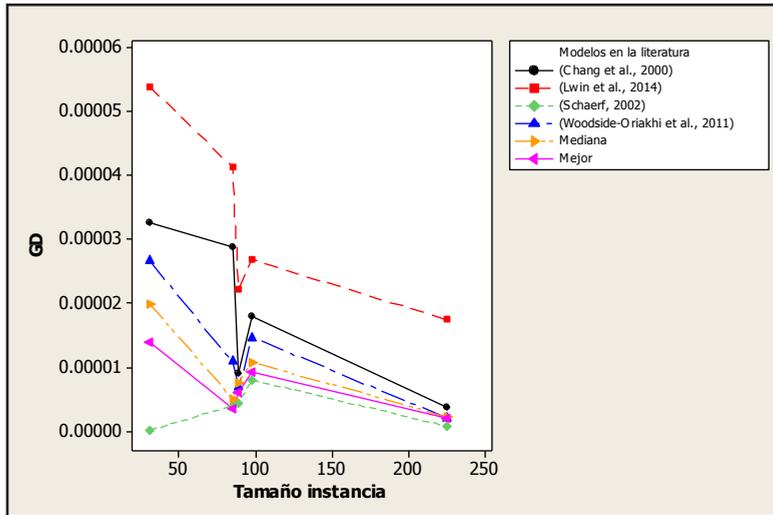
Figura 20. Nikkei225 mediana riesgo-rendimiento



Cuadro 6. Ranking con respecto a la mediana de cada métrica (mayor a menor desempeño, en rojo la menor)

Posición	HV_{perc}		gd		ESS		$card$	
	estrategia	instancia	estrategia	instancia	estrategia	instancia	estrategia	instancia
1	SPO	inst4	SPO	inst4	SPO	inst4	SPO	inst1
2	SPO	inst0	SPO	inst1	SPO	inst3	SPO	inst4
3	SPO	inst3	SPO	inst2	SPO	inst2	SPO	inst3
4	SPO	inst1	SPO	inst3	SPO	inst1	SPO	inst2
5	MOEA/D	inst0	SPO	inst0	SPO	inst0	SPO	inst0
6	SPO	inst2	NSGA-II	inst2	MOEA/D	inst0	MOEA/D	inst0
7	NSGA-II	inst1	NSGA-II	inst1	MOEA/D	inst2	MOEA/D	inst2
8	NSGA-II	inst0	MOEA/D	inst2	MOEA/D	inst3	MOEA/D	inst3
9	MOEA/D	inst1	MOEA/D	inst0	NSGA-II	inst2	MOEA/D	inst1
10	NSGA-II	inst3	MOEA/D	inst1	NSGA-II	inst4	MOEA/D	inst4
11	MOEA/D	inst3	NSGA-II	inst4	MOEA/D	inst4	VEGA	inst0
12	NSGA-II	inst2	MOEA/D	inst4	MOEA/D	inst1	NSGA-II	inst2
13	NSGA-II	inst4	NSGA-II	inst0	NSGA-II	inst3	NSGA-II	inst4
14	MOEA/D	inst2	NSGA-II	inst3	NSGA-II	inst1	NSGA-II	inst3
15	MOEA/D	inst4	MOEA/D	inst3	NSGA-II	inst0	NSGA-II	inst1
16	VEGA	inst0	VEGA	inst2	VEGA	inst4	NSGA-II	inst0
17	VEGA	inst1	VEGA	inst4	VEGA	inst2	VEGA	inst3
18	VEGA	inst4	VEGA	inst0	VEGA	inst3	VEGA	inst1
19	VEGA	inst2	VEGA	inst1	VEGA	inst1	VEGA	inst2
20	VEGA	inst3	VEGA	inst3	VEGA	inst0	VEGA	inst4

Figura 21. Comparación con resultados publicados bajo la métrica gd .



to a la cantidad con la que será comparada (v_f), representará un porcentaje mucho mayor del valor obtenido.

Con respecto a los mejores resultados obtenidos, se logra superar a Schaerf (2002) solamente en la instancia DAX85, por otro lado se superan todos los resultados restantes reportados para la métrica gd .

Finalmente, para ilustrar lo que pueden ser unas de las soluciones no-dominadas identificadas por nuestros algoritmos, en el Apéndice A se presentan dos soluciones eficientes, obtenidas respectivamente para las instancias 2 y 4 (ver apéndice A), ambas ubicadas cerca del punto ideal (es decir en la “rodilla” del frente aproximado) ya que éstas soluciones son muy a menudo seleccionadas por un tomador de decisión. Y en el Apéndice B se muestran los algoritmos metaheurísticos en pseudo código de las cuatro técnicas implementadas.

Conclusiones

En el presente artículo se estudió, adaptó e implementó un conjunto de metaheurísticas sofisticadas (Jin *et al.*, 2016) y se analizaron sus resultados de aplicarlas a un problema financiero clásico. Se hizo frente a múltiples etapas de análisis a lo largo de la obtención de datos experimentales. En el transcurso de tales etapas, la información fue abriendo pauta a indagaciones acerca de las características más relevantes como el tipo de paradigma en el que se basan las metaheurísticas, o la convexidad y forma de los frentes de Pareto reales. Se han señalado algunos efectos en las variables, que repercuten en el funcionamiento eficiente de los algoritmos, así como plantear explicaciones acerca de las posibles causas que llevaron a ello, lo cual funge como el valor más relevante de la presente investigación.

En el análisis de los métodos de selección de poblaciones no dominadas se logró destacar acerca de la relación entre comparaciones de dominancia y tiempo de ejecución, que no necesariamente guardan una relación directamente proporcional, es decir, un mayor uso de la operación de comparación, no implica necesariamente un mayor tiempo de ejecución (esto probablemente se debe a que, en el problema estudiado el número de objetivos es pequeño). En cuanto a la relación entre llamadas a la función objetivo para las metaheurísticas y el tiempo de ejecución, en la investigación fue ineludible tomar en cuenta la relación entre ambos factores. En el entorno multiobjetivo las operaciones de clasificación de Pareto constituyen un elemento de gran relevancia, y son particularmente costosas aun tratándose de dos objetivos. Fue necesario mantener un límite de población bajo para el NSGA-II, para que el tiempo de ejecución no se elevara ($O(\Psi \log^{m-1} \Psi)$). En SPO y MOEA/D en un menor grado aunque no se eligieron tamaños de población grandes. Por otra parte el tamaño de población fue un parámetro que no se relacionó con el tiempo en VEGA.

El método exhaustivo para el ajuste de parámetros, a pesar de tener un costo computacional elevado, fue posible implementarlo ejecutando un número relativamente bajo de pruebas para poder llegar a una configuración que garantizara buenos resultados. Analizar valores extremos para los parámetros fue interesante debido a que, no solo se delimitó un intervalo de búsqueda, sino que se examinaron valores poco convencionales en la práctica que, en algunos casos, fueron adecuados.

Se observó, en el transcurso de la investigación, que algunas veces es adecuado determinar si la heurística está utilizando tiempo innecesario (a

partir de cierto tiempo ya no se puede mejorar, y no por la presencia de un óptimo local). Es decir, hay veces que el MOEA/D alcanza $HV_{perc} = 95\%$ en 10 segundos y, a partir de ese momento, ya no hay más mejoras significativas. O sea que en 10 segundos MOEA/D ya dio el máximo rendimiento y ya no tiene sentido ejecutarlo por más tiempo. En un estudio posterior, podría estudiarse más a fondo este límite de eficiencia, el cual es muy distinto en cada estrategia.

No se esperaba que un Algoritmo Genético basado en una Suma Ponderada de Objetivos se mostrara como el de mayor eficiencia. Esto se debe, posiblemente a dos factores, el primero, el número de objetivos es bajo, y, por otro lado, los frentes reales son muy uniformes, sin discontinuidades y convexos.

Analizando la forma operativa de cada algoritmo, se abre pauta a concluir que hay factores dentro de éstos, que los hacen mejores al manejar las características particulares de cada instancia resuelta, la presente investigación abrió pauta al estudio a detalle de este aspecto como una perspectiva a futuro, inclusive cada estrategia que fue implementada, es sensible de diferente forma a cada uno de los parámetros calibrados. Aunque el tamaño de la instancia es crucial en la dificultad del problema, otras características del frente de Pareto también tendrán relevancia en la eficacia con la que particularmente cada estrategia resuelva el problema, y ese es un factor que no hay que perder de vista al elegir una técnica para resolver un MOP.

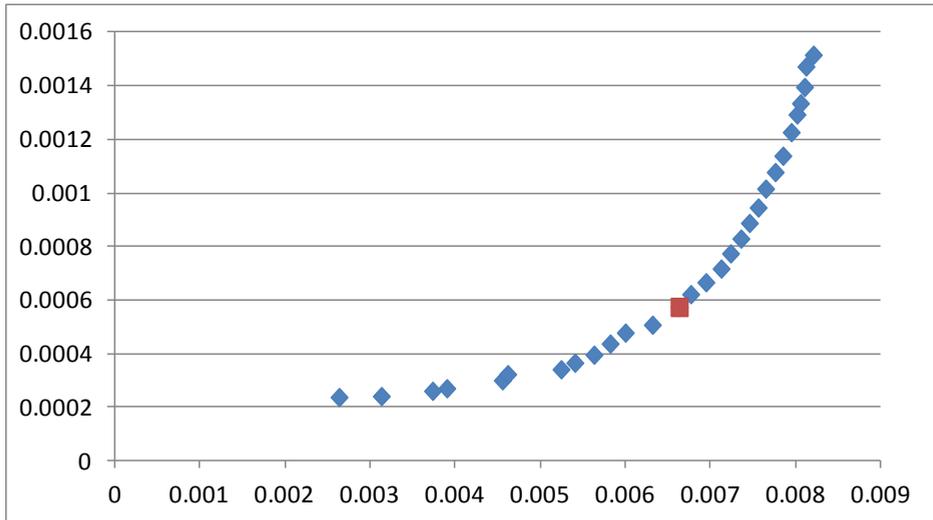
Cabe mencionar, que tampoco la diferencia de desempeño entre estrategias fue tan significativa. En general los resultados obtenidos son satisfactorios para MOEA/D, NSGA-II y SPO. La estrategia VEGA fue de las primeras propuestas para MOP, debido a esto, algoritmos más recientes logran superarla fácilmente. Sin considerar esta excepción, estas conclusiones validan la hipótesis de investigación del presente trabajo, es decir que los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo representan una opción viable para resolver el problema de Selección de Portafolios de Inversión. Se establece una clasificación de los algoritmos implementados en términos de la calidad de su desempeño, resultado de una etapa de calibración exhaustiva y realizada para las cuatro técnicas de interés.

Referencias bibliográficas

- Beasley, J. E. (2015). *OR Library*. <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., y Meyarivan, T. (2002). "A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II". *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, pp. 182-197.
- Hernández-Lerma, O., y Hoyos-Reyes, L. F. (2011). "A multiobjective formulation of optimal control problems with additive costs". *Administración de riesgos. Volumen III. Modelos y entorno financiero*. México, D.F.: UAM-Azcapotzalco, pp. 245-271.
- Jin, Y., Qu, R., y Atkin, J. (2016). "Constrained Portfolio Optimisation: the state-of-the-art Markowitz Models". *The 2016 International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, Roma: University of Nottingham, UK, Faculty of Science, School of Computer Science, pp. 88-395.
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, vol. 7, núm. 1, pp. 77-91.
- Merton, R. C. (1972). "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 7, núm. 4, pp. 1851-1872.
- Ponsich, A., López Jaimes, A., y Coello, C. A. (2013). "A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 17, núm. 3, pp. 321 - 344.
- Schaerf, A. (2002). "Local search techniques for constrained portfolio selection problems". *Computational Economics*, núm. 20, pp. 177-190.
- Schaffer, J. D. (1985). "Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms". *Genetic Algorithms and their Applications: Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum, pp. 93-100.
- Srinivas, N., y Deb, K. (1995). "Multiobjective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms". *Evol. Comput.*, vol. 2, núm. 3, pp. 221-248.
- Zhang, Q., y Li, H. (2007). "MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition". *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 11, núm. 6, pp. 712 - 731.
- Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C., y Grunert da Fonseca, V. (2003). "Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review". *IEEE, Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 7, núm. 117 p. 132.

Apéndice A. Descripción de dos soluciones eficientes

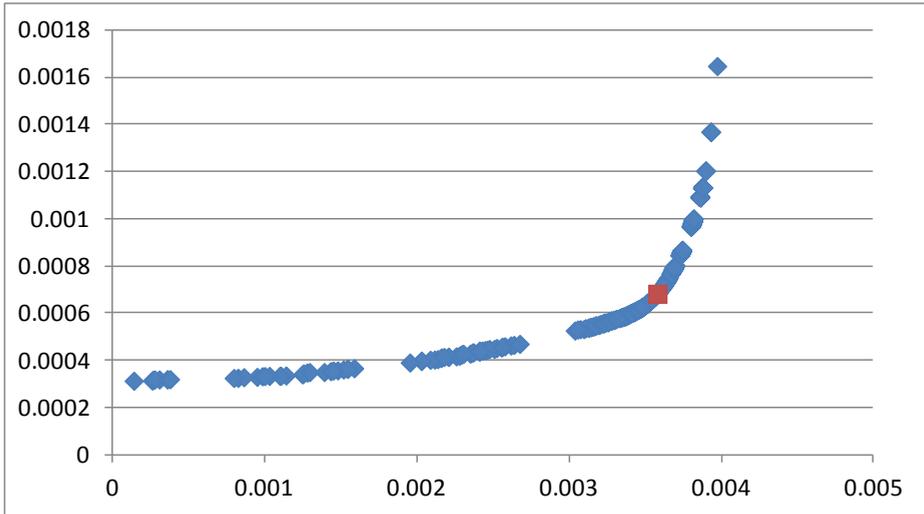
1. Solución encontrada con la estrategia “NSGA-II”, cerca de la “rodilla” del frente para la instancia 2 (FTSE89, Reino Unido). Nota: sólo se indican las variables estrictamente positivas.



Detalle de la solución:

x_1	0.073009922
x_2	0.016520877
x_9	0.183325563
x_{17}	0.423983624
x_{25}	0.009790336
x_{36}	0.191115913
x_{61}	0.038100786
x_{70}	0.016240054
x_{81}	0.047912925
Rendimiento esperado	0.00662809
Riesgo (varianza)	0.000572884

2. Solución encontrada con la estrategia “SPO”, cerca de la “rodilla” del frente para la instancia 4 (Nikkei225, Japón). Nota: sólo se indican las variables estrictamente positivas.



Detalle de la solución:

x_8	0.29327773
x_{42}	0.12549203
x_{61}	0.34957127
x_{114}	0.03953417
x_{213}	0.1921248
Rendimiento esperado	0.003578485
Riesgo (varianza)	0.000682816

Apéndice B. Algoritmos en pseudocódigo

1. Algoritmo genético simple para optimización escalar considerando Suma Ponderada de Objetivos (SPO).

Variables de entrada

NP: tamaño de la población

Gmax: Número de generaciones

zm: Tasa de mutación

generar población aleatoria factible pob_f

para generación en {0, ..., Gmax-1}:

 para i en pob_f:

 selección de padres

 cruza

 si |pob_hijos| < |pob_f|:

 agregar hijo a pob_hijos

 mutación a una tasa especificada zm

 p = unión población hijos y padres

 p_nueva = selección(p)

 pob_f = p_nueva

devolver mejor individuo de pob_f

2. Algoritmo VEGA Canónico.

variables de entrada

NP: Tamaño de la población

Gmax: Número de generaciones

obj: Número de objetivos

inicio

#tamaño de subpoblación

tam_sub = NP/obj

generar población aleatoria factible pob_f

para generación en [0, ..., Gmax-1]:

 m_pool = \emptyset

 para k en [0, ..., obj-1]:

 ordenar pob_f de menor a mayor con respecto al valor del objetivo k

 sub_pob = \emptyset

 i = 0

 mientras tamaño de sub_pob < tam_sub:

 agregar pob_f[i] a sub_pob

 i = i + 1

 m_pool = m_pool U sub_pob

 ordenar aleatoriamente a m_pool

 mientras cardinalidad(pob_hijos) < NP:

```

seleccionar padres de m_pool
cruza(padre1, padre2) #se producen 2 hijos
agregar hijo a pob_hijos
mutacion de pob_hijos
pob_f = pob_hijos
devolver no dominados de pob_f

```

3. Algoritmo NSGA-II.

max: Número de generaciones
P: Tamaño de la población

```

inicio
generar pob_f
para generacion en [0, ..., Gmax-1]:
    mientras tamaño de pob_hijos < tamaño de pob_f:
        selección de padres por torneo binario
        cruza(padre1, padre2) #se producen 2 hijos
        agregar hijos a pob_hijos
    mutar pob_hijos
    p_total = pob_f U pob_hijos
    partición(p_total) = ordenar por jerarquía de dominancia (menor a mayor rango)
    p_nueva = ∅
    para cada frente en la partición:
        unir frente con p_nueva si cardinalidad(p_nueva) ≤ NP:
            elegir individuos de último frente en función de crowding-distance
    pob_f = p_nueva
ob_f = no dominados de pob_f
evolver pob_f

```

crowding-distance

```

bj: número de objetivos
frente en el espacio de los objetivos
l: cardinalidad(l)

rd = [0, 0, ..., 0] #crowding distances
para m en [0, 1, ..., obj-1]:
    l = ordenar l con respecto al objetivo m de menor a mayor
    crd[0] = ∞
    crd[L-1] = ∞
    para i en [1, 2, ..., L-2]:
        si l[L-1][m] - l[0][m] ≠ 0:
            l[i][obj] = l[i][obj] + (l[i+1][m] - l[i-1][m]) / (l[i-1][m] - l[0][m])
rd = ordenar crd de menor a mayor
evolver crd

```

4. Algoritmo MOEA/D.

```
NP ← tamaño de la población
Gmax ← número de generaciones (criterio de paro)
T ← número de vecinos para cada individuo (preferiblemente par)

inicio
  generar vectores de peso # e.g. lam = {[0, 1], [0.1, 0.9], [0.2, 0.8], ..., [1, 0]}
  generar población pob_f
  agregar no dominados de pob_f a EP
  z = los mejores valores para cada objetivo en EP
  cálculo de aptitud de individuos en pob_f (g_bip)
  para generación en Gmax hacer:
    para cada individuo en pob_f hacer:
      seleccionar dos vecinos
      cruzar produciendo dos hijos
      mutación de los dos hijos
      evaluación función objetivo de los dos hijos
      actualiza z ideal (si algún hijo es mejor en algún objetivo)
      #reemplazo de vecinos e individuo si hijo es mejor
      Para cada hijo hacer:
        Para cada vecino de individuo hacer:
          calcular el fitness del hijo con el vector de vecino
          Si fitness de hijo es mejor que el de vecino:
            reemplazar al vecino con hijo
        calcular el fitness de hijo con el vector de individuo
        Si el fitness calculado de hijo es mejor que el de individuo:
          reemplazar a individuo con hijo
      si ningún elemento de EP domina a hi:
        se integra hijo a EP
        se eliminan los dominados por hi en EP

devolver EP
```

Detecting random walk in stock market prices based on Markov chains: Examining The Mexican Stock Market Index

Detección de caminata aleatoria en precios bursátiles mediante cadenas de Markov: aplicación al Índice de Precios y Cotizaciones de México

Juan de la Cruz Mejía-Téllez*

(Fecha de recepción: 27 de abril de 2018. Fecha de aceptación: 28 de junio de 2018)

ABSTRACT

The Random Walk (weak form efficient market) hypothesis is of vital importance in economics and finance to explain the behaviour of asset prices. Several authors have examined the validity and conditions under which the hypothesis holds. Most of the techniques and models used, rely on runs and serial correlation tests, however test using Markov chains are rare. Most Markov chains applications perform an stratification of returns defining the structure of the state space. The aim of this research is to detect the presence of random walk in stock market returns using Markov chains. The chain states are defined as the run lengths the process can develop. The concept of cycles is also introduced modelling the process in a more concretely. Conclusions are drawn analysing stationarity of the steady state probability distributions under diverse scenarios. The Mexican stock market daily closing prices index is analysed, covering a 16-year period, finding that the random walk is not present. This result is corroborated applying conventional random walk hypothesis tests.

JEL Classification: C02, C65, G14

Keywords: *stock returns, random walk, Markov chains, runs, cycles, steady state.*

* Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana–Azcapotzalco.
jmt@correo.azc.uam.mx

RESUMEN

La hipótesis de caminata aleatoria (forma débil de mercado eficiente) es de vital importancia en economía y finanzas para explicar el comportamiento de precios bursátiles. Una gran cantidad de artículos han examinado la validez y condiciones bajo las cuales se cumple la hipótesis. La gran mayoría de las técnicas y modelos que se han aplicado para confirmar la hipótesis se han basado en pruebas de corridas y de correlación serial, siendo raro encontrar la aplicación de Cadenas de Markov. En la mayoría de las aplicaciones de Cadenas de Markov se ha realizado la estratificación del rendimiento para estructurar el espacio de estados de la cadena. El objetivo de esta investigación, es el detectar la existencia de caminata aleatoria en los rendimientos bursátiles, mediante la aplicación de cadenas de Markov. Se definen los estados de la cadena como la longitud de la corrida que el proceso pueda generar. Se introduce además el concepto de ciclos, con el propósito de modelar el proceso de forma más concreta. Se obtienen conclusiones, analizando la estacionariedad en las distribuciones de probabilidad en condiciones de estado estable, observadas en escenarios diversos. Como ejemplo de aplicación de esta técnica de análisis se toma el caso del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) del mercado de valores mexicano, considerado un período de estudio de 16 años. Se concluye la ausencia de caminata aleatoria, y se corrobora este resultado con la aplicación de pruebas de hipótesis convencionales.

Clasificación JEL: C02, C65, G14

Palabras clave: rendimientos bursátiles, caminata aleatoria, cadenas de Markov, corridas, ciclos, estado estable.

Introduction

The random walk is known in stochastic processes theory to have the memoryless property or Markov property. The Markov property is fundamental in time series analysis and its validity has important implications in economics and finance.

McQueen and Thorley (1991) test the random walk hypothesis based on the statistical theory of finite state Markov processes or Markov chains. They perform a Bernoulli discretization (high, low) of a series of annual stock returns taking the average return of the prior 20 years as a reference base. Annual real and excess returns are shown to exhibit significant non-random walk tendencies in the sense that low (high) returns tend to follow runs of high (low) returns in the post-war period.

The simple time-homogeneous Markov model is one the most popular models specifying the stochastic process by transition probabilities (Jarrow *et al.* 1997). Chen and Hong (2012) have developed a new test for the Markov property using the conditional characteristic function embedded in a frequency domain approach, which tests the implication of the Markov property on conditional moments. Chen and Hong give an excellent literature review about models rooted in Markov processes applied to stock market analysis.

Following this line of inquiry, this paper tests the Markov property using long length as stochastic variable, it also introduces the idea of working with cycles, where a cycle is formed by the sequence of two runs of different signs. Cycles offer a simple indicator that is relatively easy to study. The transition probability matrices of runs and cycles are analysed separately, drawing conclusions from their steady-state probability distributions. This method is used to analyse the Mexican stock market prices index (IPC) covering the time period from February 2002 to January 2018, divided into two parts of equal length, obtaining three sample periods overall, period 1, period 2 and a combined period. All results indicate that the Markov property is not present, these results are corroborated with those obtained using conventional random walk hypothesis tests.

The paper is organized as follows. Section 1 presents important definitions. Section 2 introduces and performs an exploratory data analysis of the Mexican stock price dataset. Markov chain modelling is undertaken in Section 3. In section 4 random walk tests are used to corroborate results. Followed by conclusions.

1. Definitions

1.1. Return, run and cycle

The main concern of this research is to test the hypothesis that successive stock market price changes are independent, by applying the Markov chains technique, focusing on the analysis of runs. A run is a sequence of price changes of the same sign (Fama, (1965)). These price changes and their signs are automatically obtained by the calculation of returns. The standard definition of the continuously compounded return or *log return* is used:

$$r_t = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \quad (1)$$

where P_t is the asset price at time t and $p_t = \ln(P_t)$.

To explain these definitions a simple example is considered. Let the sequence of returns (i.e. changes) be: 1.48, 2.08, -0.04, 0.79, -1.13, -0.45, -0.83, 0.25, 0.58 (Note: it is a common practice for returns to be referred to in terms of percentages, but we omit writing % here). Considering only the signs of the variable, the following sequence is observed: +, +, -, +, -, -, -, +, +. Defining a positive run as a sequence of positive returns, a negative run as a sequence of negative returns and run length as the number of observations in a run. In this example there are three positive runs with lengths 2, 1, 2, and two negative runs with lengths 1, 3.

A *cycle* is a sequence of two runs of different signs, this is a negative run followed by a positive run in sequence. For the example, if we start with a negative run there are cycles with lengths 2, 5. Conversely, if a positive run is considered first there are two cycles with lengths 3, 4. In this paper, the cycles are recorded starting with negative runs, and it is necessary that the initial and final run are well defined. Therefore, in the example there would only be one cycle, since although the second negative run is well defined the following positive run is not, as the next observation could be a positive return or negative return.

1.2. Markov Chains

A stochastic process $X = \{X_n : n \geq 0\}$ on a countable set S is a time-homogeneous Markov Chain if, for any $i, j \in S$ and $n \geq 0$,

$$P(X_{n+1} = j | X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = j | X_n) \quad (2)$$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} \quad (3)$$

the p_{ij} is called the *one step transition probability* from state i to state j , these transition probabilities satisfy $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, $i \in S$, while $P = [p_{ij}]$ is called the *(one step) transition probability matrix* of the chain.

Condition (2), called the *Markov property*, says that, at any time n , the next state X_{n+1} is conditionally independent of the past X_0, \dots, X_{n-1} given the present state X_n . In other words, the next state is dependent on the past and present only through the present state.

Condition (3) simply says that the transition probabilities do not depend on the time parameter n ; the Markov chain is therefore “time-homogeneous”. If the transition probabilities were functions of time, the process X_n would be a time-inhomogeneous Markov chain. (Serforzo, 2009).

A time-homogeneous Markov chain is entirely defined by the transition probability matrix and the initial distribution $P(X_0 = x_0)$ of the Markov chain.

A Markov chain $(X_k, k \in S)$ is *stationary* if and only if it is time homogeneous, so that X_n has the same probability distribution for all $n \in T$.

2. Exploratory data analysis

The Mexican stock market index IPC is used to illustrate the application of this technique. The data correspond to the daily closing price observations covering a 16-year period (February 2002 to January 2018) and were obtained from *es-us.finanzas.yahoo.com web-site*. The dataset is partitioned into two periods, each 8 years long: February 2002 to January 2010, February 2010 to January 2018. These time intervals will be referred to as 1st period, 2nd period and the whole dataset as the whole period. The analysis of the two subsamples and the whole sample are performed separately. The objective is to detect if the Markovian property is held on runs and on cycles. Table 1 shows the number of observations of the IPC index in the three periods considered.

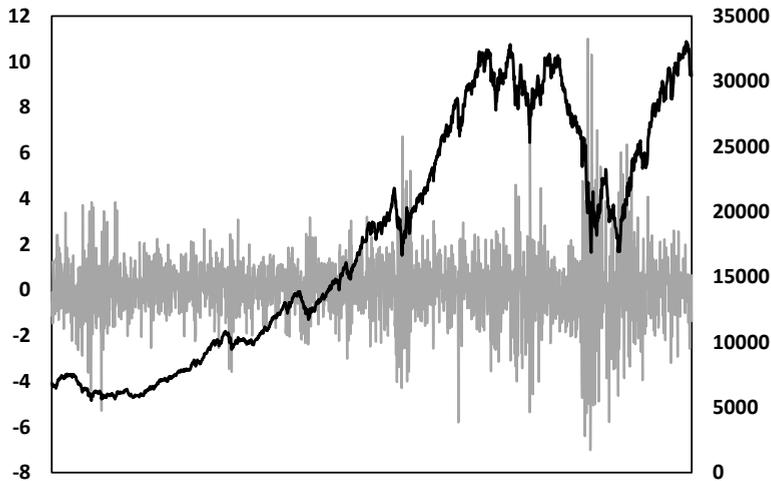
Figure 1 charts the IPC index and returns over period 1, where it grew exponentially until the first week of June 2007, fluctuating around a 30,000 points average for 6 months, and falling dramatically during a short period (until December 27th 2008) losing 48% of its peak value, a recovery followed, going just beyond its previous peak during the last eight months. The

Table 1. Number of observations in IPC index

Sample	Data	Returns (-)	Returns (+)	Returns total
1 st period	2011	902	1108	2010
2 nd period	1999	951	1047	1998
Whole period	4010	1853	2156	4009

Source: Prepared by author

Figure 1. IPC and returns (%): Feb/2002 – Jan/2010



Source: Prepared by author

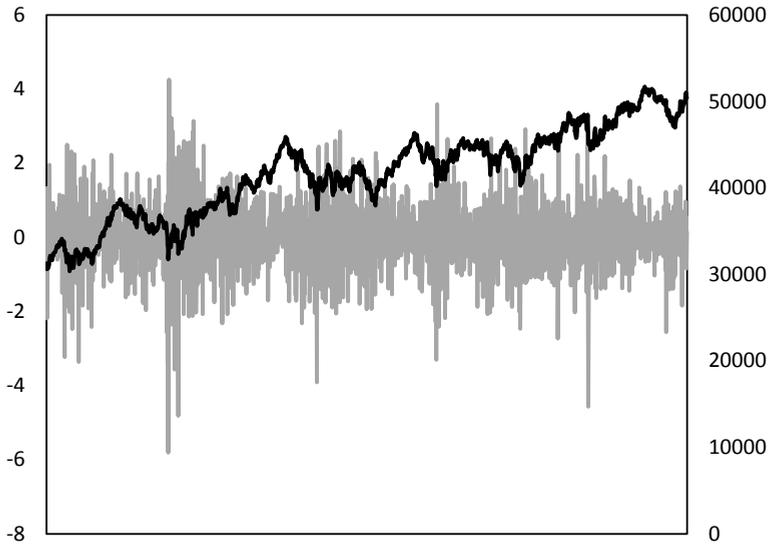
greatest positive return was 10.44% and occurred on December 13th 2008, the greatest negative return was -7.27% and happened on December 22nd 2008.

Figure 2 plots the IPC index and returns over period 2. It shows that movements during period 2 are much more moderate than in period 1, the largest positive return of 4.17% occurred on August 11th 2011 and the largest negative return was -5.98% on August 8th 2011.

Table 2 records the frequencies of positive and negative run lengths for each of the two 8-year periods, and for the combined 16-year period. It can be observed that there are significantly more negative runs of length one than positive runs of length one. It is also observed that negative runs of length lower than 4 occur more frequently than positive runs of the same length, excepting a run of length 3 for the first period. Furthermore, it is evident that positive runs of length longer than 3 present substantially higher occurrence than negative runs of the same length. As expected, the total number of runs is the same for negative runs and for positive runs.

Table 3 records the frequencies of cycle lengths for each of the 8-year periods and for the whole 16-year period. It is observed that in the second period substantially more cycles with length lower than 4 were generated compared to those for the first period, representing 50 per cent of the total

Figure 2. IPC and returns (%): February 2010 – January 2018



Source: Prepared by author

Table 2. Frequency of run length

		Length										
	Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
1 st period	Negative	234	115	36	22	18	8	4	0	1	-	458
	Positive	188	115	60	37	24	18	6	5	2	3	458
2 nd period	Negative	253	119	71	28	13	6	3	0	0	1	494
	Positive	235	117	62	42	22	8	6	1	1	-	494
Whole. Period	Negative	489	234	127	50	31	14	7	0	1	1	954
	Positive	424	233	122	79	46	26	12	6	3	3	954

Source: Prepared by author

number of cycles of the second period. Table 3, also reveals that cycles of length 2 and 3 are the most frequent over the study period, with about 47 per cent of occurrence among the total number of cycles.

Table 3. Frequency of cycle length

Sample	Length												Total
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1st period	93	105	87	60	41	26	19	13	6	4	3	1	458
2nd period	125	122	88	59	36	30	19	6	7	1	1	-	494
Whole period	219	228	175	119	77	56	38	19	13	5	4	1	954

Source: Prepared by author

3. Markov chains modelling

The aim of modelling a stock market index as a Markov chain is to find out if the market may be viewed as holding the Markov property, i.e., the future is conditionally independent of the past given the present state of the process, and that the probability distribution is time homogeneous.

3.1. Runs

Investigation of the time series of returns focuses on the stochastic variable run length, in contrast to other Markov chains applications where the state space of the chain is defined by stratification of the return's level see Chen and Hong, (2012).

Let X_n be the length of the run, the time parameter index n indicates when the chain changes sign. The state space is finite $S = \{1, 2, \dots, m\}$ representing all possible run lengths, with transition probabilities matrix $P = [p_{ij}]$, where p_{ij} is the probability, that for a run of length i , the next run of the same sign be of length j . The estimate of the p_{ij} values are simply the transition frequencies from state i to state j divided by the total number of transitions departing from i . Tables 4 to 9 illustrate the transition frequency matrices for these three sample periods.

Table 4. Negative runs transition frequency matrix, first sample period

		Next run length							
		1	2	3	4	5	6	7	9
Previous run length	1	118	67	25	9	8	5	1	1
	2	57	30	16	4	6	1	1	
	3	32	10	6	3	3	0	2	
	4	12	3	3	2	1	1	-	
	5	9	3	3	3	-	-	-	
	6	4	1	2	1	-	-	-	
	7	2	1	1	-	-	-	-	
	9	1	-	-	-	-	-	-	

Source: Prepared by author

Table 5. Positive runs transition frequency matrix, first sample period

		Next run length									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Previous run length	1	74	41	28	14	11	13	2	2	1	2
	2	46	33	14	13	5	2	1	0	1	-
	3	26	15	7	4	3	1	2	1	0	1
	4	18	8	4	2	2	1	0	2	-	-
	5	11	8	2	1	2	-	-	-	-	-
	6	7	4	4	2	1	-	-	-	-	-
	7	3	1	0	0	0	1	1	-	-	-
	8	3	1	0	1	-	-	-	-	-	-
	9	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
	10	0	3	-	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

Table 6. Negative runs transition frequency matrix, second sample period

		Next run length							
		1	2	3	4	5	6	7	10
Previous run length	1	129	60	40	14	4	4	1	1
	2	57	30	19	6	5	1	1	-
	3	39	18	5	5	2	1	1	-
	4	15	5	4	2	2	-	-	-
	5	7	4	2	-	-	-	-	-
	6	3	1	1	1	-	-	-	-
	7	2	1	-	-	-	-	-	-
	10	1	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

Table 6 reveals that states 8 and 9 do not occur.

Table 7. Positive runs transition frequency matrix, second sample period

		Next run length								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Previous run length	1	107	59	30	17	14	5	1	1	1
	2	62	23	16	9	4	2	1	-	-
	3	30	12	8	9	1	1	1	-	-
	4	21	12	3	4	2	-	-	-	-
	5	8	7	1	3	1	0	2	-	-
	6	5	2	0	0	1	-	-	-	-
	7	1	1	3	0	0	0	1	-	-
	8	0	1	-	-	-	-	-	-	-
	9	1	-	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

Table 8. Negative runs transition frequency matrix, whole sample period

		Next run length									
		1	2	3	4	5	6	7	9	10	
Previous run length	1	249	127	65	23	12	9	2	1	1	
	2	114	60	35	10	11	2	2	-	-	
	3	71	28	11	8	5	1	3	-	-	
	4	27	8	7	4	3	1	-	-	-	
	5	16	7	5	3	-	-	-	-	-	
	6	7	2	3	2	-	-	-	-	-	
	7	4	2	1	-	-	-	-	-	-	
	9	1	-	-	-	-	-	-	-	-	
	10	1	-	-	-	-	-	-	-	-	

Source: Prepared by author

Table 9. Positive runs transition frequency matrix, whole sample period

		Next run length									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Previous run length	1	181	101	58	31	25	18	3	3	2	2
	2	108	56	31	22	9	4	2	0	1	-
	3	56	27	15	13	4	2	3	1	0	1
	4	39	20	7	6	4	1	0	2	-	-
	5	19	15	3	4	3	0	2	-	-	-
	6	12	6	4	2	2	-	-	-	-	-
	7	4	2	3	0	0	1	2	-	-	-
	8	3	2	0	1	-	-	-	-	-	-
	9	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
	10	0	3	-	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

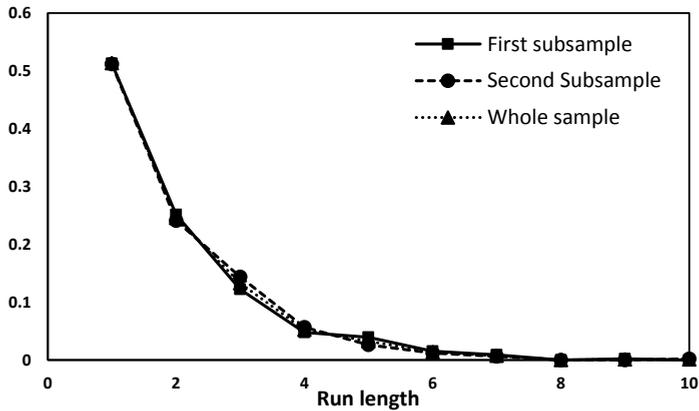
It is assumed that all these chains are aperiodic and irreducible, so that the steady state probability vector π must satisfy

$$\pi = \pi P \quad (4)$$

the π solution is given by any row of the matrix: $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$

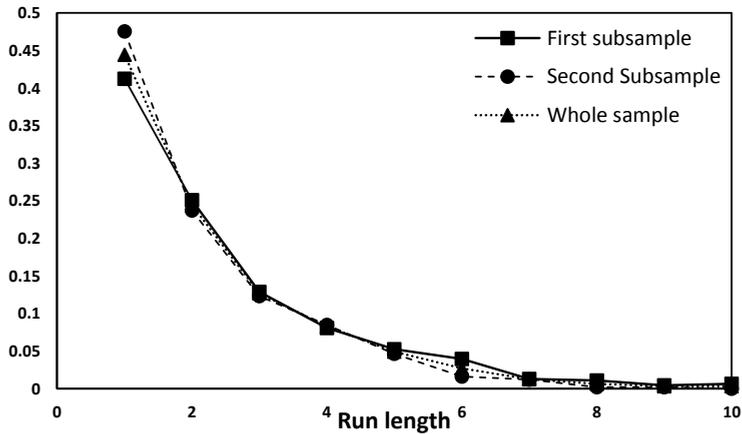
Figures 3 and 4 illustrate the graphs of the steady state probability distributions for positive and negative run lengths for the three sample cases.

Figure 3. Negative run length steady state probabilities



Source: Prepared by author

Figure 4. Positive run length steady state probabilities



Source: Prepared by author

A summary of statistical measures of these steady-state distribution is shown on Table 10.

Table 10. Steady state statistical measures of run length for the sample period

	1st period		2nd period		Whole period	
	Negative	Positive	Negative	Positive	Negative	Positive
Mean	1.9430	2.4064	1.9190	2.1103	1.9286	2.2526
Variance	1.7485	3.1533	1.5886.	2.0848	1.6640	2.6139

Source: Prepared by author

Taking into account that the first and second periods are partition elements of the whole period with same length, an evaluation is carried out about the variation of the second central moment, so that, dividing the negative run length variance of the second period by the negative run length variance of the first period results in a decrement of about 9.14%. A similar evaluation for the positive run length variance results a decrement of about 34%. These results strongly indicate that the steady-state run length distribution does not remain stationary, concluding that the Markovian property is not held on runs.

3.2. Cycles

Let X_n be the length of a cycle, as stated before, a cycle is formed by a positive and negative runs (or vice-versa) in sequence. Here the time parameter index n indicates when the cycle is concluded. The state space is finite $S = \{2, \dots, m\}$ representing all possible cycle lengths. As it is evident, length 1 never occurs. The transition probabilities matrix $P = [p_{ij}]$, where p_{ij} is the probability that a cycle of length i be followed by a cycle length j . The estimate of p_{ij} is given by the relative frequency of the transitions from state i to state j . Tables 11 to 14 show these transition frequencies.

Table 11. Cycles transition frequency matrix, first sample period

		Next cycle length											
		2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	
Previous cycle length	2	14	22	20	15	7	4	7	1	0	2	0	1
	3	16	19	17	14	16	9	2	7	4	0	1	-
	4	16	26	20	9	6	2	6	1	0	1	-	-
	5	21	12	10	7	4	3	1	0	1	1	-	-
	6	6	10	8	5	4	5	0	1	1	0	1	-
	7	8	5	4	2	3	2	2	-	-	-	-	-
	8	4	6	3	3	0	0	0	2	0	0	1	-
	9	4	1	4	3	0	0	1	-	-	-	-	-
	10	2	0	0	2	1	1	-	-	-	-	-	-
	11	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	12	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	13	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

Table 12. Cycles transition frequency matrix, second sample period

		Next cycle length										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Previous cycle length	2	29	31	20	15	9	10	5	2	3	1	-
	3	37	33	18	15	6	8	3	0	2	-	-
	4	18	19	22	11	5	6	5	1	-	-	-
	5	16	13	10	5	9	3	3	-	-	-	-
	6	7	10	2	7	4	1	2	2	1	-	-
	7	10	7	5	4	2	2	-	-	-	-	-
	8	6	7	3	0	1	0	1	0	1	-	-
	9	1	0	3	0	1	0	0	1	-	-	-
	10	0	2	3	2	-	-	-	-	-	-	-
	11	0	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-
	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

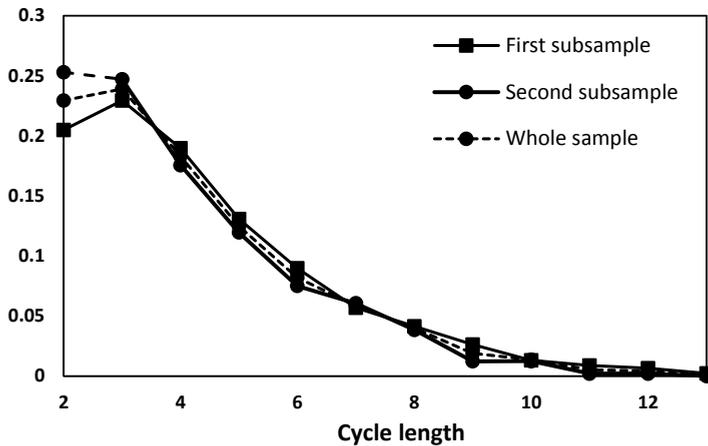
Source: Prepared by author

Table 13. Cycles transition frequency matrix, whole sample period

		Next cycle length											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Previous cycle length	2	43	54	40	30	16	14	12	3	3	3	0	1
	3	53	52	36	29	22	17	5	7	6	0	1	-
	4	34	45	42	20	11	8	11	2	0	1	1	-
	5	37	25	20	12	13	6	4	0	1	1	-	-
	6	13	20	10	12	8	6	2	3	2	0	1	-
	7	18	12	9	6	5	4	2	-	-	-	-	-
	8	10	13	6	3	1	0	1	2	1	0	1	-
	9	5	1	7	3	1	0	1	1	-	-	-	-
	10	2	2	3	4	1	1	-	-	-	-	-	-
	11	2	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	12	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	13	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Source: Prepared by author

Figure 5. Cycle length steady state probabilities



Source: Prepared by author

Figure 5 provides a better insight about the behaviour of the cycle length probability distribution at the steady state for the three analysed samples.

A summary of statistical measures for these steady-state distribution is shown in Table 14.

Table 14. Steady state: Statistical measures of cycle length for the sample periods

	1 st . Period	2 nd period	Whole period
Mean	4.3510	4.0291	4.1818
Variance	4.7469	3.8845	4.3157

Source: Prepared by author

As can be seen on table 14, neither the mean or the variance changed. Therefore, we conclude that the Markovian property does not hold on cycles.

In order to highlight that the cycle length distributions do not preserve time-homogeneity, the two elements of the periods analysed are taken under consideration, since they are the ones suitable for comparison because they have the same length. It is enough to observe the change in variance is about 18% from the first period to the second period, providing strong evidence that the Markov property is not present, consequently, the random walk assumption does not hold.

4. Application of conventional random walk tests

In order to corroborate the previous results the application of runs test and correlation tests will provide evidence about whether or not the random walk hypothesis is fulfilled.

The efficient market hypothesis (EMH) in its weak-form, postulates that successive one-period stock returns are independently and identically distributed (IID), *i.e.*, they resemble a “random walk” (Fama, 1970). Fama (1965) analysed runs for several stocks finding little evidence for violations of efficiency based on serial dependence in returns. Samuelson (1965) and Mandelbrot (1966) rigorously studied the theory of random walks. The EMH has been analysed in many ways, the literature presents a great variety of models to test the hypothesis that markets fluctuations follow a random walk. Examples include: the variance ratio test, the runs test, the serial correlation test and other more general models (for applications of these tests, see

for instance Al-Loughani and Chappell, 1997; Chang and Ting, 2000; Sensoy, 2012, Mishra *et al.*, 2012; Risso, 2014, Dsouza and Millikarjunappa, 2015).

Three random conventional tests are applied to the time series under study: difference sign, individual autocorrelation and joint autocorrelation.

4.1. The difference sign test

Kendall (1976) proposed a method to detect randomness by counting the number of positive first differences of the series, which are reflected by returns (see equation 1). Let X represent the number of positive returns of a series having n-1 returns. For a random series the distribution of X tends to be Normal $((n-1)/2, (n+1)/12)$, see Table 15.

Table 15. The difference sign test result on positive returns,
Ho: Normality holds

Sample period	Positive	Expected	Std-dev.	Confidence Interval (95%)	Decision
1 st . period	1108	1004.5	12.95	[979,1029]	Reject Ho
2 nd . Period	1047	998.5	12.91	[973,1024]	Reject Ho
Whole period	2156	2004	18.28	[1968,2039]	Reject Ho

Source: Prepared by author

Harvey (1994) supports these findings that the emerging markets returns are not normally distributed.

4.2. Autocorrelation function test: ACF

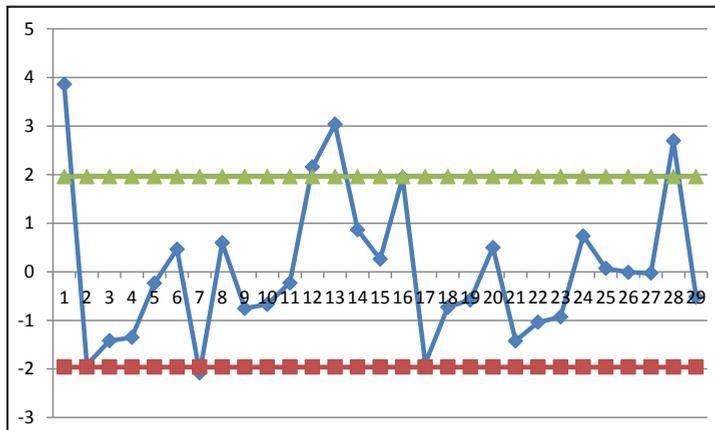
For a given positive integer *l* the t-ratio is statistic defined as

$$t - ratio = p_l / \left(\left(1 + 2 \sum_{i=1}^{l-1} p_i^2 \right) / T \right)^{1/2} \quad (4)$$

where p_l is the lag- l sample autocorrelation coefficient of r_t it can be used to test $H_0: p_l = 0$ versus $p_l \neq 0$. If $\{r_t\}$ is a stationary Gaussian series satisfying $p_j = 0$ for $j > l$, the t -ratio is asymptotically distributed as a standard normal random variable. Hence, the decision rule of the tests is to reject H_0 if t -ratio $> Z_{\alpha/2}$, where is the $100(1 - \alpha/2)$ th percentile of the standard normal distribution (Tsay 2005, p. 27).

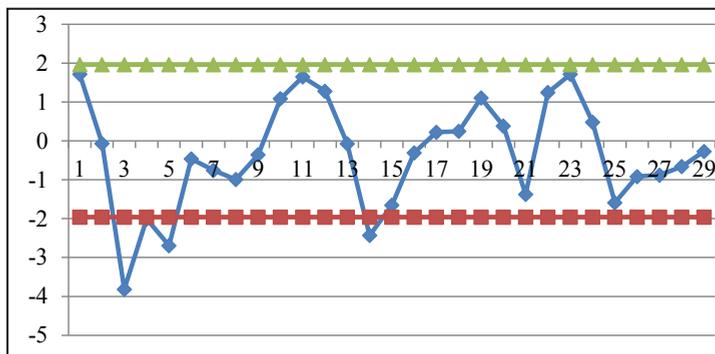
In figures 6 and 7, at least 3 points of the t -ratio statistics fall outside the 95% confidence interval, giving evidence that random walk is not present among the 16-year analysis period.

Figure 6. t -ratio 1st. subsample, 95% confidence interval



Source: Prepared by author

Figure 7. t -ratio, second subsample , 95% confidence interval



Source: Prepared by author

4.3. Ljung and Box test: $Q(m)$

The Ljung and Box statistic $Q(m)$ is widely used when it is required to test jointly that several autocorrelations of r_t are zero: $H_0: p_1 = p_2 = \dots = p_m = 0$ against the alternative hypothesis $H_1: p_i \neq 0$ for some $i \in [1, \dots, m]$. $\{r_t\}$ is assumed to be an iid sequence with $E[r_t^2] < \infty$. $Q(m)$ is asymptotically a chi-squared random variable with m degrees of freedom (Ljung and Box, (1978)):

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{l=1}^m \frac{p_l^2}{T - l} \tag{5}$$

where p_l is the lag- l sample autocorrelation of r_t . H_0 is rejected if it is found at least one autocorrelation coefficient is significant. Two additional replicas were performed, $m = 16, 24$, see Table 16.

All these conventional tests provide strong evidence that the null hypothesis of randomness is not held in the IPC index over the study period.

Table 16. Ljung and Box statistic $Q(m)$

Sample	$Q(m=8)$	$Q(m=16)$	$Q(m=24)$
1 st . period	27.66	47.92	57.58
2 nd . Period	30.93	45.86	54.35
Whole period	45.67	67.72	77.92
$\chi^2_{m,5\%}$	14.07	26.30	36.42
Decision	Reject H_0	Reject H_0	Reject H_0

Source: Prepared by author

The results obtained with the application of these three methods testing randomness, build upon the first difference of the IPC time series and provide strong evidence that the random walk hypothesis is not present in the time series during the study period. The difference sign test focussing on the number of positive returns and assuming normality (H_0), rejects H_0 , since the results fail within the 95% confidence interval. The other two

methods used are based on individually and jointly autocorrelation tests and also provide evidence that the random walk hypothesis does not hold for the IPC time series at 5% significance level.

Conclusions

In this paper a new approach is introduced for the search of randomness in stock market returns. This approach involves the application of Markov chains using run length as the stochastic variable. In this analysis the concept of *cycle* is also introduced, which consists of two runs of different signs in sequence. The main objective is to detect if the Markov property holds for a series of returns. The analysis is carried out using the Mexican Stock Market Index for a 16-year period of daily stock closing prices. A division of the dataset is done obtaining two periods, each 8 years long. Dealing with the three sample periods as separate cases, we determine the stochastic matrices with state spaces consisting of the possible lengths of runs and cycles in the three periods. By examining the second central moment of the steady-state probability distributions, conclusions are drawn about homogeneity and stationarity properties of the series under consideration. Finding out that the cycle length distributions do not preserve time-homogeneity, and that the Markovian property is not held on cycles. Results were corroborated applying conventional random walk tests: difference sign, individual and joint correlations. It is worth mentioning that the method of analysis introduced here involves measuring procedures rather than hypothesis testing, as detecting deviations from randomness is important for investors as it might help to improve the possibilities of obtaining profits.

Finally, we conclude that the random walk hypothesis does not hold in the IPC time series among the three periods.

Referencias bibliográficas

- Al-Loughani, N. y Chappell, D. (1997). "On the validity of the weak-form efficient markets hypothesis applied to the London Stock Exchange". *Applied Financial Economics*. vol. 7, núm. 2, pp. 173-176.
- Chang, K. y Ting, K. (2000). "A variance ratio test of the random walk hypothesis for Taiwan's stock market". *Applied Financial Economics*. vol. 10, núm. 5, pp. 525-532.

- Chen, B. y Hong Y. (2012). "Testing for Markov property in- time series". *Econometric Theory*, , núm. 28, pp. 130-178.
- Dsouza, J. J. y Mallikarjunappa, T. (2015). "Do the Stock Market Indices Follow Random Walk?". *Asia-Pacific Journal of Management Research and Innovation*, vol. 11, núm. 4, pp. 251-273.
- Fama, E. (1965). "The Behaviour of Stock Market Prices". *Journal of Business*, vol. 38, núm. 1, pp. 34-105.
- Fama, E. (1970). "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". *Journal of Finance*, , núm. 25, pp. 383-417.
- Harvey, C. R. (1994). "Conditional asset allocation in emerging markets". Working Paper, *National Bureau of Economic Research*, Cambridge, MA.
- Jarrow, R., Lando, S. y Turnbull, S. (1997). "A Markov model for the term structure of credit risk spreads". *Review of Financial Studies*, núm. 10, pp. 481-523.
- Ljung, G. yd Box, G. E. P. (1978). "On a measure of lack of fit in time series models". *Biometrika*, núm. 66, pp. 67-72.
- Mandelbrot, B. (1966). "Forecast of future prices, unbiased markets, and Martingale models". *Journal of Business*, vol. 39, núm. 1, (Special supplement), pp. 242-255.
- McQueen, G. y Thorley, S. "Are Stock Returns Predictable? A test Using Markov Chains". *The Journal of Finance*, vol. 46, núm. 1, pp. 239-264.
- Mishra, A. y K., Misra, V. y Rastogi, S. (2012). "Empirical evidence on weak form efficiency in Indian Stock Market". *International Journal of Financial Management*, vol. 2, núm. 3, pp. 62-78.
- Risso, W. y A. (2014). "An Independence Test Based on Symbolic Time Series". *International Journal of Statistical Mechanics*, article ID 809383.
- Samuelson, P. y A. (1965). "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly". *Industrial Management Review*, 6, pp. 41-49.
- Şensoy, A. (2012). "Analysis on Runs of Daily Returns in Istanbul Stock Exchange". *Munich Personal RePEc Archive*. Paper No. 42645.
- Serforzo, R. (2009). "Basics of Applied Stochastic Processes, Probability and Applications". *Springer-Verlag*, Berlin Heilderberg.
- Tsay, R.S. (2005), "Analysis of Financial Time Series". Second edition, *John Wiley & Sons Inc.* N. J.

Un modelo de opciones reales fuzzy y funciones de utilidad isoelásticas para valorar I&D en mercados incompletos

A fuzzy real options and isoelastic utility functions model for valuation R&D in incomplete markets

Gastón S. Milanesi*

(Fecha de recepción: 8 de abril de 2018. Fecha de aceptación: 12 de julio de 2018)

RESUMEN

Los modelos de valoración a través de opciones reales son apropiados para cuantificar la flexibilidad estratégica contenida en proyectos, como empresas de base tecnológica, activos intangibles y estrategias innovadoras. Su debilidad reside en el supuesto de mercados completos, condición difícil de cumplir en mercados emergentes. Por tal motivo, se desarrolla un modelo que combina el binomial borroso y funciones isoelásticas de utilidad (CRRA), incorporando grados de aversión al riesgo del agente. La metodología anterior se aplica a un proyecto biofarmacéutico con opciones secuenciales, utilizando análisis de sensibilidad sobre el coeficiente de aversión y el valor de la opción. Se concluye sobre las ventajas del modelo, en particular modelando ambigüedad con lógica borrosa e incorporando actitudes frente al riesgo.

Clasificación JEL: G30 G32

Palabras clave: opciones reales, binomial fuzzy, función isoelástica de utilidad, empresas de base tecnológica

ABSTRACT

The real options model are appropriate to quantify strategic flexibility in projects, such as technological basis firms (TBF), intangibles assets and innovatives strategies. Its weakness resides in the complete markets assumption, which is rarely found in

* Departamento de Ciencias, Administración-Universidad Nacional del Sur
CEPAF Centro de Estudios para Análisis Financiero-Facultad
de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires

emerging markets. Therefore a model that combines the binomial fuzzy and the isoelastic utility function (CRRRA) was developed, which incorporates the agent's degree risk aversion. Such model is applied to a biofarmaceutical project with secuencial options, using a sensibility analysis over the risk aversion coefficients and the option value. The conclusions deals with the advantages of the model, specifically with modeling ambiguity with fuzzy logic and incorporating risk attitudes.

JEL Classification: G30, G32

Keywords: *real options, binomial Fuzzy, isoelastic utility unfunction, technological basis firms*

Introducción

Una de las principales herramientas de valuación de activos intangibles, empresas de base tecnológicas, desarrollos en I&D o estrategias lo constituye el enfoque de opciones reales (Perlitz, Peske y Schrank, 1999; Copeland y Antikarov, 2001; Schwartz, 2002 Grasselli, 2011; Schwartz, 2013; Fernández, Perobelli Cordero y Brandao, 2014; Mun, 2015), entre otros. Los trabajos seminales sobre opciones financieras son las bases de estos modelos (Black y Scholes, 1972, 1973; Merton, 1973). El primer trabajo sobre opciones reales fue desarrollado por Myers (1977) para valorar la estrategia (opción) de crecimiento. Posteriormente se plantearon diferentes modelos aplicables a situaciones contingentes: (a) Opción de diferimiento (Mc Donal y Siegel, 1986); (Paddock, Siegel y Smith, 1988); (Ingersoll y Ross, 1992); (b) Opción de crecimiento (Myers, 1977); (Trigeorgis, 1988); (Smit, 1996); (c) Opción de abandono (Myers y Majd, 1990); (d) Opciones de expandir-contratar o extensión de la vida útil (Trigeorgis y Mason, 1987); (Keema, 1988); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam y Schwartz, 1985); (f) Opción de intercambio (Margrabe, 1978); (Kulatilaka, 1988); (Kulatilaka y Trigeorgis, 1994); Opciones financieras de insolvencia (Mason y Merton, 1985); (Trigeorgis, 1993). La teoría de opciones se complementa con el Análisis de decisiones y riesgos (Smith y Nau, 1995); empleo de simulación aplicando el enfoque MAD *Marketed Asset Disclaimer*; (Copeland y Antikarov, 2001); (Copeland y Tuffano, 2004) y el análisis de Opciones Reales y Teoría de Juegos OR y *Games Theory*; (Smit y Trigeorgis, 2004).

Para su implementación es necesario que el mercado sea completo, es decir, la existencia de carteras que repliquen los flujos de fondos del activo real objeto de valuación (Dixit y Pindyck, 1994; Trigeorgis, 1997; Amram y Kulatilaka, 1998; Boer, 2002; Borison, 2003; Smit y Trigeorgis, 2004; Mun, 2004; Shockley, 2006; Kodukula y Chandra, 2006; Graeme, 2009; Wang y Halal, 2010; Mun, 2015 y Salahaldin, 2016. Si el mercado financiero es incompleto, entonces el valor de la opción no puede valuarse indirectamente con carteras de activos financieros gemelos¹ (Wilmott, 2009).

Es común resolver problemas de valuación en mercados incompletos, en especial si el objeto de valoración son empresas de base tecnológica, *starts ups*, intangibles o simplemente empresas cerradas, situación que se acentúa en el caso de mercados emergentes. Para sortear tal inconveniente han sido desarrollados diversos modelos, entre otros la propuestas de Smith y Nau, (1995) clasificando los riesgos en “mercado” y “privados”, donde los primeros tiene activo financiero réplica para su valuación y los segundos se sugiere el uso de funciones de utilidad y equivalentes ciertos a partir de los desarrollos de Keeney y Raiffa, (1976, 1993). El enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) constituye otra herramienta, suponiendo que el valor obtenido mediante el descuento de flujos de fondos refleja el precio de mercado al que se negociaría el proyecto y la volatilidad, como insumo del modelo de valuación es obtenida a partir de la tasa rendimiento generada por el proyecto, (Copeland y Antikarov, 2001).² Alternativamente se puede emplear la teoría de conjuntos borrosos (Dubois y Prade, 1980), y con pertinencia en finanzas (Buckley, 1987), para estimar la volatilidad aplicando el concepto de ambigüedad o falta total de información.

El trabajo tomó como punto de partida la noción de riesgos de mercado y privados propuesta por Smit y Nau (1995). En lo que respecta a la incertidumbre, esta es tratada incorporando la lógica fuzzy en el enfoque de

¹ El mundo ideal de los modelos seminales (Black y Scholes, 1972), el riesgo se anula mediante carteras de cobertura. La posibilidad de cobertura es una interesante propiedad matemática en el modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979), los agentes pueden estar en desacuerdo con la probabilidades, pero una vez estimados el movimiento de ascenso y descenso, construyendo carteras de cobertura se arriva al valor del derivado, sólo se necesita tener la misma percepción de la volatilidad del derivado.

² Desarrollado inicialmente por Copeland y Antikarov (2001), Copeland y Tufano, (2004), Brandao y Dyer, (2005); Brandao, Dyer y Hahn, (2005); Smith, (2005), Brandao, Dyer y Hahn, (2008) siendo la variable a simular $z = \log(VP_1/VP_0) - 1$, el rendimiento producto del cociente entre los valores actuales.

opciones reales (Muzzioli y Torricelli, 2004; Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006; Garcia Sastre y Roselló Miralles, 2007; Liao y Ho, 2010; Zdnek, 2010. En Shine Yu, Ming, H, Li, y Chen, 2011; Milanesi, 2013, 2014 y 2015. Paralelamente los nodos de la rejilla binomial borrosa son valorados mediante funciones isoelásticas de utilidad y equivalentes ciertos (Ochoa y Vasseur, 2014; Ochoa y Cadavid, 2016). Las funciones isoelásticas empleadas son del tipo *CARA* y *CRRA* para emplear coeficientes de aversión al riesgo, ya que cumplen con las condiciones de incrementos y decrementos de utilidad, y utilidad marginal respectivamente, frente a aumentos en la riqueza. Combinando el modelo borroso de valuación de opciones, funciones isoelásticas de utilidad y equivalentes ciertos, se pretende propone un modelo que genere valuaciones ajustadas, según el coeficiente de aversión al riesgo del agente. Además, se evita utilizar activos financieros, réplica de los flujos de fondos correspondientes a la opción. De especial interés en los casos donde la valuación deba practicarse en mercados incompletos y emergentes, en particular para activos intangibles, empresas de base tecnológicas, *start-up*, en su mayoría son dominadas por riesgos *privados* en un contexto de ambigüedad de datos.

La estructura del trabajo es la siguiente: las dos primeras secciones desarrollan los fundamentos teóricos del modelo. La aplicación del modelo se concreta a la valuación de un proyecto tecnológico con opciones secuenciales, desde la etapa de diseño experimental hasta su lanzamiento. Los coeficientes de aversión al riesgo contenidos en las funciones isoelásticas son sensibilizados, suponiendo tres conductas: valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. Son obtenidos los valores acordes a la conducta del agente frente al riesgo, asimismo las magnitudes monetarias son derivadas de una proyección de datos en condiciones de ambigüedad. Finalmente se arriba a las principales conclusiones.

1. El coeficiente de aversión al riesgo y la función de utilidad isoelástica

A partir de las nociones seminales de Bernoulli en el siglo XVIII, (1954) y von Neumann y Morgenstern, (1944), desarrollan la Teoría de la Utilidad Esperada. Los primeros conceptos se remontan a los estudios de Huygens; introduciendo el concepto de valor esperado de la decisión. Bernoulli fue quien presentó las primeras críticas a la teoría del valor esperado como medida en el proceso decisorio (Dehling; 1997). Introduce la noción de

utilidad para medir valor esperado por considerar incorrecta la medida valor esperado en términos de precios. Esto es producto de que el precio es un fenómeno observable, similar para todos los agentes. La utilidad es un concepto subjetivo e individual condicionado al estado de riqueza en que se encuentra el individuo.

El cuerpo teórico propuesto por von Neumann y Morgenstern, evolucionó a partir de los trabajos desarrollados por Friedman y Savage, (1948); Markowitz, (1952); Allais, (1953, 1988); Savage, (1954); Simon, (1955 y 1979). Como consecuencia de incorporar sesgos y heurísticas en la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, nace una rama de estudio conocida como finanzas conductuales (*Behavioural Finance*), Tversky y Kahneman, (1974 y 1981); Kahneman y Tversky, (1979); Thaler (1985); Shefrin y Statman, (1985), (2000); Thaler y Johnson, (1990); Shiller, (2005); Shefrin, (2010) entre otros, donde un desarrollo de la evolución de la Teoría de la Utilidad Esperada se puede encontrar en (Milanesi, y El Alabi, 2016). Según la clásica teoría de la elección en condiciones de incertidumbre, existen dos axiomas que definen la conducta de los agentes frente al riesgo (Elton y Gruber, 1995; Copeland, Weston y Shastri, 2004; Pareja Vassesur y Cadavid Pérez, 2016):

a) Las personas prefieren más riquezas a menos. Si la función de utilidad se define como $U(\cdot)$ y la riqueza como W , frente a dos alternativas, $A = W + x$ y $B = W + x$, donde x representa una suma adicional de riqueza; si la riqueza de A es mayor a la de B, entonces la $U(A) > U(B)$. Matemáticamente implica que la curva de la función es creciente y por lo tanto su derivada primera positiva $U'(\cdot) > 0$.

b) Las personas pueden ser adversas, neutrales o afectas frente a inversiones riesgosas. De esto dependerá la forma de la curva de utilidad; (cóncava, lineal o convexa). La función nace, producto de las preferencias (utilidades) intercambiables entre riqueza cierta $U(E(W))$ y riqueza esperada (probable $E[U(W)]$). En el caso de que la utilidad de la magnitud cierta sea mayor a la probable $U(E(W)) > E[U(W)]$ se es adverso al riesgo, siendo la derivada segunda negativa $U''(\cdot) < 0$ (utilidad marginal decreciente, concavidad). Si las utilidades de las magnitudes intercambiables son iguales, $U(E(W)) = E[U(W)]$ se es neutral, donde la segunda derivada es cero $U''(\cdot) = 0$. Finalmente si la utilidad de la magnitud cierta es menor a la esperada $U(E(W)) < E[U(W)]$, se tiene una conducta afecta al riesgo, con derivada segunda positiva $U''(\cdot) > 0$ (utilidad marginal creciente,

convexidad). Por tanto, la compensación por asumir riesgo surge como diferencia entre la utilidad de la riqueza esperada menos el equivalente cierto $E[U(W)] - U(E(W))$. Para una persona adversa al riesgo, una magnitud monetaria esperada es equivalente a una cifra cierta cuando las utilidades son iguales, $U(W_c) = E[U(W)]$. La magnitud cierta (incógnita en la igualdad) se denota como W_c , y se conoce como *equivalente cierto* de la riqueza, y su valor es función inversa del coeficiente de aversión al riesgo. Por ejemplo, dada una función $U(W_c) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$; siendo $U(W) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$ e γ el coeficiente de aversión al riesgo, se tiene que a mayor gamma menor equivalente cierto (Wilmott, 2009). La aversión al riesgo hace que la figura sea cóncava, derivada segunda negativa $U''(W) < 0$.

Con el objeto de trabajar aplicando equivalentes ciertos sobre magnitudes esperadas, es menester brindar una definición de que se entiende por aversión al riesgo, Milanesi (2017). Desarrollado por Pratt (1964) y Arrow (1971), estos proponen los coeficiente de aversión al riesgo absoluta (CARA) y relativa (CRRRA). La CARA es igual a la siguiente expresión;

$$CARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (1)$$

Es absoluta debido a que mide aversión para un nivel dado de riqueza y explica el comportamiento de esta medida ante cambios en la riqueza. El producto entre la ecuación 1 y el nivel de riqueza arroja la CRRRA

$$CRRRA = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (2)$$

Uno de los fuertes supuestos de la CRRRA, es que esta adopta un comportamiento constante para personas adversas al riesgo, en terminos de pérdidas (ganancias) absolutas. Asumiendo CARA decreciente frente a incrementos de W y CRRRA constantes, se pueden examinar diferentes funciones de utilidad empleadas en la literatura. Por ejemplo, a favor de las funciones exponenciales y logarítmicas del tipo $U(W) = -w^x$, o $U(W) = \log(w)$, se presentan las evidencias contenidas en los trabajos de Friend y Blume, (1975); Rabin, (2000); Vendrik y Woltjes, (2007); Wakker, (2008); Suen, (2009); Boyce,

Wood, Bank, Clark y Brown, (2014). Cumplen con las propiedades indicadas: la utilidad marginal de la riqueza es positiva, $U'(W) > 0$; decrece a medida que aumenta la riqueza $U''(W) < 0$; la medida *CARA* decrece ante aumentos de riqueza $\frac{d(CARA)}{dW} < 0$ y la *CRRRA* se mantiene constante $\frac{d(CRRRA)}{dW} = 0$. Dentro de la familia de funciones exponenciales que cumplen con las condiciones indicadas se tiene a las isoelásticas. Son un caso especial de forma hiperbólica de aversión absoluta al riesgo (*HARA*) (Merton, 1992); conocida con las siglas de función isoelástica *CRRRA*, siendo:

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^\gamma - 1}{1 - \gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ \log(W) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (3)$$

En la ecuación 3, γ representa el nivel de aversión al riesgo, donde la función cumple con la condiciones de Inada.³ La utilidad marginal del consumo se aproxima a infinito para valores de consumo cercanos a cero, asegurando la condición de no optimalidad relativa a consumos cero en ningún momento del tiempo (Suen, 2009). Permite la elasticidad de sustitución intertemporal constante, como condición para asegurar la existencia de equilibrios balanceados (Ljungqvist y Sargent, 2000). La medida de aversión al riesgo (γ) es crucial en la ecuación 3 y es objeto de innumerables calibraciones producto de investigaciones empíricas. En teoría γ debe fluctuar entre -1 y 1 (Pratt, 1964). El valor que arroja el coeficiente, depende de las características del individuo, los valores negativos representan a personas afectas al riesgo, los positivos adversos y cero corresponde a personas neutrales al riesgo. Dentro de las pruebas empíricas respecto del valor del coeficiente se cita a los estudios de Harrison, Johnson McInnes y Rustrom, (2005), quienes obtuvieron valo-

³ En honor al economista japonés Ken-Ichi Inada. Dispone condiciones sobre la función de producción, que garantiza crecimiento económico en los modelos neoclásicos de crecimiento. El valor de la función es cero, en cero; es diferenciable en todos sus puntos, creciente en x , con derivada decreciente (cóncava), el límite de la derivada cercana al origen es infinito y el límite de la derivada hacia el infinito positivo es cero. Siguiendo a Ochoa y Vasseur (2014), la función de utilidad converge a la logarítmica con gamma, tendiendo a 1. Para ello se emplea la regla de L'Hopital, donde con $\gamma \rightarrow 1$ el numerador y el denominador de la función tienden a cero. Al ser diferenciados numerador y denominador con respecto a γ , para tomar el límite de la relación de las derivadas cuando $\gamma \rightarrow 1$, se encuentra que la función de utilidad converge a logarítmica.

res de $\gamma=0.45$ y Harrison, Lau y Rutstrom, (2007) valores de $\gamma=0.67$ para la población dinamarquesa; Harrison, Humphrey y Verschoor, (2009) para países subdesarrollados obtuvieron un $\gamma=0.536$; Andersen, Harrison, Lau y Rutstrom, (2010) para pruebas de laboratorio obtienen valores de $\gamma=0.79$ y como valor medio en la muestra de la población $\gamma=0.63$; Harrison, Lau, Rutstrom y Tarazona Gómez, (2013) encuentran en un experimento en la universidad de Oxford valores en promedio positivos para el índice. (Pareja Vasseur y Baena 2018) encuentran para dos grupos de estudiantes universitarios de EAFIT, Colombia un $\gamma=0.56$ y $\gamma=0.68$ para los dos grupo. Estos experimentos nos indican que, en términos generales, que las personas son adversas al riesgo.

2. El modelo binomial tradicional y fuzzy

2.1. El modelo binomial tradicional

El modelo binomial reconoce diversas formulaciones, dependiendo de la manera en la cual son definidos parámetros como coeficientes neutrales al riesgo p y el crecimiento del desvío en relación a los intervalos de tiempo $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (Cox, Ross y Rubinstein, 1979; Rendleman y Bartter, 1979; Jarrow, y Rudd, 1982; Jabbour, Kramin, y Young, 2001; Boyle, 1988; Kamrad y Ritchken, 1991; Wilmott, Howison y Dewynne, 1995; Derman, Kani y Chriss, 1996; Hull, 2005), entre otros. Una reseña de estos modelos se puede encontrar en Whaley, 2006; Van der Hoek y Elliot, 2006; y Chance, 2007. En el presente trabajo se utiliza el modelo de Cox, Ross y Rubinstein, 1979 (CRR). Se supone que el activo subyacente (V) sigue un proceso geométrico browniano, en tiempo discreto explicado por una distribución de probabilidad binomial. Los movimientos del activo, se representan por coeficientes de ascenso u y descenso d ;

$$u = e^{r\sqrt{\Delta t}} \quad (4)$$

$$d = e^{-r\sqrt{\Delta t}} \quad (5)$$

Siendo r la tasa libre de riesgo y $\Delta t = m/n$, la frecuencia o pasos en los cuales se divide el intervalo de tiempo n . Los coeficientes equivalentes ciertos son calculados a partir de la siguiente expresión,

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} \quad (6)$$

Con su respectivo complemento $(1 - p)$. El proceso recursivo para la valoración tiene como punto de partida el valor al vencimiento (ejercicio) $ro_T = \max(V_T - X, 0)$ o $ro_T = \max(X - V_T, 0)$; para flujos de pagos asimilables a opciones de compra y venta. La ecuación recursiva para la valuación es,

$$ro_0 = \left[\sum_{j(T)=0}^{j(T)=n} ro_T \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \right] e^{-rT} \quad (7)$$

Donde T es el horizonte final y $j = (0, t, t + 1, T - 1)$, los j -ésimos nodos de la rejilla binomial.⁴ Si el proceso recursivo es por paso, la ecuación precedente es;

$$ro_t = [(ro_{i,t+1} \times p) + (ro_{j,t+1} \times 1 - p)] \times e^{-rt} \quad (8)$$

2.2. El modelo binomial borroso (fuzzy)

Se incorpora el concepto de ambigüedad o vaguedad en los datos (Dubois y Prade, 1980); (Buckley, 1987), reflejándose en la medida de volatilidad siendo representada por un número triangular borroso (NTB); (Muzzioli, y Torricelli, 2004); (Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006); (Garcia Sastre y Roselló Miralles, 2007); (Liao y Ho, 2010); (Zdnek, 2010); (En Shine Yu, Ming, H, Li, y Chen, 2011); (Milanesi, 2013; 2014 y 2015).⁵ Como su par tradicional, requiere estimar los coeficientes de ascenso y descenso, en este caso borrosos dando un área de posibles valores,

$$u' = [u_1, u_2, u_3] = [e^{((1-cv) \times \sigma) \times \sqrt{t}}, e^{(\sigma \times \sqrt{t})}, e^{((1+cv) \times \sigma) \times \sqrt{t}}] \quad (9)$$

⁴ En rigor, el valor de la opción es la sumatoria de los valores terminales ponderados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados al tipo sin riesgo.

⁵ Existen las versiones de modelos de valoración de opciones reales en tiempo continuo se encuentran los trabajos de (Carlsson y Fuller, 2003); (Carlsson, Fuller, Heikila y Majlender, 2007); (Collan, Fullér y Mezei, 2009) entre otros.

$$d' = [d_1, d_2, d_3] = \left[\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3} \right] \quad (10)$$

Los valores extremos son $u'=[u_1, u_2, u_3]$ (ascenso) y $d'=[d_1, d_2, d_3]$ (descenso). Los escenarios son: u_1, d_1 menor amplitud de movimiento, u_3, d_3 mayor amplitud de movimiento y u_2, d_2 caso base (Milanesi, 2014). Estos son calculados utilizando el coeficiente de variación (CV), como medida del posible intervalo de máximo a mínimo valor que se proyecta tomará la volatilidad (σ), a menudo en base a la opinión y juicio de expertos (Liao y Ho, 2010). Los tres resultados dan origen a la distribución de posibilidad, arrojando un número borroso triangular, para cada uno de los nodos de la rejilla binomial,

$$ro'_t = [ro'_{t-1} \times u'; ro'_{t-1} \times d'] \quad (11)$$

El valor de la opción real al vencimiento es el máximo valor entre el activo subyacente borroso menos el precio de ejercicio (X), $ro'_T = \max(V'_T - X; 0)$ para opciones reales asimilables a *call*. Para opciones asimilables a *put* $ro'_T = \max(X - V'_T; 0)$. El valor intrínseco de proyecto se determina recursivamente empleando coeficientes equivalentes ciertos borrosos ($p'_u; p'_d$);

$$p'_u = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} \quad (12)$$

$$p'_d = 1 - p'_u \quad (13)$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza el área de posibles valores correspondiente al activo real subyacente. Los pares de coeficientes equivalentes ciertos son combinados de la siguiente manera, (Liao y Ho, 2010): (a) para el escenario de menor amplitud combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de mínimo valor; (b) para el escenario de mayor amplitud de movimiento, combina los coeficientes equivalentes ciertos borrosos de ascenso y descenso de máximo.⁶ El caso base se resuelve

⁶ El valor de las opciones reales, es función directa de la volatilidad y los movimientos de ascenso y descenso que están en función directa con esta. Por tanto a mayor amplitud de movimientos, mayor valor de la opción y viceversa. Esto conduce a su-

de similar manera al tradicional modelo binomial. Así se logra la asimetría en la estimación de los posibles valores. Para un NBT con coeficientes de ascenso $u'=(1 \text{ menor}, 2 \text{ base}, 3 \text{ mayor})$; las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos a utilizar en el proceso recursivo quedan planteadas de la siguiente manera;

$$p'_u, p'_d = [(p'_{u3}, p'_{d1}); (p'_{u2}, p'_{d2}); (p'_{u1}, p'_{d3})] \quad (14)$$

El sesgo positivo (valor de la opción) es capturado, reordenando los pares de coeficientes equivalentes ciertos (ecuación 14). La menor (mayor) ponderación es asignada a los valores del escenario de menor (mayor) amplitud. Finalmente, el coeficiente equivalente cierto surge del cociente entre la diferencia del factor de crecimiento al tipo sin riesgo menos el movimiento de descenso (numerador) y la diferencia entre el factor de ascenso y descenso (denominador). El coeficiente equivalente cierto obtenido del movimiento de mayor (menor) amplitud, presenta menor (mayor) numerador y mayor (menor) denominador. Este es utilizado en la ponderación del ascenso en el valor de menor (mayor) amplitud y su complemento en el descenso de menor (mayor) amplitud. Por lo tanto; $u'_3 > u'_2 > u'_1 \rightarrow d'_3 < d'_2 < d'_1 \rightarrow p'_3 < p'_2 < p'_1 \rightarrow (1 - p'_3) > (1 - p'_2) > (1 - p'_1)$

El procedimiento recursivo para calcular el valor de la opción real surge de la siguiente expresión,

$$ro'_t = [ro'_{i(t+1)} \times p'_u + ro'_{j(t+1)} \times p'_d] \times e^{-rt} \quad (15)$$

La siguiente expresión permite estimar el valor central del NBT. Este presenta un sesgo hacia la derecha, propio de la distribución de posibles valores del proyecto. Suponiendo que $ro' = [ro_1(\alpha); ro_3(\alpha)]$ número borroso y $\lambda \in [0,1]$ valor puntual medio (*crisp mean value*) de ro' , se tiene

$$E(ro') = \int_0^1 [(1 - \lambda)ro_1(\alpha) + \lambda ro_3(\alpha)] d\alpha \quad (16)$$

poner, que escenarios optimistas (pesimistas) vinculados al proyecto se relacionan con volatilidad respecto del caso base mayor (menor) y con movimientos respecto del caso base de mayor (menor) amplitud.

En este caso λ se conoce como índice ponderado de “pesimismo-optimismo”; (Yoshida, Yasuda, Nakami y Kurano; 2006); (Liao y Ho, 2010). El índice se obtiene de:

$$\lambda = \frac{AD}{AI+AD} \quad (17)$$

Reemplazando 17 en la ecuación 16 se tiene el valor borroso esperado de la opción;

$$E(ro') = \frac{[(1-\lambda)ro_1+ro_2+\lambda ro_3]}{2} \quad (18)$$

3 Funciones isoelásticas de utilidad y el modelo binomial borroso para valorar opciones reales

La presente sección desarrolla el modelo, donde el modelo binomial borroso para valorar opciones se combina con la función isoelásticas de utilidad y sus respectivos equivalentes ciertos. Permite valorar incorporando el coeficiente de aversión al riesgo del agente. Las ecuaciones 9 a 18 constituyen los insumos del modelo binomial borroso. Estas sirven para estimar el NTB correspondiente al valor la opción, bajo el supuesto de neutralidad frente al riesgo. Incorporar las preferencias del individuo requiere definir la función de utilidad. Para esto la función a ser utilizada en este trabajo es la isoelástica *CRRA*, cuya formulación surge a partir de la ecuación 3, pero adaptada a cantidades borrosas obtenidas del modelo binomial,

$$U(ro'_{i,j(t)}) = \begin{cases} \frac{ro'_{i,j(t)}{}^\gamma - 1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ \log(ro'_{i,j(t)}) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (19)$$

Sobre los resultados de la ecuación 15 se aplica la función de utilidad, de acuerdo a la ecuación 19, a partir de la siguiente expresión,

$$E[U(ro'_{i,j(t)})] = \{[p' \times U(ro'_{i(t)})] + [1 - p' \times U(ro'_{j(t)})]\} \quad (20)$$

A continuación se calcula el equivalente cierto a la utilidad esperada de cada extremo del NBT,

$$CE(ro'_{i,j(t)}) = \{E[U(ro'_{i,j(t)})] \times (1 - \gamma)\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (21)$$

El valor actual del equivalente cierto correspondiente al NBT se obtiene actualizando los resultados de la ecuación 20 al tipo sin riesgo;

$$CE(ro'_{i,j(t-1)}) = CE(ro'_{i,j(t)}) \times e^{-r} \quad (22)$$

Finalmente, la medida de utilidad vinculada a la magnitud monetaria de la ecuación 22, adaptada al coeficiente de aversión al riesgo del agente surge de la siguiente ecuación,

$$U(ro'_{i,j(t-1)}) = \begin{cases} \frac{CE(ro'_{i,j(t-1)})^{\gamma-1}}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ \log(CE(ro'_{i,j(t-1)})) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (23)$$

4 Aplicación del modelo a un desarrollo en I&D con opciones secuenciales

Se utiliza la metodología del estudio de casos⁷ ya que no se persigue buscar soluciones generalizables estadísticamente. En tal sentido, expuesto el modelo se pretende describir e indagar sobre la interacción del conjunto de variables que hacen al valor aplicándolo sobre un proyecto farmacológico producto de una asociación entre un centro de investigación público y una empresa privada, como unidad de análisis. A tales efectos se plantean dos etapas: I) fase experimental de diseño, elaboración del prototipo y pruebas preclínicas (primer periodo); II) fase de aprobación y lanzamiento (segundo periodo). El valor actual de los flujos de fondos operativos proyectados en la fase de lanzamiento (V_0) es de \$1,023.5. El valor esperado correspondiente

⁷ El estudio de casos como metodología de investigación no debe confundirse con el análisis o estudio de casos como herramienta pedagógica, la cual busca analizar un aspecto concreto relacionado con las organizaciones para fomentar el debate o discusión (Castro Monge, 2010). En este caso se busca analizar el funcionamiento de proposiciones teóricas, con el fin de ampliar o generalizar una teoría (Yin, 1994).

a los ingresos operativos en $t = 3$ es de \$2,738. La tasa de actualización para proyectos de riesgos equivalentes es de 38.82%; considerando los niveles de inflación esperada de dos dígitos en Argentina a fecha del presente trabajo. Las inversiones proyectadas (I_t) para cada una de las fases son: ($t = 1 ; t = 3$) \$400 y \$800. La tasa libre de riesgo es del 5% anual (r) y el desvío de los flujos de fondos operativos asciende a 35% (σ).

Con el criterio tradicional del VAN el resultado es de $-\$45.56 = 1023.5 - 400e^{-0.05 \times 1} - 800e^{-0.05 \times 3}$. Este conduce al rechazo del proyecto, y tal decisión es acertada en tanto no existan opciones estratégica contenida en la inversión. En este caso existen opciones reales secuenciales de continuidad en el primer y tercer periodo, si el valor actual del subyacente supera a la inversión. Caso contrario se ejerce la opción de abandono; con costos (CA) de $t=1$ \$75; $t=3$ \$125 e ingresos por liquidación (IL) $t = 1$ \$100; $t = 3$ \$200 respectivamente.⁸

En el modelo binomial borroso el punto de partida para estimar los coeficientes de ascenso y descenso, es a partir del coeficiente de variación (CV) de flujos de fondos, con el fin de establecer el intervalo de máximo a mínimo valor correspondiente a la volatilidad (σ).⁹ Se supone un CV del 15%, para el NBT,

Tabla 1. Volatilidad borrosa

Extremos	Volatilidad borrosa
a, $\epsilon(1)$	45.00%
a- α , $\epsilon(0)$	38.25%
a+ β , $\epsilon(0)$	51.75%

Fuente: elaboración propia.

⁸ Las opciones reales de continuidad-abandono del ejemplo, se asimila a una combinación de opciones de compra y venta financiera con diferentes precios de ejercicio. Esta estrategia se conoce como straddle, la opción de compra se activa cuando el valor del subyacente supera el precio de ejercicio y la venta en el caso que el subyacente se encuentre por debajo del precio de ejercicio. El perfil de este tipo de estrategia tiene por objeto cubrir subyacentes con alta volatilidad (dispersión respecto del precio de ejercicio), en términos de proyectos de inversión sería el caso de innovaciones o emprendimientos tecnológicos.

⁹ Esta es la base del esquema borroso triangular del modelo, diferenciándose del modelo binomial, que trabaja con una estimación puntual del parámetro. El mismo puede estimarse mediante escenarios, o simulando los flujos de caja, suponiendo una distribución triangular.

el valor del desvío (α) con escala de posibilidad 1 es de $\sigma = 45\%$, los extremos son: $a - \alpha = \sigma \times (1 - CV) = 38.25\%$ y $a + \beta = \sigma \times (1 + CV) = 51.75\%$

Obtenido el NBT correspondiente a la volatilidad, se estima el NBT de movimientos ascendentes y descendentes borrosos (ecuaciones 9 y 10).

Tabla 2. Parámetros ascenso – descenso

NBT	u		d'	
a- α	u'1	1.4659	d'1	0.6821
a	u'2	1.5683	d'2	0.6376
a+ β	u'3	1.6778	d'3	0.5960

Fuente: elaboración propia.

Los coeficientes son utilizados para proyectar el recorrido del subyacente, originando una rejilla binomial borrosa (ecuación 11). En cada nodo se presentan los valores borrosos, en este caso números triangulares. En la tabla 3 se puede apreciar para el primer periodo ($t = 1$, nodo ascendente; descendente) se obtienen los valores dispuestos en el siguiente orden: me-

Tabla 3. Rejilla binomial borrosa valor intrínseco del activo

0	1	2	3
\$1,023.50	\$1,500.39	\$2,199.50	\$3,224.34
	\$1,605.17	\$2,517.40	\$3,948.08
	\$1,717.26	\$2,881.26	\$4,834.26
	\$698.18	\$1,023.50	\$1,500.39
	\$652.61	\$1,023.50	\$1,605.17
	\$610.01	\$1,023.50	\$1,717.26
		\$476.27	\$698.18
		\$416.12	\$652.61
		\$363.57	\$610.01
			\$324.89
			\$265.33
			\$216.69

Fuente: elaboración propia.

nor amplitud (1: \$1,500.39; \$689.18), base (2: \$1,605.17; 652.61) y mayor amplitud (3: \$1,717.26; 610.01).

Los coeficientes equivalentes ciertos (ecuación 12 y 13) son agrupados en mayor (menor) valor según la mayor (menor) amplitud de movimientos, no variando el caso base (ecuación 14). Estos son expuestos en la Tabla 4.

Tabla 4. Coeficientes equivalentes ciertos borrosos

NBT	p'		1-p'	
a-α	p'1	0.4709	1-p'1	0.5290
a	p'2	0.4444	1-p'2	0.5555
a+β	p'3	0.4208	1-p'3	0.5791
Pares	p'		1-p'	
Menor	p'3	0.4208	1-p'1	0.5290
Base	p'2	0.4444	1-p'2	0.5555
Mayor	p'1	0.4208	1-p'3	0.5791

Fuente: elaboración propia.

Con estos datos se está en condiciones de valorar el proyecto. Para ello se supone que el coeficiente de aversión al riesgo $\gamma = 0$, partiendo de un sujeto neutral al riesgo, los pasos son:

- A partir de la Tabla 3 se determina el valor terminal de la opción en $t = 3$. Este surge de comparar el máximo valor entre el valor borroso del proyecto versus la inversión o la diferencia entre los ingresos y costos de liquidación. Consecuentemente, el valor terminal de la opción en el periodo 3 es igual a $ro'_3 = \max[(V'_3 - I_3); (IL_3 - CA_3)]$.
- Para cada nodo del NBT (ro'_3) se aplica la función de utilidad (ecuación 19), para obtener $U'(ro'_3)$.
- Comienza el proceso recursivo en $t = 2$ (ecuación 20), para obtener la utilidad borrosa esperada $E[U(ro'_{i,j(t)})]$.
- La utilidad borrosa esperada se convierte en equivalente cierto borroso $CE(ro'_{i,j(t)})$; el cual se procede a descontar al tipo libre de riesgo (determinístico) (ecuaciones 21 y 22).

e) Finalmente se obtiene la utilidad borrosa (ecuación 23) para el periodo $t=2$; $U(ro'_{i,j(t-1)})$.

En la Tabla 5 se presentan los valores correspondientes para los periodos $t = 2$ y $t = 3$;

Tabla 5. Proceso recursivo Fase II

Fase II: aprobación $t=2$				Fase II: lanzamiento $t=3$	
$U'(\cdot)$	$PV(CE')$	CE'	$E [U'(\cdot)]$	$U'(\cdot)$	$ro'(\cdot)$
1323.0	\$1,322.96	\$1,390.79	1,390.8	2,424.3	\$2,424.34
1756.4	\$1,756.42	\$1,846.47	1,846.5	3,148.1	\$3,148.08
2312.6	\$2,312.57	\$2,431.13	2,431.1	4,034.3	\$4,034.26
318.1	\$318.12	\$334.43	334.4	700.4	\$700.39
380.0	\$380.04	\$ 399.52	399.5	805.2	\$805.17
452.2	\$452.22	\$475.41	475.4	917.3	\$917.26
67.8	\$67.77	\$71.24	71.2	75.0	\$75.00
71.3	\$71.34	\$75.00	75,0	75.0	\$75.00
74.9	\$74.92	\$78.76	78,8	75.0	\$75.00
				75.0	\$75.00
				75.0	\$75.00
				75.0	\$75.00

Fuente: elaboración propia.

Para el periodo 1 nuevamente se debe calcular el valor terminal. En este caso es el máximo valor entre: la diferencia del valor actual de la utilidad esperada del proyecto, menos el valor de la utilidad de la inversión y el valor de la utilidad de la diferencia entre ingresos y costos de liquidación:

$$ro'_1 = \max\{[(p'_u \times U'_{2,u} + p'_d \times U'_{2,d}) \times e^{-r} - U(I_1)]; [(IL_1 - CA_1)]\}$$

(véase Tabla 6).

Finalmente se determina el valor en $t = 0$; obteniendo como resultado un NBT donde el caso intermedio (a) representa el valor obtenido para un sujeto neutral al riesgo con el modelo binomial tradicional y los extremos corresponden a los valores de menor posibilidad en un NBT, para sujetos con $\gamma = 0$ (véase Tabla 7).

Tabla 6. Proceso recursivo Fase I en $t = 1$

Fase I. diseño, prototipo y pruebas preclínicas			
$U'(\cdot)$	$CE'(t = 1)$	$PV(CE')$	$E[U(ro')]$
289.7	\$289.68	\$289.68	\$289.68
543.4	\$543.40	\$543.40	\$543.40
885.1	\$885.10	\$885.10	\$885.10
25.0	\$25.00	\$25.00	\$25.00
25.0	\$25.00	\$25.00	\$25.00
25.0	\$25.00	\$25.00	\$25.00

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7. Proceso recursivo Fase I en $t=0$

$NBT(ro')$	Fase I:		$t=0$	
	$U'(\cdot)$	$PV(CE')$	CE'	$E[U(ro')]$
$a - \alpha$	128.5	\$128.54	\$135.13	135.1
(a)	242.9	\$242.95	\$255.40	255.4
$a + \beta$	410.3	\$410.27	\$431.31	431.3

Fuente: elaboración propia.

El área con los posibles valores del proyecto está dado por el número borroso [$\$128.5$; $\$242.9$; $\$410.3$]. La determinación del valor medio borroso (VMB) implica calcular la integral definida entre 0 y 1 (ecuación 16). Luego se debe estimar la proporción que representa el área por encima ($a + \beta$) y debajo ($a - \alpha$) (ecuación 17) para luego sustituir en la ecuación 18 los valores borrosos (ro') y el índice de aversión (λ) (véase tabla 8).

El valor expandido binomial tradicional asciende a $\$242.9$ y difiere del valor esperado borroso el cuál es de $\$269.4$ producto del sesgo positivo por la mayor ponderación asignada por los coeficientes equivalentes ciertos borrosos a los movimientos de mayor amplitud en relación a los de menor amplitud.

El valor neto de la opción real es la diferencia entre el valor con opciones (ro VMB) menos valor actual estático (VAN); $RO' = ro(VMB) - VAN =$

Tabla 8. Valor Medio Borroso (VMB)

Valor medio borroso (VMB)		
Base	$c3-c2$	167.3
Altura	1	1
ARD	$(b*h)/2$	83.6
Base	$c2-c1$	114.4
Altura	1	1
ARI	$(b*h)/2$	57.2
λ (Ec.17)	$ARD/(ARI+ARD)$	0.594
VMB (Ec.18)	$((1-\lambda)ro1+ro2+\lambda ro3)/2$	269.4
	<i>ro Binomial</i>	\$242.9
	<i>ro VMB</i>	\$269.4
	<i>ro Fuzzy inferior</i>	\$128.5
	<i>ro Fuzzy superior</i>	\$410.3

Fuente: elaboración propia.

\$314.96 = \$269.4 — (\$45.56). Al sensibilizar el coeficiente de aversión al riesgo, se obtienen los valores acordes a potenciales inversores según sus preferencias relativas a la asunción de riesgo; donde el coeficiente de aversión correspondiente a la función isoelástica puede asumir valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. En la Tabla 9 se exponen los resultados obtenidos en $t = 0$ para el NBT (ro);

Tabla 9. Sensibilidad valor del proyecto (RO) coeficiente de aversión al riesgo (γ)

γ	-0.1	-0.05	0	0.15	0.25	0.5
$U(.)a-\alpha$	420.5	227.9	128.5	29.7	13.9	6.0
$CE a-\alpha$	\$699.5	\$284.7	\$128.5	\$21.0	\$9.6	\$4.9
$U(.) a$	844.7	443.9	242.9	51.1	22.4	6.4
$CE a$	\$1,506.5	\$573.4	\$242.9	\$33.3	\$13.7	\$5.0
$U(.)a+\beta$	1,517.6	773.0	410.3	78.8	32.5	7.9
$CE a+\beta$	\$2,870.0	\$1,026.6	\$410.3	\$48.2	\$18.1	\$5.6

Fuente: elaboración propia.

El valor medio borroso para los diferentes coeficientes de aversión al riesgo se detalla a continuación.

Tabla 10. Sensibilidad VMB -coeficiente de aversión al riesgo (γ)

γ	-0.1	-0.05	0	0.15	0.25	0.5
U(ARD)	336.48	164.55	83.66	13.87	5.06	0.57
U(ARI)	212.08	108.03	57.20	10.70	4.22	0.07
λ	61.34%	60.37%	59.39%	56.45%	54.52%	88.84%
VMB	969.1	500.4	269.4	54.2	23.2	6.5
EC (\$)	\$1,752.3	\$650.3	\$269.4	\$35.0	\$14.1	\$5.1

Fuente: elaboración propia.

El valor de la flexibilidad estratégica se diluye rápidamente en el caso de sujetos adversos al riesgo. En el caso analizado para $\gamma > 0.5$ el valor se disminuye considerablemente. A modo de ejemplo si se trabaja con valores de gamma equivalentes a los generados por pruebas empíricas, por ejemplo $\gamma = 0.53$ (Andersen, *et. alt*; 2010), este proyecto entraría en una zona gris respecto a su elegibilidad. Situación diferente al valor que arroja trabajar con concepto de neutralidad al riesgo $\gamma = 0$; cuya lógica indica aceptar el proyecto, claro que en este caso se debe cumplir el supuesto de mercados completos.

Conclusión

Las opciones reales son una poderosa herramienta para valorar caminos estratégicos, en particular, frente a proyectos caracterizados por su dinamismo e incertidumbre. Pero su gran debilidad, reside en la necesidad de mercados completos para aplicar los conceptos de valuación neutral al riesgo. Atento a ello, la literatura ha desarrollado varias alternativas para valorar los riesgos de los flujos del proyecto conocido como “privados”, para valorar riesgos, respecto de los cuales el mercado no provee un activo financiero gemelo. En tal sentido se conjugaron las cualidades del modelo de opciones reales en un entorno borroso y preferencias frente al riesgo del agente. La razón de incorporar la lógica fuzzy reside en la necesidad de

lidar con la ambigüedad o vaguedad de datos. En relación a las preferencias del agente, del variado repertorio de funciones de utilidad existentes en la literatura, fue seleccionada la isoelástica por cumplir con los atributos de $CARA < 0$ y $CRRA = 0$.

El proceso de valoración es sencillo, permite identificar la flexibilidad estratégica, su valor terminal y consecuentemente la utilidad correspondiente a cada nodo del árbol binomial borroso. Seguidamente son calculados de forma recursiva los valores correspondientes a la utilidad esperada y su equivalente cierto. El método es flexible, puesto que el valor se ajusta en función al coeficiente de aversión al riesgo del agente. Con grados crecientes de aversión al riesgo tanto el valor estratégico, representado por el VMB se diluye, conduciendo en situaciones de alta aversión al riesgo al rechazo del proyecto. Esta información no es suministrada por los modelos tradicionales binomiales y borrosos, pues asumen neutralidad frente al riesgo. En estos últimos casos se presume la existencia de mercados financieros completos, supuesto difícil de verificar, en particular en mercados emergentes.

Referencias bibliográficas

- Allais, M. (1953). "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine". *Econometrica*, 21 vol. 4, pp. 503-546.
- Allais, M. (1988). "An Outline of My Main Contributions to Economic Science". *Economic Sciences*, pp. 233-252.
- Amram, M. y Kulatilaka, N. (1998). *Real Options* (1 ed.). Boston, Massachusetts, Estados Unidos: Harvard Business School Press.
- Andersen, S., Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2010). "Preference heterogeneity in experiments: comparing field and laboratory". *Journal of Economics, Behaviour and Organization*, núm. 73, vol. 2, pp. 209-224.
- Bernoulli, D. (1954). "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk". *Econometrica*, vol. 22, núm. 1, pp. 23-36.
- Black, F. y Scholes, M. (1972). "The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency". *Journal of Finance*, pp. 399-418.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, pp. 637-659.
- Boer, P. (2002). *The Real Options Solutions: Finding Total Value in a High-Risk World*. New York: John Wiley & Sons Inc.

- Borison, A. (2003). *Real Options Analysis: Where are the Emperor's Clothes?* Stanford: Stanford University.
- Boyce, C., Wood, A., Bank, J., Clark, A. y Brown, G. (2014). Money, Well being and Loss Aversion: Does an income loss has a greather effect on well being than an income gain. *Center for Economics Performance*, núm. 39, pp. 1-16. Recuperado el 15 de 6 de 2016, de <http://cep.lse.ac.uk/pubs/download/occasional/op039.pdf>.
- Boyle, P. (1988). "A lattice framework for option pricing with two state variables". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, núm. 23, pp. 1-12.
- Brandao L. y Dyer S. (2005). "Decision analysis and real options: A discrete time approach to real option valuation". *Annals of Operations Research*, núm. 135, núm. 1, pp. 21-39.
- Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2005). "Using binomial decision trees to solve real-option valuation problems". *Decision Analysis*, núm. 2, pp. 69-88.
- Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2008). "Response to comments on Brandao" *et al.* (2005). *Decision Analysis*, núm. 2, pp. 103-109.
- Brennan, M. y Schwartz, E. (1985), "Evaluating Natural Resources Investment". *Journal of Business*, núm. 58, pp. 135-157.
- Buckley, J. (1987). "The fuzzy mathematics of finance". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 21, pp. 257-273.
- Castro Monge, E. (2010). "El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas". *Revista Nacional de Administración*, vol. 2, núm. 1, pp. 31-54.
- Carlsson, C. y Fuller, R. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 139, pp. 315-326.
- Carlsson, C., Fuller, R., Heikkila, M. y Majlender, P. (2007). "A Fuzzy Approach to R&D Project Portfolio Selection". *Interntational Journal of Approximating Reasoning*, núm. 44, pp. 93-105.
- Chance, D. (2007). "A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets". *SSRN* <http://ssrn.com/abstract=1523548>, pp. 1-25.
- Collan, M., Fullér, R. y Mezei, J. (2009). "Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation". *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems*, ID 238196, pp. 1-14.
- Copeland, T. y Antikarov, V. (2001). *Real Options*, (1a ed.). New York: Texere LLC.
- Copeland, T. y Tufano, P. (2004). "A Real World to Manage Real Options". *Harvard Business School Review*, núm. 82, pp. 90-99.
- Copeland, T., Weston, F. y Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy*. (4 ed.) Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.

- Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, núm. 7, pp. 229-263.
- Dehling, H. (1997). "Daniel Bernoulli and the St. Petersburg Paradox". *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, vol. 15, núm. 3, pp. 223-227.
- Derman, E., Kani, I. y Chriss, N. (1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". (Goldman-Sachs, Ed.), *Quantitative strategies research notes*.
- Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1a ed.). New Jersey: Princeton University Press.
- Dubois, D. y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. New York: Academic Press.
- Elton, D. y Gruber, M. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. (5a ed.). New York: John Wiley & Sons.
- En Shine Yu, S. y Ming, H., Li, Y. y Chen Y. (2011). "A novel option pricing model via fuzzy binomial decision tree". *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 7, núm. 2, pp. 709-718.
- Fernández, G., Perobelli Cordero F. y Brandao, L. (2014). "An Improved Model for Valuing R&D Project". En: R. O. Group (Ed.), *XIV Real Options Annual Conference*, pp. 1-23. Colombia: Disponible en: <http://realoptions.org/openconf2014/data/papers/39.pdf>.
- Friedman, M. y Savage, L. (1948). "The Utility Analysis of Choices Involving Risk". *The Journal of Political Economy*, vol. 56, núm. 4, pp. 279-304.
- Friend, I. y Blume, M. (1975). "The Demand of Risky Assets". *American Economic Review*, vol. 65, núm. 5, pp. 900-922.
- García Sastre, M. y Roselló Miralles, M. (2007). "La lógica borrosa para valorar la incertidumbre en la técnica de valoración de opciones reales". (A. E. (AEDEM), Ed.). *DIALNET OAI Articles*, <http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409>, pp. 1-22.
- Graeme, G. (2009). *Real Options in Theory and Practice (Financial Management Association Survey and Synthesis)*. Oxford: Oxford University Press.
- Grasselli, M. (2011). "Getting Real with Real Options". *Journal of Business, Finance and Accounting*, vol. 5, núm. 38, pp. 740-764.
- Harrison, G., Humphrey, S. y Verschoor, A. (2009). "Choice under uncertainty: Evidence from Ethiopia, India and Uganda". *The Economic Journal*, vol. 120, núm. 543, pp. 80-104.
- Harrison, G., Johnson E., McInnes, M. y Rustrom, E. (2005): Individual choice and risk aversion in the laboratory: coment. *American Economic Review*, vol. 95, núm. 3, 897-901.

- Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2007). "Estimating risk attitudes in Denmark: a field experiment". *The Scandinavian Journal of Economics*, vol. 109, núm. 2, pp. 341-368.
- Harrison, G., Lau, M., Rutstrom, E., y Tarazona Gómez, M. (2013). "Preference over social risk". *Oxford Economics Paper*, vol. 65, núm. 1, pp. 25-46.
- Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives*. (5 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Ingersoll, J. y Ross, S. (1992). "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty". *Journal of Business*, núm. 65, pp. 1-29.
- Jabbour, G., Kramin, M. y Young, S. (2001). "Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited". *Journal of Futures Markets*, núm. 21, pp. 987-1001.
- Jarrow, R. y Rudd, A. (1982). "Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes". *Journal of Financial Economics*, núm. 10, pp. 347-369.
- Kahneman, D., y Tversky, A. (1979). "Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk". *Econometrica*, vol. 47, núm. 2, pp. 263-292.
- Kamrad, B. y Ritchken, P. (1991). "Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables". *Management Science*, vol. 37, núm. 12, pp. 1640-1653.
- Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets*. Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.
- Keeney, R. y Raiffa H. (1976, 1993). *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* (1 ed.). United Kingdom : Cambridge University Press.
- Kodukula, P. y Chandra, P. (2006). *Project Valuation using Real Options: A practitioner's guide*. USA: J Ross Publishing.
- Kulatilaka, N. y Trigeorgis, L. (1994). "The General Flexibility To Switch: Real Options Revisited". *International Journal of Finance*, núm. 2, pp. 123-145.
- Kulatilaka, N. (1988). "Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems". *IEEE Transactions in Engineering Management*, núm. 22, pp. 250-257.
- Liao, S. y Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Binomial Approach". *Information Sciences*, núm. 180, pp. 2124-2133.
- Ljungqvist, L. y Sargent, T. (2000). *Recursive Macroeconomic Theory*. Massachusetts: MIT press.
- Margrabe, W. (1978). "The Value of an Option to Exchange one Asset for Another". *Journal of Finance*, núm. 33, pp. 177-186.
- Markowitz, H. (1952). "The Utility of Wealth". *Journal of Political Economy*, vol. 60, núm. 2, pp. 151-158.

- Mason, S. y Merton, R. (1985). "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance". En varios, *Recent Advances in Corporate Finance*. New York: Homewood Irwin.
- Mc Donal, R. y Siegel, J. (1986). "Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down". *International Economic Review*, núm. 26, pp. 321-349.
- Merton, R. (1973). "The Theory of Rational Options Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 141-183.
- Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance*. Wiley-Blakwell.
- Milanesi, G. (2013). "El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera". *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, vol. 3, núm. 2, pp. 95-118.
- Milanesi, G. (2014). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*, núm. 30, pp. 211-219.
- Milanesi, G. (2015). "Modelo binomial borroso, el valor de la firma apalancada y los efectos de la deuda". *Estocástica*, vol. 5, núm. 1, pp. 9-43.
- Milanesi, G. y El Alabi E. (2015). "Evolución de las Funciones de Utilidad para la toma de decisiones". *Escritos Contables y de Administración*, vol. 6, núm. 1, pp. 15-43.
- Milanesi, G. (2017). "Opciones reales y función isoelástica de utilidad para valorar I&D e intangibles". *Escritos Contables y de Administración*, vol. 6, núm. 2, pp. 81-109.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. (1 ed.). New York: Wiley.
- Mun, J. (2015). *Real Options Analysis (Third Edition): Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions with Integrated Risk Management and Advanced Quantitative Decision Analytics* (3 ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Muzzioli, S. y Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*, núm. 28, pp. 861-867.
- Myers, S. y Majd, S. (1990). "Abandonment Value and Project Life". *Advances in Futures and Options Research*, núm. 4, pp. 1-21.
- Myers, S. (1977). "Determinants of Corporate Borrowing". *Journal of Financial Economics*, núm. 5, pp. 147-176.
- Ochoa, C. y Pareja Vasseur, J. (2014). "Valoración de opciones a través de equivalentes a certeza". *Ecos de Economía*, vol. 18, núm. 39, pp. 49-72.

- Paddock, J., Siegel, D. y Smith, J. (1988). "Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease". *Quarterly Journal of Economics*, núm. 103, pp. 479-508.
- Pareja Vasseur J. y Cadavid C. (2016). "Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad". *Contaduría y Administración*, núm. 61, pp. 794-814.
- Pareja Vasseur, J. y Baena J. (2018). "Estimación del índice de aversión al riesgo utilizando la función CRRA mediante un diseño experimental". *Revista Espacios*, vol. 39, núm. 13, pp. 29-47.
- Pratt, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econométrica*, vol. 32(1/2), pp. 122-136.
- Perlitz, M., Peske, T. y Schrank, R. (1999). "Real option valuation: The new frontier in R&D project evaluation?" *R&D Management*, vol. 29, núm. 3, pp. 255-269.
- Rendleman, R. y Bartter, B. (1979). "Two-state Option Pricing". *Journal of Finance*, núm. 34, pp. 1092-1110.
- Salahaldin, L. (2016). *Real Options as a Tool for Value Creation: Evidence from Sustainable Development and Information Technology Sectors*. Wiley-ISTE.
- Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Schwartz, E. (2002). "Patents and R&D as Real Options". *WP UCLA* <https://escholarship.org/uc/item/86b1n43k>, pp. 1-48.
- Schwartz, E. (2013). "The Real Options Approach to valuation: Challenges and Opportunities". *Latin American Journal of Economics*, vol. 50, núm. 2, pp. 163-177.
- Shefrin, H. (2010). *Behavioralizing Finance*. Leavey School of Business, SCU Leavey School of Business. Virginia: Santa Clara University.
- Shefrin, H. y Statman, M. (1985). "The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence". *The Journal of Finance*, vol. 40, núm. 3, pp. 777-790.
- Shefrin, H. y Statman, M. (2000). "Behavioral Portfolio Theory". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, vol. 35, núm. 2, pp. 127-151.
- Shiller, R. (2005). *Irrational Exuberance*. Princeton: Princeton University Press.
- Shockley, R. (2006). *An Applied Course in Real Options Valuation*. Thomson South-Western Finance.
- Simon, H. A. (1955). "A Behavioral Model of Rational Choice". *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 69, núm. 1, pp. 99-118.

- Simon, H. A. (1979). "Rational Decision Making in Business Organizations". *The American Economic Review*, vol. 69, núm. 4, pp. 493-513.
- Smit, H. (1996). "The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands". *Financial Management*, núm. 26, pp. 5-17.
- Smit, H. y Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Smith, J. (2005). "Alternative approaches for solving real-options problems". *Decision Analysis*, vol. 2, núm. 2, pp. 89-102.
- Smith, J. y Nau, R. (1995). "Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis". *Management Science*, núm. 5, pp. 795-816.
- Suen, R. (2009). "Bounding the CRRA Utility Functions". *Munich Personal Repec Archive*, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound_CRRA.pdf, pp. 1-16.
- Thaler, R. (1985). "Mental Accounting and Consumer Choice". *Marketing Science*, vol. 4, núm. 3, pp. 199-214.
- Thaler, R. y Johnson, E. (1990). "Gambling with the House Money and Trying to Break Even: The Effects of Prior Outcomes on Risky Choice". *Management Science*, vol. 36, núm. 6.
- Trigeorgis, L. y Mason, S. (1987). "Valuing Managerial Flexibiliy". *Midland Corporate Finance*, núm. 5, pp. 14-21.
- Trigeorgis, L. (1988). "A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting". *Advances in Futures and Options Research*, núm. 4, pp. 145-167.
- Trigeorgis, L. (1993). "Real Options and Interactions with Financial Flexibility". *Financial Management*, núm. 22, pp. 202-224.
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2a ed.). Cambridge: MIT Press.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). "Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases". *Science*, vol. 185, núm. 4157, pp. 1124-1131.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1981). "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice". *Science*, 211(4481), 453-458.
- Van der Hoek, J. y Elliot, R. (2006). *Binomial models in Finance*. New York, United State: Springer Science.
- Vendrik, M. y Woltjes, G. (2007). "Hapiness and loss aversion: is utility concave or convex in relative income". *Journal of Public Economics*, núm. 91, pp. 1423-1448.
- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

- Wakker, P. (2008). "Explaining the Characteristics of the Power (CRRA) Utility Family". *Health Economics*, núm. 17, pp. 1329-1344.
- Wang, A. y Halal, W. (2010). "Comparison of Real Asset Valuation Models: A Literature Review". *International Journal of Business and Management*, núm. 5, pp. 14-24.
- Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. (2a. ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. USA: Cambridge University Press.
- Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Yoshida, Y., Yasuda, M., Nakagami, J. y Kurano, M. (2006). "A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 157, pp. 2614-2626.
- Zdnek, Z. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*, núm. 207, pp. 1096-1103.

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

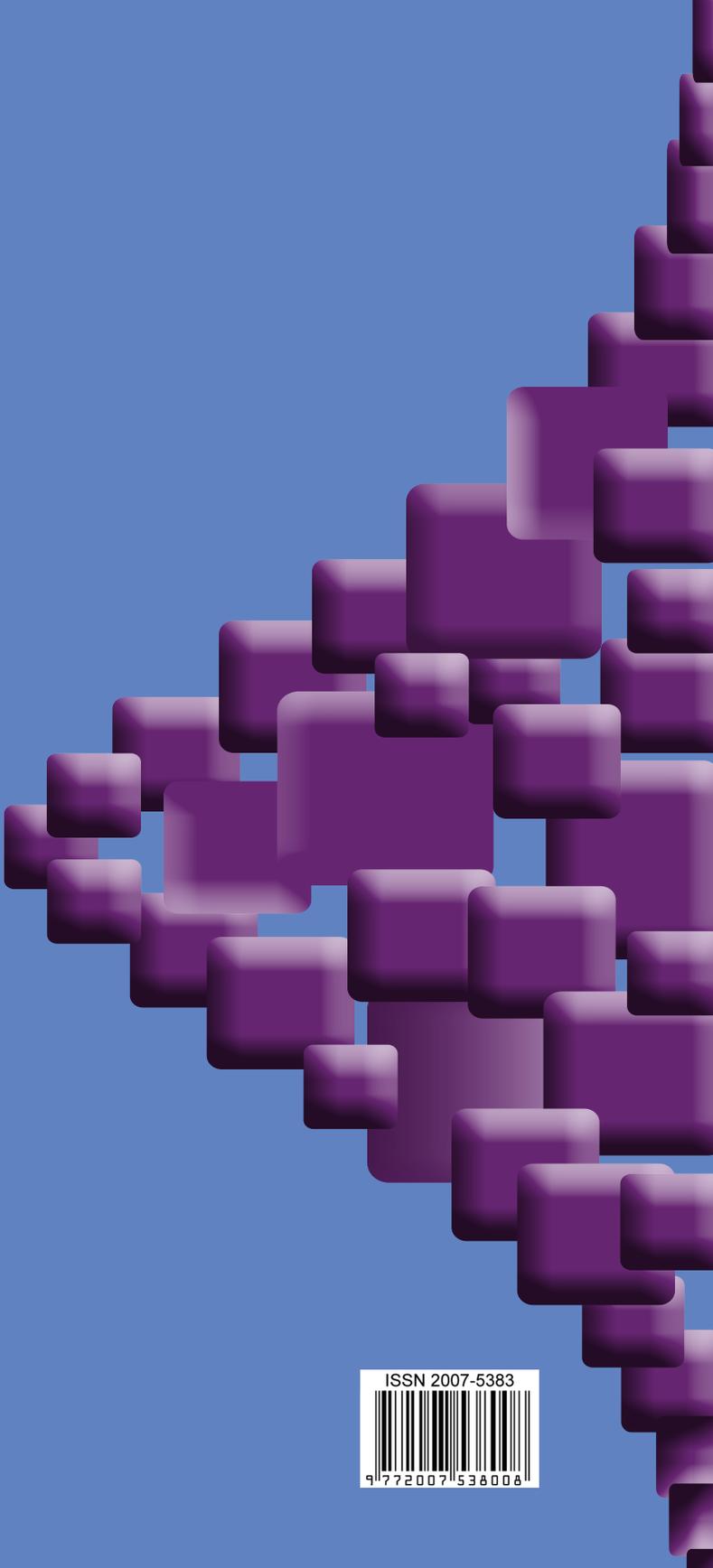
Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UNAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros



ISSN 2007-5383



9 772 007 538 008