

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de los principales mercados de América Latina

Domingo Rodríguez Benavides
Francisco Venegas-Martínez
Luis Fernando Hoyos Reyes

Modeling Returns of Stock Indexes through Fractional Brownian Motion Combined with Jump Processes and Modulated by Markov Chains

Martha Carpiñeyro
Francisco Venegas-Martínez
Miguel Ángel Martínez-García

Macroeconomic Reverse Stress Testing: An Early-Warning System for Spanish Banking Regulators. Analysis Based on the 2008 Global Financial Crisis

María Elizabeth Cristófoli
Javier García Fronti

Valuación de opciones financieras sobre acciones de la Bolsa Mexicana de Valores: el modelo Black Scholes con costos de transacción y pago de dividendos

José Roberto Torres Bello
Miriam Sosa Castro

**VOLUMEN 9, NÚMERO 2
JULIO - DICIEMBRE 2019**

Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro

Unidad Azcapotzalco

Secretaría de la Unidad en funciones de rectora

Mtra. Verónica Arroyo Pedroza

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Lic. Miguel Pérez López

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Jesús Manuel Ramos García

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Garibay Suárez

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine-Abed
Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Editora

Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Departamento de Administración,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Coeditor

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Dirección de este número

Dra. María G. Henaine-Abed
Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Mtro. Carlos Zubieta-Badillo

Consejo Editorial

Dr. Diego Agudelo-Rueda
Área de Mercados Financieros,
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Dr. Marco Avellaneda
División de Matemáticas Financieras
Instituto Courant
Universidad de Nueva York
Nueva York, EE. UU.

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Onésimo Hernández-Lerma
Departamento de Matemáticas, CINVESTAV,
Instituto Politécnico Nacional.
Cd. de México, México

Dr. Francisco López-Herrera
Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Edgar Ortiz
Facultad de Ciencias Políticas y Sociales,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Dan Rosen
Facultad de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Universidad de Toronto,
Toronto, Canadá

Dra. Patricia Saavedra-Barrera
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Roberto J. Santillán-Salgado
EGADE Business School
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de
Monterrey
Campus Monterrey,
Monterrey, Nuevo León, México

Dr. Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional,
Cd. de México, México

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 9, número 2
julio - diciembre 2019

Estocástica: finanzas y riesgo es una revista académica de acceso abierto, especializada en finanzas, dirigida a investigadores/as y académicos/as interesados/as en el análisis de los riesgos financieros y temáticas relacionadas con éstos, editada semestralmente por la Universidad Autónoma Metropolitana, en versión impresa y electrónica. Todos los artículos son sometidos a arbitraje bajo la modalidad doble ciego, los cuales pueden ser publicados en inglés o español. Su objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ESTOCÁSTICA: FINANZAS Y RIESGO. Volumen 9, número 2, julio–diciembre 2019, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200. México, Ciudad de México; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed, Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200, México, Ciudad de México; fecha de última modificación: 29 de julio de 2019. Tamaño del archivo: 4.05 MB.

Las opiniones expresadas por los/as autores/as no necesariamente reflejan la postura del/la editor/a de la publicación.

CONTENIDO

Impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de los principales mercados de América Latina

Domingo Rodríguez Benavides
Francisco Venegas-Martínez
Luis Fernando Hoyos Reyes

129

Modeling Returns of Stock Indexes through Fractional Brownian Motion Combined with Jump Processes and Modulated by Markov Chains

Martha Carpinteyro
Francisco Venegas-Martínez
Miguel Ángel Martínez-García

163

Macroeconomic Reverse Stress Testing: An Early-Warning System for Spanish Banking Regulators. Analysis Based on the 2008 Global Financial Crisis

María Elizabeth Cristófoli
Javier García Fronti

181

Valuación de opciones financieras sobre acciones de la
Bolsa Mexicana de Valores: el modelo Black Scholes con
costos de transacción y pago de dividendos

José Roberto Torres Bello
Miriam Sosa Castro

205

Impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de los principales mercados de América Latina

Impact of International Oil Price Volatility on the Main Latin American Stock Markets Returns

Domingo Rodríguez Benavides*

Francisco Venegas-Martínez**

Luis Fernando Hoyos Reyes***

(Fecha de recepción: 2 de enero de 2019. Fecha de aceptación: 15 de abril de 2019)

RESUMEN

En este artículo se examinó el impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de cuatro países importadores y exportadores de petróleo de América Latina. Con este objetivo se estimó un vector autorregresivo estructural con efectos GARCH en media (SVAR-MGARCH-M) con los rendimientos del precio internacional del petróleo y los rendimientos accionarios de cada país, ambos en términos reales. La volatilidad del precio internacional del petróleo se aproximó a través de la desviación estándar condicional del pronóstico del error de un paso delante de las fluctuaciones del precio internacional del petróleo.

* Departamento de Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana -Unidad Azcapotzalco
dorobe@azc.uam.mx

** Escuela Superior de Economía
Instituto Politécnico Nacional (IPN),
fvenegas1111@yahoo.com.mx

*** Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana -Unidad Azcapotzalco
hrhf@azc.uam.mx

Los resultados muestran que la volatilidad del petróleo es relevante para los rendimientos accionarios reales de manera inmediata sólo para Colombia. No obstante, en todos los países analizados hay evidencia de efectos asimétricos ante choques positivos y negativos del precio internacional del petróleo. Éstos tienen implicaciones importantes de política económica. Por ejemplo, los inversionistas deben tener claro los vínculos entre la volatilidad del precio del petróleo y los rendimientos accionarios cuando utilizan el petróleo para cubrir y diversificar sus portafolios de inversión, particularmente en economías donde el petróleo es importante para el crecimiento económico. De igual forma, los formuladores de políticas en los países importadores de petróleo deberían alentar a las empresas a mejorar la eficiencia en el uso de la energía y a recurrir a fuentes alternativas para evitar fluctuaciones en los ingresos y en los precios de las acciones.

Clasificación JEL: C32, G10, G15, Q43.

Palabras clave: precios del petróleo, rendimientos accionarios, volatilidad, modelos GARCH, energía, mercados emergentes.

ABSTRACT

In this article, the impact of the volatility of the international price of oil in the equity returns of four oil import and export countries in Latin America shall be examined. Bearing this objective in mind, an autoregressive structural vector with GARCH-in-Mean Effects (SVAR-MGARCH-M) was estimated with the returns of the international price of oil and the equity returns of each country, both in real terms. The volatility of the international price of oil was approximated using the error forecast's conditional standard deviation of the international price of oil's fluctuations for one step ahead. The results show that the volatility of oil is relevant for the real equity returns in an immediate way only for Colombia. Nevertheless, in all of the countries analyzed, there is evidence of asymmetrical effects to positive and negative crashes of the international price of oil. These have important implications on economical policies. For example, investors have to be aware of the relation between the volatility of the price of oil and the equity returns when they use oil to cover and diversify their investment portfolios, particularly in economies where oil is important for economic growth. Similarly, the policy makers in the countries that import oil should encourage companies to improve energy efficiency and to use alternate sources to avoid fluctuations in the income and the stock prices.

JEL classification: C32, G10, G15, Q43.

Keywords: *Price of Oil Equity Returns, Volatility, GARCH Models, Energy, Emerging Markets.*

Introducción

En los últimos años, los precios mundiales de la energía han experimentado una considerable inestabilidad. Los precios del petróleo, en particular, han experimentado un alto nivel de volatilidad en la última década debido al uso extensivo del petróleo como un insumo fundamental en el proceso productivo y como un bien de consumo final, Swanepoel (2006). Factores físicos y financieros inciden en la volatilidad de los precios del petróleo, Marashdeh y Afandi (2017), dentro de los primeros se ubican la oferta y la demanda, la geopolítica, la tecnología y el clima, mientras que en el segundo grupo se encuentran el tipo de cambio, la tasa de interés y la especulación financiera, entre los más importantes.

La influencia de los precios del petróleo en la economía global ha generado serias preocupaciones entre los responsables de la formulación de políticas económicas, los inversionistas, los consumidores y las instituciones internacionales debido al posible impacto perjudicial en la macroeconomía, Goodness (2015). En consecuencia, los investigadores han mostrado un gran interés en comprender la naturaleza de esta relación, por lo que un gran esfuerzo se ha enfocado en el impacto de las fluctuaciones en el precio del petróleo en las variables macroeconómicas, Marashdeh y Afandi (2017).

Dada la importancia de los precios del petróleo para la economía mundial, recientemente se ha efectuado una mayor investigación sobre el efecto de los precios del petróleo en los rendimientos del mercado de valores. Se considera que las fluctuaciones en el precio del petróleo crudo son un factor importante que incide en los rendimientos del mercado accionario. La mayor parte de esta investigación ha demostrado que los choques en los precios del petróleo sí influyen en los mercados de valores, pero no hay consenso en los resultados de esta relación entre los investigadores, Kilian y Park (2009). Algunos estudios han encontrado una relación negativa entre el precio del petróleo crudo y el desempeño del mercado de valores, otros han encontrado una relación positiva y algunos estudios han mostrado resultados no concluyentes. Sin embargo, una revisión de la literatura ha demostrado que la naturaleza de la economía de un país, la importancia del petróleo en ésta y la naturaleza de los choques petroleros pueden tener un efecto considerable en la interacción entre los precios del petróleo y los rendimientos accionarios, Bouoiyour y Selmi (2016).

Uno de los primeros estudios que examinó esta relación es el de Jones y Kaul (1996), quienes reportaron un efecto negativo de las perturbaciones

del precio del petróleo en los rendimientos agregados del mercado de valores reales para cuatro países desarrollados. Otros estudios, como Sadorsky (1999), Gjerde y Sattlem (1999), Park y Ratti (2008), Chen (2010) y Filis (2010) también reportan impactos negativos. Sin embargo, otros estudios reportan una relación positiva, especialmente en los países exportadores de petróleo; entre los cuales se incluyen Arouri y Rault (2011) y Filis *et al.*, (2011). Finalmente, otros estudios mostraron resultados no concluyentes en los que no se encontró un impacto negativo ni positivo de los precios del petróleo en los rendimientos del mercado accionario, Chen, *et al* (1986); Huang, *et al* (1996); Wei (2003); Filis, *et al* (2011) y Narayan y Sharma (2011).

Los choques de los precios del petróleo se clasifican en tres tipos diferentes según la causa de las fluctuaciones en el precio real del petróleo, Hamilton (2009a) y (2009b). Estos tipos son el choque de oferta de los precios del petróleo, choques de demanda y el choque específico de demanda de petróleo, Marashdeh y Afandi (2017). El choque de oferta de petróleo se atribuye a un cambio en la producción mundial de petróleo (un choque en la oferta global). El choque de demanda de petróleo se debe a un aumento en la demanda agregada de todos los productos industriales, incluido el petróleo crudo, que es impulsado por la actividad económica real global. En tanto que el choque de demanda específica del petróleo se debe a un aumento en la demanda de petróleo crudo en respuesta a la creciente incertidumbre sobre el futuro déficit de suministro de petróleo, Kilian y Park (2009).

Existen diferentes teorías sobre el mecanismo de cómo las fluctuaciones en los precios del petróleo afectan los rendimientos del mercado de valores. Un argumento se basa en la noción de que el valor razonable del precio de una acción debe estar determinado por los flujos de efectivo futuros descontados esperados y que estos flujos de efectivo se ven afectados por diferentes factores macroeconómicos, dentro de los cuales se encuentran las variaciones en los precios del petróleo, razón por la cual estas variaciones pueden alterar los flujos de efectivo descontados esperados, que se reflejarán en el precio de este activo. En consecuencia, cualquier aumento en el precio del petróleo aumentará el costo de producción, reducirá el beneficio de la empresa y, en mayor medida, reducirá el valor de la acción. Por lo tanto, los cambios en los precios del petróleo influyen en gran medida en los mercados de valores, Jones y Kaul (1996). Otra opinión común a este respecto es que un aumento en los precios del petróleo es beneficioso para las compañías petroleras, cuyos flujos de efectivo están directamente relacionados con la diferencia entre el precio del petróleo y el costo de extracción del mis-

mo; por lo tanto, se espera que un aumento en el precio del petróleo tenga un impacto positivo en el rendimiento de las acciones de las compañías petroleras, mientras que tiene un efecto adverso en otras compañías cuyos flujos de efectivo se ven afectados negativamente por el aumento de los precios del petróleo, ya que el petróleo es la principal fuente de energía y uno de los principales costos de producción. Además, varios estudios revelan que el aumento en los precios de los energéticos genera incertidumbre para las empresas, lo que propicia retrasos en las decisiones de inversión, los cuales probablemente afectarán los precios de sus acciones, Degiannakis *et al* (2014). Por otro lado, hay varias explicaciones que sostienen que las fluctuaciones en los precios del petróleo no impactan en los mercados de valores. La primera explicación es que hay múltiples precios de factores en la economía, como las tasas de interés, los salarios, metales industriales y la tecnología, que pueden atenuar las variaciones en los costos de los energéticos. Otro argumento que se esgrime al respecto es que las empresas adquirieron mayor sofisticación en la interpretación de los mercados de futuros y por ende son más capaces de anticipar cambios en los precios de los factores. Dado lo anterior, la cuestión de que los cambios en el precio del petróleo pueden afectar a algunos sectores económicos más que a otros depende de la importancia relativa del petróleo como factor de producción en estos sectores.

A pesar del creciente interés que se ha registrado en los estudios que han examinado el efecto de las perturbaciones del precio del petróleo en los mercados de valores desarrollados y emergentes, ningún estudio se ha enfocado en esta relación en los países de América Latina. Por lo anterior, este estudio intenta cerrar la brecha y arrojar más luz sobre el impacto de las variaciones en el precio del petróleo en los rendimientos del mercado de valores en estos países. El resto del documento está organizado de la siguiente manera. La Sección 1, revisa la literatura sobre el nexo entre los choques del precio del petróleo y los rendimientos del mercado de valores. La Sección 2, describe la metodología empírica y la técnica de estimación aplicada en este estudio. La sección 3, describe las variables relevantes y el conjunto de datos utilizados en el análisis empírico. La sección 4, presenta y discute los resultados. Finalmente, las conclusiones y las recomendaciones de política se presentan en la última sección.

1. Revisión de los estudios empíricos

El Cuadro 1 presenta un resumen de los principales estudios que han examinado la relación entre volatilidad, como *proxy* a la incertidumbre de los precios del petróleo y los precios del mercado accionario, o sus rendimientos, de países importadores y exportadores de petróleo.

Cuadro 1. Resumen de los estudios empíricos relevantes

Autor(es)	Modelo	País o países	Principales resultados
Sadorsky (1999)	Modelo VAR	Estados Unidos de América	La volatilidad del precio del petróleo se encuentra negativamente relacionada a los rendimientos accionarios reales.
El-Sharif <i>et al.</i> (2005)	Modelo multifactorial de arbitraje de precios	Reino Unido	Una relación positiva y significativa entre la volatilidad del precio del petróleo y los rendimientos del mercado de valores.
Basher y Sadorsky (2006)	Modelo multifactorial de arbitraje de precios	21 países emergentes	Los choques de volatilidad del precio del petróleo tienen efectos asimétricos en los rendimientos de las acciones.
Nandha y Hammoudeh (2007)	Modelo multifactorial de arbitraje de precios	15 Países de Asia-Pacífico	Influencia significativa de la incertidumbre del precio del petróleo en solo dos países de la muestra.
Park y Ratti (2008)	Modelo VAR	Estados Unidos de América y 13 países europeos.	El efecto de los choques de los precios del petróleo en los precios de las acciones varía entre países.
Masih <i>et al.</i> (2011)	Modelo de corrección del error	Corea del Sur	Los elevados y volátiles precios del petróleo pueden tener importantes repercusiones adversas para la economía.
Wang <i>et al.</i> (2013)	Modelo VAR estructural	Nueve países importadores de petróleo y siete países exportadores de petróleo.	La incertidumbre de la oferta de petróleo puede deprimir los mercados de valores tanto en los países importadores como en los países exportadores de petróleo. El impacto de la incertidumbre de la demanda es más fuerte y más persistente en los países exportadores que en los países importadores de petróleo.
Asteriou y Bashmakova (2013)	Modelo multifactorial de arbitraje de precios	Países de Europa central y oriental	Los rendimientos del mercado de valores son sensibles al riesgo del precio del petróleo y a la volatilidad de los rendimientos accionarios. Los cambios en el precio del petróleo tienen el impacto más significativo en los rendimientos accionarios de los mercados emergentes.

Continúa

Du y He (2015)	Causalidad de Granger en riesgo	Estados Unidos de América	Existencia de derramas significativas del riesgo entre el petróleo crudo y los mercados de valores.
Caporale <i>et al.</i> (2015)	Modelo VAR-GARCH en media	China	La volatilidad del precio del petróleo afecta positivamente los rendimientos accionarios durante los períodos caracterizados por la incertidumbre del precio del petróleo y de los rendimientos accionarios.
Hammoudeh y Li (2005).	VECM, APT	México, Noruega y Estados Unidos de América	El aumento de los precios del petróleo es perjudicial para los mercados mundiales de capital y ejerce un impacto positivo en las existencias relacionadas con el petróleo.
Agren (2006)	Modelo BEKK asimétrico	Japón, Noruega, Suecia, el Reino Unido y los Estados Unidos de América	Evidencia de efectos de derrame de volatilidad del precio internacional del petróleo a los mercados de valores, con excepción de Suecia; Los efectos de derrame de volatilidad son reducidos en magnitud, aunque estadísticamente significativos.
Sadorsky (1999)	Riesgo del precio del petróleo y 21 rendimientos internacional de las bolsas de mercados emergentes.	Modelo multifactorial positivo en los rendimientos	Se encuentra evidencia de que el riesgo accionarios en los mercados emergentes.
Malik y Ewing (2009)	Modelos GARCH bivariados	Estados Unidos de América	Evidencia de una relación negativa y significativa entre los rendimientos de los índices sectoriales y la volatilidad del precio del petróleo
Arouri <i>et al.</i> (2011)	Modelo VARGARCH generalizado	Mercados de Valores de Europa y de los Estados Unidos de América	Propagación directa generalizada de la volatilidad entre los rendimientos accionarios sectoriales y los del petróleo. Efectos cruzados de volatilidad del petróleo los mercados de valores de Europa, mientras que en Estados Unidos se observan derramas de volatilidad en ambos sentidos.
Lee y Chiou (2011)	Modelo GARCH univariado con cambio de régimen.	Estados Unidos de América	Encuentran que ante fluctuaciones significativas en el precio del petróleo, los cambios inesperados en el precio del petróleo propician impactos negativos en los rendimientos del S&P500, este resultado en un régimen de fluctuaciones menores en el precio del petróleo no se mantiene.
Choi y Hammoudeh (2010)	Modelo GARCH-DCC simétrico	Estados Unidos de América	Muestran evidencia de correlaciones crecientes entre el los precios del petróleo Brent, del petróleo WTI, del cobre, del oro y de la plata, pero las correlaciones disminuyen con el índice S&P500.

Continúa

Filis <i>et al.</i> (2011)	Correlaciones variantes en el tiempo.	Estados Unidos de América, Alemania, Países Bajos, Canadá, México y Brasil.	Evidencia que la correlación variable en el tiempo no difiere para las economías importadoras de petróleo y las exportadoras de petróleo, la correlación aumenta positivamente (negativamente) en respuesta a importantes choques en el precio del petróleo del lado de la demanda agregada (demanda precautoria), como resultado de las fluctuaciones del ciclo económico mundial. Los resultados de la correlación desfasada muestran que los precios del petróleo tienen un efecto negativo en todos los mercados bursátiles.
Masih <i>et al.</i> (2011)	Modelo VEC	Corea del Sur	Impacto negativo de la volatilidad del precio del petróleo en los rendimientos reales de las acciones.
Jouini (2013)	Modelo VAR-GARCH	Arabia Saudita	Evidencia de transmisión de volatilidad entre precio del petróleo y los rendimientos sectoriales.
Chang <i>et al.</i> (2009)	Modelos GARCH Multivariados	Rendimientos accionarios de diez compañías petroleras mundiales.	No encuentran evidencia de derramas de volatilidad.
Arouri <i>et al.</i> (2012)	Modelo VAR-GARCH	Mercados petroleros y accionarios de Europa.	Encuentran efectos significativos de derramas de volatilidad entre el precio del petróleo y rendimientos accionarios sectoriales.
Jiranyakul (2014)	Modelo GARCH bivariado, pruebas de causalidad Granger por pares	Tailandia	Evidencia de que los movimientos en el precio real del petróleo no afecta adversamente el rendimiento real del mercado de valores, pero la volatilidad del precio de las acciones sí afecta el rendimiento real de las acciones. Encuentran evidencia de transmisión de volatilidad unidireccional positiva que va del petróleo al mercado de valores.
Olson <i>et al.</i> (2014)	Modelo BEKK Multivariado	Estados Unidos de América	Los resultados muestran que los rendimientos bajos de S&P500 causan incrementos sustanciales en la volatilidad del índice de energía; Sin embargo, encuentran una respuesta débil de la volatilidad del S&P500 a los choques de precios de la energía.
Lin <i>et al.</i> (2014)	Modelos VAR-GARCH, VAR-AGARCH y DCC-GARCH	Ghana	Evidencia de transmisión de volatilidad positiva y significativa e interdependencia entre el petróleo y los rendimientos del mercado de valores.

Continúa

Basher y Sadorsky (2006)	Análisis de regresión agrupado.	21 Mercados de valores emergentes.	Se encuentra un fuerte impacto estadísticamente significativo.
Gupta y Modise (2013)	VAR estructural	Sudáfrica	Para los países importadores de petróleo, el rendimiento de las acciones aumenta como resultado de un aumento del precio del petróleo solo cuando la economía mundial está aumentando. En caso de demanda especulativa y choques de oferta de petróleo, disminuyen los rendimientos accionarios.
Wang <i>et al.</i> (2013)	VAR estructural	Estados Unidos de América, Japón, Alemania, Francia, Reino Unido, Italia, China, Corea, India, Arabia Saudita, Kuwait, México, Noruega, Rusia, Venezuela y Canadá.	Ninguno de los mercados bursátiles bajo estudio responde a los choques del precio del petróleo. Los mercados de valores de los países exportadores de petróleo responden positivamente a los choques de demanda agregada positivos. Los resultados no son concluyentes para los choques de demanda precautorios, para la mayoría de los mercados de capitales, los efectos son insignificantes.
Maghyreh y Awartani (2016).	SVAR-MGARCH en media.	Diez países de la región de Oriente Medio y del Norte de África.	La incertidumbre del precio del petróleo es importante en la determinación de los rendimientos reales de las acciones. Existe una relación negativa y significativa entre la incertidumbre del precio del petróleo y el rendimiento real de las existencias en todos los países de la muestra. La incidencia del riesgo del precio del petróleo es más fuerte en aquellas economías que dependen en gran medida de los ingresos del petróleo para crecer.
Bass (2017)	SVAR-MGARCH en media	Rusia	La incertidumbre de los precios del petróleo tiene un impacto positivo y estadísticamente significativo en los rendimientos de las acciones. También encuentra evidencia de efectos asimétricos en los rendimientos accionarios ante choques negativos y positivos de los precios del petróleo.
Kocaarslan <i>et al.</i> (2017).	Modelos VAR-A-DCC -EGARCH(1,1) y VAR-DCC-EGARCH(1,1)	BRIC's y Estados Unidos.	El impacto de las expectativas de volatilidad en los mercados de valores, oro y petróleo de los Estados Unidos son asimétricos y dependen del nivel de las correlaciones. Adicionalmente, la interdependencia entre los mercados es impulsada por las percepciones de riesgo tanto en los mercados financieros como en los no financieros.

Fuente: actualizado a partir de los cuadros 1 de Bass (2017) y A1 de Maghyreh y Awartani (2016).

Dados los resultados presentados en el Cuadro 1 es posible destacar lo siguiente: *i*) la investigación sobre el tema es escasa y se ha concentrado en los países en desarrollo, de aquí la relevancia y la importancia de investigar a las economías emergentes; *ii*) los estudios existentes se dedican principalmente al análisis de la relación entre los precios del petróleo y el valor de mercado de las acciones. Los estudios sobre la causa del impacto de la volatilidad de los precios del petróleo en los mercados bursátiles, son escasos; *iii*) la evidencia de los resultados de estudios previos es mixta; Bass (2017). De esta forma, algunos investigadores han llegado a la conclusión de una relación existente entre la incertidumbre de los precios del petróleo y los rendimientos del mercado accionario mientras que otros han arribado a la conclusión de la ausencia de dicha relación; *iv*) la mayoría de los estudios analizan de manera simétrica la reacción del mercado bursátil a los choques positivos y negativos de incertidumbre en los precios del petróleo, Bass (2017) y Rodríguez, Martínez y Hoyos (2019).

2. Metodología Econométrica

Sea y_t' un vector columna bidimensional de variables endógenas en el que se incluyen las variaciones en el precio internacional del petróleo y los rendimientos del mercado accionario. La media condicional de las variables se especifica como un proceso VAR que se puede escribir como:

$$By_t = C + A_1y_{t-1} + A_2y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + \quad (1)$$

$$\Lambda(L)H_t^{1/2} + \varepsilon_t \quad \text{para } 1 \leq t \leq T,$$

Expresión cuyas matrices tienen las siguientes propiedades $\dim(B) = \dim(A_i) = (N, N)$, $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim iid N(0, H_t)$, H_t es diagonal, $\Lambda(L)$ es un polinomio matricial en el operador de rezago, ψ_{t-1} denota el conjunto de información hasta el momento $t-1$, mientras que p y T son la longitud de los rezagos y el tamaño de la muestra, respectivamente. La volatilidad del precio del petróleo es $H_t^{1/2}$, la desviación estándar de la varianza condicional de los rendimientos del petróleo. El impacto de la incertidumbre en los rendimientos accionarios reales se captura a través de los coeficientes de la matriz $\Lambda(L)$. Específicamente, la incertidumbre del precio del petró-

leo es relevante e inhibe los rendimientos accionarios reales si el coeficiente de $\Lambda(L)$ es negativo y estadísticamente significativo.⁴ Con respecto a la covarianza condicional, H_t se asume que sigue una forma reducida de un proceso GARCH bivariado como en Engle y Kroner (1995). El proceso se puede escribir como:

$$h_t = C_v + \sum_{i=1}^q F_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^r G_j h_{t-j} \quad (2)$$

donde $\eta_{t-i} = \text{vec}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}')$, $h = \text{vec}(H_t)$, $\varepsilon_t \sim H_t^{1/2} z_t$, $z_t \sim N(0, I)$, F_i y G_j son matrices de parámetros de orden $N \times N$ y C_v es una matriz triangular superior que asegura que H_t sea definida positiva.

Para reducir el número de parámetros en la función de varianza, se utilizó el supuesto común de identificación en el VAR estructural como en Elder (2004) y Elder y Serletis (2010). De esta forma se asumió que correlaciones contemporáneas de las perturbaciones estructurales son iguales a cero, lo cual permite reducir la matriz de covarianza, H_t a una matriz diagonal. Por tanto, el modelo se reduce a

$$\text{diag}(H_t) = C_v + \sum_{i=1}^q F_i \text{diag}(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^r G_j \text{diag}(h_{t-j}) \quad (3)$$

Esta simple especificación, permite que la varianza condicional sea una función de rezagos de sus errores al cuadrado y de sus varianzas condicionales. Las matrices de parámetros F_i y G_j son diagonales.

El VAR-GARCH en media establecido por la ecuación de media condicional planteada en la ecuación (1) y la ecuación de la varianza condicional establecida en (3) se estiman simultáneamente a través del método de máxima verosimilitud. Específicamente, se maximiza la siguiente función logarítmica de verosimilitud:

⁴ Para asegurar la identificación, se impone la restricción cero en un modelo VAR estructural convencional. De esta manera se restringe la matriz B de tal modo que los rendimientos del mercado de valores respondan instantáneamente a las innovaciones de los precios reales del petróleo y no al revés. Por lo tanto, se estima un parámetro libre en B como en un VAR bivariado.

$$\log L_t(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta) \quad (4)$$

donde L_t es la función de verosimilitud muestral, es un vector $\theta = (B, C, A_1, A_2, \dots, A_p, \Lambda, F, \text{ y } G)$ de parámetros estructurales,

$$l_t(\theta) = -(N/2) \log(2\pi) + (1/2) \log |B|^2 \quad (5)$$

$$-(1/2) \log |H_t| - (1/2) (\varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t)$$

Para obtener estimaciones consistentes, la ecuación (4) se maximiza con respecto a los parámetros estructurales a través de métodos numéricos empleando el algoritmo de Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno (BFGS), Maghyereh y Awartani (2016).

3. Los datos

Los rendimientos del precio internacional del petróleo en términos reales se calcularon a partir del precio del *West Texas Intermediate* (WTI), el cual se obtuvo de dos fuentes: de enero de 1975 a diciembre de 1985 se tomó de Balcilar, Gupta y Miller (2015), mientras que de enero de 1986 a enero de 2019 la serie proviene de la Administración de Información Energética de Estados Unidos (*EIA*, por sus siglas en inglés),⁵ para expresarlo en términos reales se deflactó el precio nominal del petróleo con el índice de precios al consumidor de los Estados Unidos. En tanto que los rendimientos de los mercados accionarios analizados, se obtuvieron del Índice del Mercado Accionario representativo de cada país en moneda local y en términos reales se extrajeron de *Economática* y su periodo de cobertura difiere para cada uno de ellos. El Cuadro 2 muestra el periodo temporal de cobertura para cada índice accionario y el número de observaciones correspondiente para cada uno de ellos. De esta manera se cuenta con un panel de datos desbalanceado en virtud de que los periodos de tiempo de cada índice accionario considerado difieren entre ellos. Como

⁵ <https://www.eia.gov/dnav/pet/hist/LeafHandler.ashx?n=p&s=rwtc&f=m>

se puede ver en el Cuadro 2, hay muy pocas observaciones disponibles para Argentina, razón por la cual se optó por excluir a este país de la muestra de países de América Latina analizados, de igual forma el mercado accionario de México se excluye de la muestra en virtud de que ya fue analizado exhaustivamente en Rodríguez, Martínez y Hoyos (2019).

Cuadro 2. Descripción de los Índices Accionarios de América Latina empleados

País (Índice)	Periodo	Observaciones
Argentina (MERVAL)	Jun -2012 – Ene 2019	80
Brasil (IBOVESPA)	Dic 1979 – Ene 2019	470
Colombia (IGBC)	Ene 1991 - Ene 2014	276
Chile (IPSA)	Ene 1989 – Ene 2019	361
Perú (SP/BVL)	Ene 1990 – Ene 2019	349

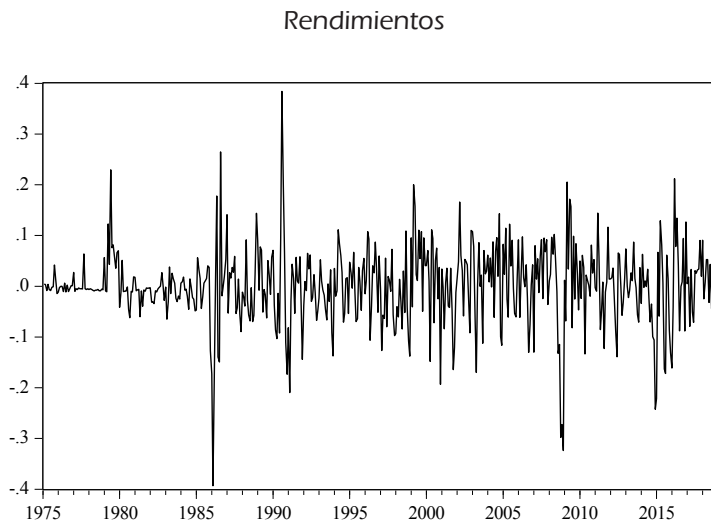
Las series de rendimientos, tanto del petróleo como de cada índice accionario considerado, se obtuvieron de sus primeras diferencias logarítmicas.

La Gráfica 1 muestra la evolución del precio real del petróleo, sus rendimientos mensuales y la varianza condicional durante el período de muestra. En dicha gráfica se pueden apreciar cambios sustanciales en el precio real del petróleo durante ciertos períodos. Por ejemplo, el incremento repentino que mostró a principios de la década de los ochentas y posteriormente su caída sostenida en los años posteriores y su drástica reducción a principios de 1986 como consecuencia del colapso de la cooperación de la OPEP, lo que propició una sobreproducción de petróleo. Con la reducción de los precios del petróleo, la volatilidad aproximada en primera instancia por la volatilidad condicional aumentó en este período. De manera similar, durante la primera Guerra del Golfo, en 1991, los precios del petróleo también experimentaron grandes fluctuaciones, Maghyereh, Awartani y Sweidan_(2017). La volatilidad del petróleo se mantuvo en un nivel relativamente bajo durante el período que se extiende desde 1993 hasta 1998; luego, se volvió a incrementar en los años 1998, 1999 y 2000 a raíz de la crisis asiática. De igual forma, la Gráfica 1 muestra un notable incremento de la volatilidad durante la reciente crisis financiera mundial que comenzó a finales de 2007 y se extendió en los años subsecuentes.

Gráfica 1. Logaritmo del precio internacional del petróleo en términos reales, rendimientos y varianza condicional obtenida de un AR(1)-GARCH(1,1) (1975:1-2019:1)

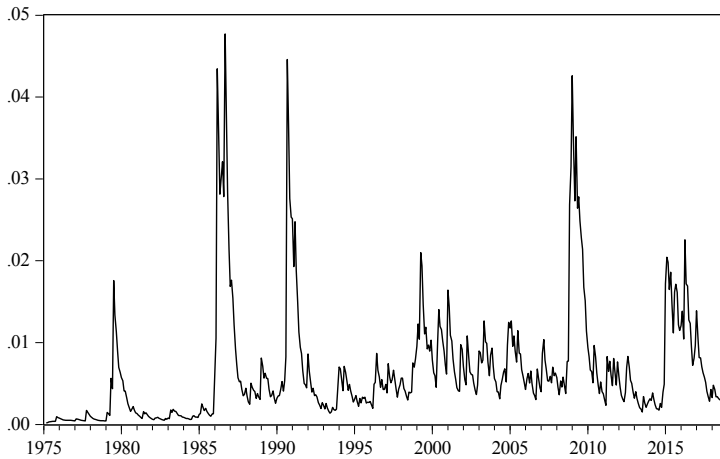


Fuente: elaboración propia.



Fuente: elaboración propia.

Varianza condicional obtenida de un AR(1)-GARCH(1,1)

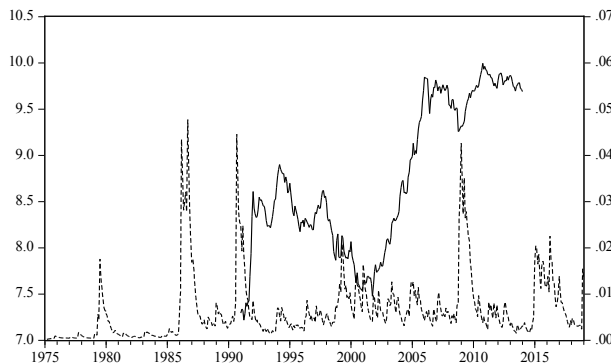


Fuente: elaboración propia.

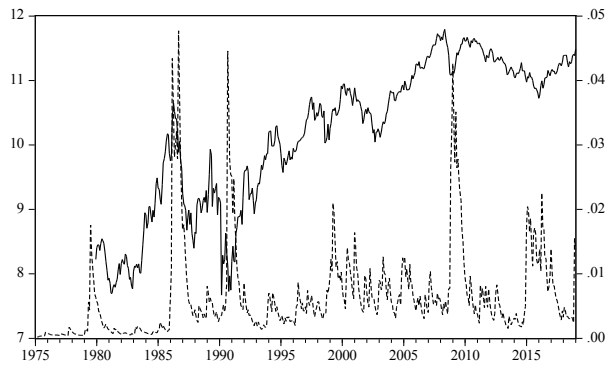
La Gráfica 2 muestra la volatilidad del precio del petróleo (línea punteada) y el logaritmo natural del índice accionario de cada país (línea sólida). En algunos casos muestra que un incremento en la volatilidad del precio del petróleo va acompañado de reducciones en los índices accionarios en términos reales.

Gráfica 2. Índices accionarios de los mercados de América Latina seleccionados en moneda local y en términos reales, en logaritmos naturales, y Varianza condicional del precio internacional del petróleo

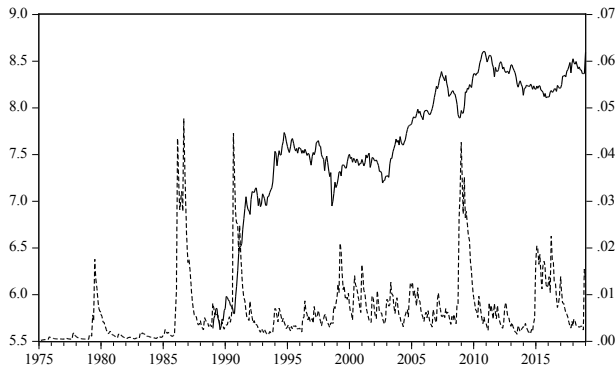
IBOVESPA



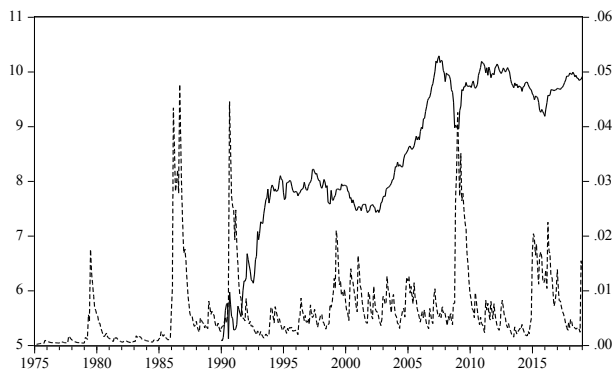
IGBC



IPSA



SPBVL



Fuente: elaboración propia.

4. Resultados empíricos

El Cuadro 3 muestra los resultados de las pruebas de raíz unitaria del multiplicador de Lagrange, con dos cambios en el nivel (media) aplicadas tanto a los rendimientos del precio internacional del petróleo como a los rendimientos accionarios de los países de América Latina considerados.

Cuadro 3. Prueba endógena de raíz unitaria del multiplicador de Lagrange con dos rupturas estructurales

<i>Diferencia logarítmica del precio internacional del petróleo en términos reales.</i>				
Modelo A: $k = 0$, $T_{B1} = 1985:12$, $T_{B2} = 2008:11$, $N = 515$.				
Valor crítico al 5%: -3.260				
Parámetro	μ_0	d_1	d_2	ϕ
Estimado	-0.0159	-0.1462	-0.2711	-0.7126
Estadístico t	-4.6403	-1.9526	-3.5779	-16.8179
<i>Diferencia logarítmica del IBOVESPA en términos reales.</i>				
Modelo A: $k = 9$, $T_{B1} = 1985:09$, $T_{B2} = 1990:08$, $N = 456$.				
Valor crítico al 5%: -3.603				
Parámetro	μ_0	d_1	d_2	ϕ
Estimado	-0.1373	0.1543	-0.2845	-1.0513
Estadístico t	-6.6041	1.0044	-1.6291	-6.6041
<i>Diferencia logarítmica del IGBC en términos reales.</i>				
Modelo A: $k = 0$, $T_{B1} = 2000:05$, $T_{B2} = 2002:08$, $N = 263$.				
Valor crítico al 5%: -3.644				
Parámetro	μ_0	d_1	d_2	ϕ
Estimado	-0.0055	-0.0450	0.0741	-0.8406
Estadístico t	-1.2445	-0.6243	1.0311	-13.9238
<i>Diferencia logarítmica del IPSA en términos reales.</i>				
Modelo A: $k = 3$, $T_{B1} = 1998:11$, $T_{B2} = 2009:05$, $N = 347$.				
Valor crítico al 5%: -3.266				
Parámetro	μ_0	d_1	d_2	ϕ
Estimado	-0.0412	-0.0816	-0.0814	-0.2623
Estadístico t	-4.3278	-1.1928	-1.2754	-4.6366
<i>Diferencia logarítmica del SP/BVL en términos reales.</i>				
Modelo A: $k = 1$, $T_{B1} = 1994:09$, $T_{B2} = 2008:08$, $N = 335$.				
Valor crítico al 5%: -3.629				
Parámetro	μ_0	d_1	d_2	ϕ
Estimado	0.0080	0.0283	-0.1983	-0.6800
Estadístico t	1.4944	0.2925	-2.0344	-9.7512

Hipótesis nula: $y_t = \mu_0 + d_1 B_{1t} + d_2 B_{2t} + y_{t-1} + u_{1t}$,

Hipótesis alternativa: $y_t = \mu_1 + \gamma t + d_1 D_{1t} + d_2 D_{2t} + v_{2t}$,

donde $D_{j1} = 1$ para $t \geq T_{Bj} + 1$, $j = 1, 2$ y 0 de otra forma; $B_{j1} = 1$ para $t \geq T_{Bj} + 1$, $j = 1, 2$ y 0 de otra forma; T_{Bj} denota la fecha de ruptura.

Cómo se puede ver en el Cuadro 3, los resultados de las pruebas de raíces unitarias con dos rupturas en media, revelan que tanto la serie de rendimientos del petróleo como las series de los rendimientos de los países de América Latina consideradas son estacionarias, cabe aclarar que la presencia de rupturas en la prueba es con el fin de hacer más robusta la inferencia que puede extraerse de la prueba ante posibles cambios de nivel que puedan estar presentes en estas series. El siguiente paso consiste en determinar el número de rezagos óptimo para cada uno de los modelos VAR estimados con los rendimientos del precio internacional del petróleo en términos reales y de cada uno de los índices accionarios reales de cada uno de los mercados de América Latina considerados. El Cuadro 4 presenta el número óptimo de rezagos sugerido para cada modelo VAR de acuerdo a los criterios de Akaike y de Schwarz.

Cuadro 4. Número de rezagos óptimo de acuerdo a los criterios de Akaike y de Schwarz para cada modelo VAR estimado

País (Índice)	Número de rezagos de acuerdo con el criterio de	
	AIC	SBC
Brasil (IBOVESPA)	1	1
Colombia (IGBC)	9	1
Chile (IPSA)	1	1
Perú (SP/BVL)	1	1

Notas: AIC es el criterio informativo de Akaike y SBC el de Schwarz.

Los criterios de Akaike y de Schwarz sugieren en casi todos los casos que el número de rezagos óptimo para cada VAR es 1, con excepción de índice de precios del mercado de Colombia (IGBC), dado lo anterior se optó por estimar cada uno de los modelos VAR, con los rendimientos del precio internacional del petróleo y de cada uno de los rendimientos accionarios de los mercados analizados con un rezago. Dado que las series en cuestión son estacionarias se estimó el modelo SVAR-MGARCH en media con los rendimientos tanto del precio del petróleo en términos reales, como con los del Índice Accionario de cada país también en términos reales. Los resultados de la prueba de especificación se presentan en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Pruebas de especificación del modelo

Modelo VAR y muestra	VAR	VAR con MGARCH-M
<i>Rendimientos del precio real del petróleo e IBOVESPA</i>	7173.61	6869.04
<i>Rendimientos del precio real del petróleo e IGBC</i>	3852.51	3823.56
<i>Rendimientos del precio real del petróleo e IPSA</i>	4850.15	4838.93
<i>Rendimientos del precio real del petróleo e SP/BVL</i>	5148.69	4977.41

Los valores del criterio de Schwarz reportados en el Cuadro 5 revelan que en todos los modelos VAR estimados con los rendimientos tanto del precio real del petróleo como de cada mercado accionario, los modelos VAR con efectos GARCH en la media capturan mejor las características de los datos en comparación con los modelos VAR homocedásticos. Lo anterior resalta la importancia de tener en cuenta los efectos de la volatilidad (GARCH) en la media en el ajuste de los datos.

El Cuadro 6 reporta los coeficientes estimados de las ecuaciones de la varianza condicional para cada una de las variables incorporadas en el modelo. Los valores de los parámetros estimados muestran claramente que los coeficientes de los términos ARCH y GARCH son estadísticamente significativos para ambas variables. Estos resultados proveen soporte adicional a la validez del modelo del modelo SVAR-MGARCH en media.

Cuadro 6. Coeficientes estimados de la función de varianza del VAR MGARCH-M

Ecuación de los rendimientos	Varianza condicional	Constante	$\varepsilon_i(t-1)^2$	$H_{i,j}(t-1)$
IBOVESPA				
<i>Del petróleo</i>	$H_{1,1}(t)$	38.27** (11.55)	0.386** (4.77)	0.00 -
<i>Del mercado Accionario</i>	$H_{2,2}(t)$	0.730* (1.68)	0.137** (4.72)	0.872** (39.92)
IGBC				
<i>Del petróleo</i>	$H_{1,1}(t)$	43.47** (9.70)	0.203** (2.83)	0.00 -
<i>Del mercado Accionario</i>	$H_{2,2}(t)$	0.524** (11.18)	0.115** (25.95)	0.882** (184.16)

Continúa

IPSA				
<i>Del petróleo</i>	$H_{1,1}(t)$	49.99** (10.26)	0.220** (2.72)	0.00 -
<i>Del mercado Accionario</i>	$H_{2,2}(t)$	2.079* (1.74)	0.094** (2.85)	0.852** (15.94)
SP/BVL				
<i>Del petróleo</i>	$H_{1,1}(t)$	51.57** (10.47)	0.210** (5.12)	0.00 -
<i>Del mercado Accionario</i>	$H_{2,2}(t)$	1.124** (4.99)	0.159** (96.07)	0.841** (513.84)

Notas: Los números entre paréntesis son los estadísticos- t asociados a cada parámetro estimado.

** Denota significancia al nivel del 5%.

* Denota significancia al nivel del 10%.

El impacto de la volatilidad del precio internacional real del petróleo en los rendimientos de los mercados accionarios de América Latina analizados se presenta en el Cuadro 7. En este cuadro se muestra la estimación puntual del parámetro de interés y su estadístico t asintótico correspondiente entre paréntesis. Como se puede apreciar dicho coeficiente resultó positivo en todos los casos, no obstante, el único que resultó significativo es el de Colombia (IGBC). Por lo tanto, podemos concluir que únicamente en uno de los cuatro

Cuadro 7. Coeficientes estimados de la volatilidad del petróleo en la ecuación de la media de los rendimientos accionarios

<i>Índice Accionario</i>	Coeficiente de la volatilidad del petróleo $H_{1,1}(t)^{1/2}$
<i>IBOVESPA</i>	0.323 (1.55)
<i>IGBC</i>	0.851** (2.57)
<i>IPSA</i>	0.291 (1.15)
<i>SP/BVL</i>	0.055 (0.17)

Notas: Los números entre paréntesis son los valores de los estadísticos t asintóticos.

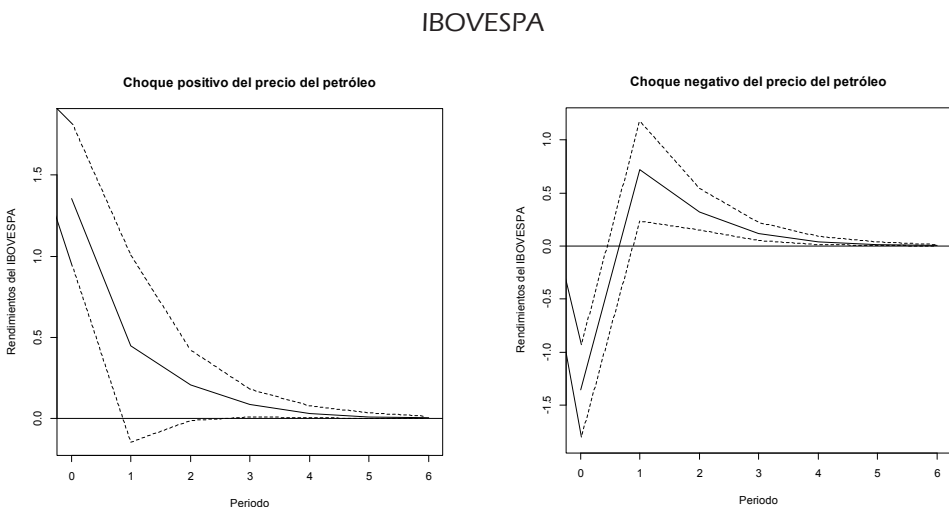
** Denota significancia al nivel del 5%.

* Denota significancia al nivel del 10%.

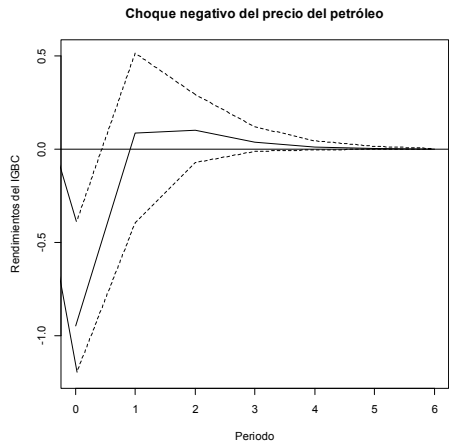
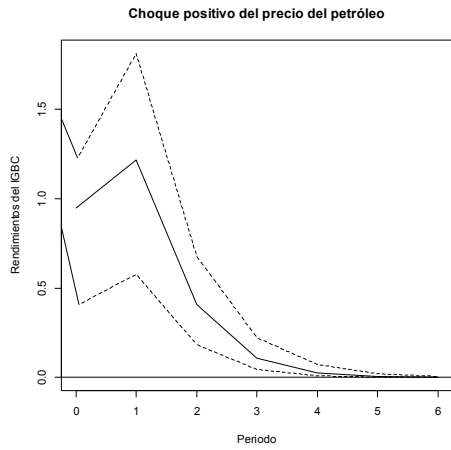
mercados analizados, la volatilidad del precio internacional del petróleo tiene un efecto positivo inmediato significativo en el rendimiento real de las acciones, estos resultados no son consistentes con los reportados por otros trabajos efectuados para otros países, por ejemplo para los países de la región de Oriente Medio y Norte de África, ver Maghyreh y Awartani (2016).

Por otra parte, se evaluó el impacto de la volatilidad del precio del petróleo en la dinámica de los rendimientos accionarios a través de las funciones de impulso-respuesta, las cuales se simulan a partir de las estimaciones de los parámetros del modelo obtenido por el método de máxima verosimilitud. Para poder comparar los impulsos con los de un VAR homoscedástico, la magnitud de las respuestas al impulso utilizadas para simular las funciones de impulso-respuesta, se basa en un choque del precio del petróleo que es igual a la desviación estándar incondicional del cambio en el precio del mismo. Para determinar si las respuestas a choques positivos y negativos son simétricas o asimétricas, se simula la respuesta de los rendimientos accionarios a ambos tipos de choques del precio del petróleo. Las funciones de impulso-respuesta (línea negra continua) y las bandas de error a una desviación estándar (líneas punteadas) se presentan en la Gráfica 3. Las funciones de impulso-respuesta muestran que ante un choque positivo inesperado

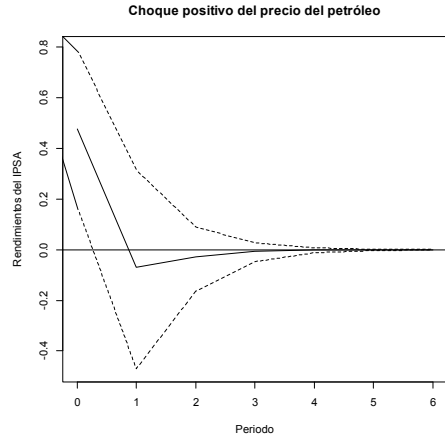
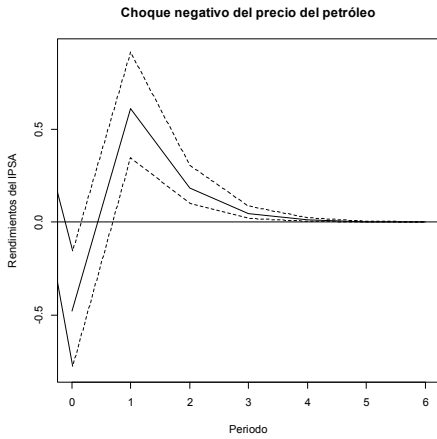
Gráfica 3. Funciones de Impulso-Respuesta a una desviación estándar a choques positivos y negativos de las variaciones del precio real del petróleo



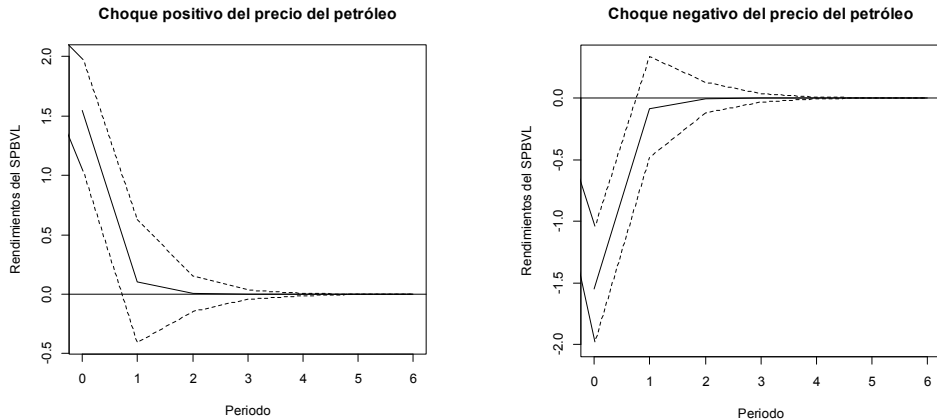
IGBC



IPSA



SPBVL



Fuente: elaboración propia.

del precio internacional de petróleo propician una reducción instantánea en los rendimientos accionarios en casi todos los mercados de la muestra analizados, con excepción del mercado accionario de Colombia, en el que a diferencia del resto en éste tiende primero a incrementarse, posteriormente este efecto tiende a revertirse y a disiparse después en menos de medio año una vez transcurrido el choque.

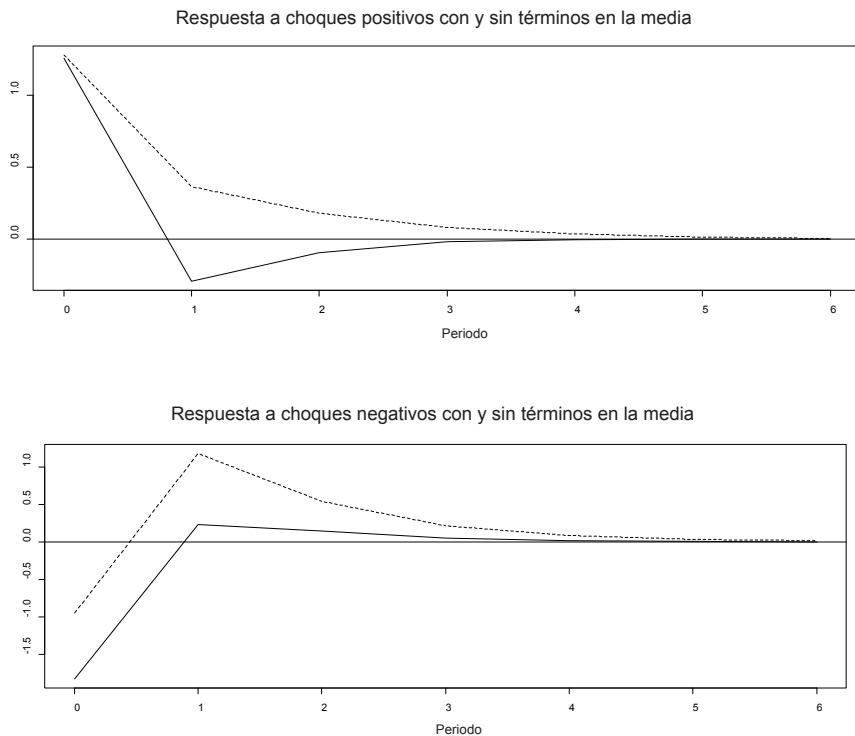
Mientras que la respuesta dinámica de los rendimientos accionarios de los distintos mercados a un *shock* negativo del precio del petróleo, es que tienden a incrementar la rentabilidad en todos los mercados accionarios de la región analizados de manera inmediata en el lapso de un mes para posteriormente disipar este efecto. De esta manera, las funciones de impulso-respuesta revelan la presencia de efectos asimétricos en los rendimientos accionarios de los mercados analizados ante choques positivos y negativos del precio internacional del petróleo.

Por último, la comparación de las respuestas de los rendimientos accionarios ante choques positivos y negativos del precio del petróleo con y sin el término GARCH en media se muestra en la Gráfica 4, en la cual con fines de simplicidad se suprimen las bandas correspondientes al nivel de confianza. En dicha gráfica, las líneas sólidas representan la respuesta de los rendimientos accionarios ante un shock en el precio del petróleo en el

modelo que incorpora la volatilidad del precio del petróleo en la ecuación de los rendimientos accionarios, en tanto que las líneas punteadas representan la respuesta de los rendimientos accionarios después de un choque en el precio del petróleo excluyendo la volatilidad del precio del petróleo en la ecuación de los rendimientos accionarios. La gráfica muestra que el patrón asociado con los modelos VAR-GARCH multivariado con efectos en media son muy similares a los de los modelos VAR homocedásticos. Lo anterior sugiere que los modelos VAR-GARCH multivariados en media son una especificación apropiada para capturar la influencia de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos accionarios de los mercados analizados.

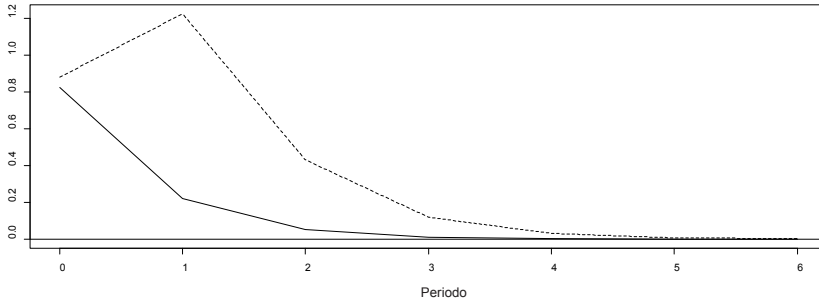
Gráfica 4. Respuesta a una desviación estándar a choques positivos y negativos del precio real del petróleo con y sin efectos GARCH en media

IBOVESPA

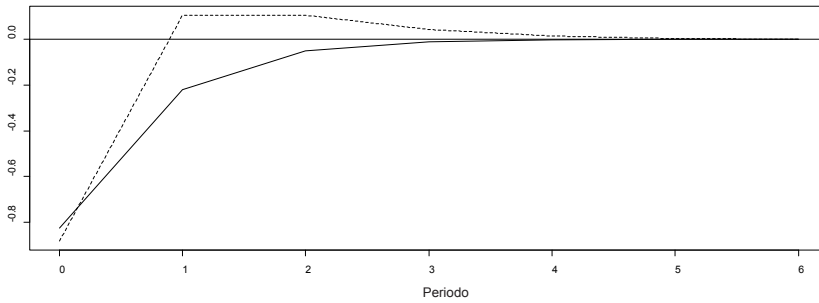


IGBC

Respuesta a choques positivos con y sin términos en la media

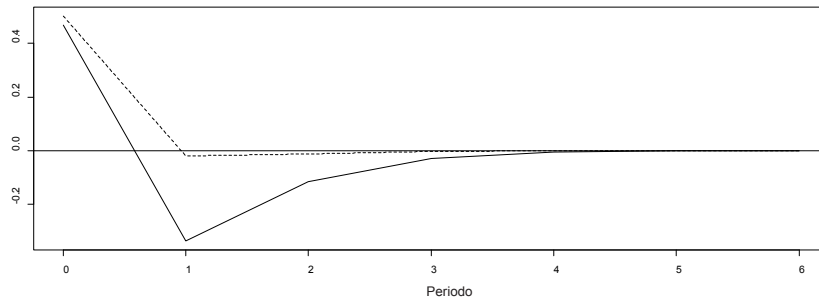


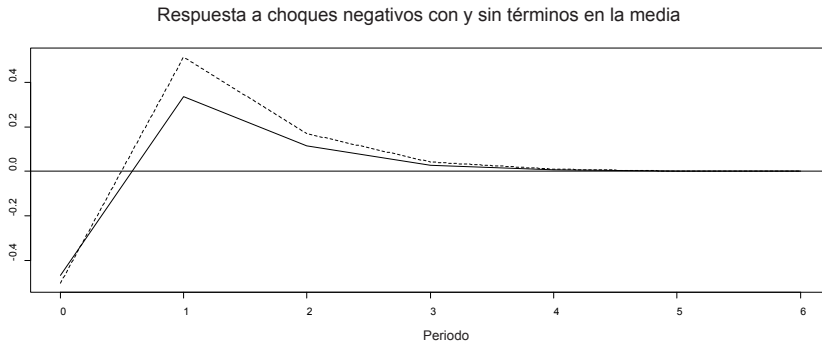
Respuesta a choques negativos con y sin términos en la media



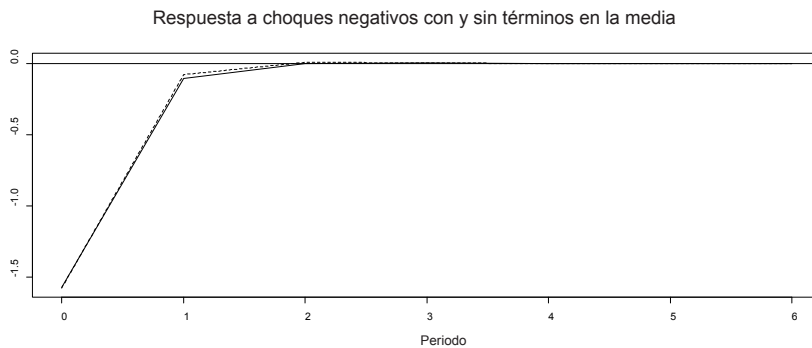
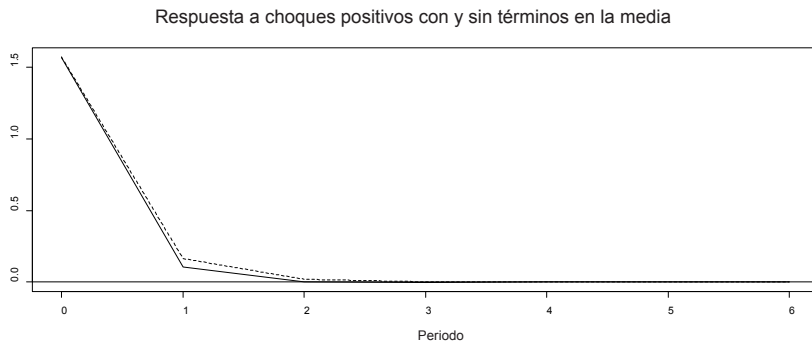
IPSA

Respuesta a choques positivos con y sin términos en la media





SPBVL



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

En fechas recientes, la relación entre la volatilidad de los precios del petróleo y el rendimiento de los mercados accionarios ha atraído una considerable atención de académicos y formuladores de las políticas económicas. Sin embargo, la mayor parte de esta investigación se ha centrado en los principales mercados de valores de países desarrollados y de algunas economías emergentes, mientras que algunas regiones como la de América Latina han recibido escasa atención con respecto a este tema. Razón por la cual en este trabajo se examinó el impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo y se proporcionó evidencia de una muestra de cinco países de América Latina, la cual contiene países importadores y exportadores de petróleo siendo estos últimos los que dependen en gran medida de la producción y de las exportaciones de petróleo.

Para estudiar el impacto de la volatilidad del precio internacional del petróleo en los rendimientos reales accionarios se empleó el modelo VAR-MGARCH en media propuestos por Elder y Serletis (2010). Contrariamente a lo encontrado por la mayoría de los estudios que reportan un impacto negativo de la volatilidad del precio del petróleo en la media de los rendimientos accionarios, Sadorsky (1999), Park y Ratti (2008), Masih *et al.* (2011), Nandha y Hammoudeh (2007), Maghyereh y Awartani (2016) entre otros, los resultados revelan que no hay evidencia de que la volatilidad del precio del petróleo incida negativamente en los rendimientos de los mercados accionarios analizados de manera directa ya que los coeficientes que capturan esa influencia no resultaron significativos, salvo en el caso del mercado de Colombia, (IGBC), no obstante el impacto resultó ser positivo.

Estos resultados son importantes para los inversionistas y los participantes del mercado, quienes deben estar conscientes de los vínculos entre la volatilidad del precio del petróleo y el rendimiento de las acciones ya que para ellos es una posibilidad recurrir al petróleo para cubrirse y diversificar sus acciones, particularmente en las economías donde el petróleo es importante para el crecimiento económico, Maghyereh y Awartani (2016).

Ante la respuesta que presentaron los rendimientos accionarios de los mercados analizados ante choques positivos y negativos de los precios del petróleo, es necesario que los participantes en estos mercados hagan uso de derivados financieros como opciones y *swaps* para protegerse de ambos tipos de choques. No obstante, en el caso de los países de América Latina no hay una diferencia clara entre las respuestas ante esos choques entre los

países exportadores e importadores de petróleo debido a que presentan el mismo patrón de sus respuestas en casi todos los mercados analizados.

Referencias bibliográficas

- Agren, M. (2006). "Does Oil Price Uncertainty Transmit to Stock Markets?" *Working Paper*, Department of Economics, Uppsala University, No. 2006, 23. Available from: <http://www.econstor.eu/bitstream/10419/82778/1/wp2006-023.pdf>.
- Arouri, M.E.H. y Nguyen, D.K. (2010). "Oil Prices, Stock Markets and Portfolio Investment: Evidence From Sector Analysis in Europe Over the Last Decade". *Energy Policy*, núm. 38, pp. 4528-4539.
- Arouri, M.E.H., Jouini, J. y Ngugen, D.K. (2011). "Volatility Spillovers Between oil Prices and Stock Sector Returns: Implications for Portfolio Management". *Journal of International Money and Finance*, vol. 30, núm. 7, pp. 1387-1405.
- Arouri, M. y Rault, C. (2011). "Oil Prices and Stock Markets in GCC Countries: Empirical Evidence from Panel Analysis". *International Journal of Finance and Economics*, núm. 17, pp. 243-253.
- Arouri, M.E.H., Jouini, J. y Ngugen, D.K. (2012). "On the Impacts of Oil Price Fluctuations on European Equity Markets: Volatility Spillover and Hedging Effectiveness". *Energy Economics*, núm. 34, pp. 611-617.
- Asteriou, D. y Bashmakova, Y. (2013). "Assessing the Impact of Oil Returns on Emerging Stock Markets: a Panel Data Approach for ten Central and Eastern European Countries". *Energy Economics*, vol. 38 núm. 3, pp. 204-211.
- Aye, G. (2015). "Does Oil Price Uncertainty Matter for Stock Returns in South Africa?" *Investment Management and Financial Innovations*, vol. 12, núm 1, pp. 179-188.
- Awartani, B. y Maghyereh, A. (2013). "Dynamic Spillovers Between Oil and Stock Markets in the Gulf Cooperation Council Countries". *Energy Economics*, vol. 36, núm. 2, pp. 28-42.
- Balcilar, M., Gupta, R. y Miller, S.M. (2015). "Regime Switching Model of US Crude Oil and Stock Market Prices: 1859 to 2013". *Energy Economics*, doi: 10.1016/j.eneco.2015.01.026.
- Basher, S.A., Sadorsky, P. (2006). "Oil Price Risk and Emerging Stock Markets". *Global Finance Journal*, núm. 17, pp. 224-251.
- Basher, S.A., Haug, A.A. y Sadorsky, P. (2012). "Oil Prices, Exchange Rates and Emerging Stock Markets". *Energy Economics*, vol. 34, núm. 1, pp. 227-240.

- Baskaya, Y.S., Hülagü, T. y Küçük, H. (2013). "Oil Price Uncertainty in a Small Open Economy, Central Bank of the Republic of Turkey 2013". *Working paper* No: 13/09.
- Bass, A. (2017). "Does Oil Prices Uncertainty Affect Stock Returns in Russia: A Bivariate GARCH-in-Mean Approach". *International Journal of Energy Economics and Policy*, vol. 7, núm. 4, pp. 224-230.
- Bernanke, S.B. (2006). "The Economic Outlook. New York: Remarks Before the National Italian American Foundation".
- Bjornland, C.H. (2009). "Oil Price Shocks and Stock Market Booms in an Oil Exporting Country". *Scottish Journal of Political Economy*, vol. 2, núm. 5, pp. 232-254.
- Bouoiyour, J. y Selmi, R. (2016), "How Differently Does Oil Price Influence BRICS Stock Markets?" *Journal of Economic Integration*, núm. 31, pp. 547-568.
- Brown, P.A.S. y Yücel, M.K. (2002). "Energy Prices and Aggregate Economic Activity: An Interpretative Survey". *The Quarterly Review of Economics and Finance*, núm. 42, pp. 193-208.
- Caporale, G.M., Ali, F.M. y Spagnolo, N. (2015). "Oil Price Uncertainty and Sectoral Stock Returns in China: a Time-varying Approach". *China Economic Review*, vol. 34 núm. 1, pp. 311-321.
- Chang, C.L., McAleer, M. y Tansuchat, R. (2009). "Volatility Spillovers Between Crude Oil Futures Returns and Oil Company Stock Returns". *Working Paper CARF-F-157*, University of Tokyo.
- Chen, N., Roll, R. y Ross, S.A. (1986). "Economic Forces and the Stock Market". *Journal of Business*, núm. 59, pp. 383-403.
- Chen, S.S. (2010). "Do Higher Oil Prices Push the Stock Market into Bear Territory?" *Energy Economics*, vol. 32, núm. 2, pp. 490-495.
- Choi, K., Hammoudeh, S. (2010). "Volatility Behavior of Oil, Industrial Commodity and Stock Markets in a Regime-switching Environment". *Energy Policy*, núm. 38, pp. 4388-4399.
- Davis, J.S. y Haltiwanger, J. (2001). "Sectorial Job Creation and Destruction Responses to Oil Price Changes". *Journal of Monetary Economics*, núm. 48, pp. 465-512.
- Degiannakis, S., Filis, G. y Kizys, R. (2014). "The Effects of Oil Price Shocks on Stock Market Volatility: Evidence from European Data". *The Energy Journal*, núm. 35, pp. 35-56.
- Du, L. y He, Y. (2015). "Extreme Risk Spillovers Between Crude Oil and Stock Markets". *Energy Economics*, vol. 51, núm. 3, pp. 455-465.

- Elder, J. (2003). "An Impulse Response Function for a Vector Auto Regression with Multivariate GARCH-in-Mean". *Economic Letters*, núm. 79, pp. 21-26.
- Elder J. (2004). "Another Perspective on the Effects of Inflation Uncertainty". *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 36, núm. 5, pp. 911-28.
- Elder J, y Serletis A. (2009). "Oil Price Uncertainty in Canada". *Energy Economics*, vol. 31, núm. 6, pp. 852-856.
- Elder, J. y Serletis, A. (2010). "Oil Price Uncertainty". *Journal of Money, Credit and Bank*, vol. 42, núm. 6, pp. 1137-1159.
- Elder J. y Serletis A. (2011). "Volatility in Oil Prices and Manufacturing Activity: an Investigation of Real Options". *Macroeconomic Dynamics*, 15(Supplement 3), pp. 379-395.
- El-Sharif, I., Brown, D., Burton, B., Nixon, B. y Russell, A. (2005). "Evidence on the Nature and Extent of the Relationship Between Oil Prices and Equity Values in the UK". *Energy Economics*, vol. 27, núm. 6, pp. 819-830.
- Engle, R.F. y Kroner, K. F. (1995). "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH". *Econometric Theory*, vol. 11, pp. 122-150.
- Filis, G. (2010). "Macro Economy, Stock Market and Oil Prices: Do Meaningful Relationships Exist Among their Cyclical Fluctuations?" *Energy Economics*, núm. 32, pp. 877-886.
- Filis, G., Degiannakis, S. y Floros, C. (2011). "Dynamic Correlation Between Stock Market and Oil Prices: The Case of Oil-Importing and Oil-Exporting Countries". *International Review of Financial Analysis*, núm. 20, pp. 152-164.
- Fisher, I. (1930). *The Theory of Interest*. New York: Macmillan.
- Goodness, C.A. (2015). "Does Oil Price Uncertainty Matter for Stock Returns in South Africa?" *Investment Management and Financial Innovations*, núm. 12, pp. 179-188.
- Gjerde, O. y Sættem, F. (1999). "Casual Relations Among Stock Returns and Macroeconomic Variables in a Small Open Economy". *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, núm. 9, pp. 61-74.
- Gupta, R. y Modise, M.P. (2013). "Does the Source of Oil Price Shocks Matter for South African Stock Returns? A Structural VAR Approach. *Energy Economics*, vol. 40, núm. 1, pp. 825-831.
- Hamilton, D.J. (1988). "A Neoclassical Model of Unemployment and the Business Cycle. *Journal of Political Economy*, núm. 96, pp. 593-617.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Hamilton, J.D. (2009a). "Understanding Crude Oil Prices". *Energy Journal*, núm. 30, pp. 179-206.
- Hamilton, J.D. (2009b). "Causes and Consequences of the Oil Shock of 2007-08". *Brookings Papers on Economic Activity*, núm. 1, pp. 215-261.
- Hammoudeh, S. y H. Li (2005). "Oil Sensitivity and Systematic Risk in Oil-Sensitive Stock Indices". *Journal of Economics and Business*, vol. 57, núm. 1, pp. 1-21. <https://doi.org/10.1016/j.jeconbus.2004.08.002>.
- Hooker, A.M. (2002). "Are Oil Shocks Inflationary? Asymmetric and Nonlinear Specifications versus Changes in Regime". *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 34, núm. 2, pp. 540-561.
- Huang R. D., Masulis R. W. y Stoll H. R. (1996). "Energy Shocks and Financial Markets". *Journal of Future Markets*, vol. 16, pp. 1-27.
- Jimenez-Rodriguez, R. y Sanchez, M. (2005). "Oil Price Shocks and Real GDP Growth: Empirical Evidence for some OECD Countries". *Applied Economics*, vol. 37, núm. 2, pp. 201-228.
- Jiranyakul, K. (2014). "Does Oil Price Uncertainty Transmit to the Thai Stock Market? MPRA Paper No. 56527". Available from: <http://www.mpra.ub.uni-muenchen.de/56527>.
- Jones, C.M. y Kaul, G. (1996). "Oil and the Stock Markets". *The Journal of Finance*, vol. 51, núm. 2, pp. 463-491.
- Jouini, J. (2013). "Return and Volatility Interaction Between Oil Prices and Stock Markets in Saudi Arabia". *Journal of Policy Model*, núm. 35, pp. 1124-1144.
- Kilian, L. y Park, C. (2009). "The Impact of Oil Price Shocks on the U.S. Stock Market". *International Economic Review*, vol. 50, núm. 4, pp. 1267-1278.
- Kocaarslan, B., Sari, R., Gormus, A. y Soytaş, U. (2017). "Dynamic Correlations Between BRIC and US Stock Markets: The Asymmetric Impact of Volatility Expectations in Oil, Gold and Financial Markets". *Journal of Commodity Markets*, núm. 7, pp. 41-56.
- Lardic, S. y Mignon, V. (2006). "Oil Prices and Economic Activity: An Asymmetric Cointegration Approach". *Energy Economics*, núm. 34, pp. 3910-3915.
- LeBlanc, M. y Chinn, D.M. (2004). "Do High Oil Prices Presage Inflation? The Evidence from G5 Countries". *Business Economics*, núm. 34, pp. 38-48.
- Lee, Y. H. y Chiou, J. S. (2011). "Oil Sensitivity and its Asymmetric Impact on the Stock Market". *Energy*, núm. 36, pp. 168-174.
- Li, X. y Wei, Y. (2018). "The Dependence and Risk Spillover Between Crude Oil Market and China Stock Market: New Evidence from a Variational Mode Decomposition-Based Copula Method". *Energy Economics*, núm. 74, pp. 565-581.

- Lin, B., Wesseh, P.K.Jr. y Appiah, M.O. (2014). "Oil Price Fluctuation, Volatility Spillover and the Ghanaian Equity Market: Implication for Portfolio Management and Hedging Effectiveness". *Energy Economics*, núm. 42, pp. 172-182.
- Maghyereh, A. (2004). "Oil Price Shocks and Emerging Stock Markets: A Generalized VAR Approach". *International Journal of Applied Econometrics and Quantitative Studies*, vol. 1, núm. 2, pp. 27-40.
- Maghyereh, A. y Al-Kandari, A. (2007). "Oil Prices and Stock Markets in GCC Countries: New Evidence from Nonlinear Cointegration Analysis!". *Managerial Finance*, vol. 33, núm. 7, pp. 449-460.
- Maghyereh, A. y Awartani, B. (2016). "Oil Price Uncertainty and Equity Returns: Evidence from Oil Importing and Exporting Countries in the MENA Region". *Journal of Financial Economic Policy*. vol. 8, núm. 1, pp. 64-79.
- Maghyereh, A., Awartani, B. y Sweidan, O. (2017). Oil Price Uncertainty and Real Output Growth: New Evidence from Selected Oil-Importing Countries in the Middle East. *Empirical Economics*, <https://doi.org/10.1007/s00181-017-1402-7>.
- Malik, F. y Ewing, B. (2009). "Volatility Transmission Between Oil Prices and Equity Sector Returns". *International Review of Financial Analysis*, vol. 18, núm. 3, pp. 95-100.
- Marashdeh, H. y Afandi, A. (2017). "Oil Price Shocks and Stock Market Returns in the Three Largest Oil-Producing Countries". *International Journal of Energy Economics and Policy*, vol. 7, núm. 5, pp. 312-322.
- Masih, R., Peters, S. y de Mello, L. (2011). "Oil Price Volatility and Stock Price Fluctuations in an Emerging Market: Evidence From South Korea". *Energy Economics*, vol. 33, núm. 5, pp. 975-986.
- Mensi, W., Hammoudeh, S., Shahzad, S.J.H. y Shahbaz, M. (2017). "Modeling Systemic Risk and Dependence Structure Between Oil and Smarkets Using a Variational Mode Decomposition-Based Copula Method". *Journal of Banking and Finance*, núm. 75, pp. 258-279.
- Nandha, M. y Hammoudeh, S. (2007). "Systematic Risk, and Oil Price and Exchange Rate Sensitivities in Asia-Pacific Stock Markets". *Research in International Business and Finance*, vol. 21, núm. 2, pp. 326-341.
- Narayan, P.K. y Sharma, S.S. (2011). "New Evidence on Oil Price and Firm Returns". *Journal of Banking and Finance*, núm. 35, pp. 3253-3262.
- Olson, E., Vivian, A.J. y Wohar, M.E. (2014). "The Relationship Between Energy and Equity Markets: Evidence from Volatility Impulse Response Functions". *Energy Economics*, núm. 43, pp. 297-305.

- Pagan, A. (1984). "Econometric Issues in the Analysis of Regressions with Generated Regressors", *International Economic Review*, núm. 25, pp. 221-247.
- Park, J. y Ratti, R.A. (2008). "Oil Prices and Stock Markets in the US and 13 European Countries". *Energy Economics*, núm. 30, pp. 2587-2608.
- Rodríguez Benavides, D., Martínez García, M. Á. y Hoyos-Reyes, L. F. (2019). "Incertidumbre del precio internacional del petróleo y rendimientos accionarios en México a través de un SVAR-MGARCH: 1975-2018". *Contaduría y Administración*, vol. 64, núm. 3, pp. 1-23, <http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2019.2340>.
- Ross, S. (1989). "Information and Volatility: the No-Arbitrage Martingale Approach to Timing and Resolution Irrelevancy". *Journal of Finance*, núm. 44, pp. 1-17.
- Sadorsky, P. (1999). "Oil Price Shocks and Stock Market Activity". *Energy Economics*, núm. 21, pp. 449-469.
- Shahzad, S.J.H., Mensi, W., Hammoudeh, S., Rehman, M.U. y Al-Yahyaee, K.H. (2018). "Extreme Dependence and Risk Spillovers Between Oil and Islamic Stock Markets". *Emerging Markets Review*, núm. 34, pp. 42-63.
- Swanepoel, J.A. (2006). "The Impact of External Shocks on South African Inflation at Different Price Stages". *Journal for Studies in Economics and Econometrics*, vol. 30, núm. 1, pp. 1-22.
- Wang, Y., C. Wu, y L. Yang (2013). "Oil Price Shocks and Stock Market Activities: Evidence from Oil-Importing and Oil-Exporting countries". *Journal of Comparative Economics*, vol. 41, núm. 4, pp. 1220-1239. <https://doi.org/10.1016/j.jce.2012.12.004>.
- Wei, C. (2003). "Energy, the Stock Market, and the Putty-Clay Investment Model". *American Economic Review*, vol. 93, núm. 1, pp. 311-323.
- Williams, B.J. (1938). *The Theory of Investment Value*. Cambridge: Harvard University Press.

Modeling Returns of Stock Indexes through Fractional Brownian Motion Combined with Jump Processes and Modulated by Markov Chains

Modelado de rendimientos de índices bursátiles mediante movimiento fraccional browniano combinado con procesos de saltos y modulado por cadenas de Markov

Martha Carpinteyro*

Francisco Venegas-Martínez**

Miguel Ángel Martínez-García***

(Fecha de recepción: 23 de noviembre de 2019. Fecha de aceptación: 26 de junio de 2019)

ABSTRACT

This paper's aim is to extend the Durham and Park's (2012) model by incorporating the market fractional behavior. The extension examines the stochastic dynamics of stock indexes for several of the world's main economies (US, Eurozone, UK and Japan), as well as emerging markets (China, Brazil and Mexico) during 1994-2017. The proposed model assumes that the returns are driven by fractional Brownian motions combined with Poisson processes and modulated by Markov chains. Risk factors such as: idiosyncratic volatility, market volatility, volatility of volatility were incorporated. To accomplish the purpose of the extension, Jump-GARCH and Markov regime-switching models were estimated, the Hurst coefficient was calculated and jumps behaviour was analysed during crisis periods. It was considered that the model accurately describes the stochastic dynamics of the stock indexes returns. The main empirical findings are that the USA stock market remains in high volatility most of the time, that the Brazil

* Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, México
marbeth125@gmail.com

** Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, México
fvenegas1111@yahoo.com.mx

*** Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, México
mamg89@hotmail.com

Stock Market has the highest intensity of jumps, and that the mean return is the highest for the IPC and the lowest for Nikkei Index during the period under study.

JEL Classification: N20, B23, C02.

Keywords: *Stock Index Return, Fractional Brownian Motion, Markov Regime-switching, Jump Processes.*

RESUMEN

Esta investigación tiene como propósito extender el modelo de Durham y Park (2012) al incorporar la conducta fraccional del mercado. La extensión examina la dinámica estocástica de los índices bursátiles de economías desarrolladas como en EUA, Eurozona, Reino Unido y Japón, así como los mercados emergentes de China, Brasil y México durante 1994-2017. Nuestro modelo supone que los rendimientos son conducidos por movimientos brownianos fraccionales, combinados con procesos de Poisson y modulados por cadenas de Markov. Se incorporaron factores de riesgo como: volatilidad idiosincrática, volatilidad del mercado y volatilidad de la volatilidad. Para ello, se estimaron los modelos Jump-GARCH y de cambio de régimen Markoviano, se calcularon los coeficientes de Hurst y se analizó el comportamiento de los saltos en periodos de crisis. Se encontró que el modelo propuesto describe adecuadamente la dinámica estocástica de los rendimientos de los índices bursátiles estudiados. Los principales hallazgos empíricos son que el mercado de valores de EUA, se mantiene en alta volatilidad la mayor parte del tiempo, que el mercado de valores de Brasil tiene la mayor intensidad de saltos, que el rendimiento medio más alto lo presenta el IPC y el más bajo el índice Nikkei durante el período de estudio.

Clasificación JEL: N20, B23, C02.

Palabras clave: rendimiento de índices de acciones, movimiento fraccional browniano, cambio de régimen markoviano, procesos de saltos.

Introduction

Over a long period of time, several researchers have dealt with the stochastic dynamics and return probability distributions of the stock markets; however, there are still irregularities and stylized facts that need to be explained. The development of the stock market indexes has followed complex dynamics derived from intricate global investment strategies, requiring more sophisticated models and tools. Most of the models in the specialized literature can be broadly classified into two large groups: Models seeking to

explain the fundamental value of stock and models describing stock prices dynamics (Krause, 2001). For the latter, research has been focused on the volatility of aggregate stock markets through cross-section analysis (Ang, 2004). Some other studies have used stochastic calculus to model stock returns and time-varying volatility, for example, Christoffersen et al. (2009) built a two-factor stochastic volatility model useful to generate time-varying correlation. Along the same line, Johnson (2002) developed a stochastic volatility model with time-varying correlation between returns and volatility, An et al. (2014) used option volatilities cross-section analysis to forecast stock returns, and López-Herrera et al. (2009) studied the long-term dependence on returns and volatilities.

Several studies focused on return distributions with time-varying moments, Carr and Wu (2007) proposed a stochastic skew model for foreign exchange rates; Pham and Touzi (1996) explored the stochastic volatility on equilibrium state prices; Durham and Park (2012) focussed on stochastic volatility in stock returns and found that return distributions have time-varying skewness and kurtosis. Young *et al.* (2013) encountered that stocks with high sensitivity to innovation in implied market volatility and skewness exhibit, on average, low returns; finally, Harvey and Siddique (1999) examined time-varying skewness through a GARCH model, and suggested that the relation between stock returns skewness and variance are linked to the seasonal variations in the conditional moments

Another factor that has been relevant when examining returns dynamics is the volatility of volatility.¹ Some studies have found evidence that the variance risk premium depends on the volatility of volatility. For instance, Das and Sundaram (1999) examined the volatility of volatility and the correlation between the innovations in asset pricing. Also, Durham and Park (2012) developed a mixed jump-diffusion process on options with volatility of volatility (*cf.* Ang *et al.*, 2006).

An important characteristic of the stock markets is the presence of unexpected and sudden jumps. Cremers *et al.* (2015) suggested, by using cross-section analysis, that stock returns have high sensitivity to jumps and volatility risks. Moreover, Du and Kapadia (2011) argued that the index VIX (Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index) has a critical degree of bias related to jumps. Also, Branger *et al.* (2007) proposed

¹ Volatility of volatility is a measure of volatility expected of the n-day forward price of the volatility and this drives nearby volatility options price.

an equilibrium model with jumps and stochastic volatility to describe the dynamics of stock returns. Along the same line, Heston (1993) dealt with Poisson jumps through a stochastic volatility model with returns affected by three factors: diffusive volatility shocks, diffusive price shocks, and price jumps. Finally, Bates (2008) examined investors' behaviour towards crash risk and extreme and common events related to stock returns jumps. The author considers jumps and diffusion risks separately (*cf.* Johnson, 2002).

There are other studies addressing options and futures markets, such as Durham and Park *et al.* (2012). These authors developed a stochastic volatility model to assess several characteristics that are consistent with variation in the shape of return distributions by including regime-switching to feature random changes in the volatility of volatility, leverage effect, and jump intensity. Santa-Clara and Yan (2010) presented a model of option prices when the volatility of the diffusion shocks and the intensity of the jumps change over time, and show that diffusive volatility and jump intensity capture the ex-ante risk assessed by investors of the S&P500 index options. Moreover, Vallejo and Venegas-Martínez (2017) modeled the dynamics of asset prices with time-inhomogeneous Markov chains and applying fractional Brownian motion with multiple Poisson jumps (*cf.* Venegas-Martínez, 2001 and 2008).

The above investigations have highlighted the importance of including the effect of volatility, volatility of volatility, unexpected jumps, and regime-switching on stock returns. The hypothesis of this paper establishes that the returns of stock indexes are properly driven by fractional Brownian motion implying long-term memory. This article mainly extends current studies from Durham and Park's (2012) by modelling fractional behaviour of the stock markets and by examining the performance of returns and their jumps to describe the stochastic dynamics of stock indexes of various economies (US, Eurozone, UK and Japan, China, Brazil, and México) during 1994-2017. To accomplish the purpose of the extension, Jump-GARCH and Markov regime-switching models were estimated, and the Hurst coefficients were calculated using different econometric programs (E-views, RATS and Pracma) and R software.

This paper is organized as follows: the first section presents the extended stochastic model of stock index returns; section two describes the data and defines the endogenous and exogenous variables; section three calibrates the proposed model; and finally the conclusions are provided.

1. Modelling Stock Index Returns

This section presents the theoretical background needed to model the dynamics of stock indexes returns by using fractional Brownian motion combined with Poisson process modulated with Markov switching-regime stochastic volatility. Most of the empirical studies suggest that market volatility varies over time and stocks with high sensitivity to both jump and volatility risks have low expected returns (Cremers *et al.* 2015). Durham and Park (2012) proposed a Markov regime-switching model of both volatility of volatility and jump intensity to determine the skewness and kurtosis of stock returns. Also, Vallejo-Jiménez and Venegas-Martínez (2017) developed a model that explains the dynamics of asset prices that are driven by multiple jumps, fractional Brownian motion, and Markov regime switching.²

In the proposed multifactor risk model, stock returns are driven by the fractional Brownian motion, dB_{1t}^H and dB_{2t}^H , combined with Poisson jumps, dN_t , and modulated by Markov regime switching, $E = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, aligned with Durham and Park (2012):

$$dy_t = \left(\mu - \frac{1}{2} v_t^2 \right) dt + v_t dB_{1t}^H \quad (1)$$

$$dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma_i dB_{2t}^H + \gamma dN_t \quad (2)$$

where dy_t is a dependent variable determining the dynamics of the stock index return, dB_{1t}^H and dB_{2t}^H are independent fractional Brownian motions, H is the Hurst parameter, μ is the annual mean (trend parameter) of returns, dN_t is a Poisson jumps, v_t is the idiosyncratic volatility, E is the regime state (low volatility and high volatility), σ_i is the volatility state, dv_t is the volatility of volatility, a is the speed adjustment parameter, b is the long run mean (mean revering), and γ is the mean jump size.³

A Markov regime-switching process (Hamilton, 2005) is a nonlinear time series model that integrates multiple structures to explain the be-

² See also Christoffersen *et al.* (2009) and Ang *et al.* (2006).

³ Other papers dealing with jump-diffusion processes are Venegas-Martínez (2000) and (2001) and Venegas-Martínez and González-Aréchiga (2000).

haviour of a state variable in different regimes. The probabilities of switching from state to state are given by the following transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

The fractional Brownian motion B_t^H is defined on a fixed probability space with its augmented filtration $(\Omega, F, (F_t)_{t \in [0, T]}, P)$ and $H \in (0, 1)$ is the Hurst coefficient (Taqqu, 2013). A Hurst coefficient H larger than 0.5 measures long-term memory of time series. It describes the irregularity of the motion, predict the stock return and reflect the autocorrelation on returns. It is worth mentioning that if $H \neq \frac{1}{2}$, then B_t^H is not a semimartingale (Mandelbrot and Van Ness, 1968), and when H is smaller than 0.5, it reflects a mean reverting effect. This can be summarized as:⁴

$H = \frac{1}{2}$, the process is Brownian motion or Wiener process.

$H > \frac{1}{2}$, the increments are positively correlated (long memory).

$H < \frac{1}{2}$, the increments are negatively correlated (mean reverting).

It is important to point out that Cajueiro and Tabak (2005) find that the Hurst coefficient on Brazilian stock market is time-varying; Jamdee and Los (2005) showed that European options have long memory and are dependent on volatility; and Bender (2000) suggested that the law of one price holds in a market where the stock is driven by fractional Brownian motion.

The ARCH model is briefly review, which is useful to explain the large residuals' trend to cluster together (Engle, 1982). The ARCH model is given by:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3)$$

where σ_t^2 is the conditional variance, ω and α are unknown parameters, and ε_{t-i}^2 is the lag of the random error term. In the GARCH model the

⁴ Duncan and Pasik-Duncan (1991) introduced an integration theory named Wick-Itô-Skorohod integral for fractional Brownian motion.

variance term depends on the lagged variance as well as the lagged square residuals. This model allows to evaluate different types of persistence in volatility (Bollerslev, 1986). The GARCH model is represented by:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad \omega, \alpha, \beta > 0 \quad (4)$$

where σ_t^2 is the conditional variance, ω and α and β are unknown parameters, ε_{t-i}^2 is the lag of the random deviation term, σ_{t-j}^2 is the lag of the variance, α is the component of the influence of random deviation in the previous period, β is the component of the variance in the previous period, and $\alpha + \beta$ is the level of persistence. Extending these approaches, the Jump-GARCH model is an alternative for modelling the dynamics of stock indexes when sudden and unexpected jumps occur (Chen, Lin and Lin, 2013). In this case, two stochastic innovations, $\varepsilon_{t,1}$ and $\varepsilon_{t,2}$, capture the dynamic of the return with no jump and jump, respectively. The innovations $\varepsilon_{t,1}$ and $\varepsilon_{t,2}$ are independent and satisfy:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t,1} + \varepsilon_{t,2} \quad (5)$$

The first innovation refers to market stability with no jumps, thus:

$$\varepsilon_{t,1} = \sigma_t u_t, \quad u_t \sim N(0,1) \quad (6)$$

and

$$E(\varepsilon_{t,1} | y_{t-1}) = 0. \quad (7)$$

The second innovation describes an unexpected jump when an unusual event occurs. The returns of the stock market are impacted by an unexpected event. The distribution of jumps follows a Poisson distribution and λ is the parameter of the jump intensity, hence:

$$\varepsilon_{t,2} = N_t - E(N_t | y_{t-1}) = \sum_{k=1}^{n_t} \gamma_{t,k} - \theta \lambda_t, \quad n_t | y_{t-1} \sim P(\lambda_t) \quad (8)$$

and

$$\varepsilon_{t,2} = E(\varepsilon_{t,2} | y_{t-1}) = 0 \quad (9)$$

where y_t stands for the dynamics of the return, N_t is the jump component, $\gamma_{t,k}$ is the jump size, λ_t is the jump intensity, θ is the component of jump intensity, and n_t denotes the number of jumps. The Poisson process N_t with intensity parameter λ satisfies:

$$P\{\text{One jump on } dt\} = P\{dN_t = 1\} = \lambda dt + o(dt) \quad (10)$$

$$P\{\text{None jump on } dt\} = P\{dN_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt). \quad (11)$$

Hence,

$$P\{\text{More than one jump on } dt\} = P\{dN_t \geq 1\} = o(dt). \quad (12)$$

Then,

$$E[dN_t] = \text{Var}[dN_t] = \lambda dt, \quad (13)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t u_t, N_t) = 0 \quad (14)$$

2. Data description

This section, aims to find out how well the proposed model captures and describes the dynamics of the stock index returns under study. The data for the US (S&P 500), Eurozone (EuroStoxx50), United of Kingdom (FTSE100), Japan (Nikkei), China (Hang Seng), México (IPC) and Brazil (Bovespa) were obtained from Bloomberg and includes daily returns of each stock index. The USA is considered as a benchmark since it is the world's largest economy and it has the biggest financial market.⁵ Hong Kong is the most important

⁵ Investors of financial markets often take decisions based on Eurozone and UK economic data.

financial center in Asia; Japan is a highly developed economy in Asia and it has the largest electronic goods industry; Mexico and Brazil exhibit the best macroeconomic indicators of Latin America.

The analysis sample period begins in January 1994 and ends in December 2017 (5980 daily returns for each stock index). The purpose of this study is to capture in the extension proposed the dynamics of stock market indexes before, during and after crisis periods. The most relevant extreme events are the Asian financial crisis, the bubble dot com in 2001, the subprime mortgage recession in 2008, the Eurozone debt crisis in 2011, the Brexit in June 2016, and the power takeover of president Trump in December 2016. The idiosyncratic volatility is represented by the standard deviation. The market volatility is calculated through the VIX index, which is a measure of the expected volatility of the US stock market during 30 days, calculated from real-time mid quote prices of S&P500 call and put options index (CBOE). Finally, the volatility of volatility is the square return of measure by the VIX index. The parameters for Markov regime switching were estimated using *E-views* software, Jump-GARCH with Rats software and the Hurst coefficient was calculated using the Pracma package programmed in R.

3. Empirical analysis

The results of the Markov regime-switching models describing the degree of volatility of the previous period of the returns of S&P500, Eurostoxx50, FTSE100, Nikkei, Hang Seng, IPC and Bovespa indexes are shown in Table 1.

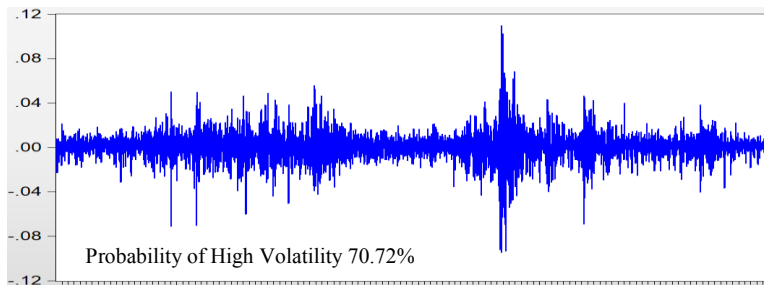
Table 1. Transition probabilities of the Markov Regime-Switching model

Probabilities	S&P500	EuroStoxx50	FTSE100	IPC	Bovespa	Nikkei	Hang Seng
p11	0.41424	0.52744	0.54349	0.58354	0.56479	0.46037	0.48052
p12	0.58576	0.47255	0.45650	0.41646	0.43521	0.53963	0.51949
p21	0.29279	0.40675	0.50486	0.38694	0.44869	0.54721	0.37474
p22	0.70721	0.59324	0.49513	0.61306	0.55131	0.45279	0.62526

Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-views software.

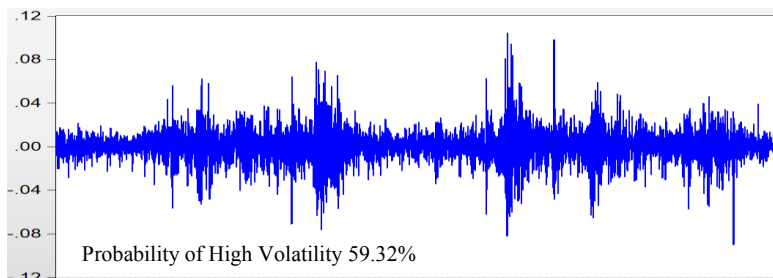
Table 1 shows that the S&P500 has 70% of probability to stay in high volatility from one period to another, followed by the Hang Seng with 62%; while, IPC, Bovespa and FTSE100 have a bigger probability to stay in low volatility than the others. Indexes FTSE100 and Nikkei are more probable to change from high to low volatility. The S&P500 has 58% of probability to transit to high volatility, and just a 29% of probability that this index will changed from high to low volatility. Figures 1-7 show the returns of S&P500, Eurostoxx50, FTSE100, Nikkei, Hang Seng, IPC and Bovespa indexes from 1994 to 2017 (the x-axis measures the number of days) these have higher jumps on the most relevant economic event as bubbles, crises and politiques decisions around the world; see Figures 1 to 7.

Figure 1. Returns of S&P 500 (1994-2017)



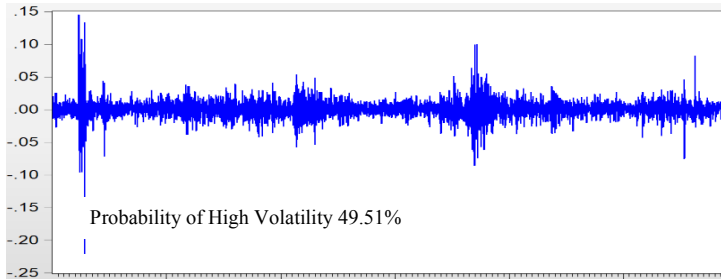
Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 2. Returns of EuroStoxx50 (1994-2017)



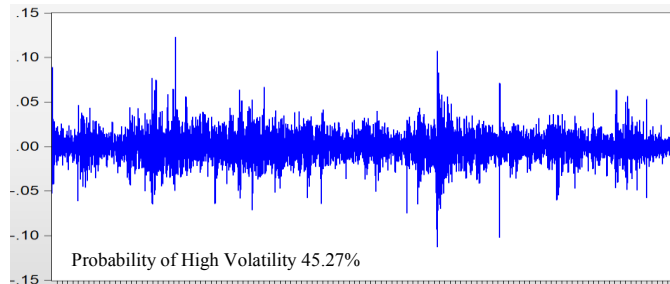
Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 3. Returns of FTSE100 (1994-2017)



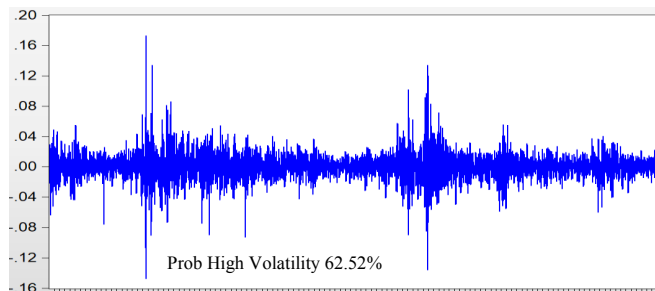
Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 4. Returns of Nikkei (1994-2017)



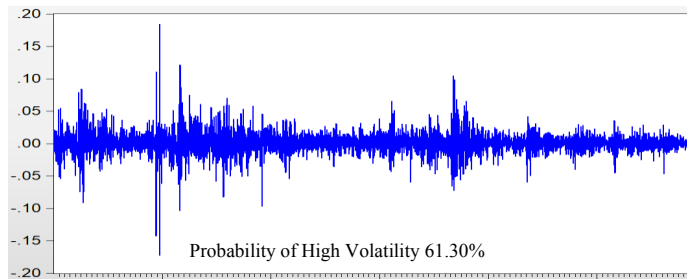
Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 5. Returns of Hang Seng (1994-2017)



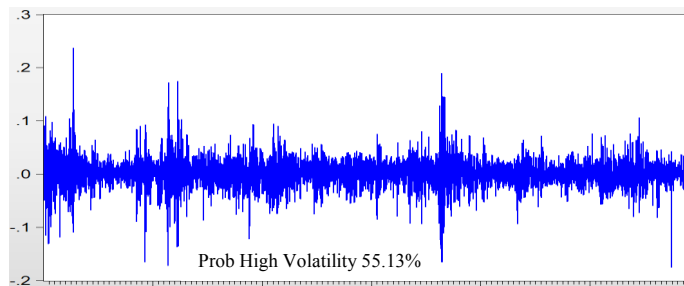
Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 6. Returns of IPC (1994-2017)⁶



Source: Prepared by authors with Bloomberg data and E-Views.

Figure 7. Returns of Bovespa (1994-2017)⁷



Source: Prepared by authors with Bloomberg data and *E-Views*.

The highest jump for S&P 500 is at the Subprime Mortgage Recession (Figure 1); Hang Seng shows a huge jump at Asiatic Crisis (Figure 5); For Eurostoxx50, the highest jumps are at subprime mortgage recession, Euro-zone debt crisis and Brexit (Figure 2); Mexican index had the highest jump at December 1997 (Figure 6) and the highest jumps for Brazil are in the 2008 recession and in the Samba crisis (Figure 7).

⁶ The Mexican Index (IPC) showed an important jump at the beginning of 1995 due to a currency crisis that started in this country, known as the Tequila Effect.

⁷ The Brazilian Index (Bovespa) was impacted by the Samba Effect crisis at the end of 1998.

Table 2. Summary of Economic and Geopolitical Shocks (1994-2017)

Event	S&P 500	EuroStoxx50	FTSE 100	Nikkei	Hang Seng	IPC	Bovespa
Asian Financial Crisis	End of 1997 and 1998	End of 1997 and 1998	No impact	End of 1997 and 1998	End of 1997 and 1998	End of 1997	End of 1997
Dot Com Bubble	Middle of 2000 and 2001	2001 and beginning of 2002	Slightly impact	From 2000 to 2002	First semester of 2000	Middle of 2000 and 2001	End of 2001
Subprime Mortgage Recession	End of 2008 and beginning of 2009	End of 2008 and beginning of 2009	Second half of 2008	Second half of 2008	From 2007 to 2009	End of 2008 and beginning of 2009	End of 2008 and beginning of 2009
Eurozone Debt Crisis	Slightly impact in August 2008	2010 and 2011	Slightly impact	Beginning of 2011	Beginning of 2011	Slightly impact in August 2008	Slightly impact in July 2008
Brexit	Slightly impact in June 2016	June 2016	June 2016	Slightly impact in June 2016	Slightly impact on June 2016	Slightly impact in June 2016	Slightly impact in June 2016
Power take-over President Trump	Slightly impact in November 2016	Slightly impact in November 2016	Slightly impact in November 2016	2016	Slightly impact in November 2016	November 2016	November 2016

Source: Prepared by authors.

Table 2 shows the summary of economic events that have had an impact on the index returns under study.

In order to estimate the parameters of the Jump-GARCH model, the log likelihood was computed, the log likelihood of a GARCH model on the residuals was evaluated, jumps were examined, and the accumulated first and second moments were defined. Table 3 shows the estimates of the parameters of the Jump-GARCH model by using maximum likelihood for the returns of the stock indexes S&P500, EuroStoxx50, FTSE100, Nikkei, Hang Seng, IPC and Bovespa. The calibration of parameters were carried out as follows: α is

the random deviation in the previous period and its average is close to 0.10; β is the variance lag and its average close to 0.90; $\alpha + \beta$ indicates the persistence, its average is more than 0.95, thus there is evidence of a GARCH effect; θ shows that jumps are related with negative movements on the price for developed economies; and γ the size of a jump; in particular Bovespa index has the highest jump intensity. The size of the jumps (%) is between 47% and 52% higher than the previous level; S&P 500 has 52%, and Bovespa 47%. Finally, The mean (μ) of the return is the highest for IPC and the lowest for Nikkei during the period of study.

Table 3. Estimation of fractional Brownian motion combined with Jump-GARCH
(Statistically significant at 95% confidence level)

Parameters	S&P 500	EuroS-toxx50	FTSE 100	IPC	Bovespa	Nikkei	Hang Seng
M	0.0002940	0.0001540	0.0004290	0.0004958	0.0002748	0.0000286	0.0001576
	0.0001365	0.0002031	0.0001737	0.0002323	0.0006977	0.0002410	0.0002626
	0.011684	0.014252	0.013178	0.015241	0.026414	0.015523	0.016204
%J	52.59522	49.21371	50.42269	49.55913	47.35933	50.06818	50.05000
Λ	0.000638	0.000569	0.000498	0.000664	0.000982	0.000365	0.000533
	-0.037814	-0.013797	-0.036261	0.087828	0.065490	-0.109516	0.042823
γ	0.000001	0.000002	0.000003	0.000001	0.000016	0.000005	0.000002
	0.094715	0.081803	0.117276	0.081836	0.117298	0.101665	0.071503
	0.894829	0.911664	0.864243	0.917049	0.860306	0.880997	0.921362

Source: Prepared by authors with Bloomberg data with RATS.

The outcome of the Hurst coefficient H for the fractional Brownian motion is B_t^H ; is $H > \frac{1}{2}$ for all stock indexes, it means that the increments are positively correlated memory (fractal markets). The estimated Hurst coefficients for all indexes are shown in Table 4.

Table 4. Hurst Coefficient

Hurst Coefficient	S&P 500	EuroStoxx50	FTSE100	IPC	Bovespa	Nikkei	Hang Seng
H	0.556061	0.533003	0.542380	0.516423	0.560925	0.539031	0.535857

Source: Prepared by authors with R programming.

Conclusions

For many decades, researchers have worked on describing the financial market behaviour since this is the thermometer of the economy. Relevant economics and political events (crisis) have occurred since 1929. Nowadays, the evolution of the stock market has posed new challenges such as the understanding of the behaviour of volatility of volatility and volatility clusters, thus it is required to apply new models that include sophisticated tools such as fractional Brownian motion modulated by Markov chains, in order to explain the market behaviour.

Until now, several researchers have worked on finding better models to explain the behaviour of stock returns. A substantial proportion of the variation of stock returns remains unexplained; this lack of knowledge generates uncertainty and instability, and therefore affects, not only financial markets but the economy as a whole. This paper seeks to contribute to reduce this gap by constructing a model that explains the behaviour of stock indexes volatility based on the Durham and Park's (2012) approach. The proposed extension describes the stochastic dynamics of the stock indexes of several world's main economies (US, Eurozone, UK and Japan) and some of the main emerging markets (China, Brazil, and Mexico) during 1994-2017. The outcome supports the hypothesis of long-term memory of all stock indexes, which means that the increments are positively correlated, and the series have long-term memory.

After calibrating the extension, it can be noticed that the stock indexes that have a probability over 60% to remain in high volatility are S&P 500 with 70%, and Hang Seng with 62%; while, IPC, Bovespa and FTSE100 have

a high probability to stay in low volatility, 58%, 56% and 54%, respectively. The percentage of changes from high to low volatility from one period to another is just 29% for S&P 500. Nikkei has the greatest probability to move from high to low volatility but it will not remain in low volatility for long time. S&P500 and Hang Seng were found to be more volatile than other indexes. Moreover, from the GARCH estimation is observed that Bovespa and FTSE100 have the highest lag random deviation (0.1172); Hang Seng has the highest lag variance, 0.9213; Bovespa has the largest jump in size and intensity; and S&P has the greatest amount of jumps in the period studied.

Bibliography

- An, B., Ang, A., Bali, T. and Cakici, N. (2014). "The Joint Cross Section of Stocks and Options". *Journal of Finance*, vol. 69, núm. 5, pp. 2279-2338.
- Ang, A., Chen, J. and Xing, Y. (2006). "Downside Risk". *Review of Financial Studies*, vol. 19, núm. 4, pp. 1191-1239.
- Ang, A., Hodrick, R., Xing, Y. and Zhang, X. (2004). "The Cross-section of Volatility and Expected Returns". *National Bureau of Economics Research*, 10852.
- Baillie, R. (1996). "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, vol. 74, núm. 1, pp. 3-30.
- Bates, D. (2008). "The Market for Crash Risk". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 32, núm. 7, pp. 2291-2321.
- Bender, C., Sottinen, T. and Valkeila, E. (2000). "Fractional Processes as Models in Stochastic Finance". *Advance Mathematical Methods for Finance Series*. Springer, pp. 75-103.
- Branger, N., Schlag, C. and Schneider, E. (2007). "General Equilibrium with Stochastic Volatility and Jumps". *Department of Business and Economics*, University of Southern Denmark.
- Cajueiro, D. and Tabak, B. (2005). "Possible Causes of Long-range Dependence in the Brazilian Stock Market". *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 345, núms. 3-4, pp. 635-645.
- Carr, P. y Wu, L. (2004). "Stochastic Skew in Currency Options". *Center for Financial Econometrics*, NYU STERN.
- Chen, C., Lin, E. and Lin Yi-Ru. (2013). "A Bayesian Perspective on Mixed GARCH Models with Jumps". *Uncertainty Analysis in Econometrics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 141-154.

- Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2009). "The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work so Well? *Management Science*, vol. 55, núm. 12, pp. 1914-1932.
- Collin-Dufresne, P. and Fos, V. (2016). "Insider Trading, Stochastic Liquidity, and Equilibrium Prices". *Econometrica*, vol. 84, núm. 4, pp. 1441-1475.
- Cremers, M., Halling, M. and Weinbaum, D. (2015). "Aggregate Jump and Volatility Risk in the Cross-section of Stock Returns". *Journal of Finance*, vol. 70, núm. 2, pp. 577-614.
- Cruz, Eduardo., Zapata, C. and Medina, P. (2010). "Comportamiento del precio de las acciones en Colombia un enfoque de la caminata aleatoria". *Scientia et Technica*, vol. 16, núm. 44, pp. 84-89.
- Das, S. and Sundaram, R. (1999). "Of Smiles and Smirks: A Term Structure Perspective". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 34, núm. 2, pp. 211-239.
- Du, J and Kapadia, N. (2011). *The tail and volatility index*. University of Massachusetts, Amhert.
- Durham, G. and Park, Y. (2012). *Beyond stochastic volatility and jumps in returns and volatility*. Leeds School of Business, University of Colorado. USA.
- Duncan, T. and Pasik-Duncan, B. (1991). *Stochastic calculus for fractional Brownian motion I*. Department of Mathematics, University of Kansas.
- Hamilton, J. D. and Gang Lin (1996). "Stock Market Volatility and the Business Cycle". *Journal of Applied Econometrics*, vol. 11, núm. 5, pp. 573-593.
- Hamilton, J. (2005). "Regime-Switching Models". *Macroeconomics and Series Analysis*. Springer, pp. 202-209.
- Harvey, C. and Siddique, A. (1999). "Autoregressive Conditional Skewness". *National Bureau of Economic Research*, Cambridge, MA.
- Heston, S. (1993). "A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, vol. 6, núm. 2, pp.327-431.
- Jamdee, S. and Los, C. (2005). "Long Memory Options: LM Evidence and Simulations". University of California at Irvine.
- Johnson, T. (2002). "Volatility, Momentum, and Time-Varying Skewness in Foreign Exchange Returns". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 20, núm. 3, pp.390-411.
- Krause, A. (2001). "An Overview of Asset Pricing Models". University of Bath School of Management. UK.

- López-Herrera, F., Venegas-Martínez, F. and Sánchez-Daza, A. (2009). "Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales". *Análisis Económico*, vol. 24, núm. 56, pp. 129-146.
- López-Herrera F., Villagómez-Bahena J. and Venegas-Martínez, F. (2009). "Dependencia de largo plazo en rendimientos y volatilidades de acciones mexicanas". *Tiempo Económico*, núm. 4, pp. 5-17.
- Mandelbrot, B. and Van-Ness, J. (1968). "Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications". *SIAM Review*, núm. 10, pp. 422-437.
- Pham, H. and Touzi, N. (1996). "Equilibrium State Prices in a Stochastic Volatility Model". *Mathematical Finance*, vol. 6, núm. 2, pp. 215-236.
- Santa-Clara, P. and Yan, S. (2010). "Crashes, Volatility and the Equity Premium: Lesson From S&P500 Options". *The Review of Economics and Statistics*, vol. 92, núm. 2, pp. 435-451.
- Taqqu, M. (1967). "Benoît Mandelbrot and Fractional Brownian Motion". *Statistical Science*. núm. 28, pp. 131-134.
- Venegas-Martínez, F. and González-Aréchiga, B. (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano". *Momento Económico*, núm. 111, pp. 20-27.
- Vallejo-Jiménez, B. and Venegas-Martínez, F. (2017). "Optimal Consumption and Portfolio Rules when the Asset Price is Driven by a time-inhomogeneous Markov Modulated Fractional Brownian Motion with Multiple Poisson jumps", *Economics Bulletin*, vol. 37, núm. 1, pp. 314-326.
- Venegas-Martínez, F. (2000). On Consumption, Investment, and Risk. *Economía Mexicana, Nueva Época*, 9(2), 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: a Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(9), 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. 2, pp. 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. (2da edición) México: Cengage Learning Editores.
- Venegas-Martínez, F., and Islas-Camargo, A. (2005). "Volatilidad en los mercados de América Latina". *Comercio Exterior*, vol. 55, núm. 11, pp. 936-947.
- Young, C., Chistoffersen, P. and Jacobs, K. (2009). "Market Skewness and the Cross-section Stock Returns". *Working paper*, McGill University

Macroeconomic Reverse Stress Testing: An Early-Warning System for Spanish Banking Regulators.¹

Analysis Based on the 2008 Global Financial Crisis

Prueba de resistencia inversa Macroeconómica: una prueba de alerta temprana para los reguladores bancarios españoles.

Análisis basado en la crisis financiera global de 2008

María Elizabeth Cristófoli*

Javier García Fronti**

(Fecha de recepción: 11 de junio de 2019. Fecha de aceptación: 15 de julio de 2019)

ABSTRACT

This paper presents a methodology that helps regulators to identify early-warning alerts regarding the stability of the financial system. It is a macroeconomic Reverse Stress Testing analysis which examines the interrelationships between different factors in the financial system during an economic crisis period. Archimedean copulas (Gumbel copula) were applied in the modelling of these interactions, showing the interdependence of specific factors.

The methodology is applied using four factors: Bank loans to the insurance sector, Spanish exports, the Energy Price Index in Spain, and the growth rate of the Stock Price Index. First, each factor was projected for three years into the future. After that, each factor was calculated to identify the probability distribution that best fitted its projected data. Copula parameters were computed, and each alert level parameter for

¹ This article is the exclusive responsibility of the authors and does not necessarily reflect the opinion of the Banco de España or the Eurosystem.

* Banco de España, Madrid, España
elizabeth.cristofoli@bde.es

** Facultad de Ciencias Económicas, Córdoba, Argentina
Universidad de Buenos Aires,
javier.garciafronti@economicas.uba.ar

the financial system was established. Finally, an exhaustive analysis of the results was conducted.

JEL Classification: C22, C51, C53, G28, G32

Keywords: *Reverse Stress Testing, Financial Stability, Time Series, Copulas.*

RESUMEN

Este documento presenta una metodología que ayuda a los reguladores a identificar alertas tempranas sobre la estabilidad del sistema financiero. Es un análisis de Pruebas de Resistencia Inversa macroeconómica que examina las interrelaciones entre diferentes factores en el sistema financiero durante un período de crisis económica. Se aplicaron cópulas arquimedianas (cópula de Gumbel) en el modelado de estas interacciones, mostrando la interdependencia de factores específicos.

La metodología se aplica utilizando cuatro factores: los préstamos bancarios al sector de seguros, las exportaciones españolas, el Índice de Precios de la Energía en España y la tasa de crecimiento del Índice de Precios de las Acciones. Primero, se proyectó el comportamiento futuro de cada factor por tres años. Luego, se analizó cada factor para identificar la distribución de probabilidad que mejor se ajustaba a los datos proyectados. Se calculó el parámetro de la cópula y se estableció el nivel de alerta de cada parámetro para el sistema financiero. Finalmente, se realizó un análisis exhaustivo de los resultados.

Clasificación JEL: C22, C51, C53, G28, G32

Palabras clave: prueba de resistencia inversa, estabilidad financiera, series de tiempo, copulas.

Introduction

The financial crisis that started in the U.S. in 2007 had an impact on the rest of the world which was felt from 2008 onwards due to the economic interlinkages between countries, which are intrinsic to the global economy. Well in advance of this crisis, Minsky (1975) posited the idea that the appearance of financial stability could lead to an untenable speculative euphoria. Therefore, achieving financial stability is crucial for the competent authorities, especially during an economic crisis. Nowadays such authorities are working on some macroeconomic methodologies in an effort to maintain financial stability and control speculation. One of these is the appropriately called *stress testing*, a useful method, designed by regulators and supervisors, to determine and analyse the level of the resilience of banks to adverse financial situations. These situations are hypothetical scenarios based on historical data. Breuer, Jandacka, Rheinberger, and Summer (2009, p. 206) state *“The quality of a stress test crucially depends on the definition of stress sce-*

narios”; and Dees, Henry and Martin (2017) argue that these scenarios must include sufficiently severe, yet plausible, financial crisis situations. Although this tool is widely used, it is also important to anticipate problems in the financial system that could potentially lead to financial instability. This supposes a complication in the definition of the scenarios to be considered in the stress tests where the resistance to financial stability is measured. One possible methodology for doing so is the so-called *reverse stress testing*. These types of methodologies are widely implemented at the individual level by the financial institutions themselves as part of a bottom-up approach (International Actuarial Association, 2013), but not at the global level of the entire financial system.

The purpose of this paper is to provide a reliable tool with which to anticipate alert levels in the Spanish financial system and to take prompt action on the risk factors identified as being the most vulnerable. The specific objective is to develop an early-warning system for the Spanish financial stability, based on the 2008 global financial crisis. Thus, a *reverse stress testing* methodology (RST) is applied as a possible way of establishing alert thresholds for financial stability in Spain. Dridi, El Ghourabi and Limam (2015) and Grundke and Pliszka (2013) analyse some limitations and weaknesses of this kind of models. (i) The bias in the selection of variables must be taken into account, so the experience and knowledge of the analyst is crucial for efficient management.; (ii) as Grundke and Pliszka (2013) postulate, this methodology is mathematically and conceptually demanding, given that for “n” risk factors, it is necessary to work with “n” dimensional scenarios, and for each individual scenario its probability of occurrence must be calculated; (iii) as Dridi, Ghouradi and Limam (2015) indicate the definition of the possible scenarios to analyze has the danger of ignoring some harmful, but plausible scenarios, and this can create an “illusion of security”. It is important to take into account that the model proposed in this document is presented as a complementary analysis for financial stability, not as an isolated methodology. For the correct management of financial stability, several measures must be considered, including a macroeconomic reverse tension test, as proposed in this document. The following steps were used to develop the model: (i) the calculation of the dependence between factors through applying copula theory, (ii) the projection of each factor by means of analysing historical information, applying time series theory and then the selection of the marginal distribution that best fits the projected data for

each factor; (iii) the estimation of the reverse scenario as early-warning indicators.

This methodology is validated by analysing if it could have predicted the last financial crisis; in order to accomplish this, the information of the quinquennial 2002-2006 was analysed and the factors projected for the following three years (2007-2009). The results show that in the projected values for that crisis, three of the four parameters included in the methodology reached an alert level. Moreover, one additional study has been included regarding the forthcoming situation of the Spanish financial system, in which data from years 2011-2016 is used to calculate alert levels for the period 2017-2019.

This paper has the following structure: it begins with the presentation of the methodological specifications, followed by an analysis of its validity. Finally, after computations are carried out, final results and conclusions are provided.

1. Methodological Specifications of Reverse Stress Testing

This paper proposes a methodology to help regulatory authorities to establish early warnings alerts regarding the stability of the financial system, analysing different factors that impact on the financial system credit risk (i.e. on its solvency). For a given level of dependence between each factor, the methodology applied calculates the tail value of the solvency distribution.

1.1. Literature review

Different reverse stress testing methodologies are presented in the literature. The Value at Risk (VaR) methodology is a widely used technique for these estimations, but in general, it is based on the multivariate normality hypothesis (Yamai and Yoshida, 2005). In reverse stress testing analysis, heavier tails are assumed, so it is useful to model distributions with fat tails, which is not the case of the hypothesis usually assumed in this type of analysis.

Dridi, El Ghourabi and Limam (2015) propose the application of a Reverse Stress Testing methodology based on the combination of risk factors, to find the worst case from which Tunisian banks become insolvent, focusing on credit risk. They used a methodology proposed by Wang, Peng and Yang (2013), who present a method to find the worst VaR, from a special kind of copula in which all the marginal distributions are identical

and have a monotonous density (or monotonous distribution tail). This assumption generates loss of sensitivity for each behavioural factor included in the analysis.

From a VaR perspective, Kopeliovich, Novosyolov, Satchkov, and Schachter (2013) propose a methodology for reverse stress testing, applying the model of main components with Gram-Schmidt orthogonalization for the determination of scenarios that lead to the previously mentioned loss of sensitivity. They base their calculations on the VaR decomposition methodology to calculate five plausible scenarios. McNeil and Smith (2012) propose a methodology, which they call “Most Likely Ruin Event”, to solve the reverse stress testing problem. Grundke and Pliszka (2015) propose a quantitative method to apply the reverse stress testing methodology in banks exposed to credit and interest rate risk and demonstrate how the model can be calibrated. This is a useful model to calculate the reverse stress testing scenario for each bank, including macroeconomic variables as the systemic risk factors.

To avoid the problem of using historical data (such as time sensitivity), Cintas del Río (2007) proposes the use of copulas. The copula approach affords the opportunity to capture relationships between a multidimensional function distribution and its marginal factors. This method enables non-linear relations to be captured, focusing on extreme events (Casparri, García Fronti and Bianco, 2010).

As has already been mentioned, the published methodologies are diverse. It is necessary to adapt the method to the context in which the model is applied and the type of information available, taking the objective into account. The methodology applied in this paper takes into consideration the idea presented by Grundke and Pliszka (2015) at an individual, bank by bank level and takes into account the conclusions reached by Cintas del Río (2007) regarding copula theory. The objective is to achieve a methodology able to detect early warning levels from a list of factors for the Spanish financial system that indicate the risk of an impending new financial crisis due to the credit risk situation. Moreover, this paper uses aggregate information, taking into account different components of the system.

1.2. Specification of the methodology

The methodology proposed is based on the hypothesis that the most likely reverse stress scenario is associated with a high dependence between factors. This hypothesis is based on a Hull publication; he postulated that

in times of crisis the interrelation between factors (dependence) tends to increase under extreme market conditions (Hull, 2006). To address this issue, this paper proposes a framework based on *Copula theory*. This theory links multivariate distribution functions to their marginal one-dimensional distribution functions (Nelsen, 2006), considering the dependence between the functions, and not only their linear correlation. With the factors selected, the first stage is to calculate the dependency between each factor through a copula parameter; the second stage is to forecast the behaviour of each factor and to select the best fit to the probabilistic distribution; the last stage is to obtain the reverse scenario searched through the calculation of the multivariate distribution function.

First stage: copula parameter

The parameter to be estimated in this step is usually called the dependency parameter of the copula, which measures the dependence between the marginals to be incorporated into the calculation. So, the objective is to calculate the dependency of each factor included in the analysis through the copula parameter; to this end it is necessary to consider the Sklar Theorem (Rüschendorf, 2013).

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = C((F_1(A_1), F_2(A_2), \dots, F_n(A_n))) \quad (1)$$

Where F is a n -dimensional distribution function, C is a n -dimensional copula, F_x are the marginal distribution function of each factor, A_x and each factor, being $x= 1, 2, \dots, n$. If marginal distribution functions are continuous, then it is possible to define:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= P(F_1(A_1) \leq u_1, \dots, F_n(A_n) \leq u_n) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \quad (2) \\ &= F_x(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \end{aligned}$$

In the case of the methodology offered in this paper, the Gumbel copula is used because it is an Archimedean copula (to capture the dependencies in the tails of the functions) and extreme values copula (to model multidi-

mensional structures with strange events).² Based on this, the formula to be solved is the following:

$$C_{\theta}(u) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (-\log u_i)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad \theta \in [1, \infty) \quad (3)$$

Being θ the dependence parameter that should be calculated in this first step. A greater parameter should be interpreted as indicating a higher dependence between factors, and it should be parameterized by a real $\theta \geq 1$.

Taking into consideration both the aforementioned Hull postulation and that the objective is to anticipate a crisis after a stable period of time, this factor is stressed, including a higher value of its estimation instead of the mean. To do so, it was decided to apply the superior limit of the confidence interval at 99.9% in order to be aligned with the best practices in the estimation of risk protections in finance.

Second stage: projections and marginal probabilistic distribution selection

The next stage³ is to project the available data for each factor included in the analysis, using historical information and estimating the projections. Autoregressive (AR), integrated (MA) and/or mobile average (ARIMA) series are used since the intention is to design a model capable of predicting a crisis alert while being in a stable macroeconomic and financial situation⁴ (Enders, 1995). The analysis of seasonality and trend of each factor is carried out and these analyses are solved as required. The best adjustment is decided through the Akaike Information Criterion (AIC) and Bayesian Information Criterion (BIC), in combination with these two graphs: Autocorrelation (ACF) and Partial Autocorrelation (PACF).

After obtaining the projected data, it is necessary to decide the best fit between that information and a probability distribution. To this end, the descriptive statistics and the results of two hypothesis tests for each factor are taken into consideration: Shapiro-Wilk test (Shapiro and Wilk, 1965) and Kolmogorov-Smirnov (K-S) test (Chakravarty, Laha and Roy, 1967) testing

² An additional contrast with other copulas distributions is presented in Annex 1.

³ First and second stages are independent, so it is possible to change their order.

⁴ If shocks are incorporated through the modelling of the time series (through GARCH or ARCH models, for example), then an additional assumption would be incorporated that could condition the possible identification of crisis alerts in stability situations.

normal, chi-square, exponential, gamma, uniform, Weibull and Pareto distributions (Sarabia Alegría, Gómez Déniz, and Vázquez Polo, 2007). The final selection of the best fit is confirmed on graphical observation (temporal evolution, boxplot, histogram, and point graphs).

Third stage: obtaining the reverse stress scenario

Finally, the results of the previous steps are included in the multivariate distribution functions (including the copula parameter and the marginal distributions of each factor) to obtain the reverse scenario. This is the warning scenario that presents the highest probability of occurrence considering all previous assumptions.

2. Results

The next section presents the results applying the methodology explained. First, the validation of the tool is presented analysing the ability of the methodology to detect alerts for the previous financial crisis, using information until 2006. After that, the same stages are applied to analyse the possibility of a new financial crisis arising in the period of 2017-2020.

2.1 Validation: estimation for the 2007-2009 triennium

Variables in the period 2002-2006 are checked to detect if the methodology proposed had been able to anticipate the subsequent crisis (the following 3 years, 2007-2009).

The process of selecting variables to be incorporated in the final model involves different methodological proposals. Skoglund and Chen (2009) proposes a nonparametric method for extracting relative information from risk factors. The measure is based on Kullback information theory and indicates that it can be used to determine the relative importance of risk factors in defining gains and losses, which is useful for selecting the factors to be incorporated into the reverse stress testing model.

Licari and Suarez-Lledó (2012) present two methods to reduce the number of variables and factors: factor analysis (FA) and main component analysis (PCA). They stipulate that, once the number of factors has been reduced, RST calculations can be carried out with linear or non-linear models (such as logarithmic or logistical).

The factors selected in this process are based on the analysis by Cristófoli and García Fronti (2020). They proposed the application of Andon methodology to select factors that met the SMART requirements (Specific, Measurable, Archivable, Relevant and Time-bond). The techniques proposed select five factors reflecting the sensitivity of the Spanish financial system against credit risk, from a top-down perspective.

Taking into consideration that only positive associations are allowed between the variables for Archimedean copulas with a dimension of greater than 2 (Jaramillo-Elorza and Lozano, 2014), some further analysis and adjustments have been performed over the original list of factors, including the application of the rotation technique proposed by Patton (2012). Finally, four factors were selected to carry out the analysis (see Table 1).

Table 1. Variables selected to incorporate into the final scenario

Variable	Description
A1	Loans to the sector of insurance companies and pension funds of the Euro area.
A2	Series foreign trade in Spain (DXE). Exports provisional data deflected by the unit value index amount in Spain.
A3	CPI energy in Spain.
A4	Stock price index growth (IBEX 35).

Source: Author's calculation, based on the analysis carried out by Cristófoli and Fronti (2020) and data extracted from European Central Bank statistics (variable A1), Bank of Spain statistics (variables A2 and A3), Datastream (variable A4).

Note: This table provides the four variables included in the next analysis.

The final list of variables has four components, one showing the level of loans conceded by the total system to the insurance companies and pension funds (reflecting the level of investments that these types of companies are willing to undertake according to the economic perspective existing in this sector), and three macro variables, one reflecting the capacity of Spain to improve its balance of payments, the second presenting the level of industrial activity through energy prices, and the third showing the movement of consumer prices, a factor that has exerted significant influence during the latest crisis.

2.1.1. Copula parameter

The first stage in the analysis is to calculate the dependent parameter of the copula. To carry this out, the explanations given by Kojadinovi and Yan (2010) are considered. They set out the steps to be followed in the modelling of a copula with continuous margins in the software R, through the copula package. They indicate that this estimation of the parameter can be carried out through three methods: “mpl” (maximum pseudo-likelihood), “itau” (inversion of Kendall’s tau), and “irho” (inversion of Spearman’s rho). Pseudo-observations have been used⁵ as in the case of the “mpl” method the use of pseudo-observations is a requirement. This transformation ensures that the observations all fall within the interval (0,1), without implying modifications to the behaviour of the variables.

The best method is chosen using the Cramer-von-Mises test (Anderson, 1962). The best estimation methodology for the correlation is determined among maximum pseudo-likelihood, Kendall’s tau and Spearman’s rho. The result, presented in Table 2, shows a very small p-value (less than 1%) in all three cases, so any of the methods would be valid.

Table 2. Three methods for the estimation of the Gumbel copula parameter

Method	Statistic	Parameter	p-value
itau	0,0653	1,1230	0,0008
irho	0,0679	1,1127	0,0003
mpl	0,0671	1,1153	0,0056

Source: Author’s calculation, based on projected data (2007-2009) for the four factors included in the analysis.

Note: This table provides the results of the estimation of the Gumbel copula parameter for the projected data (2007-2009) of the selected variables using three different estimation methods: itau, irho and mpl.

The method selected is “mpl”, aligned with the recommendation by Kojadinovic and Yan (2010), who indicate that this estimation method should be used for estimation of copulas with dimensions greater than 3 in the Gumbel family.

⁵ In the following steps the pseudo-observations of the projected data for the years 2007, 2008 and 2009 are used.

The parameter estimated would indicate the interrelation between the variables in a regular scenario. But the objective pursued is to determine the interrelation of the variables in an adverse scenario. At those times, as discussed earlier, the interaction between the variables is greater. The verification of this assumption is presented in Table 3, where the calculation of the copula parameter is performed with the information of the real data from 2009 to 2012 (financial and economic crisis period). As it is possible to see, the factor with the real data is greater than that calculated previously. For this reason, it was decided to compute the 99.9% percentile and assign that value to the final estimation. In this way, the possible contagion is taken into account between the different sectors incorporated into the analysis (through the incorporated factors), which would be greater in extreme market conditions (Hull, 2006).

Table 3. Gumbel copula parameter estimation

	Factors projected (2007-2009)	Real information (2009-2012)	
	Alpha	Percentil 99.9	Alpha
Estimate	1,115	1,2015	1,279
Std. Error	0,028		0,082
Maximized loglike lihood	14,02		7,198

Source: Author's calculation, based on projected data (2007-2009) and real data (2009-2012) for the four factors included in the analysis.

Note: This table provides the results of the estimation of the Gumbel copula parameter for the projected data (2007-2009) and real data (2009-2012), standard error of this estimation and maximized loglikelihood, and additional include the percentile 99.9 of the projected date.

2.1.2. Projections and marginal probability distributions selection

The methodology applied at this stage has three steps: first, the analysis of the most relevant characteristics of each factor; second, the behaviour of each variable was projected through the time series tool; third and finally, a probability distribution that best fits the projected variables was selected for each factor.

The descriptive statistics are presented in Table 4 and graphical analyses have been carried out to begin the analysis of the factors.

The second step starts with the graphical view of each factor, presented in Figure 1, which is complemented with the Augmented Dickey-Fuller Test to determine if the seasonal adjustment of each series is necessary.

Table 4. Descriptive statistics on the four factors

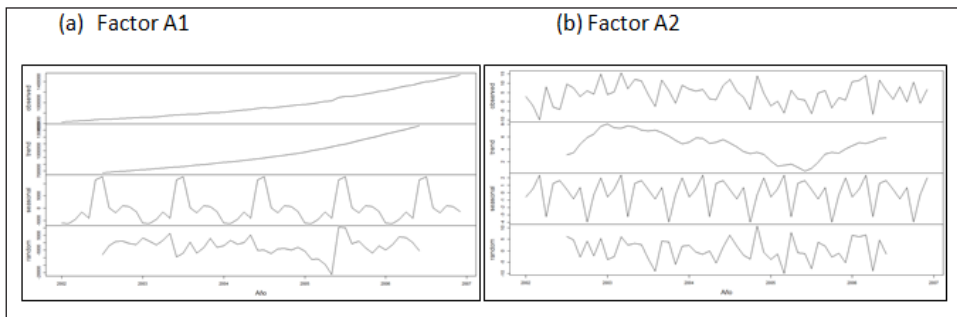
Variable	Min	1stQu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
A1	630.224,00	1.160.394,00	1.441.702,00	1.417.266,00	1.816.158,00	1.896.9110,00
A2	22,49	0,18	4,97	4,21	8,73	24,66
A3	15,900	1,900	2,600	3,210	10,750	21,400
A4	0,00778	0,00108	0,00043	0,00013	0,00160	0,00755

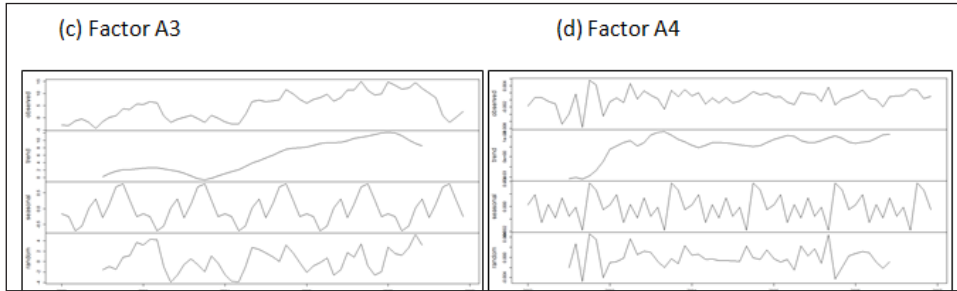
Source: Author's calculation, based on data extracted from European Central Bank statistics (variable A1), Bank of Spain statistics (variables A2 and A3), Datastream (variable A4).

Note: This table provides the minimum, 1st quarter (P25), median (P50), mean, 3rd quarter (P75) and maximum for each factor.

After all necessary adjustments (including the trend) were made, between 8 and 10 time series were analysed for each factor, and the best adjustment was selected based on the Akaike Information Criterion (AIC) and Bayesian Information Criterion (BIC) tests, combined with graphical analysis (autocorrelation and partial autocorrelation graphs).

Figure 1. Breakdown of the time series for each factor, monthly data from January 2002 to December 2006





Source: Prepared by authors

Nota: The first line of each quadrant shows the observed data, the second, the trend of the data, the third, the season of the data and the fourth and last one, the random data.

Finally, the probability distribution function that best fits the projected factors was selected based on Shapiro-Wilk normality test and Kolmogorov-Smirnov test, presented in Table 5, contrasted with the QQ-plot graphs, presented in Figure 2.

Table 5. Shapiro-Wilk and Kolmogorov-Smirnov tests results

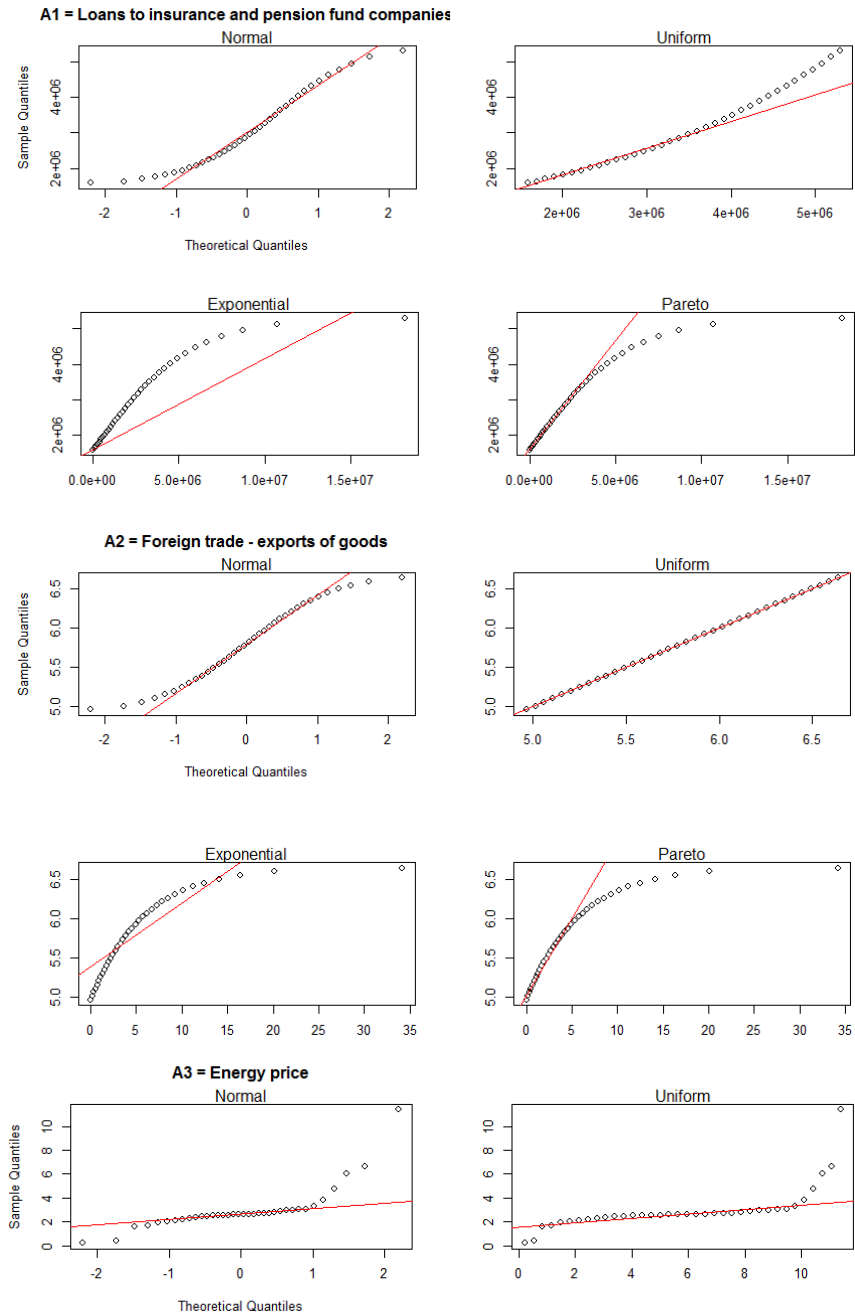
Factors	Normal				Chi-square		Exponential	
	S-W normality test		K-S test		K-S test		K-S test	
	W	p-value	D	p-value	D	p-value	D	p-value
A1	0.939	0.046	0.099	0.460	0.556	0.000	0.180	0.087
A2	0.957	0.169	0.071	0.987	0.476	0.000	0.575	0.000
A3	0.664	0.000	0.315	0.001	0.211	0.034	0.191	0.064
A4	0.953	0.129	0.071	0.662	0.993	0.000	0.517	0.000

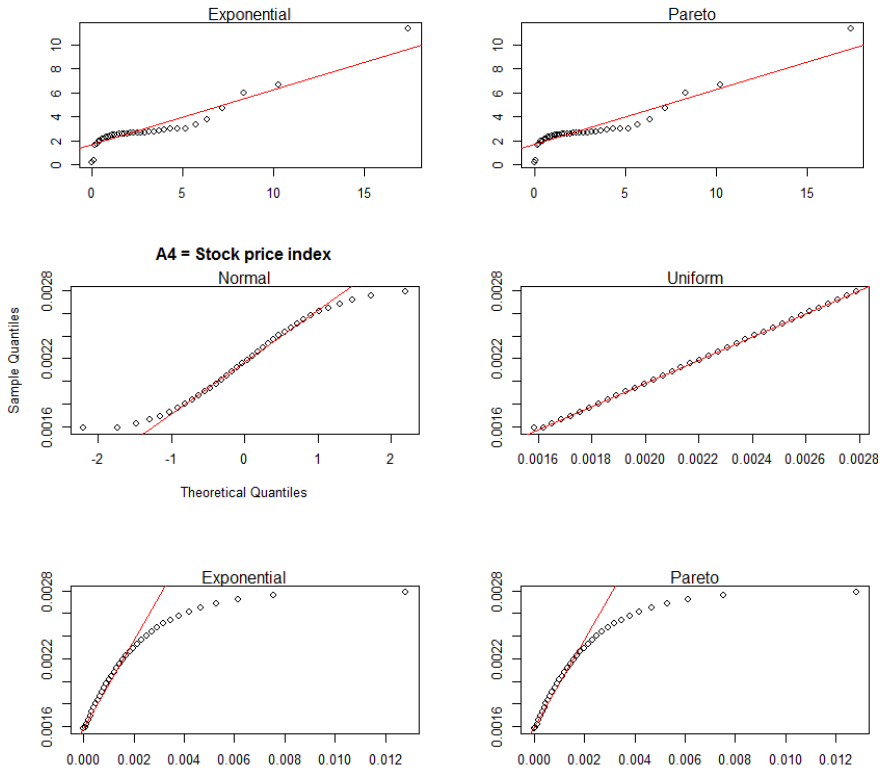
Factors	Gamma		Uniform		Weibull		Pareto	
	K-S test		K-S test		K-S test		K-S test	
	D	p-value	D	p-value	D	p-value	D	p-value
A1	0.077	0.621	0.161	0.139	0.089	0.536	0.179	0.088
A2	0.074	0.981	0.028	1.000	0.083	0.947	0.575	0.000
A3	0.238	0.014	0.582	0.000	0.257	0.007	0.191	0.064
A4	0.079	0.605	0.028	0.928	0.071	0.663	0.517	0.000

Source: Author’s calculation, based on data projected for each factor.

Note: This table provides results and p-value of Shapiro-Wilk normality test and Kolmogorov-Smirnov test for distributions Normal, Chi-square, Exponential, Gama, Uniform, Weibull and Pareto for each factor. The final decision is indicated in bold for each factor.

Figure 2: QQ-plot for each factor on four of the analysed distributions, including Normal, Uniform, Exponential and Pareto





Source: Prepared by authors

Finally, the specifications of the marginal distributions to be included in the calculation of the reverse scenario for each factor are detailed in Table 6.

Table 6. Marginal distributions

Variable	A1	A2	A3	A4
Probability distribution	<i>Normal</i>	<i>Uniform</i>	<i>Exponential</i>	<i>Uniform</i>
Parameters	mean 3085944 sd 1093443	min 4.961651 max 6.640721	rate 0.3383459	min 0.0015819722 max 0.0027900910

Source: Author's calculation based on previous calculations.

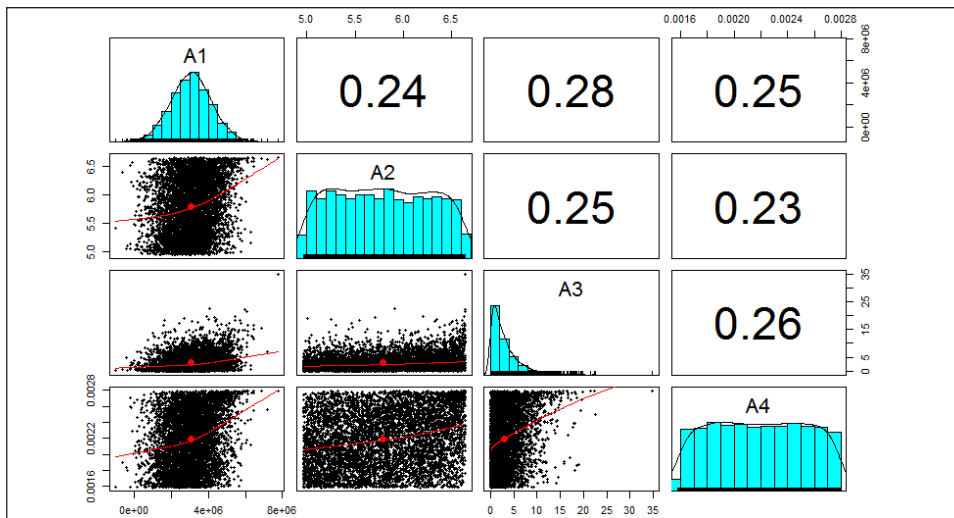
Note: This table provides the probability distribution function chosen to project the values of the next years and the parameters of each probability function.

2.1.3 Obtaining the reverse stress scenario

The last stage of the validation process is to obtain the reverse stress scenario. As the calculation of a crisis scenario for the factors is required (a severe scenario but at the same time sufficiently probable, after which the financial system could enter into a crisis), the average was selected for each variable with which to identify alerts. In this way, the selected scenario would begin to generate concerns among the economic and regulatory agents and could lead to a crisis due to the interaction between the economic sectors.

Figure 3 shows the simulated values calculated through the copula, considering the selected marginal and the parameters calculated in previous steps.

Figure 3: Pair plot of the random variables for a Gumbel copula



Source: Prepared by authors.

Table 7 shows the average of the estimated values (mean), that is, the scenario that has been presented most frequently in the simulation of the marginal distribution projections and considering the dependency between factors through the calculation of the copula's parameter. This value, the mean, is considered the early-warning limit for each factor.

Table 7. Descriptive Statistics on parameter projections (marginal) after copula calculation

	Mean	Min	Max	P(25)	P(50)	P(75)	P(95)
A1	1,378,109	NA	8,910,986	2,394,975	3,088,439	3,824,544	4,884,912
A2	5.80	4.96	6.64	5.38	5.80	6.22	6.56
A3	2.954	0.000	49.592	0.849	2.045	4.098	8.875
A4	0.00218	0.00158	0.00279	0.00189	0.00219	0.00249	0.00273

Source: Author's calculation, based on previous estimations.

Note: This table provides the mean, 5th, 50th and 95th percentiles (p5, p50, p95) for the four variables included in the estimation.

The regulator would be alerted if the selected variables approached values above those of the mean scenario. This analysis with 2006 information is presented in Table 8.

Table 8. Backtesting analysis result

Variable	2016 data	Early warning limit	Analysis Result
A1	1,378,109	3,085,000	
A2	6.08	5.8	ALERT
A3	8.230	2.954	ALERT
A4	0.00112	0.00218	ALERT

Source: Author's calculation, based on information from European Central Bank statistics (variable A1), Bank of Spain statistics (variables A2 and A3), Datastream (variable A4) and previous calculations.

Note: This table provides information from 2006 for each variable and the previously calculated value as early-warning limits.

Table 8 presents the identification of the crisis alerts for the period 2007-2009, comparing the 2006 values of the factors with the means included in Tables 7, it can be seen that three of the four factors exceed⁶ the threshold established as a limit value.

⁶ The last factor is below the threshold because this variable had to be rotated to meet the requirements of Gumbel copulas, among which is that all factors must have a positive relationship.

By interpreting these results, it is possible to see the validity of the methodology presented. Thus, the next step is to apply the presented methodology with the information available up to 2016, in order to see the risk of a new crisis occurring for the period 2017-2019.

2.2. Projection: estimation for the 2017-2019 triennium

This section analyses the possibility of a new crisis, considering the same variables incorporated in the previous analysis, with information from the period 2011-2016; the values for the next three years are projected -that is, 2017 to 2019-, finally the early warning limits are obtained to be compared with the real information of 2016. The final results are presented in Table 9.

Table 9. Results of the estimated scenario for 2017-2019 and comparison with 2016 information

Variable	2016 data	Early warning limit	Analysis Result
A1	1,291,220	1,547,000	ALERT
A2	3.75	4.76	
A3	-8.420	0.400	
A4	0.00005	0.00218	

Source: Author's calculation.

Note: This table provides the information from 2016 for each variable and the value calculated as early-warning limits.

There is still an alert identified but this corresponds to the growth in the price index, which is highly affected and correlated to the growth in the housing price index. This sector has a very slow recovery process because it depends on the industrial structure to be able to prosper. Changes in credit for the whole of the financial sector are transmitted to the macroeconomy with a delay which is quantified as being between two and four quarters (Gerba and Mencia, 2017).

The results presented up to the previous paragraphs are based on the preselected set of non-related factors. However, the alert identification methodology presented allows factors to be incorporated that are considered arbitrarily relevant, even though they are closely related to each other.

An analysis of this type would be extremely valid if it were developed in order to compare the results obtained with the scenarios created in a stress testing analysis in which the same variables were incorporated. Additionally, the interaction of these values with those proposed in a stress testing scenario would help to analyse the validity of the shocks included in the scenario designed for the stress testing analysis.

2.3. The application of the model of arbitrarily selected factors

The results presented up to now are based on a preselected set of factors. However, the alert identification methodology proposed allows incorporating factors that are considered relevant arbitrarily, even though they are highly related to each other. To demonstrate this, the results of the estimation for the 2017-2019 triennium is presented below. This variables are generally considered in the stress testing scenarios in Spain: A5 (year-on-year variation rate of the Gross Domestic Product), A6 (year-on-year variation of social benefits due to unemployment) and A7 (stock price index growth). In this case, the result of the analysis is shown in Table 10.

Table 10. Results of the estimated scenario for 2017-2019 and comparison with 2016 information for three new variables

Variable	2016 data	Early warning limit	Analysis Result
A5	0.3050	0.3765	
A6	- 10.84	0.0000193	
A7	0.00005	0.00217	

Source: Author's calculation.

Note: This table provides the information from 2016 for each variable and the value calculated as early-warning limits.

As can be seen, the stock price index growth does not give an alert value, as it did in the result presented in section 3.2. The result estimated as alert level in the most probable scenario is slightly different (0.00217 vs 0.00218). This shows a possible contagion between them. This is a different interpretation that one in Table 9, remarking the importance of carrying out a pre-

vious analysis of the selection of variables. A poor selection of factors can generate a lack of alert identification, as in this case.

An analysis of this type is useful to compare the results obtained with the scenarios created in a stress testing analysis in which the same variables are incorporated. The interaction of these values with those proposed in a stress testing scenario shall help to analyse its validity.

Conclusion

The proposed methodology has proved to be useful for identifying crisis alert levels for the leading financial factors that affected Spain from 2008 onwards, and the calculations carried out for the future situation enabled the detection of an alert level for the triennium 2017-2019.

As for the backtest performed, the procedure yielded alerts for three of the four studied parameters. The crucial parameter was the stock price index, presumably because the beginning of the crisis in Spain was characterised by a price bubble, particularly in housing and developer loans. The other two parameters were energy prices, which portray industrial activity swings, and the export of goods, which reflects problems in foreign trade operations.

Concerning the forecasting test, conducted with the same variables and procedures, the methodology yielded alert levels for the triennium 2017-2019. The fundamental parameter, in this case, was the price index growth, which is profoundly affected by and correlated with the growth in the housing price index in Spain. This sector tends to experience very slow recovery processes due to its dependence on the industrial structure. The results obtained show that such a process has been taking place in Spain since the last great crisis. The methodology presented in this work is expected to be useful in the future, contributing to prevent future financial crises, at best; or at least, diminishing the devastating impact that these have on society.

The results obtained proved the robustness of the methodology applied here. However, three main weaknesses call for new lines of future research. First, the bias in the selection of the variables must be considered. New research on the Spanish financial sector could focus on different variables to the ones used in this work. Second, the data was projected with ARIMA Time Series; thus, both the methodology and the data are preconditioned by the fact that shocks are not taken into consideration. Hence, this methodology enables the detection of alert levels during periods of financial stability

without taking into account any interaction with past crises, that is, assuming that historical data does not necessarily mirror or grant insight into possible future crises. Finally, it is possible to predict alert levels for potential crises through this methodology, but only from a credit-risk perspective and provided that other risk factors such as political risk, remain constant. Nevertheless, such technical limitation can be overcome by utilising other types of time series models such as GARCH or ARCH.

Bibliography

- Anderson, T. W. (1962). "On the Distribution on the Two-Sample Cramér-Von-Mises Criterion". *Annals of Mathematical Statistics* (Institute of Mathematical Statistics), vol. 33, núm. 3, pp. 1148-1159.
- Breuer, T., Jandacka, M., Rheinberger, K., y Summer, M. (2009). "How to Find Plausible, Severe, and Useful". *International Journal of Central Banking*, 5, pp. 205-224. Recuperado el 19 de abril de 2016, de <http://www.ijcb.org/journal/ijcb09q3a7.pdf>.
- Casparri, María Teresa, Javier García Fronti y María José Bianco (2010). "Nota introductoria al concepto de "Cópula" y la problemática de riesgos extremos". En: *Algunas innovaciones financieras para la gestión del riesgo global*. editado por María Teresa Casparri y Javier García Fronti, pp. 49-60. Buenos Aires: Universidad Nacional de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.
- Chakravarti, I. M., R. G. Laha y J. Roy (1967). "Handbook of Methods of Applied Statistics". *John Wiley and Sons I*, pp. 392-394.
- Cintas del Río, Rosario (2007). "Teoría de Cópulas y Control de Riesgo Financiero". *Tesis doctoral*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas, Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
- Cristófoli, María Elizabeth y Javier García Fronti (2020). "Stress Testing Bancarios: selección de indicadores clave para la estabilidad financiera". *Cuadernos de Economía*, núm. 43, Forthcoming publication.
- Dees, Stéphane, Jérôme Henry y Reiner Martin (2017). *STAMPÉ: Stress-Test Analytics for Macprudential Purposes in the euro area*. European Central Bank.
- Dridi, A., M. El Ghourabi, y M. Limam (2015). "On Reverse Stress Testing for Worst Case Scenarios: An Application to Credit Risk Modelling of Tunisian Economic Sectors". *International Journal of Economic Sciences IV*, núm. 2, pp. 40-56.

- Enders, Walter (1995). *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons, INC.
- Gerba, Eddie y Javier Mencía (2017). "How Effective are Capital-based Macroprudential Measures in Taming the Macro-financial Cycles? A Structural Enquiry into Spain". *Forthcoming Banco de España WP and submitted to Journal of Banking and Finance*.
- Grundke, P. y Pliszka, K. (2013). "A Macroeconomic Reverse Stress Test". *Discussion paper*. Deutsche Bundesbank.
- Hull, John (2006). *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall.
- International Actuarial Association (2013). "Stress Testing and Scenario Analysis". *Insurance Regulation Committee*. IAA.
- Jaramillo-Elorza, M. C. y J. A. Lozano (Enero-Junio 2014). "Construcción de distribuciones multivariadas con marginales dependientes usando cópulas en R". *Revista Ciencia en Desarrollo* 5, núm. 1, pp. 21-29.
- Kojadinovic, Ivan y Jun Yan (Mayo 2010). "Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using the Copula R Package". *Journal of Statistical Software* (American Statistical Association) vol. 34, núm. 9, pp 1-20.
- Kopeliovich, Yaacov, Arcady Novosyolov, Daniel Satchkov, y Barry Schachter (2013). *Robust Risk Estimation and Hedging: A Reverse Stress Testing Approach*. Edhec Business School.
- Licari, J. M. y Suárez-Lledó, J. (Octubre de 2012). "Reverse Stress Testing from a Macroeconomic viewpoint: Quantitative Challenges & Solutions for its Practical Implementation". *Economic y Consumer Credit Analytics*. Recuperado el 17 de mayo de 2016, de <https://www.economy.com/home/products/samples/whitepapers/2012-10-10-Reverse-Stress-Testing-From-Macroeconomic-View-Point.pdf>.
- McNeil, Alexander J. y Andrew D. Smith (2012). "Multivariate Stress Scenarios and Solvency". *Insurance: Mathematics and Economics*. núm. 50, pp. 299-308.
- Minsky, Hyman P. (1975). *John Maynard Keynes*. Nueva York: Columbia University Press.
- Naifar, N. (2011). "Modelling Dependence Structure with Archimedean Copulas and Applications to the iTraxx CDS Index". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, núm. 235, pp. 2459-2466. doi:10.1016/j.cam.2010.10.047.
- Nelsen, Roger (2006). *An Introduction to Copulas*. Nueva York: Springer-Verlag.
- Patton, Andrew (2012). "A Review of Copula Models for Economic Time Series". *Journal of Multivariate Analysis* núm. 110, pp. 4-18.
- Rüschendorf, Ludger (2013). *Mathematical Risk Analysis. Dependences, Risk Bonds, Optimal Allocations and Portfolios*. Springer.

- Sarabia Alegría, José María, Emilio Gómez Déniz, y Francisco José Vázquez Polo (2007). *Estadística actuarial: teoría y aplicaciones*. Madrid: Pearson Educación.
- Shapiro, S. S., Wilk, M. (1965). "An Analysis of Variance Test For Normality (Complete Samples)". *Biometrika* 52, no. 3/4, pp. 591-611.
- Skoglund, J., y Chen, W. (2009). "Risk Contributions, Information and Reverse Stress Testing". *The Journal of Risk Model Validation*, vol. 3, núm. 2, pp. 61-77. doi:10.21314/JRMV.2009.041.
- Wang, Ruodu, Liang Peng y Jingping Yang (2013). "Bounds for the Sum of Dependent Risks and Worst Value-at-Risk with Monotone Marginal Densities". *Finance Stoch*, núm. 17, pp. 395-417.
- Yamai, Yasuhiro y Toshinao Yoshiba (2005). "Value-at-Risk Versus Expected Shortfall: A Practical Perspective". *Journal of banking & finance* 29, núm. 4, pp. 997-1015.

Anexo 1

The goodness-of-fit tests is carried out in order to strengthen the decision of the Gumbel copula's selection for the calculation of the reverse scenario. To this so, the method Kendall's tau is used to perform the comparison. The results are presented in the Table A.1.

Table A.1. Four options for the estimation of the copula parameter

Method	Statistic	Parameter	p-value
Gumbel	0,0653	1,1230	0,0008
Frank	0,0890	0,9397	0,0000
Clayton	0,1321	0,2460	0,0000
tCopula	0,0701	0,0298*	0,0004

Source: Author's calculation, based on projected data (2007-2009) for the four factors included in the analysis.

Note: This table provides the results of the estimation of the copula parameter for the projected data (2007-2009) of the selected variables using four different copulas: Gumbel, Frank, Clayton and tCopula.

*Full results for tCopula are: parameter1 = 0.029837, parameter2 = 0.325490, parameter3 = 0.069562, parameter4 = 0.343040, parameter5 = 0.081633, parameter6 = 0.093052

As can be seen, even though the highest p-value is obtained with Gumbel copula, it is too small. For that reason Gumbel copula is selected, but another method is applied to estimate the correct parameter. The details are presented in section 3.1.1. Additionally, it is selected because it has the properties of the Archimedean copulas and the properties of the extreme value copulas (Naifar, 2011).

Valuación de opciones financieras sobre acciones de la Bolsa Mexicana de Valores: el modelo Black Scholes con costos de transacción y pago de dividendos

Pricing Equity Options in the Mexican Stock Market: Black Scholes model with transaction costs and dividends payment

José Roberto Torres Bello*

Miriam Sosa Castro**

(Fecha de recepción: 29 de abril 2019. Fecha de aceptación: 6 de julio de 2019)

RESUMEN

La ecuación Black and Scholes (BS) es una de las contribuciones más importantes del campo de las matemáticas a las finanzas, su aplicación en la valuación de instrumentos y en la administración del riesgo ha sido clave para la toma de decisiones. A partir de la ecuación original, se han desarrollado extensiones al modelo con la finalidad de relajar los supuestos iniciales y proporcionar una valuación más acertada. El objetivo de la presente investigación es aplicar una extensión del modelo BS, que considera los costos de transacción y, en su caso el pago de dividendos, a la valuación de las opciones de compra y venta sobre acciones que son negociadas en el Mercado Mexicano de Derivados, para ello se emplean datos del periodo 1º de marzo de 2018 al 1º de marzo 2019.

Clasificación JEL: G42; G13

Palabras clave: opciones financieras; MexDer; modelo Black Scholes; costos de transacción.

* Ingeniería-Optimización Financiera, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
rtorres.bello@hotmail.com

** Departamento de Economía, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa
msosac87@hotmail.com

ABSTRACT

The Black and Scholes equation (BS) is one of the most important contributions from mathematics to the financial field of knowledge. Its application to financial instruments valuation and financial risk management are fundamental in the decision making process. From its original formulation, several extensions to the model have been developed, in order to relax the initial assumptions and to provide accurate valuation methods. This paper aims to apply a BS model extension, considering transaction costs, and where applicable dividends payments, to value European Call and Put options on equities listed on the MexDer (Mexican Derivatives Market). Data used are from March, 1st 2018 to March, 1st 2019.

JEL classification: G42; G13

Keywords: *Financial Options; Mexican Derivatives Market; Black and Scholes Model; Transaction Costs.*

Introducción

A partir de la década de 1970 ocurrieron una serie de cambios en la dinámica financiera global que, en cierta medida, promovieron el desarrollo de la ingeniería y la creación de espacios financieros, como el mercado de productos derivados. Probablemente, el acontecimiento más relevante fue el rompimiento de los acuerdos de Bretton Woods en 1971, el cual significó el fin de la paridad cambiaria fija, que incrementó de manera importante la volatilidad sobre los tipos de cambio y tasas interés, variables clave para la valuación de activos financieros y para la actividad económica.

Ante el incremento en la incertidumbre financiera a nivel internacional, diversas estrategias para la gestión de riesgo fueron creadas y en aquellas ya existentes se incorporaron mejoras. Así, entre los trabajos publicados en dicha época, resaltan los elaborados en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes (1973) y Robert Merton (1973), quienes fueron galardonados en 1997 con el premio Nobel de Economía, por sus aportaciones a la valuación de contratos derivados, a través de la adaptación del trabajo matemático de Kiyoshi Itô para la valuación de las opciones financieras.

La importancia de las opciones financieras subyace en que, de acuerdo con Miller (1999), han representado una revolución en las finanzas, permitiendo reconstruir dicho campo y dándole un nuevo sentido al mismo. Su

aparición ha dado oportunidades de cobertura, inversión y arbitraje, operaciones clave en la ingeniería financiera y administración de riesgos.

La correcta valuación de los activos financieros es un tema central dentro de las finanzas. En tanto más precisa sea la valuación, la estimación de los beneficios de una estrategia de inversión también lo será. Así, todos los costos en los que se incurre de manera directa o indirecta deben ser contemplados.

En toda operación existen costos *ex ante* y *ex post* en los cuales se debe incurrir para realizar la transacción: costos de búsqueda, de contratación y coordinación. Así mismo, para el caso de subyacentes que tienen asociado un rendimiento, es importante contemplar el pago que se realiza y al cual se renuncia por la no tenencia del instrumento y preferir la compra de una opción.

Los costos de transacción, como cualquier otro costo, deben ser contemplados para la toma de decisiones financieras, de no ser así, la ganancia esperada podría ser inferior a la contemplada o incluso negativa; por ejemplo, el beneficio esperado por una operación de arbitraje financiero, obtenido por el diferencial del precio de venta y precio de compra, podría desaparecer o, incluso, convertirse en una pérdida. En ese mismo sentido, pero en la dirección opuesta, el ajuste del precio de la acción por el pago del dividendo es crucial, para estimar los beneficios de una estrategia de inversión o arbitraje, dejarlo de lado, podría resultar en una sobre estimación del precio de la opción que se traduciría en importantes pérdidas.

Así, la precisión de la valuación de las opciones financieras representa un tema de sumo interés, no sólo para aquellos que participan en el mercado: administradores de riesgo, especuladores, arbitrajistas, inversionistas institucionales, entre otros, sino también para las instituciones reguladoras y supervisoras; así como, para las autoridades económicas y monetarias. Es por ello que, sobre el modelo tradicional de Black y Scholes (BS de aquí en adelante) se han realizado extensiones, con el objetivo de relajar los supuestos y refinar el modelo, obteniendo un resultado lo más parecido al precio real.

El presente trabajo se suma a los ya existentes, proponiendo la extensión del modelo BS que contempla los costos de transacción y, en su caso, el pago de dividendos,¹ para realizar la valuación de todas las opciones euro-

¹ El precio de la acción se ajusta únicamente para aquellas que pagaron dividendo durante el periodo de vigencia del contrato.

peas sobre acciones listadas en MexDer a marzo de 2019. La contribución del presente se basa en que, la literatura sobre valuación de opciones incluyendo costos de transacción y pago de dividendos es escasa y, en mercados en desarrollo, es prácticamente inexistente; así, la inclusión de dichos costos permite tener mayor precisión en la determinación del precio de la opción, dotando de herramientas al inversor para tomar una mejor decisión.

La investigación se estructura de la siguiente manera: la siguiente sección revisa la literatura relacionada, la sección dos describe los datos y la metodología a implementar, la sección tres presenta los resultados y la sección cuatro muestra las conclusiones del trabajo.

1. Revisión de la literatura

La valuación de los derivados es un tema que en los últimos treinta años ha ganado terreno por su importancia para la toma de decisiones financieras. Así, existen una gran cantidad de trabajos que proponen e implementan modelos para la determinación del precio de los contratos de derivados (Brennan (1979); Clewlow y Strickland (1998); Schönbucher (2003); Kolb y Overdahl (2010); Kyriakou, Nomikos, Papapostolou y Poulialis (2016); Kyriakou, Poulialis, Papapostolou y Andriosopoulos (2017) y; Cortazar, Millard, Ortega y Schwartz, (2018)).

De manera específica, la literatura en torno a las extensiones del modelo BS es muy extensa. La estimación de la volatilidad es una de las principales extensiones en la que se ha trabajado con el objetivo de mejorar la estimación del precio. Las primeras propuestas incluían la estimación de la volatilidad a partir de modelos GARCH (Chou, 1988; Duan, 1995; Heston y Nandi, 2000 y; Agnolucci, 2009). Investigaciones recientes han implementado modelos estocásticos de diversos tipos (Lewis (2009); Hurn, Lindsay y McClelland (2015); Ramírez y Palacios (2016); Ait-Sahalia, Li y Li (2019); Piedragil y Venegas-Martínez (2011); Düring y Pitkin, (2019)).

Otro frente en el que se ha avanzado ha sido en la estimación del precio de las opciones a partir de diferentes supuestos distribucionales. En este sentido Jackwerth y Rubinstein (1996) proponen la estimación a partir de distribuciones implícitas; Rachev, Menn y Fabozzi (2005) implementan distribuciones que son consistentes con los hechos estilizados de las series financieras y que capturan colas pesadas y sesgos en las distribuciones de los rendimientos de los activos; Climent-Hernández, Venegas-Martínez y Ortiz-Arango (2014) estiman el precio de opciones a partir de distribuciones alfa-

estables; Simonato (2017) estima el precio de opciones americanas a partir de un modelo GARCH con innovaciones no normales; Piedragil y Venegas-Martínez (2011) estiman el valor de opciones con distribuciones estables y; Theodossiou (2018) estima la volatilidad basada en una distribución logística generalizada y sesgada. Además de ello, algunas investigaciones han avanzado en relajar el supuesto de arbitraje (Sierra, Gualajara y Casillas, 2019).

En términos del presente trabajo, existen diversos estudios que incluyen los costos de transacción, Amihud y Mendelson (1986), Constantinides (1986), Vayanos (1998), Vayanos y Vila (1999), Acharya y Pedersen (2005) son algunos ejemplos de trabajos que modelan la relación entre el precio de los activos y los costos de transacción. Lesmana y Wang (2015) estiman el precio de una opción de venta asumiendo la existencia de costos de transacción, Grossinho, Faghan y Ševčovič (2017) determinan el precio de una opción de compra americana empleando una función de volatilidad no lineal e introduciendo costos de transacción, simulando distintos escenarios.

Kallsen y Muhle-Karbe (2015) incluyen en la estimación del precio de opciones pequeños costos de transacción proporcionales, bajo el supuesto de una función de utilidad de indiferencia. Los autores obtienen fórmulas asintóticas para la determinación del precio de opciones; así como, estrategias de cobertura derivadas de las mismas. Ševčovič y Žitňanská (2016) proponen la valuación de precio de las opciones mediante un método no lineal que permita la inclusión de costos de transacción variables, los autores presentan la solución clásica y la existencia de numerosos límites en la determinación del precio de las opciones, se muestran en una gran cantidad de ejemplos.

Con base en la importancia de incluir los costos de transacción y el pago de dividendos en la valuación de las opciones, el presente trabajo aporta a la literatura antes mencionada, con el objetivo de proponer la valuación de opciones de compra y venta europeas sobre las acciones de la Bolsa Mexicana de Valores cotizadas en MexDer.

2. Metodología y datos

2.1. Nociones básicas

Las opciones son contratos que, por el pago de una prima, otorgan a su poseedor, el derecho más no la obligación, de comprar (*call*) o vender (*put*)

un activo subyacente, a un precio pactado K (precio de ejercicio o *strike*) en una fecha predeterminada (Hull y White, 2006).

Por el tipo de derecho que confieren existen dos tipos de opciones:

- Opción de compra: da al poseedor el derecho a comprar el activo subyacente.
- Opción de venta: da al poseedor el derecho a vender el activo subyacente.

Las opciones pueden ser de dos tipos, atendiendo al tiempo al que éstas pueden ser ejercidas:

- Opciones europeas: únicamente pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento del contrato de la opción.
- Opciones americanas: pueden ser ejercidas en cualquier momento de la vida del contrato.

Cuadro 1. Posición compradora y vendedora

	Posiciones	
	De Compra	De Venta
Comprador	Derecho a Comprar	Derecho a Vender
Vendedor	Obligación de Vender	Obligación de Comprar

Fuente: elaboración propia con base en (Hull y White, 2006).

Sea S_T el precio del activo subyacente en el tiempo T , el *payoff*, de una opción de compra es $\max\{S_T - k, 0\}$, ya que si $S_T > K$ se ejerce a K y se vende a S_T , lo que da un rendimiento de $S_T - K$, en el otro caso la opción no se ejerce y el *payoff* es 0.

Un teorema de cálculo estocástico que es fundamental en la deducción de la Ecuación de Black-Scholes es:

Teorema I. (*Lema de Ito*). *Supongamos que S cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:*

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ \quad (1)$$

donde $Z(t)$ es un movimiento browniano, Sea V una función de dos variables que toma valores reales de clase C^2 en su dominio, dada por $V = V(S, t)$, entonces satisface:

$$dV = \left(\sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dZ \right) + \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt \quad (2)$$

Supongamos ahora que en un tiempo t el precio de un activo es S , y se considera un incremento $t + \Delta t$, en el cual S cambia da $S + dS$, el rendimiento del activo es entonces dS/S , para modelarlo se hace uso de una parte determinista y una parte aleatoria quedando:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + S\sigma dX \quad (3)$$

donde X es una distribución normal con media 0 y varianza 1 (Churchil, 1963).

2.2. Desarrollo del modelo clásico

Supuestos que se requieren en el modelo:

- El precio de un activo sigue un proceso de Wiener log-normal:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ$$

- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo se suponen constantes durante el tiempo que dura la opción.
- No hay costos de transacción asociados a la cobertura del portafolio.
- El activo subyacente no paga dividendos durante la vida del contrato.
- No hay posibilidad de arbitraje (todos los portafolios libres de riesgo deben tener el mismo rendimiento).

- La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente.
- Los activos son divisibles.

Sea $V(S, t)$ el precio de una opción europea en el instante t cuando el precio del activo subyacente es S , se considera un portafolio P libre de riesgo de la siguiente manera:

El valor del portafolio es $\Pi_u = \Delta S_u - V_u$ cuando el valor del activo subyacente sube, y $\Pi_d = \Delta S_d - V_d$ cuando baja. La idea es igual Π_u a Π_d , es decir, encontrar un Δ tal que el portafolio tenga riesgo 0. Entonces al igualar se obtiene:

$$\Delta S_u - V_u = \Delta S_d - V_d$$

y despejando Δ ,

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{\delta V}{\delta S}$$

y al tomar el límite

$$\lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\delta S} = \frac{\partial V}{\partial S} = \Delta,$$

que es la variación del valor del derivado con respecto a S y es una medida de correlación entre los movimientos del derivado y los del activo subyacente.

De manera general el valor del portafolio es:

$$\Pi = \Delta S - V$$

Y al tomar diferenciales:

$$d\Pi = \Delta dS - dV$$

Y sustituyendo dS de la ecuación 3,

$$d\Pi = \Delta(S\mu dt + S\sigma dZ) - dV$$

Se supone que V cumple los supuestos y satisface el Lema de Ito y podemos sustituir dV junto con Δ , así la ecuación queda únicamente determinista.

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \quad (4)$$

Por la hipótesis de no arbitraje, como P es un portafolio libre de riesgo su rendimiento es igual al de un bono de tasa r :

$$d\Pi = \Pi r dt \quad (5)$$

Igualando las ecuaciones 4 y 5, simplificando dt y sustituyendo $\Pi = \Delta S - V$ se obtiene la ecuación de Black-Scholes (Black y Scholes, 1973).

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV \quad (6)$$

Haciendo un adecuado cambio de variables el problema se transforma en resolver la ecuación de calor, que es una ecuación diferencial parcial cuya solución ya es conocida (Churchill, 1963). Se obtiene que la solución es:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \quad (7)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

2.3. Agregando los costos de transacción

Una posible aproximación para integrar los costos de transacción en la valuación de una opción *call*, es considerar una variable μ que represente el costo de transacción de compra y venta cuya medida sea una fracción del volumen de transacciones.

Dado que las negociaciones toman lugar en intervalos discretos de tiempo, para la aplicación en el trabajo, se toman en cuenta sólo en las transacciones esperadas siguiendo la ecuación de Black and Scholes en tiempo discreto. Lo anterior puede ser justificado si los costos de transacción no están correlacionados con el mercado.

La estrategia modificada converge a la estrategia de Black-Scholes a medida que los costos de transacción se vuelven arbitrariamente pequeños. En este sentido, Leland (1985) asumió costos de transacción proporcionales y desarrolló una estrategia basada en el tiempo usando el modelo de Black Scholes en pasos de tiempo discretos, pero con volatilidad ajustada. De tal forma que la estrategia esta optimizada con respecto a los costos de transacción y la duración del intervalo de tiempo (Mawah, 2007).

Leland (1985) propone discretizar el tiempo y modificar la varianza de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}^2(\sigma^2, \mu, \Delta t) = \sigma \left[1 + \frac{\mu E \left| \frac{\Delta S}{S} \right|}{\sigma^2 \Delta t} \right] \quad (8)$$

$$= \sigma \left[1 + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right]$$

con

$$E \left| \frac{\Delta S}{S} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (9)$$

la nueva volatilidad es

$$\hat{\sigma} = \sigma \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right)^{1/2} \quad (10)$$

donde σ es la volatilidad original, μ es proporcional a los costos de transacción y Δt es la frecuencia con que se hacen las transacciones. Por

ejemplo: con $\sigma = 0.2$, $\mu = 0.01$ y una transacción por semana, $\hat{\sigma} = 1.13 \sigma$, es decir, la nueva volatilidad es 1.13 veces la volatilidad original.

Agregando la nueva volatilidad a la ecuación (7) se tiene la nueva fórmula para calcular el precio para una opción europea que no paga dividendos, pero sí incluye los costos de transacción.

$$\hat{C}(S; K, \sigma^2, r, T, k, \Delta t) = SN(\hat{d}_1) - Ke^{-rT}N(\hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}), \quad (11)$$

$$\text{donde } \hat{d}_1 = \frac{\ln\left[\frac{S}{Ke^{-rT}}\right]}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}\sqrt{T}$$

Es importante señalar que, en el presente trabajo se ha elegido el modelo de Leland (1985) ya que permite dar otra interpretación a la conexión entre la cobertura con volatilidad modificada y la cobertura incorporando costos de transacción. Igualmente, muestra que el precio de una opción corresponde al precio obtenido mediante el modelo BS con la volatilidad ajustada.

2.4. Ajustando el precio de la acción por el pago del dividendo

El pago del dividendo, cuando se posee una opción sobre acción es un derecho que no se recibe, por lo que, el precio del subyacente debe ser ajustado (disminuido) en una cantidad igual al pago correspondiente de dicho dividendo. En general, la fecha del pago de dividendos es conocida de antemano. Si este pago del dividendo D tiene lugar en el período t , menor a T , la fecha de vencimiento de la opción, entonces el precio del activo subyacente que hace pago de dividendos, S_d , debe ser ajustado, sustrayendo el valor presente del pago de dividendos:

$$S_d = S - De^{-rt}$$

Donde t = el lapso hasta el pago de dividendos.

Así, para estimar el precio de una opción sobre una acción que paga dividendos y que incorpora los costos de transacción, la ecuación (11) queda de la siguiente manera

$$\hat{C}(S_d; K, \sigma^2, r, T, k, \Delta t) = S_d N(\hat{d}_1) - Ke^{-rT}N(\hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}) \quad (12)$$

$$\text{donde } \hat{d}_1 = \frac{\ln \left[\frac{Sd}{Ke^{-rT}} \right]}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

Para el caso de la presente investigación, primero se calculan los precios de las 13 opciones sobre las acciones negociadas en MexDer, considerando los costos de transacción, y como sólo algunas de ellas pagan dividendo dentro del periodo de vigencia; posteriormente, se calcula el precio de dichas acciones considerando el pago del dividendo (Hull, 2003).

3. Resultados

3.1. Datos

Los contratos de acciones para los cuales se realiza la valuación son todos aquellos listados en MexDer. El Cuadro 2 muestra dichos instrumentos, así

Cuadro 2. Acciones sobre las cuales se cotizan opciones en el MexDer

Opciones sobre acciones individuales		
Nombre	Clave de pizarra	Sector
América Móvil, S. A. de C. V.	AX	Telecomunicaciones
Alfa	AL	Industrial
Cemex CPO	CX	Materiales
Femsa UBD	FE	Consumo frecuente
Gmexico B	GM	Industrial
ICA	IC	Industrial
LALA B	LL	Consumo frecuente
MEXICHEM	MC	Materiales
Naftac	NA	No aplica
PE&OLES	PE	Materiales
PINFRA	PINFRA	Industrial
Televisa CPO	TV	Telecomunicaciones
Walmex V	WA	Consumo frecuente

Fuente: elaboración propia con datos de MexDer.

como su clave de pizarra. Como se puede observar, la mayoría de dichas acciones son sobre empresas de los sectores: telecomunicaciones (2), materiales (2), consumo frecuente (3) e industrial (4). Lo anterior responde a que son las acciones más negociadas en la Bolsa Mexicana de Valores y, por ello, son los principales componentes para estimar los indicadores clave del mercado, tales como el índice S&P/BMV IRT.²

El Cuadro 3 muestra los parámetros que se consideraron para la valuación por medio del modelo BS. Para estimar la volatilidad fueron tomados en consideración los precios de cierre diarios de las acciones de 1º de marzo de 2018 al 1º de marzo de 2019; se obtuvo el rendimiento logarítmico de dichos precios y sobre los rendimientos se estimó la desviación estándar diaria. Como se puede observar en el Cuadro 3, el desempeño de las acciones, en términos del rendimiento, fue negativo para todas las acciones, exceptuando WalMex y FEMSA, lo anterior se podría deber a que en el año 2018 hubo incrementos continuos sobre las tasas de interés referentes a nivel internacional, incluidas la de México,³ lo cual ocasionó que los inversionistas prefirieran inversiones en el mercado de renta fija y que cayera el mercado de valores. Así, el rendimiento de todas las acciones sobre las cuales se estima el valor de las opciones es negativo, siendo las que presentaron peores resultados: Peñoles (-52% anual), Televisa (-36%) y CEMEX (-32%). En términos de la desviación estándar, la acción con mayor variación en su precio fue PEÑÓLES, seguida por LALA y Televisa.

Una vez que se obtienen el precio del subyacente de las cotizaciones del mercado de valores y el precio de ejercicio de las cotizaciones de MexDer; se estiman los rendimientos logarítmicos y sobre ellos se calcula la volatilidad del precio del subyacente. Los parámetros restantes para el cálculo del valor de la opción son el tiempo de vigencia y la tasa de interés.

² El S&P/BMV Índice De Rendimiento Total (S&P/BMV IRT) es la variación de Rendimiento Total del principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores, tiene como principal objetivo, constituirse como un indicador representativo del Mercado Mexicano y servir como subyacente de productos financieros. Para más información consultar <https://www.bmv.com.mx/es/indices/principales/>

³ De acuerdo con Banxico, México inició el año 2018 con una tasa de interés interbancaria en un nivel de 7.25%, en febrero la incrementó a 7.50% y en junio a 7.75%, para noviembre del mismo año llegó a 8% y en marzo de 2019 ya era de 8.25% ver www.banxico.org.mx/portal-mercado-valores

Cuadro 3. Parámetros empleados para la valuación de opciones

Emisora	Precio del subyacente	Precio de ejercicio	Rendimiento diario	Rendimiento anual	Desviación estándar diaria	Desviación estándar trimestral ⁴
América Móvil	13.88	16	-0.00095	-0.23897	0.01529	0.12138
ALFA	21.35	30	-0.00021	-0.05267	0.01680	0.13336
Cemex CPO	9.44	5	-0.00131	-0.32896	0.02035	0.16154
Femsa UBD	173.77	200	0.00002	0.00382	0.01298	0.10301
GMéxico B	48.02	52	-0.00103	-0.25843	0.02001	0.15886
ICA ⁵	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
LALA B	23.2	28	-0.00067	-0.16998	0.02078	0.16494
MEXICHEM	46.91	66	-0.00051	-0.12916	0.01804	0.14323
Nafrac 02	42.63	44	-0.00045	-0.11253	0.01046	0.08301
PEÑOLES	245.6	260	-0.00208	-0.52511	0.02360	0.18735
PINFRA	187.3	215	-0.00014	-0.03580	0.01427	0.11326
Televisa CPO	44.09	46	-0.00146	-0.36856	0.02037	0.16168
Walmex V	49.68	55	0.00038	0.09664	0.01660	0.13179

Fuente: elaboración propia con datos de: precio del subyacente Yahoo Finanzas, precio de ejercicio Boletín Diario de MexDer, rendimiento y desviación estándar estimados con datos de Yahoo Finanzas.

Para todas las opciones, el día de la valuación es 1º de marzo de 2019 y la fecha de vencimiento (*maturity*) es el 1º junio de 2019,⁶ por lo que, el periodo de vigencia es de tres meses y, por simplicidad, se consideran como 90 días en un año de 360, es decir una cuarta parte del año. Así, la desviación estándar es ajustada por el tiempo para obtener la desviación trimestral, correspondiente al periodo (Cuadro 3). Otro parámetro común para la valuación de todas las opciones es la tasa de interés la cual, al día de la valuación,

⁴ La desviación estándar se presenta con periodicidad diaria, por que se realizan los cálculos de la misma empleando datos de cierre diarios. También se presenta de manera trimestral, para que coincida con el periodo de estudio marzo-junio de 2019.

⁵ Cabe destacar que no se presentan datos, ni resultados sobre la emisora ICA ya que, desde agosto de 2017, la compañía solicitó un juicio mercantil y, desde dicha fecha, se suspendieron las acciones que esta empresa cotizaba en la BMV. N.D. se refiere a dato no disponible.

⁶ El periodo de estudio se eligió en base con la duración y, por ende, vencimiento de los contratos listados en MexDer.

era 8.25% anual (tasa de referencia para México); al igual que la desviación estándar, la tasa de interés es ajustada por el tiempo, para obtener la tasa proporcional a un trimestre. En referencia con el tema central del estudio, los costos de transacción se han fijado en $\mu = 0.003$ de acuerdo con lo establecido en MexDer.

3.2. Resultados de la estimación incluyendo costos de transacción

Una vez que se tienen los insumos necesarios, en términos de datos para la valuación de Black and Scholes, se estimaron los precios de las opciones para las acciones listadas en el cuadro 2.

El Cuadro 4 muestra los resultados de la estimación del valor de las opciones sobre las distintas emisoras. Resalta el hecho de que, para la mayoría de las opciones de compra (*Call*), la cotización de MexDer es muy superior a la estimada mediante el modelo Black and Scholes, aún incluyendo costos de transacción. Lo anterior se podría deber a las tendencias que se esperan en el mercado; debido a la importante caída de los precios de las acciones que se registró en el año 2018, para casi todas las emisoras; lo que se esperaría

Cuadro 4. Estimación del Call y Put con y sin costos de transacción

Emisora	Valor del Call en MexDer	Call sin costos de transacción	Call con costos de transacción	Valor del Put en MexDer	Put sin costos de transacción	Put con costos de transacción
América Móvil	0.21	0.0037	0.0071	2.16	2.0415	2.0448
ALFA	0.01	0	0	9.05	8.4957	8.4957
Cemex CPO	4.57	4.4657	4.4657	0.02	0	0
Femsa UBD	1.41	0.0128	0.0318	26.28	25.2142	25.2332
GMéxico B	1.27	0.3708	0.447	4.94	4.0834	4.1595
ICA ⁵	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
LALA B	0.21	0.0097	0.0156	4.83	4.6657	4.6716
MEXICHEM	0.02	0	0	19.06	18.7506	18.7506
Naftac 02	1.01	0.2842	0.3649	1.95	1.4279	1.5086
PEÑOLES	14.65	4.2918	4.7965	29.12	17.3546	17.8594
PINFRA	3.36	0.0364	0.0742	28.22	26.6307	26.6684
Televisa CPO	2.66	0.7628	0.8565	3.57	2.4362	2.5299
Walmex V	0.97	0.1088	0.144	5.83	5.146	5.2812

Fuente: elaboración propia con datos de la estimación.

en este año es un repunte de los precios de dichos instrumentos. Dicha expectativa ha sido reforzada debido a los últimos anuncios que ha realizado la Fed sobre detener la alza en las tasas de interés, para el año 2019. Cabe mencionar que, a pesar de la amplia diferencia entre los precios estimados y las cotizaciones de MexDer, la inclusión de costos de transacción en la fórmula, nos da un precio más cercano a dichas cotizaciones.

Para algunas acciones, el precio de los contratos de opción incluyendo costos de transacción es, aparentemente, el mismo que el que no los incluye. Lo anterior se puede deber a que la diferencia en el precio se da después del cuarto decimal, por lo cual, es muy pequeña. Dicho resultado podría deberse a que, para algunas acciones, otros determinantes de su precio son más importantes que los costos de transacción; así, muestran baja sensibilidad a la incorporación de los mismos en la estimación.

Contrario a los resultados de la valuación del *Call*, los precios que se estiman del *Put* son mucho más cercanos a los que MexDer publica. Lo anterior se podría deber a que la expectativa y probabilidad de baja en el precio de las acciones es mucho menor que la de subida, lo que permite que el resultado de la fórmula BS se ajuste mucho más al precio de cotización. Otra cuestión importante es que, la estimación de los precios publicados por MexDer puede variar por los insumos que se emplean dentro de la fórmula BS, un ejemplo de ello es la volatilidad, la cual es calculada por la agencia proveedora de precios. Por otro lado, la diferencia entre los precios estimados y listados, se puede deber a que de las opciones también son ajustadas por las expectativas de los agentes, las cuales son expresadas por medio de la oferta y demanda de dichos contratos.

En términos de la incorporación de costos de transacción, al igual que para el caso de los *Call*, los precios se ajustan mucho más al de cotización, cuando son incorporados. Cabe señalar que, para el caso de acciones como Alfa y Cemex, el valor de la estimación con y sin costos de transacción es muy similar y la diferencia es perceptible hasta el sexto decimal, por lo que, no se aprecia en el cuadro.

3.3. Resultados de la estimación incluyendo costos de transacción y el pago de dividendos

Dado que durante el periodo de vigencia de las opciones (1^o de marzo a 1^o de junio 2019) no todas las acciones pagan dividendo, para aquellas que sí lo hacen, se refina la valuación incluyendo también el pago del dividendo.

Como se mencionó en la descripción de la metodología, el pago del dividendo es un derecho que no se obtiene al tener una opción sobre la acción, en lugar de la acción en si misma; por ello, se debe ajustar el precio del subyacente con el pago del dividendo, el Anexo 1 muestra para cada una de las acciones el pago del dividendo que se realizó, a pesar de no estar dentro del periodo de vigencia. En el Cuadro 5 se muestra la estimación para las cinco emisoras que sí pagaron dividendos en el periodo de vigencia.

Cabe resaltar los resultados de las estimaciones de las opciones sobre PEÑOLES y PINFRA, sobre las cuales hay una amplia diferencia entre el precio del *Call* y del *Put* publicados por MexDer y aquellos estimados en el presente trabajo. La diferencia podría deberse a información en el mercado que podría tener efectos diversos entre el público inversionista. Por un lado, la tendencia negativa que presentaba el sector minero en el primer

Cuadro 5. Resultados de la estimación incluyendo costos de transacción y pago de dividendos

	Valor del <i>Call</i> en MexDer	<i>Call</i> costos y dividendo	Valor del <i>Put</i> en MexDer	<i>Put</i> costos y dividendo	Dividendo	Fecha de pago	Días para el pago
ALFA	0.01	0	9.05	8.8807	US \$0.04 A un tipo de cambio de 19.26MXP/USD \$0.77MXP	USD \$0.02=\$0.3852-11 de marzo 2019	10
Femsa UBD	1.41	0.0203	26.28	26.6661	\$2.90	\$1.45-7 de mayo 2019	67
LALA B	0.21	0.0127	4.83	4.8217	\$0.62	\$0.1538-23 de mayo 2019	83
PEÑOLES	14.65	4.5033	29.12	18.5063	\$3.78	\$0.945-30 de mayo 2019	90
PINFRA	3.36	0.0219	28.22	31.3239	\$4.71	19 de marzo de 2019	18
Televisa CPO	2.66	0.7406	3.57	2.7623	\$0.35	29 de mayo de 2019	89
Walmex V	0.97	0.1025	5.83	5.7676	\$1.89	\$0.63-25 de abril 2019	55

Fuente: elaboración propia con datos del mercado de valores y resultados de la estimación.

trimestre del 2019⁷ y, por el otro, para PEÑALES la donación de un terreno para la construcción de un cinturón verde alrededor de la empresa en Coahuila⁸ y para PINFRA el anuncio de inicio de obras.⁹

Los resultados del cuadro 5 revelan que a pesar de que, para el caso de los *Call*, sigue siendo muy distante el precio estimado del que se muestra en las cotizaciones de MexDer, la introducción del pago de dividendos refina la valuación y hace menor la brecha. Para el caso de los *Put*, la introducción de pago de dividendos y costos de transacción incrementa la precisión de la valuación.

Conclusiones

El modelo de Black and Scholes en su primera formulación contemplaba la valuación de una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, asociados a dicho modelo se encontraban una gran cantidad de supuestos, dentro de los que destacan la no existencia de costos de transacción, y naturalmente, ausencia de pago de dividendos. Con base en dicha limitación, la presente investigación propone una aplicación de la extensión del modelo de BS que rompe con ambos supuestos, para la valuación de las opciones sobre acciones cotizadas en el MexDer.

La consideración de costos y transacción y pago de dividendos permite que la valuación sea más precisa, proporcionando al inversionista más y mejor información para la toma de decisiones. Así, todas aquellas oportunidades de inversión podrán ser identificadas y valuadas con mayor certeza, permitiendo que se maximice el valor de las posiciones.

Los costos de transacción son de suma importancia en el análisis económico y financiero ya que en muchas ocasiones, son los causantes de que se mantengan ciertos desequilibrios en los mercados. Lo anterior se debe a

⁷ Sitio web minería en línea “Producción minera mexicana con tendencia a la baja” consultado el 12 de julio de 2019 a las 18:50 pm hora del Centro de México <https://mineriaenlinea.com/2019/07/produccion-minera-mexicana-con-tendencia-a-la-baja/>

⁸ Periódico El Siglo de Torreón “Dan terreno a Peñales para Cinturón Verde” consultado el 12 de julio de 2019 a las 18:16 pm hora del Centro de México <https://www.elsiglodetorreon.com.mx/noticia/1551902.dan-terreno-a-penoles-para-cinturon-verde.html>

⁹ Sitio web AFMedios “PINFRA anuncia obras en puente Tepalcates II” consultado el 12 de julio de 2019 a las 18:32 pm hora del Centro de México <https://www.afmedios.com/2019/02/pinfra-anuncia-obras-a-puente-tepalcates-ii/>

que una posible estrategia de arbitraje podría anularse al considerar dichos costos de transacción, perpetuando el desequilibrio hasta que el resultado de la estrategia sea superior a dichos costos. Así, la inclusión de costos de transacción permite al inversionista calcular y planear con mayor precisión el resultado de una inversión, dicha información es clave, no sólo para los inversionistas, arbitrajista o administradores de riesgo, sino para las empresas y gobiernos con posiciones en el mercado de opciones.

El pago de dividendos es un derecho económico que deriva de la tenencia de un instrumento que hace socio al que lo tiene en su poder. La compra de una opción sobre una acción da derecho a la compra de una determinada acción en cierto tiempo, lo cual se traduce en que, en el periodo de vigencia de la opción, el tenedor de la misma no posee la acción y, por tanto, no es sujeto del pago de dividendo. Así, se debe ajustar el precio de la acción disminuyéndolo en términos del pago de dicho dividendo. La incorporación del pago de dividendos es, al igual que los costos de transacción, de suma importancia para incrementar la certeza de la valuación sobre las opciones, ignorar dichos ajustes traería una valuación errónea que podría derivar en cuantiosas pérdidas.

Dentro de las futuras líneas de investigación se encuentran extender el modelo BS para modelar la volatilidad con modelos GARCH o incorporando volatilidad estocástica. Igualmente, se podría relajar el supuesto de ausencia de arbitraje o asumir una distribución de probabilidad más apegada al comportamiento de los rendimientos bursátiles.

Referencias bibliográficas

- Acharya, V. V. y Pedersen, L. H. (2005). "Asset Pricing with Liquidity Risk". *Journal of Financial Economics*, vol. 77, núm. 2, pp. 375-410.
- Agnolucci, P. (2009). "Volatility in Crude Oil Futures: A Comparison of the Predictive Ability of GARCH and Implied Volatility Models". *Energy Economics*, vol. 31, núm. 2, pp. 316-321.
- Ait-Sahalia, Y., Li, C., y Li, C. X. (2019). "Implied Stochastic Volatility Models". *Unpublished working paper*, Available at SSRN 2977828.
- Amihud, Y. y Mendelson, H. (1986). "Asset Pricing and the Bid-Ask Spread". *Journal of Financial Economics*, vol. 17, núm. 2, pp. 223-249.
- Banco de México, www.banxico.org.mx/portal-mercado-valores

- Bayer, C., Friz, P. y Gatheral, J. (2016). "Pricing Under Rough Volatility". *Quantitative Finance*, vol. 16, núm. 6, pp. 887-904.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). "The pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Brennan, M. J. (1979). "The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models". *The Journal of Finance*, vol. 34, núm. 1, pp. 53-68.
- Chou, R. Y. (1988). "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence using GARCH". *Journal of Applied Econometrics*, vol. 3, núm. 4, pp. 279-294.
- Clewlow, L. y C. Strickland (1998). *Implementing Derivatives Models*. Wiley series in Financial Engineering, Wiley.
- Climent-Hernández, J. A., Venegas-Martínez, F. y Ortiz-Arango, F. (2014). "Portafolio óptimo y productos estructurados en mercados alpha-estables: un enfoque de minimización de riesgo". *Working Paper*, Munich Personal RePEc Archive. Disponible en: <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/57740/>.
- Constantinides, G. M. (1986). "Capital Market Equilibrium with Transaction Costs". *Journal of Political Economy*, vol. 94, núm. 4, pp. 842-862.
- Cortazar, G., Millard, C., Ortega, H. y Schwartz, E. S. (2018). "Commodity Price Forecasts, Futures Prices, and Pricing Models". *Management Science*.
- Duan, J. C. (1995). "The GARCH Option Pricing Model". *Mathematical Finance*, vol. 5, núm. 1, pp. 13-32.
- Düring, B. y Pitkin, A. (2019). "High-order Compact Finite Difference Scheme for Option Pricing in Stochastic Volatility Jump Models". *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- Grossinho, M., Faghan, Y. K. y Ševčovič, D. (2017). "Pricing Perpetual Put Options by the Black-Scholes Equation with a Nonlinear Volatility Function". *Asia-Pacific Financial Markets*, vol. 24, núm. 4, pp. 291-308.
- Grupo BMV <https://www.bmv.com.mx/es/indices/principales/>
- Heston, S. L. y Nandi, S. (2000). "A Closed-form GARCH Option Valuation Model". *The Review of Financial Studies*, vol. 13, núm. 3, pp. 585-625.
- Hull, J. C. (2003). *Options Futures and Other Derivatives*. Pearson Education India.
- Hull, J. C. y White, A. D. (2006). "Valuing Credit Derivatives using an Implied Copula Approach". *Journal of Derivatives*, vol. 14, núm. 2, p. 8.
- Hurn, A. S., Lindsay, K. A. y McClelland, A. J. (2015). "Estimating the Parameters of Stochastic Volatility Models using Option Price Data". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 33, núm. 4, pp. 579-594.

- Jackwerth, J. C. y Rubinstein, M. (1996). "Recovering Probability Distributions from Option Prices". *The Journal of Finance*, vol. 51, núm. 5, pp. 1611-1631.
- Kallsen, J. y Muhle-Karbe, J. (2015). "Option Pricing and Hedging with Small Transaction Costs". *Mathematical Finance*, vol. 25, núm. 4, pp. 702-723.
- Kolb, R. W. y Overdahl, J. A. (2010). *Financial Derivatives: Pricing and Risk Management*, vol. 5, John Wiley & Sons.
- Kyriakou, I., Nomikos, N. K., Papapostolou, N. C. y Pouliasis, P. K. (2016). "Affine-Structure Models and the Pricing of Energy Commodity Derivatives". *European Financial Management*, vol. 22, núm. 5, pp. 853-881.
- Kyriakou, I., Pouliasis, P. K., Papapostolou, N. C. y Andriosopoulos, K. (2017). "Freight Derivatives Pricing for Decoupled Mean-reverting Diffusion and Jumps". *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, núm. 108, pp. 80-96.
- Leland, H. E. (1985). "Option Pricing and Replication with Transactions Costs". *The Journal of Finance*, vol. 40, núm. 5, pp. 1283-1301.
- Lesmana, D. C. y Wang, S. (2015). "Penalty Approach to a Nonlinear Obstacle Problem Governing American Put Option Valuation under Transaction Costs". *Applied Mathematics and Computation*, núm. 251, pp. 318-330.
- Lewis, A. L. (2009). "Option Valuation Under Stochastic Volatility II". *Finance Press*, Newport Beach, CA.
- Mawah, B. (2007). *Option Pricing with Transaction Costs and a Non-linear Black-Scholes Equation*. Thesis. Departamento de Matemáticas. Uppsala University.
- Merton, R. C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. *Theory of Valuation*, pp. 229-288.
- Miller, M. H. (1999). "The History of Finance". *Journal of Portfolio Management*, núm. 25, pp. 95-101.
- Piedragil, C. E. C. y Venegas Martínez, F. V. (2011). "Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables". *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, vol. 1, núm. 1, pp. 55-71.
- Rachev, S. T., Menn, C. y Fabozzi, F. J. (2005). *Fat-tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing*. Vol. 139. John Wiley & Sons.
- Ramírez, A. O. y Palacios, M. T. V. M. (2016). "Valuación de opciones asiáticas versus opciones europeas con tasa de interés estocástica". *Contaduría y Administración*, vol. 61, núm. 4, pp. 629-648.
- Schönbucher, P. J. (2003). *Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*. John Wiley & Sons.

- Ševčovič, D., y Žitňanská, M. (2016). "Analysis of the Nonlinear Option Pricing Model under Variable Transaction Costs". *Asia-Pacific Financial Markets*, vol. 23, núm. 2, pp. 153-174.
- Sierra, J. G, Gualajara V. G. y Casillas, J. M. (2019). "Valuación de opciones financieras con arbitraje por medio de la ecuación de Black Scholes mediante un esquema de diferencias finitas". *Estocástica: finanzas y riesgo*, vol. 9, núm 1, pp. 5-32.
- Simonato, J. G. (2017). "American Option Pricing under GARCH with Non-normal Innovations". *Optimization and Engineering*, pp. 1-28.
- Theodossiou, P. (2018). Downside and Upside Volatility, Value-at-Risk, Expected Shortfall and Pricing of Options Based on a Skewed Generalized Logistic Distribution.
- Vayanos, D. (1998). "Transaction Costs and Asset Prices: A Dynamic Equilibrium Model". *The Review of Financial Studies*, vol. 11, núm. 1, pp. 1-58.
- Vayanos, D., y Vila, J. L. (1999). "Equilibrium Interest Rate and Liquidity Premium with Transaction Costs". *Economic Theory*, vol. 13, núm. 3, pp. 509-539.

Anexo 1

Datos y pago de dividendo de todas las emisoras

	Valor del Call en MexDer	Call costos y dividendo	Valor del Put en MexDer	Put costos y dividendo	Dividendo	Fecha de pago	Días para el pago
América Móvil	0.21		2.16		\$0.35	\$0.18-15 de jul 2019	
						\$0.17-11 de nov 2019	
ALFA	0.01	0	9.05	8.8807	US \$0.04	USD \$0.02=\$0.3852-11 de marzo 2019	10
					19.26MXP/USD	USD \$0.02=\$0.3852-12 de sept 2019	
					\$0.77		
Cemex CPO	4.57		0.02		\$2.95	\$1.474-17 de junio 2019	
						\$1.474-17 de diciembre 2019	
Femsa UBD	1.41	0.0203	26.28	26.6661	\$2.90	\$1.45-7 de mayo 2019	67
						\$1.45-5 de noviembre 2019	
GMéxico B	1.27		4.94		\$0.80	26 de febrero 2019	
ICA							
LALA B	0.21	0.0127	4.83	4.8217	\$0.62	\$0.1538-23 de mayo 2019	83
						\$0.1538-21 de agosto 2019	
						\$0.1538-20 de noviembre 2019	
						\$0.1538-19 de febrero 2020	

Continúa

MEXICHEM	0.02		19.06		\$0.39	25 de febrero 2019	
Naftac 02	1.01		1.95				
PEÑOLES	14.65	4.5033	29.12	18.5063	\$3.78	\$0.945- 28 de febrero 2019	90
						\$0.945- 30 de mayo 2019	
						\$0.945- 29 de agosto 2019	
						\$0.945- 28 de noviembre 2019	
PINFRA	3.36	0.0219	28.22	31.3239	\$4.71	19 de marzo de 2019	18
Televisa CPO	2.66	0.7406	3.57	2.7623	\$0.35	29 de mayo de 2019	89
Walmex V	0.97	0.1025	5.83	5.7676	\$1.89	\$0.63- 25 de abril 2019	55
						\$0.63- 28 de agosto 2019	
						\$0.63- 27 de noviembre 2019	

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

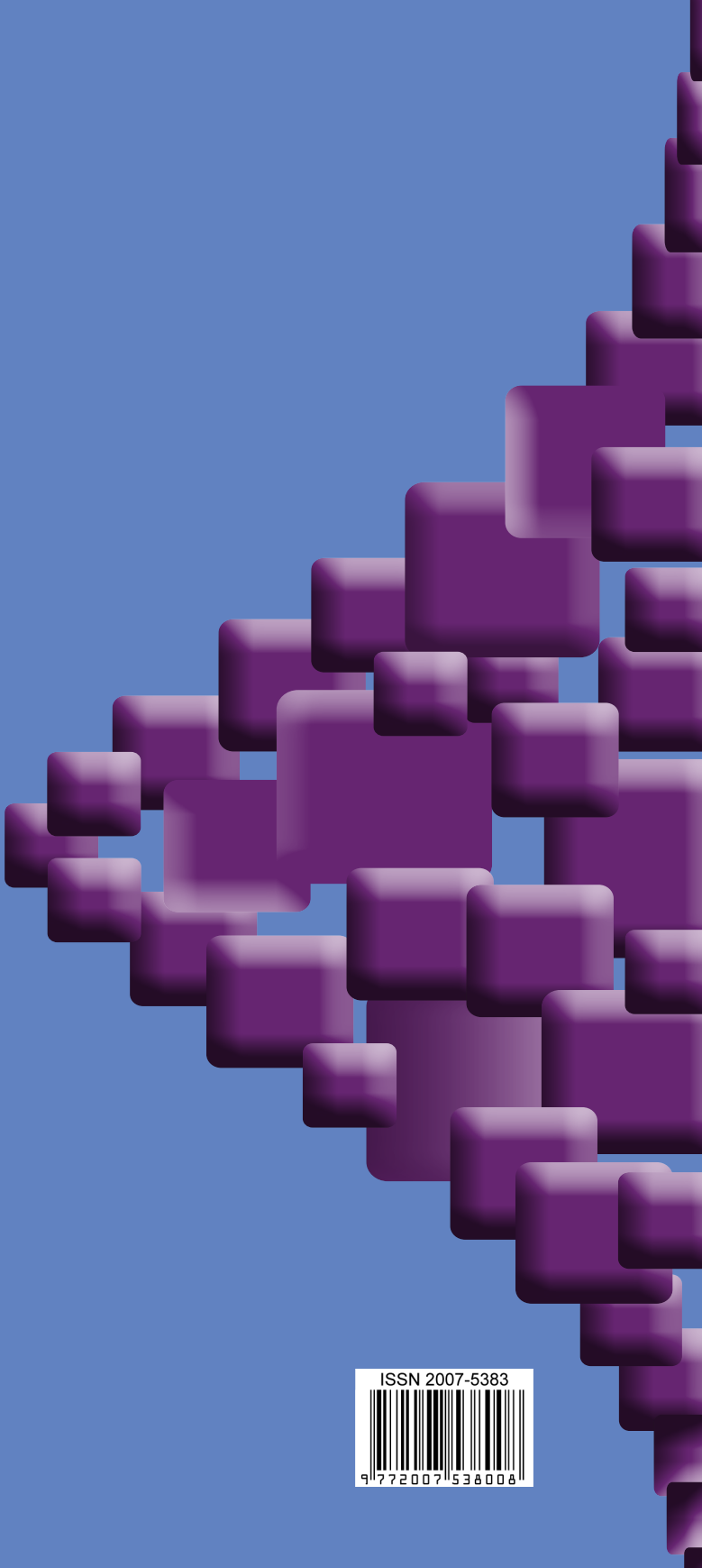
Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 **Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros**



ISSN 2007-5383



9 772007 538008