

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

**Dependencia en el modelo colectivo de riesgo
de una compañía de seguros en México**

David Conaly Martínez Vázquez
Christian Bucio Pacheco
Héctor Alonso Olivares Aguayo

**Teorías de paridad y valuación de
dos monedas con descuento de
flujos mediante lógica borrosa**

Gastón S. Milanesi
Germán Weins
Daniel Pequeño

**Red neuronal autorregresiva
difusa tipo Sugeno con funciones
de membresía triangular
y trapezoidal: una aplicación al
pronóstico de índices del mercado bursátil**

José Eduardo Medina Reyes
Judith Jazmin Castro Pérez
Agustín Ignacio Cabrera Llanos
Salvador Cruz Aké

**Desempeño de ocho de las criptomonedas
de mayor capitalización de mercado**

Francisco López-Herrera
Luis Guadalupe Macías Trejo
Oscar Valdemar de la Torre Torres

**VOLUMEN 10, NÚMERO 1
ENERO - JUNIO 2020**

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro

Unidad Azcapotzalco

Rector de la Unidad

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Lic. Miguel Pérez López

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Jesús Manuel Ramos García

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Garibay Suárez

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine-Abed
Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana--Azcapotzalco
Cd. de México, México

Editora

Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Departamento de Administración,
Universidad Autónoma Metropolitana--Azcapotzalco
Cd. de México, México

Coeditor

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Autónoma Metropolitana--Azcapotzalco
Cd. de México, México

Dirección de este número

Dra. María G. Henaine-Abed
Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Mtro. Carlos Zubieta-Badillo

Consejo Editorial

Dr. Diego Agudelo-Rueda
Área de Mercados Financieros,
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Dr. Marco Avellaneda
División de Matemáticas Financieras
Instituto Courant
Universidad de Nueva York
Nueva York, EE. UU.

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Onésimo Hernández-Lerma
Departamento de Matemáticas, CINVESTAV,
Instituto Politécnico Nacional.
Cd. de México, México

Dr. Francisco López-Herrera
Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Edgar Ortiz
Facultad de Ciencias Políticas y Sociales,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Dan Rosen
Facultad de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Universidad de Toronto,
Toronto, Canadá

Dra. Patricia Saavedra-Barrera
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Roberto J. Santillán-Salgado
EGADE Business School
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de
Monterrey
Campus Monterrey,
Monterrey, Nuevo León, México

Dr. Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional,
Cd. de México, México

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 10, número 1

enero - junio 2020

Estocástica: finanzas y riesgo es una revista académica de acceso abierto, especializada en finanzas, dirigida a investigadores/as y académicos/as interesados/as en el análisis de los riesgos financieros y temáticas relacionadas con éstos, editada semestralmente por la Universidad Autónoma Metropolitana, en versión impresa y electrónica. Todos los artículos son sometidos a arbitraje bajo la modalidad doble ciego, los cuales pueden ser publicados en inglés o español. Su objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ESTOCÁSTICA: FINANZAS Y RIESGO. Volumen 10, número 1, enero–junio de 2020, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, Ciudad de México, México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200. Ciudad de México, México, teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed, Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200, Ciudad de México, México, fecha de última modificación: 31 de enero de 2020. Tamaño del archivo: 6.96 MB.

Las opiniones expresadas por los/as autores/as no necesariamente reflejan la postura del/la editor/a de la publicación.

CONTENIDO

Dependencia en el modelo colectivo de riesgo
de una compañía de seguros en México

David Conaly Martínez Vázquez
Christian Bucio Pacheco
Héctor Alonso Olivares Aguayo

5

Teorías de paridad y valuación de dos monedas con
descuento de flujos mediante lógica borrosa

Gastón S. Milanesi
Germán Weins
Daniel Pequeño

27

Red neuronal autorregresiva difusa tipo Sugeno con
funciones de membresía triangular y trapezoidal: una
aplicación al pronóstico de índices del mercado bursátil

José Eduardo Medina Reyes
Judith Jazmin Castro Pérez
Agustín Ignacio Cabrera Llanos
Salvador Cruz Aké

77

Desempeño de ocho de las criptomonedas
de mayor capitalización de mercado

Francisco López-Herrera
Luis Guadalupe Macías Trejo
Oscar Valdemar de la Torre Torres

103

Dependencia en el modelo colectivo de riesgo de una compañía de seguros en México

Dependence in the Collective Risk Model of an Insurance Company in Mexico

David Conaly Martínez Vázquez*

Christian Bucio Pacheco**

Héctor Alonso Olivares Aguayo***

(Fecha de recepción: 1º de noviembre de 2019. Fecha de aceptación: 30 de diciembre de 2019)

RESUMEN

En la literatura actuarial, el modelo colectivo de riesgo es una importante herramienta en el análisis de la distribución del riesgo para una compañía de seguros. No obstante, por comodidad en los textos actuariales se supone un comportamiento independiente entre el monto y número de reclamaciones. El objetivo de este artículo es demostrar que bajo ciertas condiciones hay evidencia de dependencia entre dichas variables; para demostrar lo anterior, se hace uso de funciones cópula, elípticas y arquimedianas. La evidencia empírica proviene de una aplicación a uno de los portafolios de reclamaciones del ramo daños de la compañía de seguros *Afirme Seguros* en la Ciudad de México, dicha evidencia demuestra que existe dependencia

* Unidad Académica Profesional Huehuetoca,
Universidad Autónoma del Estado de México,
Huehuetoca, Edo. de México, México
davidconaly@icloud.com, ORCID: 0000-0003-3337-7165

** Unidad Académica Profesional Huehuetoca,
Universidad Autónoma del Estado de México,
Huehuetoca, Edo. de México, México
christianbucio@yahoo.com.mx, ORCID: 0000-0002-0860-199X

*** Facultad de Negocios,
Universidad La Salle, Ciudad de México, México
hectoralonso.olivares@lasalle.mx, ORCID: 0000-0003-2609-8627

entre el número de reclamaciones y el monto de las mismas, lo que contrapone lo estipulado por la teoría del modelo colectivo de riesgo.

Clasificación JEL: G22, D81, C15.

Palabras clave: modelo colectivo de riesgo, seguros, cópula, reclamaciones dependientes.

ABSTRACT

The collective risk model is defined in the actuarial literature as an important risk distribution analysis tool for insurance companies. Actuarial textbooks assume an independent behavior between the number of claims and their amount. The main objective of this paper is to show that under certain circumstances evidence of dependency between the variables studied may be found. To ascertain this objective copula functions, such as Elliptical and Archimedean, were used. A Complaints Portfolio on the damage section of Afirme Seguros Company from Mexico City, Mexico, was analyzed. The empirical evidence found showed the existence of dependency between the number of claims and their amount, this finding contradicts what is stated in the Collective Risk Model Theory.

JEL Classification: G22, D81, C15.

Keywords: *Collective Risk Model, Insurances, Copula, Dependent Claims.*

Introducción

El impacto de las reclamaciones en una compañía de seguros puede desequilibrar la estabilidad de la misma. Por esta razón, es fundamental una adecuada administración, evaluación y previsión de la siniestralidad dentro de un horizonte de tiempo finito; particularmente considerando las condiciones económicas y sociales de los asegurados, para garantizar un correcto nivel de reservas y cálculo de primas (cumpliéndose el principio de ganancia neta dentro del seguro).¹

El modelo colectivo de riesgo, describe el agregado de reclamaciones como un fenómeno adverso para el patrimonio de una aseguradora, que puede presentarse durante un período de tiempo $[0, T]$. Uno de los supuestos, que generalmente se considera por comodidad, es que existe independencia

¹ La esperanza de pérdida para la compañía debe ser menor a lo que se cobra en primas (Klugman, 2012).

entre el número de reclamaciones N , y el monto de las mismas Y_i , ambas siendo variables aleatorias. Este fenómeno puede ser modelado mediante un proceso de Poisson Compuesto, que es un proceso estocástico a tiempo continuo, donde el número de reclamaciones que ocurren en el intervalo de tiempo $[0, T]$ no está relacionado con el monto de las mismas. A partir de este hecho, se construyen diversas estructuras para el cálculo de la distribución del riesgo (comportamiento de reclamaciones) para un portafolio. El objetivo de este artículo es demostrar que bajo ciertas condiciones en México esta independencia no sucede, debido a las características de los asegurados, número de pólizas y el periodo de observación. Por lo tanto, se incluyeron en el análisis de riesgo de una compañía de seguros, elementos característicos del portafolio que afectan de manera considerable el cálculo de primas, reservas y reaseguros, mismos que son esenciales tanto para la compañía de seguros como para los asegurados. Al existir dependencia entre el monto de las reclamaciones y el número de las mismas, resulta necesario construir funciones de densidad condicionales que puedan capturar, de una forma más precisa, la severidad o frecuencia de la dependencia dentro del portafolio. Por esta razón, se han elegido las funciones cópula para el análisis de la dependencia entre ambas variables, puesto que las formas tradicionales de cálculo de correlación sólo miden en términos reales este fenómeno y las funciones cópula muestran una estructura de dependencia.

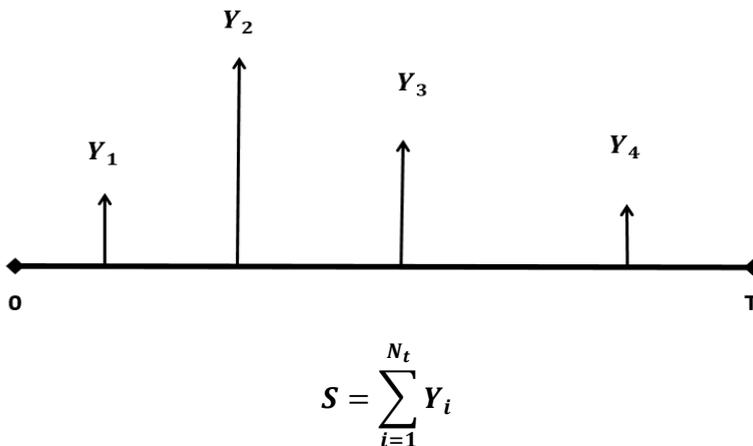
La hipótesis fundamental dentro de la investigación, es que existen factores que propician un mayor número de reclamaciones dentro de una compañía de seguros en un determinado periodo de tiempo y que la relación de éstas respecto a sus montos es diversa, es decir, no nula; en otras palabras, dependiendo el periodo de tiempo bajo análisis y los diversos factores que envuelven a las reclamaciones y a los montos establecidos por las aseguradoras, existe relación entre las reclamaciones y sus respectivos montos. Para ello, en este trabajo se analiza un portafolio de reclamaciones de la compañía de seguros *AFIRME SEGUROS* en México; cabe señalar que el portafolio bajo análisis sólo corresponde al ramo de Daños, Automóviles de Servicio Público. La información considerada pertenece al periodo del 2 de enero de 2017 al 31 de diciembre de 2018. La evidencia empírica demuestra que en el periodo de estudio se tiene la existencia de dependencia entre el número de reclamaciones y el monto de las mismas; en particular en determinados periodos de tiempo (finales de año) por lo tanto, no se cumple el supuesto del modelo colectivo de riesgo referente a la independencia entre estas variables.

El trabajo está estructurado de la manera siguiente, en el subsecuente apartado se presenta el marco teórico, así como su relevancia para la estructura del mismo. Posteriormente, se enuncia la metodología utilizada para el análisis de dependencia estipulada en esta investigación, dependencia entre el número de reclamaciones y el monto de las mismas. A continuación se exponen los resultados en el apartado de evidencia empírica. Y finalmente se ofrecen las conclusiones obtenidas en esta investigación.

1. Marco teórico

El modelo colectivo de riesgo parte de la posibilidad de un arribo de distintos montos de reclamaciones (Y_i) en un horizonte de tiempo finito y a corto plazo.² El agregado de Y_i , representa el riesgo para la compañía de seguros, evidentemente son variables aleatorias y el número total de reclamaciones también es aleatorio.

Gráfica 1. Diagrama modelo colectivo



Fuente: elaboración propia.

La esperanza de pérdida para la compañía, es el producto de la distribución del número de reclamaciones por las expectativas del monto de las mismas. En este modelo es indiferente el número total de pólizas dentro del portafolio, ya que lo único que interesa al administrador del riesgo, es el nú-

² Para mayor referencia sobre el modelo colectivo de riesgo véase Klugman (2012), Bowers (1997), Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y Denuit, M., (2008).

mero de reclamaciones y la distribución de las Y_i en un intervalo de tiempo $[0, T]$. Por esta razón, la pérdida esperada suponiendo independencia, es el producto de la esperanza de ambas variables aleatorias.

$$E(S) = E(N)E(Y) \quad (1)$$

Donde $E(S)$ es el riesgo para la aseguradora en dicho horizonte de tiempo, $E(N)$ el número de reclamaciones esperadas y $E(Y)$ la expectativa de las variables aleatorias Y_i (o monto de reclamaciones). En este sentido, es entendible el por qué en la mayoría de los análisis actuariales se considera la independencia de ambas variables, si los montos de reclamaciones se consideran variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, el número de ellas que puedan efectuarse en un intervalo de tiempo no tendrían relación.

Para contrarrestar el supuesto de independencia entre las variables: número de reclamaciones y monto de las mismas; es decir, entre N y Y_i , se necesita de una metodología que cuantifique el grado de dependencia existente entre estas variables. En este sentido, se han desarrollado trabajos que han abordado dependencia dentro del modelo, ya sea entre las reclamaciones en el monto de las variables y el número de las mismas; entre ellos Dhaene y Goovaerts (1996), consideran la existencia de dependencia en pares de reclamaciones de un portafolio de pólizas de vida, lo cual afecta directamente a la prima stop-loss para el asegurado. Klugman, Panjer y Willmot (2012), que desarrollan el modelo colectivo de forma tradicional, considerando independencia entre la distribución del número de reclamaciones y el monto de las mismas, destacando algunas ventajas de modelar de forma independiente ambas variables; como por ejemplo la variación del número esperado de reclamaciones considerando que también cambia el número de pólizas. Asimismo, resaltan que el impacto de fenómenos económicos se ve reflejado de mejor forma en las pérdidas sufridas por los asegurados y la compañía de seguros, y que el efecto de cambiar los deducibles individuales y los límites de las políticas resulta más eficiente; asimismo, que se cuenta con una captación más precisa de las variables, tanto en las reclamaciones como en los deducibles en los modelos para las pérdidas no cubiertas a los asegurados y en los costos de las reclamaciones a los reaseguradores, considerando que todos éstos pueden ser consistentes. Estipulan también que la forma de la distribución de S depende de las distribuciones de N y Y_i .

Escalante y Arango (2004) analizan la importancia del modelo colectivo de riesgo dentro del campo actuarial así como la administración de riesgos para una compañía de seguros partiendo de las características de la distribución del riesgo y de la independencia de las variables. Por su parte, Lin y Willmot (2014), abordan diversos modelos agregados de reclamaciones cuando existe reemplazo en las pólizas considerando independencia y dependencia, primordialmente analizando las consecuencias de la dependencia en las variables aleatorias, número de reclamaciones y monto de las mismas. Hernández-Bastida, *et al.* (2011), suponen independencia entre el monto de las reclamaciones y el número de las mismas para analizar la distribución de las primas colectivas con un enfoque Bayesiano, bajo el principio de la prima de la varianza, en el clásico modelo de riesgo colectivo exponencial Poisson. Gómez y Calderín (2013), estudian el modelo colectivo de riesgo aplicado a daños en automóviles asumiendo la pérdida de Erlang, cuando la frecuencia del reclamo sigue la distribución discreta generalizada de Lindley suponiendo independencia. Por su parte, Ricotta y Clemente (2016), analizan el riesgo de reserva en la suscripción de seguros diferentes a seguros de vida mediante el modelo colectivo, incorporando técnicas Bayesianas a la estimación de los parámetros de dicho modelo. Asimismo, investigan la correlación entre las variables del modelo suponiendo dependencia.

Recientemente, Bazyari y Roozgar (2019) analizan el modelo Poisson compuesto, suponiendo dependencia entre el monto de los reclamos y el tiempo entre llegadas de los mismos, para posteriormente hacer una aproximación a la probabilidad de ruina en tiempo finito, graficando para el valor del umbral fijo asociado al tiempo entre llegadas de reclamo y también para el parámetro de dependencia fija en cópulas. Oh, R., Ahn, J. Y. y Lee, W. (2019) analizan la dependencia flexible entre las variables frecuencia y severidad de las reclamaciones para una compañía de seguros en el ramo daños mediante funciones de cópula bivariadas.

Se puede constatar, dada la revisión de la literatura, que la independencia entre las variables que comprenden al modelo colectivo de riesgo es cuestionable y por lo tanto debe ser analizada antes de asumir lo que regularmente se admite en el modelo colectivo de riesgo, i.e., que las variables monto de las reclamaciones y el número de reclamaciones, son independientes. Por ello, es de suma importancia, poder elegir aquellas herramientas que hagan un análisis más específico de la correlación entre variables aleatorias. La búsqueda de nuevas y mejores metodologías que ofrezcan resultados más precisos en la medición de riesgos en el mercado actuarial, y toma

de decisiones, brindan una mayor estabilidad y eficiencia tanto para el mercado asegurador, como para los reguladores.

La metodología tradicional utilizada para cuantificar la relación que existe entre variables aleatorias es el coeficiente de correlación de Pearson, el cual permite cuantificar la relación lineal que se tiene entre variables aleatorias. Sin embargo, se tiene registrado que dependiendo de las características que tengan las variables aleatorias éstas pueden no corresponder a una función gaussiana, la cual precede a la linealidad. Por ende, en la mayoría de los casos se requiere de una metodología más robusta con respecto a la cuantificación del grado de relación existente entre variables aleatorias. Para ello, se cuenta con la metodología de cópulas.³ Cabe hacer mención que las cópulas estiman patrones de dependencia que tienen como características la no linealidad y la dependencia asintótica; a diferencia del análisis de correlación lineal de Pearson. Asimismo, es primordial enfatizar que vía la estimación a través de cópulas se ha demostrado la obtención de mejores resultados respecto a la descripción de la relación existente entre variables aleatorias con características de no linealidad.

La metodología de cópulas está sustentada en el Teorema de Sklar, el cual es el siguiente:

Teorema de Sklar

Sea una función de distribución n-dimensional F con distribuciones marginales continuas F_1, F_2, \dots, F_n , pero existe una única n-cópula $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$, tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2)$$

Por tanto, la función cópula une las marginales para generar una función de distribución multivariada. Cabe hacer mención que en esta investigación se estima sólo el caso de dependencia bivariada debido a que interesa conocer el patrón de dependencia entre el monto de los siniestros y el número de reclamaciones, lo cual procede de solamente dos variables aleatorias, por lo cual pertenece al caso bivariado.

³ El término cópula fue utilizado por primera vez en el Teorema de Sklar (Sklar, 1959).

Existen un número considerable de cópulas, por simplicidad en este trabajo sólo se estiman cópulas de la familia elíptica (cópula Gaussiana y cópula t-Student) y arquimediana (cópula Clayton, cópula Gumbel y cópula Frank).⁴

Las cópulas elípticas juegan un papel esencial dentro de las finanzas y economía, debido a que constituyen una fuente de distribuciones multivariadas que poseen propiedades de la distribución normal y facilitan la obtención de modelos multivariantes para valores extremos y otras formas de dependencia. Dentro de esta familia de cópulas las curvas de nivel de las variables aleatorias tienen un comportamiento semejante al de las elipses. Las dos cópulas más importantes de esta familia de cópulas son la cópula Gaussiana (o Normal) y la cópula t-Student, las cuales se derivan de las funciones de distribución multivariada que poseen estos mismos nombres. Su rango más característico es que representan relaciones de dependencia simétricas sin importar que se analice la cola izquierda o derecha de las distribuciones implicadas (Maldonado y Pazmiño, 2008).

La cópula bivariada Gaussiana es,

$$C(u_1, u_2) = \Phi_{\rho,2}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad (3)$$

Donde, Φ denota la distribución Normal (acumulada) y $\Phi_{\rho,2}$ denota la distribución Gaussiana -dimensional con matriz de correlación ρ .

La cópula bivariada t-Student es,

$$C_{2,\rho,v}(u_1, u_2) = T_{2,\rho,v}(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2)) \quad (4)$$

Donde T_v es la distribución t-Student (acumulada) con v grados de libertad y $T_{2,\rho,v}$ denota la distribución t-Student 2-dimensional con matriz de correlación ρ y v grados de libertad.

En lo que respecta a la familia de cópulas arquimedianas, éstas son de gran utilidad para representar relaciones que dan mayor énfasis entre los sucesos extremos de las distribuciones marginales. La familia Arquimediana es una clase especial e importante de cópulas que se caracterizan por surgir de funciones seudoinvertibles, han sido utilizadas ampliamente en el

⁴ Para mayor referencia respecto a Teoría de Cópulas, familias de cópulas, estimación, etcétera, véase, Nelsen (1999).

cálculo actuarial, hidrología y pruebas de resistencia bancaria (bank stress test). En general, son cópulas capaces de capturar amplios rangos de dependencia, lo cual les ha permitido diferenciarse de las cópulas elípticas (simétricas).

Existen varias cópulas que pertenecen a la familia Arquimediana, en lo referente a este trabajo sólo se enuncian tres cópulas de esta familia, las cuales como en el caso elíptico son las más usuales dada su aparentemente fácil estimación y características; las cuales son: la cópula Clayton, la cópula Gumbel, y la cópula Frank.

La distribución bivariada perteneciente a la familia de las cópulas Arquimedianas está representada como,

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = \phi_{\alpha}^{-1}[\phi_{\alpha}(u_1) + \phi_{\alpha}(u_2)], \quad 0 \leq u_1, u_2 \leq 1 \quad (5)$$

donde ϕ_{α} es convexa y decreciente tal que $\phi_{\alpha} \geq 0$. A la función ϕ_{α} se le denomina generador de la cópula C_{α} y la inversa del generador ϕ_{α}^{-1} es la transformada de Laplace de una variable latente denotada γ , la cual induce la dependencia α . De esta manera, la selección de un generador da como resultado diferentes cópulas de la familia arquimediana.

La cópula bivariada Clayton es,

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = \{u_1^{1-\alpha} + u_2^{1-\alpha} - 1\}^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha > 1 \quad (6)$$

La cópula bivariada Gumbel es,

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\ln u_1)^{1/\alpha} + (-\ln u_2)^{1/\alpha}]^{\alpha}\}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

Y la cópula bivariada Frank es,

$$C_{\alpha}(u_1, u_2) = \ln[1 + (\alpha^{u_1} - 1)(\alpha^{u_2} - 1)/(\alpha - 1)]/\ln \alpha, \quad \alpha > 0 \quad (8)$$

Complementando la estimación de dependencia, la metodología de cópulas cuenta con su respectiva implementación a través de la correlación de

rango, dicha correlación de rango está estipulada vía las medidas de concordancia Tau de Kendall y Rho de Sperman. En este trabajo por simplicidad y por viabilidad de interpretación sólo se hace uso de la medida de concordancia Tau de Kendall.

La τ de Kendall es una medida de dependencia no paramétrica que identifica los pares concordantes y discordantes de dos variables. Para su estimación se asigna una clasificación a las observaciones de cada variable, es decir, se generan bloques de observaciones y posteriormente se estudia la relación de dependencia existente entre las variables dadas. La τ de Kendall es una medida de concordancia que puede obtenerse a partir de la siguiente función cópula:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_\varphi(u_1, u_2) dC_\varphi(u_1, u_2) - 1 \quad (9)$$

Y respecto a la estimación de los parámetros asociados a una cópula. En este trabajo se hace uso de la estimación a través de máxima verosimilitud.⁵ Este mecanismo obtiene la estimación de los parámetros de la cópula a través de la maximización de su función de log-verosimilitud.

$$l(\varphi) = \sum_{j=1}^n \ln c \left(F_1(x_{j,1}), \dots, F_n(x_{j,n}) \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d \ln f_i(x_{j,i}) \quad (10)$$

en donde φ es el conjunto de parámetros tanto de las marginales como de la cópula. De esta manera, dados el conjunto de marginales y una cópula, la función de log-verosimilitud puede ser maximizada obteniendo de esta forma el estimador de máxima verosimilitud,

$$\hat{\varphi}_{MLE} = \max_{\varphi \in \Theta} l(\varphi) \quad (11)$$

La Tabla 1 muestra los intervalos en donde están determinados los parámetros estipulados por las cópulas de la familia elíptica y arquimediana

⁵ Para mayor referencia sobre el mecanismo de estimación a través de máxima verosimilitud así como para mayor referencia sobre otros mecanismos de estimación en teoría de cópulas, véase, Sklar (1959) y Nelsen, R. (1999).

Tabla 1. Parámetro y Tau de Kendall
de las Cópulas Elípticas y Arquimedianas

	Cópula	Parámetro	τ de Kendall
Familia Elíptica	Normal	$\varphi \in [-1,1]$	$\frac{2}{\pi} \arcseno \varphi$
	t-Student		
Familia Arquimediana	Clayton	$\varphi > -1$	$\frac{\varphi}{\varphi + 2}$
	Gumbel	$\varphi > 1$	$\frac{\varphi - 1}{\varphi}$
	Frank	$\varphi \in \mathbb{R}$	$1 - \frac{4}{\varphi} [1 - D_1(\varphi)]$

Fuente: elaboración propia.

y su consecuente interpretación a través de la medida de concordancia de τ Kendall; cabe decir, la τ de Kendall se encuentra dentro del intervalo $[-1,1]$, i.e., $\tau \in [-1,1]$, para todas las familias de cópulas y por ende su viabilidad e interpretación es fácil y factible.

Por ende, la relevancia del análisis propuesto en este trabajo, reside en analizar un portafolio de reclamaciones de dos años, del ramo de Daños, Automóviles Servicio Público de la compañía de seguros *AFIRME SEGUROS* en México, comprobar que en este portafolio en específico no se cumple la independencia entre las variables monto de las reclamaciones *versus* número de reclamaciones, para posteriormente proponer esta perspectiva en la evaluación de primas y cálculo de riesgos en esta compañía de seguros, y por consiguiente sugerir un análisis similar en las demás compañías de seguros.

Del mismo modo debe considerarse, que este tipo de seguro, no es un elemento aislado dentro del mercado, ya que se tienen diferentes ramos dentro del mercado asegurador, lo cual remite a los administradores de riesgo dentro de las compañías de seguros a cuestionarse la no independencia entre las variables que conforman el modelo de riesgo colectivo para los

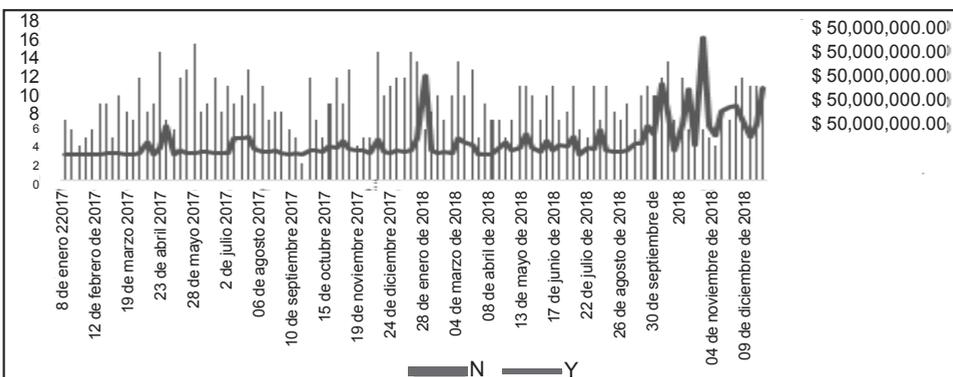
diferentes ramos del sector asegurador, y en este sentido considerar variables y funciones de distribución condicionales para el cálculo de reservas y primas. Se pueden encontrar elementos de cada región así como grupos de asegurados que presentan más reclamaciones, pero se han elegido las más recurrentes y fácilmente identificables, un análisis más detallado sobre este fenómeno excede los propósitos de esta investigación.

2. Metodología y evidencia empírica

En la primera etapa de análisis, se hace un estudio estadístico de la base de datos, la cual corresponde a un portafolio de 928 reclamaciones dentro del ramo Daños de la compañía de seguros *Afirme Seguros*, el periodo bajo análisis de esta investigación es del 8 de enero de 2017 al 30 de diciembre de 2018, lo cual representa 2 años de estudio. El análisis se llevó a cabo mediante la agrupación tanto del número de reclamaciones como de los montos (lo anterior debido a la periodicidad de los siniestros, había días donde no existían reportes de los mismos), la agrupación fue realizada de forma semanal, dando un total de 104 observaciones. La Gráfica 2 muestra el número de reclamaciones y sus respectivos montos.

A través de la Gráfica 2 se observa que en este caso no se cumple con lo estipulado por la teoría del modelo colectivo de riesgo; existen ciertos periodos de tiempo donde hay evidencia de dependencia temporal entre las variables monto de los siniestros y número de reclamaciones, especial-

Gráfica 2. Número de reclamaciones versus el monto de las reclamaciones



Fuente: elaboración propia.

mente se puede observar esto mediante la severidad. Particularmente, es posible observar este comportamiento dependiente a finales de año, donde existe un incremento en ambas series a lo largo del periodo de tiempo analizado.

Cabe decir que la razón principal por la cual se propone el uso de la metodología de cópulas para el estudio de la dependencia entre el número de reclamaciones *versus* la severidad de las mismas, es debido a que se presume que el comportamiento de estas variables no cuenta con características de linealidad y por ende de métodos tradicionales como el coeficiente de correlación de Pearson únicamente subestimarían o sobreestimarían la relación existente entre estas variables (generando así resultados espurios), así como al hecho de no verificar con certeza la independencia de las mismas.

En una segunda etapa del análisis, se generan los estadísticos descriptivos de la información, lo anterior para corroborar las características de no linealidad de las series, número de reclamaciones y monto de las mismas, se complementa el análisis mediante la estimación de diversos estadísticos descriptivos que apoyan en la determinación de dicha característica de no normalidad. Es de suma importancia identificar las variables que no cumplen con estricta linealidad dado que la propuesta de esta investigación principalmente está sustentada en que el comportamiento de las variables es dependiente, pero también en que dichas variables tienen características de no linealidad y por ende la estimación de su grado de dependencia debe ser vía mecanismos que capturen de mejor manera estas características.

En la Tabla 2 se muestran algunos estadísticos descriptivos a partir de los cuales se puede aseverar que la distribución estadística de las variables monto de las reclamaciones (Y_i), así como el número de las mismas (N), distan de la normalidad. El monto de las reclamaciones tiene una mayor concentración de los datos alrededor de la media (leptocurtosis), así como un sesgo hacia la cola derecha de la distribución. Por el contrario el número de reclamaciones tiene menor concentración en la media de su distribución lo que implica un comportamiento platicúrtico, asimismo, presenta también asimetría hacia la cola derecha aunque en menor medida que el monto de las reclamaciones.

En la tercera etapa del análisis, se procede a generar un análisis más específico de la normalidad de los datos. Por lo que respecta a una prueba de normalidad más específica, en esta investigación se hace uso de la prueba

de normalidad Jarque-Bera, se observa que este estadístico no es apropiado al 95% de confianza para el caso del monto de las reclamaciones; sin embargo, para el caso del número de reclamaciones sí pasa dicha prueba, aunque

Tabla 2. Estadísticos descriptivos del número de reclamaciones y del monto de las reclamaciones

Estadísticos descriptivos	N	Y_i	Estadísticos descriptivos	N	Y_i
Media	8.9231	4762439.62	Curtosis	-0.6056	10.2172
Error típico	0.2891	738425.627	Asimetría	0.1787	2.9121
Mediana	9	1623701.02	Rango	14	45944855.7
Moda	7	0	Mínimo	2	-16060
Desviación estándar	2.9484	7530493.37	Máximo	16	45928795.7
Varianza	8.6931	5.6708E+13	Jarque-Bera	2.2797	548.43

Fuente: elaboración propia, datos estimados con el software R.

es importante resaltar que la asimetría y curtosis presentada por esta última variable no es la apropiada para una distribución normal.⁶

En la cuarta etapa del análisis, se generan las funciones marginales para la aplicación de las funciones cópulas, es importante señalar que para esto se hace un suavizamiento de los datos. Cabe recordar que en este trabajo se estipuló que el análisis será realizado mediante el uso de cópulas bivariadas, es decir, cópulas compuestas sólo por dos funciones de distribución marginal. En este sentido, es importante señalar que a partir de la característica de no linealidad de los datos, i.e., de la variable número de reclamaciones y de la variable monto de las reclamaciones, se propone una suavización de las funciones de distribución marginales que generan cada una de estas variables, para un mejor ajuste de las características no lineales de estas mismas.

La suavización de las marginales propuesta en esta investigación, es generada a través de un ajuste vía una distribución Kernel. Cabe mencionar que la distribución Kernel es una representación no paramétrica de una función de densidad de una variable aleatoria y se utiliza cuando una distri-

⁶ El supuesto de comportamiento distribucional normal se cumple a partir de la verificación de los siguientes estadísticos: Asimetría = 0, Curtosis=3 y Jarque-Bera < 5.99.

bución paramétrica no puede describir correctamente los datos. La distribución Kernel está definida por una función de suavizamiento y un valor de ancho de banda, que controlan la suavidad de la curva de densidad resultante.⁷ En sí, sea X una variable aleatoria, el estimador de densidad Kernel está dado por,

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (11)$$

donde x_1, \dots, x_n son los valores aleatorios de una función de distribución desconocida, n es el tamaño de la muestra, $K(\cdot)$ es la función de suavizamiento Kernel y h es el ancho de banda.

En este trabajo para el suavizamiento Kernel se emplea una función de distribución Gaussiana, por ende el ajuste (suavización) a las funciones de distribución marginal, es estipulado como un ajuste Kernel Gaussiano.

Determinadas las funciones marginales a ser utilizadas en la metodología de cópula, es necesario recordar qué cópulas serán estimadas en este trabajo. Estas cópulas son las cópulas bivariadas establecidas en el apartado de metodología de este trabajo, y son las cópulas pertenecientes a la familia de cópulas elípticas: la cópula normal y la cópula t-Student, y a la familia de cópulas arquimedianas: la cópula Clayton, la cópula Gumbel y la cópula Frank. Estas dos familias se han elegido por las características antes mencionadas en el marco teórico.

En la quinta etapa del análisis, para cada cópula propuesta se estiman tanto su parámetro, el cual funge como indicador del nivel de dependencia que se tiene entre las variables número de reclamaciones y monto de dichas reclamaciones, así como también su parámetro de concordancia Tau de Kendall, el cual funge también como un indicador del grado de dependencia entre las variables antes mencionadas, pero en este caso éste es un indicador que contempla una estimación más refinada al ser una estimación estipulada en rangos, lo cual quiere decir que para su estimación se requiere que los datos de este indicador estén basados en rangos (bloques de datos) y no en los datos originales (datos en crudo, datos no ordenados en bloques). De

⁷ Para mayor referencia véase, Hill (1985).

este modo, el parámetro de concordancia Tau de Kendall se ve poco afectado ante la presencia de pequeños valores atípicos (extremos) y pone mayor énfasis en la conjunción de los bloques; cabe decir, las variables que tengan la característica de presentar clusters debiesen ser medidas a través de un indicador que capture de mejor manera dichas características. En este trabajo, el parámetro de concordancia Tau de Kendall estimado vía las cópulas arquimedianas a comparación de su respectivo parámetro cópula, sirve para generar una interpretación símil de la dependencia entre las variables analizadas.

La Tabla 3 muestra las estimaciones de los parámetros y de los Tau's de Kendall de las cópulas elípticas y arquimedianas propuestas. Inicialmente, se observa en el caso elíptico que los parámetros estimados para la cópula normal y la cópula t-Student distan de ser cero o cercanos a cero, siendo valores alrededor del 0.2. Asimismo, realizando un análisis de la dependencia pero visto a través del parámetro de concordancia Tau de Kendall, es posible

Tabla 3. Parámetros y Tau's de Kendall de las Cópulas Elípticas y Arquimedianas generadas entre el número de reclamaciones y el monto de las reclamaciones

Cópulas Elípticas			
Cópula Normal		Cópula t-Student	
Parámetro	Tau de Kendall	Parámetro	Tau de Kendall
0.211	0.135	0.2547	0.164

Cópulas Arquimedianas					
Cópula Clayton		Cópula Frank		Cópula Gumbel	
Parámetro	Tau de Kendall	Parámetro	Tau de Kendall	Parámetro	Tau de Kendall
0.654	0.246	1.733	0.187	1.1564	0.135

Fuente: elaboración propia, datos estimados con el software R.

observar que todos estos resultados distan de ser cero o en su caso cercanos a cero, cabe decir que el parámetro de concordancia Tau de Kendall nos permite hacer una interpretación símil entre todas las cópulas estimadas teniendo un estimador $\tau \in [-1,1]$ el cual tiene una interpretación similar al parámetro de correlación de Pearson, $\rho \in [-1,1]$; es decir, valores cercanos

al 1, i.e., ($1 > \tau > 0.7$), representan una buena relación positiva; valores cercanos al -1, i.e., ($-1 > \tau > -0.7$), representan una buena relación negativa; valores cercanos al cero, i.e., ($0 > \tau > -0.3$) ó ($0 < \tau < 0.3$), representan poca relación; y el valor cero, i.e., ($\tau = 0$), representa nula relación.

Los resultados mostrados en la Tabla 3 confirman que existe dependencia entre las variables monto de las reclamaciones Y_i y número de estas reclamaciones N ; aunque esta dependencia es poca dado que los valores Tau de Kendall mostrados en la Tabla 3 son valores menores al 0.25, la dependencia existe, no es nula o cerca a ser nula. De los resultados mostrados en la Tabla 3 resalta el caso del parámetro Tau de Kendall de la cópula Clayton siendo un valor alrededor del 0.25, lo cual indica que se tiene dependencia asimétrica, porque aunque ésta sea pequeña, existe, por lo que se tiene mayor concentración de valores en la cola izquierda generada a través de esta función cópula.

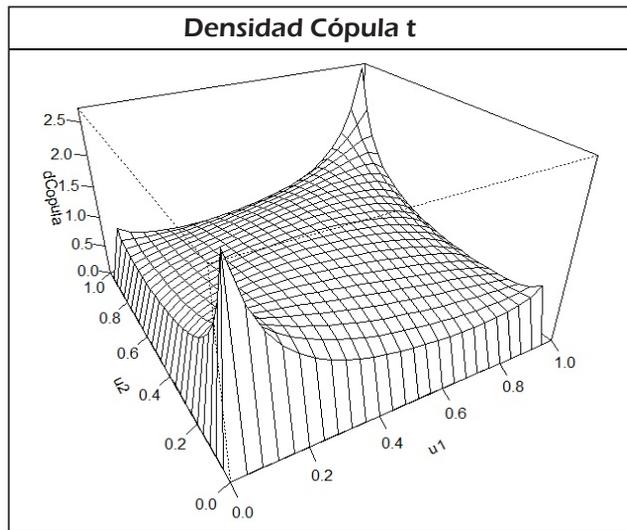
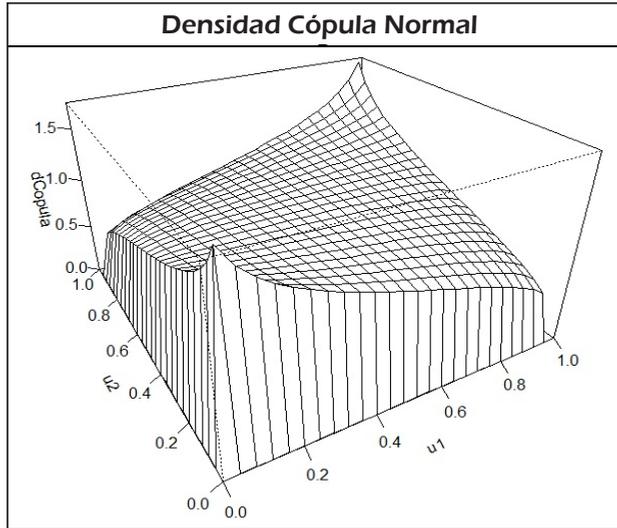
Complementando el estudio de la dependencia vía cópulas entre las variables monto de las reclamaciones Y_i y número de estas reclamaciones N , en la sexta etapa del análisis se hacen mil simulaciones en tres dimensiones, con las respectivas funciones de densidad cópula que fueron propuestas y estimadas, para de esta manera tener un panorama visual del comportamiento de dichas funciones cópula. La Gráfica 3 muestra esta realización de mil simulaciones en 3 dimensiones a través del software estadístico R de cada una de las cópulas estimadas: la cópula Normal, la cópula t-Student, la cópula Clayton, la cópula Gumbel, y la cópula Frank.

La manera de determinar visualmente vía la función de densidad cópula que tiene dependencia entre las variables monto de las reclamaciones Y_i y número de reclamaciones N , es a través de la visualización no completa de la función de densidad cópula, en otras palabras, la independencia entre variables aleatorias vista a través de una función de densidad conjunta se comprueba cuando el espacio está completamente saturado, en este momento, el caso de tres dimensiones sería que el cubo de densidad generado esté completamente lleno.

Mediante la Gráfica 3 se puede reafirmar que los resultados obtenidos en esta investigación indican que existe dependencia entre las variables número de reclamaciones N y monto de las reclamaciones Y_i , ya que se tiene que ninguno de los cubos en donde se plasman las funciones de densidad cópula propuestas tiene la característica de estar saturado, todos los gráficos de densidad de las cópulas estimadas muestran diversas estructuras de dependencia, i.e., diversas curvaturas; las cópulas elípticas y la

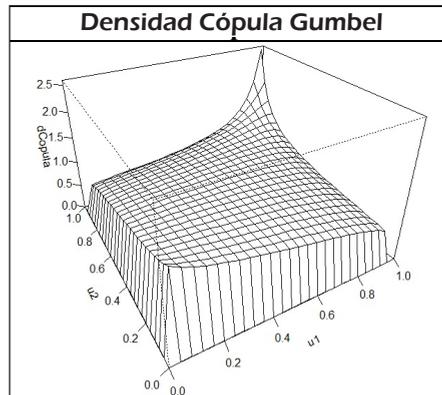
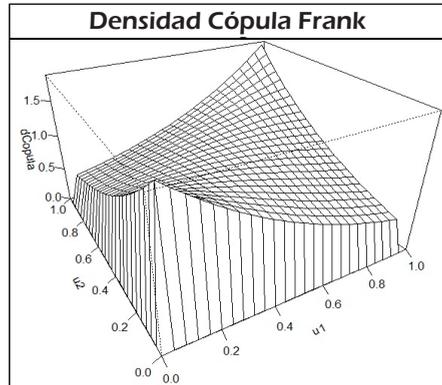
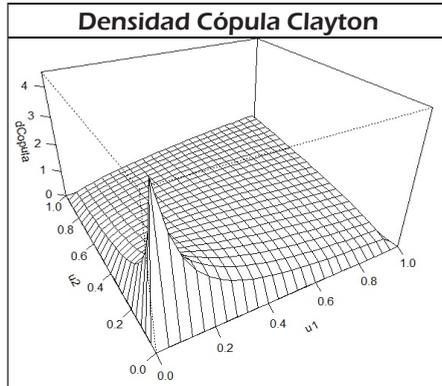
Gráfica 3. Densidad de las Cópulas Elípticas y Arquimedianas generadas entre el número de reclamaciones y el monto de las reclamaciones

Densidad Cópulas Elípticas



Fuente: elaboración propia, simulaciones de las funciones de densidad cópula realizadas con el software R.

Densidad Cópulas Arquimedianas



Fuente: elaboración propia, simulaciones de las funciones de densidad cópula realizadas con el software R.

cópula Frank muestran mayor concentración de densidad en las esquinas del cubo, y las cópulas Clayton y Gumbel muestran mayor concentración en la esquina izquierda y derecha respectivamente, lo cual es una característica específica de estas cópulas dado que éstas se centran en analizar dichos extremos.

En síntesis, los resultados obtenidos en esta investigación confirman que existe dependencia entre las variables monto de las reclamaciones Y_i y el número de estas reclamaciones N , del ramo daños de la compañía de seguros *Afirme Seguros* en el periodo de 2017 a 2018. Aunque cabe decir, que si bien esta dependencia es pequeña, dado los resultados presentados, sí existe, no es nula o cerca a ser nula, lo cual es el objetivo de este trabajo.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue demostrar que bajo ciertas condiciones hay evidencia de dependencia entre las variables número de reclamaciones N y el monto de las reclamaciones Y_i , reflejando que existen ciertos factores que intervienen en el grado de siniestralidad para una compañía de seguros, que hacen que la distribución de ambas variables esté relacionada en determinados periodos de tiempo. Para demostrar esto se llevó a cabo un análisis de ramos de Daños, Automóviles de Servicio Público, de la compañía de seguros *Afirme Seguros* tomando como periodo de análisis los años 2017 y 2018.

La estimación y comprobación de la dependencia se realizó a través de la metodología de cópulas, dicha metodología es una herramienta de gran magnitud en el análisis de dependencia ya que a diferencia de la medición tradicional (la correlación de Pearson), ésta estima la dependencia asintótica, es decir, pone énfasis dependiendo de qué cópulas se trate, particularmente estimando la dependencia en los extremos de las funciones multivariadas generadas a través de dichas cópulas. La metodología de cópulas se propuso y se utilizó considerando las características de los datos analizados; otro aspecto considerado, fue que actualmente dicha metodología es ampliamente utilizada en el análisis de dependencia.

Los resultados obtenidos en esta investigación confirmaron que existe dependencia entre las variables monto de las reclamaciones Y_i y número de estas reclamaciones N , en el caso específico del ramo daños de la compañía de seguros *Afirme Seguros* en los años 2017 al 2018. Aunque, dicha depen-

dencia es poca, dado que los valores estimados tau de Kendall están por debajo del 0.25 para todas las cópulas analizadas, dicha dependencia existe.

Asimismo, un resultado esencial de esta investigación es proponer que en la estimación del grado de exposición al riesgo de cualquier compañía de seguros (riesgo en el modelo colectivo), debe considerarse una densidad conjunta entre la severidad de los siniestros (reclamaciones) y el número de estos mismos. Por comodidad, la mayoría de las investigaciones suponen que existe independencia, para la generación de los primeros momentos del modelo colectivo de riesgo, pero hay situaciones y portafolios donde esto no se cumple.

La propuesta es que los administradores de riesgo en cualquier compañía de seguros consideren estas singularidades, puesto que de eso depende el cobro de primas, reaseguro y reservas. Igualmente, la importancia de este análisis, reside en incluir esta perspectiva en la evaluación de primas y cálculo de riesgos para cualquier tipo de seguro. Debe considerarse que el tipo de seguro analizado en esta investigación, no es el único tipo de seguro, existe una amplia gama de seguros (seguro de vida, seguro de gastos médicos, etcétera). Por ende, cabe mencionar que la metodología utilizada en este artículo podría ser aplicada a otros tipos de seguros.

Referencias bibliográficas

- Bazyari, A. y Roozegar, R. (2019). "Finite Time Ruin Probability and Structural Density Properties in the Presence of Dependence in Insurance Risk Model". *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 48, núm. 5, pp. 1284-1304.
- Bowers, N.L., Gerber, H. U., Hickman J. C., Jones, D. A. y Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2da. Ed.). Illinois, EEUU: The Society of Actuaries.
- Dhaene, J. y Goovaerts, M. J. (1996). "Dependency of Risks and Stop-Loss Order 1". *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, vol. 26, núm. 2, pp. 201-212.
- Escalante, C. y Arango, G. (2004). "Aspectos básicos del modelo de riesgo colectivo". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. 12, núm. 2, pp. 3-15.
- Gomez Déniz, E. y Calderín Ojeda, E. (2013). "The Compound DGL/Erlang Distribution in the Collective Risk Model". *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, núm. 16, pp. 121-142.

- Hill, P. D. (1985). "Kernel Estimation of a Distribution Function". *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 14, núm. 3, pp. 605-620.
- Hernández-Bastida, A., Fernández-Sánchez, M. y Gómez-Déniz, E. (2011). "A Desirable Aspect in the Variance Premium in a Collective Risk Model". *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 29, núm. 1, pp. 1-17.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R* (Vol. 128). Springer Science & Business Media.
- Klugman, Stuart A., Panjer, Harry H. y Willmot, Gordon E. (2012). *Loss Models: From Data to Decisions*, (5a Ed). Nueva York, EEUU: Wiley.
- Lin, X. S., y Willmot, G. E. (2014). *Collective Risk Models*. In Wiley StatsRef: Statistics Reference Online (eds N. Balakrishnan, T. Colton, B. Everitt, W. Piegorisch, F. Ruggeri and J. L. Teugels).
- Maldonado, D. y Pazmiño M. (2008). "Nuevas herramientas para la administración del riesgo crediticio: el caso de una cartera crediticia ecuatoriana". *Cuestiones Económicas*, Ecuador, vol. 24, núm. 2.
- Nelsen, R. (1999). *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- Oh, R., Ahn, J. Y. y Lee, W. (2019). "On Copula-based Collective Risk Models". arXiv preprint arXiv: 1906.03604.
- Ricotta, A., y Clemente, G. P. (2016). "An Extension of Collective Risk Model for Stochastic Claim Reserving". *Journal of Applied Finance and Banking*, núm. 6. pp. 45-62.
- Sklar, M. (1959). "Functions de repartition a dimensions et leurs marges". *Publ. inst. statist. univ. Paris*, núm. 8, pp. 229-231.

Teorías de paridad y valuación de dos monedas con descuento de flujos mediante lógica borrosa

Parity Theories and Two Currencies Valuation with Discounted Cash Flow using Fuzzy Logic

Gastón S. Milanesi*

Germán Weins**

Daniel Pequeño***

(Fecha de recepción: 29 de junio de 2019, Fecha de aceptación: 15 de enero de 2020)

RESUMEN

El modelo descuento de flujos de fondos debe incorporar, en sistemas económicos emergentes, un marco conceptual para el tratamiento de la inflación y valuación en dos monedas. El punto de partida son las teorías de paridad en los tipos de interés, poder de compra y efecto Fisher, añadiendo lógica borrosa para proyectar variables inciertas: tasas de interés, inflación, tipo de cambio y cantidad de producción siendo este uno de los principales aportes de este artículo. Además el trabajo adaptó las ecuaciones del modelo para planillas de cálculo dentro del entorno de MatLab® mediante matrices para números borrosos. El trabajo se estructura de la siguiente manera: se desarrollan las teorías de paridad y las ecuaciones del modelo en el marco de la lógica

* Departamento de Ciencia de la Administración,
Centro de Estudios en Administración, Universidad Nacional del Sur.
Centro de Estudios para Análisis Financiero y
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.
Departamento de Licenciatura en Organización Industrial,
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
Correo electrónico: milanesi@uns.edu.ar, ORCID: 0000-0003-1759-6448

** Instituto Universitario Escuela Argentina de Negocios, Buenos Aires, Argentina.

*** Instituto Universitario Escuela Argentina de Negocios, Buenos Aires, Argentina.

borrosa. Su funcionamiento es ilustrado con un caso de una empresa radicada en una economía emergente e inflacionaria como Argentina utilizando planillas de cálculo. Seguidamente es explicada la programación en MatLab®, adaptando los números borrosos mediante matrices y tensores. Finalmente, los resultados obtenidos demostraron la consistencia de las teorías de la paridad, incorporando lógica borrosa para el tratamiento de la incertidumbre, en el marco de un modelo integral de descuento de flujos de fondos de dos monedas.

Clasificación JEL: G30 G32

Palabras Claves: teorías de paridad, valuación, matemáticas borrosas.

ABSTRACT

The discounted cash flow model must incorporate, in emerging economic systems, a conceptual framework to study inflation and its effects in the valuation of two currencies. The starting point are the Parity Theories and the Fisher Effect, adding fuzzy logic to project uncertainty variables: interest rate, inflation, exchange rates and production. This addition is one of the main contributions of this paper. Moreover, this paper adapted the model's equation to be used with spreadsheets within the MatLab environment, using matrixes for fuzzy numbers. The structure of the paper is as follows: First, Parity Theories and model's equation within a fuzzy logic framework are developed. Then, its operation is applied to a firm located in an emerging and inflationary economy like Argentina, using spreadsheets. Next, MatLab programming is explained, adapting fuzzy numbers by matrixes and tensors. Finally, the results obtained showed consistency with the Parity Theories, adding fuzzy logic to treat uncertainty, within a comprehensive framework of discounted cash flow model applied to two currencies.

JEL Classification: G30 G32

Keywords: Parity Theories, Valuation, Fuzzy Logic.

Introducción

La valuación de empresas mediante el modelo de descuento de flujos de fondos presenta importantes desafíos, como: proyección de las magnitudes financieras, determinación de una tasa apropiada de descuento, definición del horizonte de proyección explícito y el planteo del valor terminal o de continuidad. Cuando el contexto se caracteriza por su condición de emergente, inestabilidad en precios y volatilidad en el tipo de cambio de la moneda doméstica en relación a la moneda extranjera o “dura”,¹ requiere considerar

¹ En economía se conoce a la moneda como “dura”, cuando ésta reúne condiciones de: irrestricto poder de cancelación de obligaciones y sirve como reserva de valor, no depreciándose en el futuro. Estas monedas suelen contar con demanda elevada, tendiendo a aumentar su tipo de cambio debido a su alta demanda en relación a la oferta. En la mayoría de los países de América Latina la moneda dura es el dólar

el impacto de la inflación en el modelo de valuación. En especial en las proyecciones de las magnitudes financieras y estimación de las tasas de descuento, dentro de un marco conceptual coherente e integral. En temas financieros entre naciones, las relaciones o teorías de paridad constituyen las bases teóricas para explicar las relaciones de precio de tasas de interés, tipo de cambio e inflación esperada entre dos economías (Levy, 1997), (Taylor y Taylor, 2004), (Emery y Finnerty, 2007). En tal sentido, la literatura especializada abordó los temas vinculados al descuento de flujos de fondos, valuación en dos monedas y los efectos de la inflación, de manera específica, es decir, analizando parcialmente los efectos sobre las variables del modelo (Modigliani y Cohn, R, 1984; Copeland, Koller y Murrin, 2000; Velez Pareja, 2006; Titman y Grinblatt, 2002; Damodaran, 2006; Emery y Finnerty, 2007; Bradley y Gregg, 2008; Pratt y Grabowski, 2008; Tahn y Velez Pareja, 2011; Fornero, 2012; López Dumrauf, 2014). En términos generales, los trabajos citados ponen de manifiesto la importancia de considerar el impacto de la inflación en la proyección de las magnitudes financieras y estimación de tasas, a partir de los supuestos de las relaciones de paridad entre tasas de interés, poder adquisitivo y precios. No obstante, Bradley y Gregg (2008) y Fornero (2012), se concentran en los errores de especificación del modelo de descuento de flujos de fondos al no considerar el impacto de la inflación, por ejemplo en tasas de crecimiento. Por otro lado, López Dumrauf (2014) explica un procedimiento general para estimar tasas mediante curvas de rendimientos y valorar en dos monedas.

En base a lo expuesto, el presente trabajo tiene como objetivo y principal motivación desarrollar un modelo integral de valuación en contextos inflacionarios y en dos monedas, a partir del descuento de flujos de fondos e incorporando la lógica *fuzzy* (matemáticas borrosas) en el planteo de las teorías de la paridad. El modelo permite calcular el número borroso triangular (NBT) correspondiente al valor intrínseco de la firma, en dos monedas, bajo equilibrio y considerando las relaciones contenidas en las teorías de paridad.

El punto de partida son los trabajos de Milanesi, (2017 a) y b)), conjugando operaciones de matemáticas de la lógica borrosa para el tratamiento de la incertidumbre de variables nominales (inflación, tasas, tipos de cambio y

estadounidense y el euro, en contraposición a las monedas domésticas (débiles); sirviendo las primeras como referencia de valor de transacciones vinculadas a inversiones de largo plazo.

precios) y variables reales (cantidad de producción), (Zadeh, 1965; Dubois y Prade, 1980; Kaufmann, Gil Aluja y Terceño, 1994; Mallo *et al.* Martínez, 2004). Por un lado se aporta una herramienta que se suma al listado de modelos financieros basados en matemática borrosa para modelar la incertidumbre (Buckley, 1987; Chiu y Park, 1994 y 1997; Carlsson y Fuller, 2001 y 2003; Fuller y Majlender, 2003; Muzzioli y Torricelli, 2004; Rebiaz, 2007; Carlsson *et al.* 2007; Garcia Sastre y Roselló Miralles, 2007; Liao y Ho, 2010; Zdnek, 2010; Milanesi, 2013 y 2014; Guerra, Magni y Stefanini, 2014; Milanesi, 2015 y 2016), entre otros. Estos trabajos toman los modelos financieros de valuación, ya sea métricas tradicionales, descuento de flujos de fondos y opciones reales, adaptándolos a las matemáticas borrosas. En tal sentido, la lógica *fuzzy* es planteada como alternativa para tratar la ambigüedad en contextos de alta volatilidad y con falta de información.

Otro aporte consiste en plantear las ecuaciones del modelo con álgebra matricial y tensores con el propósito de presentar los argumentos para programar en el entorno de MatLab, conforme se establece en el Anexo A.3. La estructura del trabajo es la siguiente: en el apartado 1 se desarrolla el conjunto de ecuaciones del modelo de valuación. En primer término se presentan las teorías de paridad y a continuación la valuación con descuento de flujos de fondos y matemática borrosas. Esto abarca la construcción del número borroso triangular (NBT) para la proyección de variables reales (cantidades) y nominales (tasas de interés, tipo de cambio futuro e inflación esperada), insumo para construir el NBT de magnitudes financieras (flujos) y tasas. En la sección 2, a partir del método de casos, se presentan las bases del modelo a implementar. La sección 3 expone los resultados obtenidos empleando planillas de cálculo, las cuales son desarrolladas en el anexo B. Al final, se presentan las principales conclusiones. El anexo A en sus secciones 1 y 2 se exponen nociones de operaciones matriciales con matemática borrosa. La sección 3 del anexo presenta los argumentos para implementar con MatLab, la programación de números borrosos mediante álgebra matricial.

1. Marco teórico: desarrollo del modelo

En la siguiente sección se desarrolla el modelo. En primer lugar, se plantean los antecedentes relativos a las teorías de paridad, a continuación, se muestra la secuencia lógica para proyectar el NBT correspondiente al valor de la empresa mediante el método de descuento de flujos de fondos, con inflación y para dos monedas.

1.1. Teorías de la paridad

Se presentan las relaciones conocidas como paridad, las cuales, en los modelos de valuación en finanzas internacionales determinan, dadas las condiciones de equilibrio de mercado, las relaciones de valor correspondientes a tasas de interés, inflación y tipo de cambio esperado, para dos economías. Estas relaciones son:

a) *Paridad en la tasa de interés (TPI)*: manifiesta la relación entre tasas nominales de interés local ($r_{t,d,n}$) y extranjera ($r_{t,e,n}$) explicando la relación entre el tipo de cambio de contado (*spot*); (S) y el tipo de cambio futuro nominal ($F_{t,n}$).

$$\frac{F_{t,n}}{S} = \frac{(1+r_{t,d,n})}{(1+r_{t,e,n})} \quad (1)$$

b) *Paridad en el poder de compra (PPC)*: La ley del precio único indica que un mismo bien, comercializado en dos mercados diferentes, debe valer lo mismo en términos del poder adquisitivo de la población. La diferencia nominal en el valor del bien se explica por el tipo de cambio. El cual es un precio dentro de la economía, bajo esta teoría, este precio se ajusta por el diferencial de tasas de inflación esperadas entre los dos países (Emery y Finnerty, 2007),

$$\frac{E[S_{t,n}]}{S} = \frac{(1+\pi_{t,d})}{(1+\pi_{t,e})} \quad (2)$$

Donde $E[S_{t,n}]$ representa el tipo de cambio esperado. A partir de la ecuación 2 se puede inferir la tasa de inflación para un periodo,

$$\pi_{t,d} = \frac{E[S_{t,n}]}{S} \times (1 + \pi_{t,e}) - 1 \quad (3)$$

c) *Teoría de expectativas del tipo de cambio esperado contado y futuro*: Indica que en equilibrio de mercado se cumple la convergencia entre el tipo de

cambio futuro $F_{t,n}$ y el tipo de cambio contado esperado para el horizonte del contrato futuro, tal que;

$$E[S_{t,n}] = F_{t,n} = S \times \frac{(1+r_{t,d,n})}{(1+r_{t,e,n})} \quad (4)$$

d) *Efecto Fisher*: Bajo el nombre de efecto Fisher,² se supone que el mercado revela información sobre tasas de interés nominales, al incorporar las expectativas inflacionarias en ellas. Bajo este supuesto se formaliza la distinción entre tasas de interés real y nominal, (Argandoña, 2013), siendo la tasa esperada nominal;

$$r_{t,d,n} = (r_{t,r} + \pi_{t,d}) \times [r_{t,r} \times \pi_{t,d}] \quad (5)$$

Por lo tanto, la diferencia entre las tasas de interés de dos economías se determina mediante los diferenciales de inflación $\frac{(1+r_{t,d,n})}{(1+r_{t,e,n})} = \frac{(1+\pi_{t,d})}{(1+\pi_{t,e})}$. En términos reales la tasa se expresa como;

$$\frac{(1+r_{t,d,n})}{(1+\pi_{t,d})} = \frac{(1+r_{t,e,n})}{(1+\pi_{t,e})} = 1 + r_{t,r} \quad (6)$$

El efecto Fisher supone que la tasa real entre ambos países $r_{t,r}$, debe ser similar y converger. La ecuación de arbitraje de Fisher entre tasas nominales y reales es,

$$(1 + \pi_{t,d})(1 + r_{t,r}) = (1 + r_{t,d,n}) \quad (7)$$

La tasa real es un dato no observable, que debe despejarse de la tasa nominal, siendo $r_{t,d,n} = r_{t,r} + \pi_{t,d} + (r_{t,r} \times \pi_{t,d})$.³

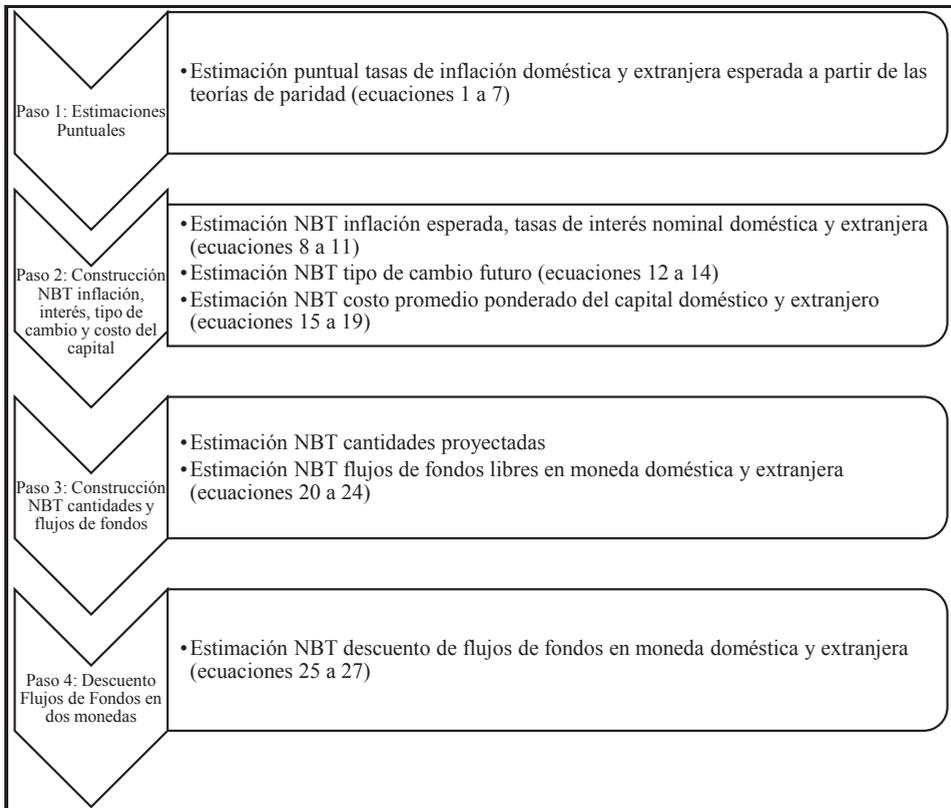
² Irving Fisher planteó el hecho que las tasas nominales de interés reflejan la expectativa colectiva inflacionaria, y que dicha tasa compensa a los agentes de los efectos negativo de la inflación sobre el rendimiento real de sus inversiones (Fisher, 1965).

³ Si partimos de una tasa de interés real $r_{t,r} = \frac{(1+r_{t,d,n})}{(1+\pi_{t,d})}$; despejando en función de la tasa nominal, se tiene $r_{t,d,n} = r_{t,r} + \pi_{t,d} + (r_{t,r} \times \pi_{t,d})$, o $r_{t,d,n} = r_{t,r} + \pi_{t,d} +$

1.2. Descuento de flujos de fondos con dos monedas y las matemáticas borrosas:

A continuación se desarrolla el modelo propuesto. Se parte del supuesto que el comportamiento ambiguo, fuente de incertidumbre, corresponde a variables reales como las cantidades y nominales como la inflación. El siguiente gráfico expone la secuencia lógica del modelo propuesto con

Gráfica 1. Proceso de valuación con dos monedas a partir de la teoría de paridad en entornos borrosos



Fuente: elaboración propia

$(1 + r_{t,r})$. La expresión anterior indica que la tasa nominal varía en función de las expectativas inflacionarias, sin perjuicio que la tasa real se mantenga constante. Para dos periodos de tiempo es $r_{d,n,1} - r_{d,n,0} = r_{t,r} + \pi_{d,1}(1 + r_r) - r_r + \pi_{d,0}(1 + r_r)$,

sus respectivas ecuaciones. En el anexo A se explican las nociones básicas de operaciones con números borrosos, su representación matricial e implementación en el entorno de MATLAB®.

A continuación, cada una de las etapas indicadas en la gráfica precedente, cobra forma matemática a través de un conjunto de ecuaciones que integran el modelo de valuación propuesto.

1.2.1. Estimación de las tasas de inflación esperada a partir de las teorías de paridad

La tasa de inflación es calculada proyectando las tasas de interés local y extranjera, en este caso, a partir de las respectivas curvas de rendimientos de bonos soberanos locales expresados en moneda doméstica y extranjera. Una vez obtenidas las tasas para cada periodo, se procede a calcular al tipo de cambio futuro esperado (ecuaciones 1 y 2). Seguidamente se proceden a despejar la tasa de inflación doméstica (ecuación 3). Para ello se toma como insumo, la proyección correspondiente a la tasa de inflación esperada del mercado extranjero. Finalmente, y suponiendo convergencia de crecimientos, se obtiene la tasa real (ecuación 6).

1.2.2. Estimación NBT inflación, interés, tipo de cambio y costo del capital

a) Inflación esperada como número borroso triangular (NBT): Con la inflación calculada en el paso 1 para cada periodo se obtiene el desvío estándar correspondiente a la curva de inflación esperada. A partir de allí se construye el NBT,⁴ $\pi_{\alpha} = [(\pi - \sigma)\alpha; \pi; (\pi + \sigma)\alpha]$ donde las variables se expresan de la siguiente manera:

Inflación doméstica (d):

y reagrupando términos se obtiene $r_{d,n,1} - r_{d,n,0} = (\pi_{t,1} - \pi_{t,0}) \times (1 + r_r)$. Consecuentemente, al variar la tasa de inflación de un periodo a otro, la tasa nominal se debe modificar proporcionalmente a dicha variación con el fin de mantener constantes las tasas reales.

4. El NBT se construye suponiendo que la variación máxima y mínima se explica por la desviación estándar. Por lo general, se estima una medida denominada coeficiente de variación (CV), que permite calcular el posible intervalo de máximo y mínimo valor para la media de la volatilidad (σ), basada en datos observados o juicios de expertos (Liao y Ho, 2010).

$$\tilde{\pi}_d = \forall \alpha \in [0; 1] \rightarrow \tilde{\pi}_{d,t,\alpha} [\pi_{d,t_1}(\alpha), \pi_{d,t_2}(\alpha)] \quad (8)$$

Inflación extranjera (x):

$$\tilde{\pi}_x = \forall \alpha \in [0; 1] \rightarrow \tilde{\pi}_{x,t,\alpha} [\pi_{x,t_1}(\alpha), \pi_{x,t_2}(\alpha)] \quad (9)$$

En el presente trabajo se utiliza el símbolo (\sim) para notar números borrosos

b) Tasa interés nominal borrosa: Partiendo de las tasas estimadas a través de las curvas de rendimientos (ecuación 5), se obtiene una tasa real convergente (ecuación 6). Con la tasa real y el componente de inflación borrosa se construye la tasa de interés nominal *fuzzy* doméstica y extranjera:

$$\tilde{r}_{t,d} = r_{t,r} + [\pi_{d,t_1}(\alpha), \pi_{d,t_2}(\alpha)] + \{r_{t,r} \times [\pi_{d,t_1}(\alpha), \pi_{d,t_2}(\alpha)]\} \quad (10)$$

Con la tasa nominal borrosa extranjera se utiliza la inflación extranjera $\tilde{\pi}_{x,t}$; obteniendo

$$\tilde{r}_{t,x} = r_{t,r} + [\pi_{x,t_1}(\alpha), \pi_{x,t_2}(\alpha)] + \{r_{t,r} \times [\pi_{x,t_1}(\alpha), \pi_{x,t_2}(\alpha)]\} \quad (11)$$

c) Tipo de cambio futuro: con los datos de las tasas se procede a estimar el tipo de cambio futuro,

$$\tilde{F}_{t,n} = S_t \times \frac{(1+\tilde{r}_{t,d})}{(1+\tilde{r}_{t,e})} \quad (12)$$

Para el conjunto de números reales (R) la forma expandida de la ecuación 12 queda planteada como;

$$\tilde{F}_{t,n} = \tilde{S}_t \times [(1 + r_{t,d_1})(\alpha), (1 + r_{t,d_2})(\alpha)] \times \quad (13)$$

$$: \left\{ \min[(1 + r_{t,x_1})(\alpha), (1 + r_{t,x_2})(\alpha)]^{-1}; \max[(1 + r_{t,x_1})(\alpha), (1 + r_{t,x_2})(\alpha)]^{-1} \right\}$$

Al ser las variables positivas, se puede trabajar con el subconjunto de números reales positivos (R^+). La expresión se reduce a,

$$\tilde{F}_{t,n} = \tilde{S}_t \times \left[(1 + r_{t,d_1})(\alpha), (1 + r_{t,d_2})(\alpha) \right] \times \quad (14)$$

$$\left\{ \left[(1 + r_{t,x_2})(\alpha), (1 + r_{t,x_1})(\alpha) \right]^{-1} \right\}$$

La expresión anterior requiere de un punto de partida para proyectar valores. El primer periodo se inicia a partir del tipo de cambio observado (S) en $t=0$. Seguidamente, el resto de los periodos futuros se calcula con el tipo de cambio borroso obtenido mediante el valor futuro inmediato anterior borroso. En otras palabras, se aplica la teoría de expectativas $E[\tilde{S}_{t,n}] = \tilde{F}_{t,n} = \tilde{S} \times \frac{(1+\tilde{r}_{t,d,n})}{(1+\tilde{r}_{t,e,n})}$.

d) *Costo promedio ponderado del capital*: La tasa del costo del capital propio nominal ($k_{e,t,n}$) se estima mediante el modelo CAPM no borroso. Un procedimiento similar se utilizó en el cálculo de la tasa nominal correspondiente al costo del capital ajeno ($k_{i,t,n}$) y sus participaciones conforme la siguiente ecuación

$$k_{o,t,n} = Wd \times (1 - t) \times k_{i,t,n} + We \times k_{e,t,n} \quad (15)$$

Una vez que se obtienen las tasas nominales proyectadas del costo de capital para cada periodo, éstas se convierten a tasas expresadas en términos reales, utilizando la tasa de inflación para $\tilde{\pi}_d(\alpha = 1)$,

$$k_{o,t,r} = \frac{k_{o,t,n} - \tilde{\pi}_d(\alpha=1)}{(1 + \tilde{\pi}_d(\alpha=1))} \quad (16)$$

La tasa de costo de capital borrosa, se obtiene añadiendo la inflación estimada a la tasa real (ecuación 16).

$$\tilde{k}_{o,t,n} = k_{o,t,r} + (1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \times \quad (17)$$

$$\left\{ \min \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right]; \max \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right] \right\}$$

Para transformar el costo del capital borroso de moneda doméstica a extranjera se utiliza la siguiente expresión,

$$\widetilde{k}o_{t,x} = \widetilde{k}o_{n,t} \times \frac{\widetilde{\pi}_{t,x}}{\widetilde{\pi}_{t,d}} \quad (18)$$

Al ser todas las variables positivas, se puede estimar directamente para el subconjunto de números borrosos positivos (R+),

$$\widetilde{k}o_{t,x} = \widetilde{k}o_{n,t} \times \left\{ \left[(\pi_{t,x_1})(\alpha), (\pi_{t,x_2})(\alpha) \right] \times \left[(\pi_{t,d_2})(\alpha), (\pi_{t,d_1})(\alpha) \right]^{-1} \right\} \quad (19)$$

1.2.3. Flujo de fondos borrosos

La otra fuente de incertidumbre la constituyen las variables reales, es decir las cantidades proyectadas (\tilde{q}). El NBT se construye de manera similar a la inflación, a partir de los extremos del desvío estándar proyectado $q_\alpha = [(q - \sigma)\alpha; \pi; (q + \sigma)\alpha]$. En primer término, se estima la contribución marginal borrosa como el producto entre la contribución marginal, (cm) y las cantidades borrosas

$$\widetilde{cm}_t = cm \times \left[(1 + q_{t,1})(\alpha), (1 + q_{t,2})(\alpha) \right] \quad (20)$$

Seguidamente se aplican los coeficientes borrosos de inflación, con el fin de obtener la $(\widetilde{CM}_{t,n})$

$$\widetilde{CM}_{t,n} = \widetilde{cm}_t \times \left\{ \min \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right]; \quad (21)$$

$$\max \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right] \right\}$$

Un procedimiento igual se utiliza para los costos fijos, los cuales son ajustados por la inflación doméstica borrosa correspondiente a cada periodo de proyección.

$$\begin{aligned} \widetilde{CF}_{t,n} = CF \times \left\{ \min \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right]; \right. \\ \left. \max \left[(1 + \pi_{t,d_1})(\alpha), (1 + \pi_{t,d_2})(\alpha) \right] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Los valores absolutos que representan la inversión periódica en capital de trabajo surgen del producto del porcentaje de capital de trabajo (%ct) por la contribución marginal borrosa ($\widetilde{CM}_{t,n}$). La inversión incremental en capital de trabajo se calcula como la diferencia entre la inversión borrosa absoluta del periodo actual y la del período anterior.

$$\Delta \widetilde{CT}_{t,n} = [\%ct \times \widetilde{CM}_{t,n} - \%ct \times \widetilde{CM}_{t-1,n}] \quad (23)$$

La suma de las variables borrosas (ecuaciones 21 a 23) arroja el flujo de fondo borroso después de impuestos, donde t representa la tasa de impuesto sobre las ganancias,

$$\widetilde{FFL}_{t,n} = [\widetilde{CM}_{t,n} - \widetilde{CF}_{t,n} \times (1 - t)] - \Delta \widetilde{CT}_{t,n} \quad (24)$$

El valor de la empresa mediante el descuento de flujos de fondos borroso con magnitudes financieras nominales, en moneda local, se obtiene actualizando las magnitudes monetarias obtenidas mediante la ecuación 24 y la tasa de costo de capital doméstica (ecuación 17 y 18).

$$\begin{aligned} V_{t,n} = \sum_{t=1}^n [FFL_{t,1}(\alpha), FFL_{t,2}(\alpha)] \times \\ \left\{ \min \left[(1 + ko_{t,d_1})^t(\alpha), (1 + ko_{t,d_2})^t(\alpha) \right]^{-1}; \max \left[(1 + \right. \right. \\ \left. \left. ko_{t,d_1})^t(\alpha), (1 + ko_{t,d_2})^t(\alpha) \right]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

La conversión a moneda extranjera expresada en términos nominales ($\widetilde{F}_{t,x,n}$), se lleva a cabo primero, transformando los flujos de fondos en pesos (ecuación 24) a moneda extranjera. Para ello se utilizan los tipos de cambio futuros calculados mediante la ecuación 14,

$$\tilde{F}_{t,x,n} = [FFL_{t,1}(\alpha), FFL_{t,2}(\alpha)] \times \quad (26)$$

$$\left\{ \min [(\tilde{F}_{t,x_2})(\alpha), (\tilde{F}_{t,x_1})(\alpha)]^{-1}; \max [(\tilde{F}_{t,x_2})(\alpha), (\tilde{F}_{t,x_1})(\alpha)]^{-1} \right\}$$

1.2.4. El descuento de flujos de fondos (VAN) borroso para dos monedas

El valor de la empresa mediante el descuento de flujos de fondos borroso en moneda extranjera queda planteado de la siguiente manera,

$$V_{t,x} = \sum_{t=1}^n [FFL_{t,x1}(\alpha), FFL_{t,x2}(\alpha)] \times \quad (27)$$

$$\left\{ \min [(1 + ko_{t,x_1})^t(\alpha), (1 + ko_{t,x_2})^t(\alpha)]^{-1}; \right.$$

$$\left. \max [(1 + ko_{t,x_1})^t(\alpha), (1 + ko_{t,x_2})^t(\alpha)]^{-1} \right\}$$

Los flujos de fondos proyectados borrosos surgen de la ecuación 26 y la tasa del costo de capital borroso de la ecuación 18. La consistencia de resultados entre el valor actual estimado con variables expresadas en términos reales y su par borroso en términos nominales, se verifica para el caso ($\alpha = 1$). Lo mismo acontece para el valor actual en moneda extranjera. Esto es así ya que en $t = 0$, no existe riesgo de inflación y la consistencia con los valores en términos reales se presenta para el caso de las variables de paridad.

2. Metodología. Aplicación del modelo mediante el análisis de caso

La metodología propuesta para analizar el funcionamiento del modelo y demostrar su consistencia con el modelo en su versión determinística (no borrosa) es el estudio de caso en administración. Bajo este método se persigue analizar el funcionamiento y robustez de las proposiciones teóricas contenidas, en este caso en las ecuaciones del modelo, que permiten explicar y fundamentar la estimación del valor intrínseco de la firma (Castro Monge, 2010) y (Yin, 1994).

Como unidad de análisis se seleccionó una empresa del tipo pequeña-mediana que opera y funciona en un mercado emergente como el sistema económico argentino. Se calculó su valor intrínseco a través del modelo propuesto, expresando valores en moneda local y extranjera. Considerado, como primer moneda al peso argentino y como segunda al dólar estadounidense. La aplicación del modelo desarrollado en la sección precedente se obtuvo mediante el empleo de las planillas de cálculo.⁵ El desarrollo de las mismas se expone en la sección 3 y en el anexo B. Las matrices, tensores, argumentos de programación para la implementación del caso en MatLab® y las gráficas del NBT correspondientes al valor en moneda local y extranjera, son expuestas en anexo A.3.

3. Resultados. Estimación del valor a través del descuento de flujos borrosos para dos monedas

En esta sección se desarrollan las etapas y secuencias del modelo planteadas en el primer apartado, exponiendo en cada una de ellas los datos de mercado utilizados y los resultados obtenidos, hasta llegar a la estimación del NBT mediante el descuento de flujos de fondos para dos monedas.

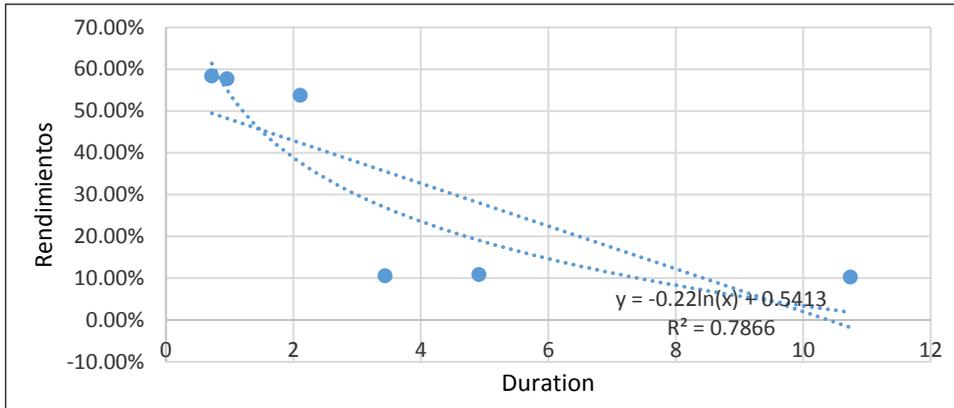
3.1. NBT para la proyección de las variables macroeconómicas: tasas de interés, inflación y tipo de cambio (pasos 1 y 2)

Primero se proyectaron las tasas esperadas de interés local y extranjera, aplicando la proyección de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) mediante la curva logarítmica de rendimientos. Se usaron los datos de mercado correspondientes a la duración modificada y TIR de bonos soberanos emitidos en moneda doméstica⁶ y dólares estadounidenses publicados por el Instituto Argentino de Mercados de Capitales (IAMC). Estos son presentados en el anexo B, tablas B13 y B14. En las siguientes gráficas se exponen las curvas de rendimientos a ser empleadas en la proyección de las tasas. Para la TIR en pesos la expresión es: $-0,22\ln(x)+0,5413$;

⁵ Se emplearon planillas bajo el sistema MS Excel®.

⁶ El rendimiento de los bonos indexados por el coeficiente de estabilización de referencia (CER) fue ajustado por una inflación proyectada de 41.82%, que surge del cociente entre el coeficiente CER de diciembre de 2018, de 11.88% sobre el coeficiente CER de diciembre 2017 de 8.22% (ver Banco Central de la República Argentina, Estadísticas http://www.bcra.gob.ar/PublicacionesEstadisticas/Principales_variables_datos.asp?descri=21&fecha=Fecha_Cer&campo=Cer).

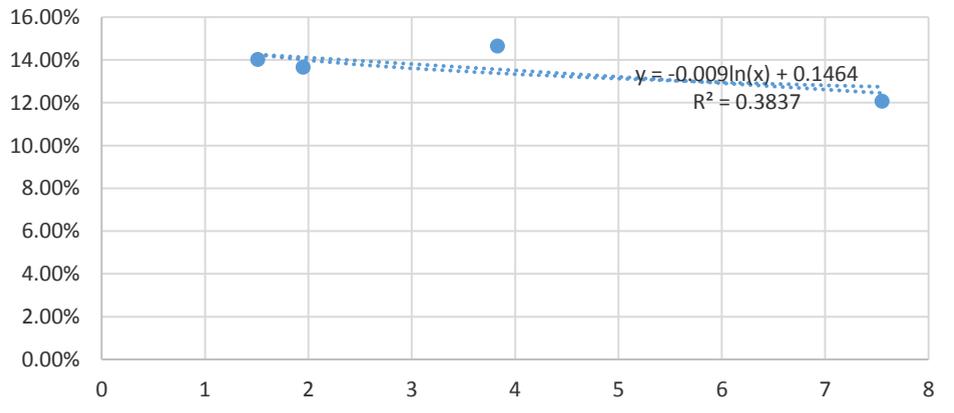
Gráfica 2. ETTI proyectada en pesos
(Tabla B13 anexo)
(ETTI bonos soberanos en pesos al 29 de marzo de 2019)



Fuente: elaboración propia.

La ETTI de bonos argentinos en dólares es $0.009\ln(x) + 0.1464$, véase Gráfica 3.

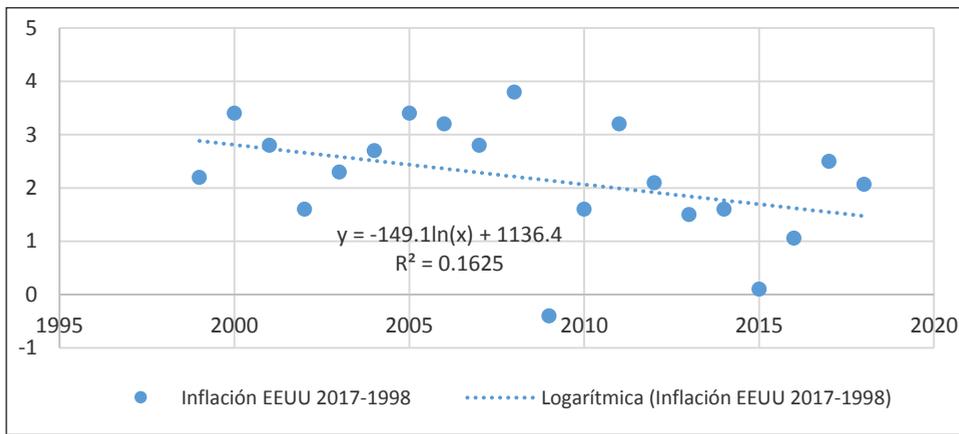
Gráfica 3. ETTI proyectada en dólares
(Tabla B14 anexo)
(ETTI bonos soberanos en dólares al 29 de marzo de 2019)



Fuente: elaboración propia.

Para la proyección de la inflación local ($\Pi_{t,d}$) se aplicó la ecuación 3, previa estimación de la proyección de la inflación de Estados Unidos. Esta última fue estimada mediante la curva de tendencia logarítmica a partir de la serie de datos históricos de inflación extranjera ($\Pi_{t,e}$). Para ello se trabajó con la inflación promedio anual de Estados Unidos desde el año 1998-2018.⁷ La ecuación de la curva de tendencia es $\Pi_{t,e} = -149.1 \ln(x) + 1136.4$, (véase gráfica 4).

Gráfica 4. Curva de ajuste de la inflación proyectada para EE.UU. (1998-2018)



Fuente: elaboración propia.

Las curvas permiten proyectar las variables macro. El número borroso (NBT) correspondiente a la inflación se obtiene aplicando las ecuaciones 8 y 9. El valor de $a = \varepsilon(1)$ para la inflación de EE.UU surge de la estimación puntual. Los valores de $a - \alpha$ y $a + \beta$ se obtienen sustrayendo o adicionando la variación estimada (cv). Esta se supone constante durante el periodo de proyección. Para el caso de la inflación de EE.UU, el desvío estándar de la serie de datos proyectados es de $\sigma = 0.10\%$. En el caso de Argentina su desvío es $\sigma = 11.29\%$. A continuación se muestran las tablas con proyección puntual y los intervalos de valores, (véase Cuadro 1 y 2).

⁷ Obtenida del sitio <https://www.rateinflation.com/inflation-rate/usa-historical-inflation-rate?start-year=1998&end-year=2018>.

Cuadro 1. Inflación proyectada extranjera ETTI
(Desvío estimado 0.10% anual (B1).
(ecuación 9)

t	Inflación proyectada	$(1-CV)^*a$ $a-\alpha, \epsilon(0)$	a, $\epsilon(1)$ a, $\epsilon(1)$	$(1+CV)^*a$ $a+\beta, \epsilon(0)$
1	1.70%	1.60%	1.70%	1.79%
2	1.62%	1.53%	1.62%	1.72%
3	1.55%	1.45%	1.55%	1.64%
4	1.47%	1.38%	1.47%	1.57%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 2. Inflación proyectada doméstica.
(ETTI desvío estimado 11.29% anual (B2).
(ecuación 8).

t	Inflación proyectada	$(1-CV)^*a$ $a-\alpha, \epsilon(0)$	a, $\epsilon(1)$ a, $\epsilon(1)$	$(1+CV)^*a$ $a+\beta, \epsilon(0)$
1	36.73%	25.44%	36.73%	48.02%
2	23.81%	12.52%	23.81%	35.10%
3	16.15%	4.86%	16.15%	27.44%
4	10.68%	-0.61%	10.68%	21.97%

Fuente: elaboración propia.

En el anexo B, para cada uno de los α -cortes que componen el NBT, se expone el cuadro correspondiente a las inflaciones local y extranjera (Cuadros B.1 y B.2).

3.2. NBT tasas de interés nominal en pesos y dólares (paso 2)

El objetivo consiste en proyectar la NBT nominal en ambas monedas, siendo el principal insumo, es la tasa real de interés convergente con la tasa doméstica. Se supone que la relación entre las tasas de dos países es explicada por los diferenciales de inflación (ecuación 6). Primero, se calculó la tasa real puntual proyectada, a partir de las tasas nominales de interés obtenidas mediante la curva de rendimientos (Gráficas 2 y 3). Se utilizaron datos correspondientes a la inflación proyectada (segunda columna Cuadros

1 y 2). Después se despejó en función de la tasa real (ecuación 7). La tasa real determinística proyectada para los cuatro periodos subsiguientes es: $t_1=12.73\%$, $t_2=12.18\%$, $t_3=11.89\%$ y $t_4=11.70\%$.

El NBT para las tasas nominales se obtiene incorporando la inflación borrosa proyectada con los datos contenidos en Cuadro 2, Cuadro B.2 del anexo B y la ecuación 10. Así, la tasa queda expresada en moneda local, véase Cuadro 3.

Cuadro 3. NBT Tasa nominal doméstica proyectada.
(ecuación 10)

A	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	41.40%	66.86%	26.22%	51.55%	17.33%	42.59%	11.02%	36.24%
0.1	42.68%	65.58%	27.48%	50.28%	18.59%	41.33%	12.28%	34.98%
0.2	43.95%	64.31%	28.75%	49.01%	19.85%	40.07%	13.54%	33.72%
0.3	45.22%	63.04%	30.02%	47.75%	21.12%	38.80%	14.80%	32.46%
0.4	46.49%	61.77%	31.28%	46.48%	22.38%	37.54%	16.06%	31.20%
0.5	47.77%	60.49%	32.55%	45.21%	23.64%	36.28%	17.33%	29.94%
0.6	49.04%	59.22%	33.81%	43.95%	24.91%	35.01%	18.59%	28.68%
0.7	50.31%	57.95%	35.08%	42.68%	26.17%	33.75%	19.85%	27.41%
0.8	51.58%	56.68%	36.35%	41.41%	27.43%	32.49%	21.11%	26.15%
0.9	52.86%	55.40%	37.61%	40.15%	28.70%	31.22%	22.37%	24.89%
1	54.13%	54.13%	38.88%	38.88%	29.96%	29.96%	23.63%	23.63%

Fuente: elaboración propia.

Un procedimiento similar se sigue para estimar el NBT correspondiente a la tasa nominal extranjera, suponiendo relaciones de paridad en equilibrio (ecuación 6).⁸ La variable borrosa se construye a partir de la inflación extranjera proyectada, utilizando los datos del Cuadro 1 y el Cuadro B.1 del Anexo B y la ecuación 11, véase Cuadro 4.

3.3. NBT tipo de cambio futuro (paso 2)

Se proyectó el tipo de cambio futuro puntual, donde sus valores para a ($\varepsilon=1$) son los mismos que para su estimación puntual obtenidos al aplicar las ecuaciones 1 y 2. Se partió de un tipo de cambio spot al 31 de diciembre de

⁸ Por ende, las tasas de interés reales de las economías bajo examen son similares.

Cuadro 4. NBT Tasa nominal extranjera proyectada
(ecuación 11)

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	14.53%	14.75%	13.89%	14.10%	13.51%	13.72%	13.43%	13.64%
0.1	14.54%	14.74%	13.90%	14.09%	13.52%	13.71%	13.44%	13.63%
0.2	14.55%	14.73%	13.91%	14.08%	13.53%	13.70%	13.45%	13.62%
0.3	14.56%	14.72%	13.92%	14.07%	13.54%	13.69%	13.46%	13.61%
0.4	14.58%	14.70%	13.93%	14.06%	13.55%	13.68%	13.47%	13.60%
0.5	14.59%	14.69%	13.94%	14.05%	13.56%	13.67%	13.48%	13.59%
0.6	14.60%	14.68%	13.95%	14.04%	13.58%	13.66%	13.49%	13.58%
0.7	14.61%	14.67%	13.96%	14.03%	13.59%	13.65%	13.50%	13.57%
0.8	14.62%	14.66%	13.97%	14.02%	13.60%	13.64%	13.51%	13.55%
0.9	14.63%	14.65%	13.98%	14.01%	13.61%	13.63%	13.52%	13.54%
1	14.64%	14.64%	14.00%	14.00%	13.62%	13.62%	13.53%	13.53%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 5. NBT Tipo de cambio futuro
(ecuaciones 12, 13 y 14)

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 75.77	\$ 89.58	\$ 83.82	\$ 119.20	\$ 86.47	\$ 149.74	\$ 84.48	\$ 179.86
0.1	\$ 76.46	\$ 88.89	\$ 85.44	\$ 117.28	\$ 89.10	\$ 146.01	\$ 88.05	\$ 173.74
0.2	\$ 77.15	\$ 88.20	\$ 87.07	\$ 115.38	\$ 91.78	\$ 142.34	\$ 91.72	\$ 167.78
0.3	\$ 77.84	\$ 87.51	\$ 88.72	\$ 113.49	\$ 94.52	\$ 138.74	\$ 95.51	\$ 161.97
0.4	\$ 78.53	\$ 86.82	\$ 90.39	\$ 111.62	\$ 97.31	\$ 135.19	\$ 99.42	\$ 156.32
0.5	\$ 79.22	\$ 86.13	\$ 92.07	\$ 109.76	\$ 100.15	\$ 131.71	\$ 103.45	\$ 150.81
0.6	\$ 79.91	\$ 85.43	\$ 93.77	\$ 107.92	\$ 103.05	\$ 128.29	\$ 107.59	\$ 145.46
0.7	\$ 80.60	\$ 84.74	\$ 95.48	\$ 106.10	\$ 106.00	\$ 124.93	\$ 111.87	\$ 140.25
0.8	\$ 81.29	\$ 84.05	\$ 97.21	\$ 104.29	\$ 109.01	\$ 121.63	\$ 116.27	\$ 135.18
0.9	\$ 81.98	\$ 83.36	\$ 98.96	\$ 102.50	\$ 112.08	\$ 118.39	\$ 120.79	\$ 130.25
1	\$ 82.67	\$ 82.67	\$ 100.72	\$ 100.72	\$ 115.21	\$ 115.21	\$ 125.45	\$ 125.45

Fuente: elaboración propia.

2019 de $t_0 = \$44.35$, por ser este el momento de valuación. Las proyecciones son: $t_1 = \$61.49$,⁹ $t_2 = \$82.67$, $t_3 = \$100.72$ y $t_4 = \$115.21$. En la construcción del NBT fueron empleadas las ecuaciones 12, 13 y 14. En el Cuadro 5 se exponen los resultados.

3.4. NBT Costo promedio ponderado del capital (paso 2)

El objetivo consiste en proyectar el *ccpp* real y transformarlo en NBT mediante la inflación local borrosa proyectada. Primero se calcula el *ccpp* puntual nominal correspondiente a cada horizonte de proyección (ecuación 14). Luego se sustrae la inflación puntual proyectada y se obtiene el *ccpp* real puntual proyectado (ecuación 15). Con las inflaciones de ambos países (Tablas 1 y 2) se construye el NBT (ecuaciones 16 y 18) del costo del capital. Los supuestos son: (i) estructura objetivo deuda-capital constante, (ii) inexistencia riesgo fiscal, (iii) costo financiero de la deuda igual a la tasa libre de riesgo.

Para estimar el *ccpp* se debe calcular el costo del capital propio. Se empleó el modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Se optó por una variante adaptada para mercados emergentes, a partir del modelo G-CAPM (*Global CAPM*) ajustado por riesgo país.¹⁰ El costo de capital propio primero se estimó en dólares estadounidenses. Para la tasa libre de riesgo (r_f), se utilizó la tasa nominal proyectada EE.UU de la curva de rendimientos (Gráfico 2). El riesgo de mercado adicional se calculó como el promedio aritmético de la diferencia entre el índice *S&P500* y *T-Bonds*.¹¹ El coeficiente beta apalancado (β_l) se obtuvo apalancado los betas *unlevered* (β_u) de 0.85 para empresa comparables. La estructura de capital se supone en 16% deuda, 84% capital

⁹ Para el primer contrato se toma como valor el Tipo de cambio futuro al 29 de marzo de 2019 para contratos negociados a diciembre de 2019, Dólar futuro DLR122019. Los siguientes contratos son determinados realizando un roll-over sobre el primero <https://www.rofex.com.ar/cem/FyO.aspx>

¹⁰ En relación con el CAPM, son conocidas las limitaciones que presenta, en particular para estimar tasas de rendimiento requerido en contextos emergentes, una excelente revisión actualizada del tema se puede ver en Fama y French, (2004). En lo que respecta a soluciones empleadas por los profesionales para estimar tasas de rendimiento que reflejen los riesgos de emergentes, existe un importante cuerpo literario, entre los que se puede citar a Copeland et al. (2000); Fornero, (2003); Damodaran (2006); Pratt y Grabowski (2008); Damodaran (2009).

¹¹ Los datos fueron extraídos del sitio elaborado por A. Damodaran, Discount rate estimation, Annual returns on stock, bonds and t-bills 1928-current. <http://www.stern.nyu.edu/~adamodar/pc/datasets/histretSP.xls>

propio. Como riesgo de mercado emergente se tomó el riesgo país (*Country Risk Premium, CR*) sobre la base del modelo de Damodaran (2015). Para Argentina, en marzo 2019 representaba 764 puntos básicos. Los datos de coeficientes betas no apalancados comparables y riesgo de país son obtenidos del sitio de Damodaran.¹² Obtenida la tasa de rendimiento en dólares estadounidenses ($k_{e,x}$), esta se convierte a pesos domésticos ($k_{e,n}$) (ecuación 17). El costo de la deuda nominal en pesos surge de la curva de rendimientos de bonos locales en moneda doméstica (Gráfico 2). Todo el desglose de las variables correspondiente al modelo aditivo utilizado, para estimar el costo del capital propio es expuesto en el anexo B, Cuadro B.3. Con los datos del Cuadro del anexo B, Cuadro B.4 (*ccpp* estimado en términos reales) fue construido el NBT para el *ccpp*, incorporando la variable inflación doméstica, empleando el Cuadro 2, anexo B, Cuadro B.2, ecuaciones 17 y 19, (véase Cuadro 6).

El *ccpp* expresado en moneda extranjera se obtuvo a partir del *ccpp* borroso en moneda doméstica. Se utilizaron los datos del Cuadro 6, Cuadro B.1, Cuadro B.2 y ecuación 18, (véase Cuadro 7).

Cuadro 6. nbt ccpp doméstico
(ecuaciones 17 y 19)

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	52,17%	79,57%	36,40%	63,78%	27,16%	54,54%	20,59%	47,99%
0,1	53,54%	78,20%	37,77%	62,41%	28,53%	53,17%	21,96%	46,62%
0,2	54,91%	76,83%	39,14%	61,04%	29,90%	51,80%	23,33%	45,25%
0,3	56,28%	75,46%	40,51%	59,67%	31,27%	50,43%	24,70%	43,88%
0,4	57,65%	74,09%	41,88%	58,30%	32,64%	49,06%	26,07%	42,51%
0,5	59,02%	72,72%	43,25%	56,93%	34,00%	47,70%	27,44%	41,14%
0,6	60,39%	71,35%	44,61%	55,56%	35,37%	46,33%	28,81%	39,77%
0,7	61,76%	69,98%	45,98%	54,19%	36,74%	44,96%	30,18%	38,40%
0,8	63,13%	68,61%	47,35%	52,83%	38,11%	43,59%	31,55%	37,03%
0,9	64,50%	67,24%	48,72%	51,46%	39,48%	42,22%	32,92%	35,66%
1	65,87%	65,87%	50,09%	50,09%	40,85%	40,85%	34,29%	34,29%

Fuente: elaboración propia

¹² Los datos son obtenidos del sitio de A. Damodaran, correspondiente al riesgo país depurado de riesgo crediticio, http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html

Cuadro 7. NBT ccpp extranjero
(ecuación 18)

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	4.45%	45.72%	2.70%	48.06%	1.23%	49.51%	0.24%	51.24%
0.1	6.21%	43.30%	4.60%	45.35%	3.24%	46.62%	2.33%	48.14%
0.2	8.00%	40.93%	6.52%	42.69%	5.29%	43.80%	4.47%	45.11%
0.3	9.82%	38.60%	8.48%	40.09%	7.38%	41.03%	6.64%	42.15%
0.4	11.66%	36.31%	10.48%	37.53%	9.51%	38.31%	8.86%	39.26%
0.5	13.54%	34.06%	12.50%	35.03%	11.67%	35.66%	11.12%	36.42%
0.6	15.44%	31.85%	14.57%	32.57%	13.88%	33.05%	13.43%	33.65%
0.7	17.37%	29.68%	16.67%	30.16%	16.13%	30.50%	15.78%	30.94%
0.8	19.34%	27.54%	18.80%	27.80%	18.42%	28.00%	18.18%	28.28%
0.9	21.34%	25.44%	20.98%	25.47%	20.76%	25.54%	20.63%	25.67%
1	23.37%	23.37%	23.20%	23.20%	23.14%	23.14%	23.12%	23.12%

Fuente: elaboración propia.

3.5. NBT el flujo de fondos (paso 3)

Para estimar el NBT correspondiente al flujo de fondos proyectados, se debe trabajar en forma individual cada elemento, destacando que las cantidades adoptan un comportamiento borroso independiente del proyectado para las variables nominales (precios). A continuación se detallan cada una de las variables que integran la magnitud financiera. La información detallada correspondiente a los α -cortes se expone en el anexo B.

a) *Cantidades borrosas*: se proyectó un NBT para cantidades. Las magnitudes proyectadas de manera puntual son $t_1 = 10,000$, $t_2 = 11,000$, $t_3 = 11,500$ y $t_4 = 12,000$, con desvío estándar estimado de 20%, el cuál oficia de CV. Con estos datos se elaboró el NBT correspondiente a α -cortes de cantidades, conforme se expone en el Cuadro B.5 del anexo.

b) *Contribución marginal borrosa*: se parten de valores en t_0 para el precio unitario de venta (\$152), costo variable unitario (\$108) y contribución marginal (\$44). Para proyectar los valores en moneda de cierre borrosa de cada periodo, se utilizó la ecuación 20 y los datos del Cuadro B.2. En el Cuadro B.6 del anexo, son presentados los valores para α -cortes.

c) *Contribución marginal borrosa por cantidades borrosas*: se obtuvo con la ecuación 21 y los datos de los Cuadros B.5 y B.6. En el Cuadro B.7 del anexo, se expresa los valores para los periodos proyectados,

d) *Costos fijos borrosos*: en moneda inicial ascienden a \$2,000,000, su proyección en moneda de cierre borrosa se obtuvo empleando la ecuación 22 y los datos del Cuadro B.2. Los valores proyectados del NBT se exponen en el Cuadro B.8

f) *Capital de trabajo borroso*: se supone que el giro del negocio requiere de una inversión en capital de trabajo de 5% del valor correspondiente a la contribución marginal. El NBT correspondiente a la inversión incremental en capital de trabajo se obtuvo empleando la ecuación 23 y los datos del Cuadro B.7. Los valores proyectados del NBT para el capital de trabajo se exponen en el Cuadro B.9.

g) *Flujo de fondos libres borroso en moneda doméstica*: finalmente se llegó al flujo de fondos libres, empleando la ecuación 24 y los valores correspondientes en los Cuadros B.7, B.8 y B.9. Se supone una tasa de interés que con ganancias de 35% se mantiene constante. Los valores correspondientes para α -cortes, para cada periodo son expuestos en la siguiente tabla, véase Cuadro 8.

3.6. NBT descuento de flujos de fondos en moneda local y extranjera (paso 4)

Finalmente se calculó el valor actual de los flujos de fondos expresados en moneda de cierre doméstica. Se aplicó la ecuación 25 con los elementos borrosos (NBT) los cuales son: costo del capital nominal en moneda doméstica (ecuaciones 17 y 18) y los flujos de fondos proyectados (ecuación 24). El Cuadro 9 expone los valores actuales correspondientes a los extremos inferiores y superiores para α -cortes. El Cuadro B.10 presenta el valor actual para α -cortes, de los flujos de fondos.

El valor en dólares de cierre se estimó aplicando las ecuaciones 26 y 27. La primera estima el NBT de los flujos de fondos en dólares futuros, mediante las ecuaciones 14, 24 y los datos del anexo B, tabla B.11. La ecuación 27 es utilizada para calcular el NBT del valor actual en dólares, mediante la ecuación 18 y 26 y los datos del anexo B, Cuadro B.12, véase Cuadro. 10.

Cuadro 8. NBT flujo de fondos libres
(ecuaciones 21, 22, 23 y 24)

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 555,005.37	\$ 3,228,495.54	\$ 903,999.15	\$ 3,810,379.11	\$ 933,316.18	\$ 3,846,814.63	\$ 969,055.68	\$ 3,908,104.99
0.1	\$ 677,353.61	\$ 3,083,494.76	\$ 1,035,915.39	\$ 3,651,657.36	\$ 1,064,927.64	\$ 3,687,076.25	\$ 1,101,331.18	\$ 3,746,475.56
0.2	\$ 800,894.08	\$ 2,939,686.22	\$ 1,169,242.45	\$ 3,494,346.42	\$ 1,198,019.48	\$ 3,528,818.24	\$ 1,235,151.63	\$ 3,586,391.08
0.3	\$ 925,626.80	\$ 2,797,069.92	\$ 1,303,980.33	\$ 3,338,446.30	\$ 1,332,591.67	\$ 3,372,040.59	\$ 1,370,517.02	\$ 3,427,851.54
0.4	\$ 1,051,551.75	\$ 2,655,645.85	\$ 1,440,129.02	\$ 3,183,957.00	\$ 1,468,644.23	\$ 3,216,743.30	\$ 1,507,427.36	\$ 3,270,856.94
0.5	\$ 1,178,668.94	\$ 2,515,414.03	\$ 1,577,688.53	\$ 3,030,878.51	\$ 1,606,177.15	\$ 3,062,926.38	\$ 1,645,882.64	\$ 3,115,407.29
0.6	\$ 1,306,978.38	\$ 2,376,374.44	\$ 1,716,658.85	\$ 2,879,210.84	\$ 1,745,190.44	\$ 2,910,589.82	\$ 1,785,882.86	\$ 2,961,502.58
0.7	\$ 1,436,480.05	\$ 2,238,527.10	\$ 1,857,039.99	\$ 2,728,953.98	\$ 1,885,684.09	\$ 2,759,733.62	\$ 1,927,428.02	\$ 2,809,142.81
0.8	\$ 1,567,173.96	\$ 2,101,871.99	\$ 1,998,831.95	\$ 2,580,107.94	\$ 2,027,658.10	\$ 2,610,357.79	\$ 2,070,518.13	\$ 2,658,327.99
0.9	\$ 1,699,060.11	\$ 1,966,409.12	\$ 2,142,034.73	\$ 2,432,672.72	\$ 2,171,112.48	\$ 2,462,462.32	\$ 2,215,153.18	\$ 2,509,058.11
1	\$ 1,832,138.50	\$ 1,832,138.50	\$ 2,286,648.32	\$ 2,286,648.32	\$ 2,316,047.22	\$ 2,316,047.22	\$ 2,361,333.17	\$ 2,361,333.17

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 9. NBT valor actual en moneda doméstica
(ecuación 25)

A	i	S
0	\$ 965.905-97	\$ 6.642.585-26
0-1	\$ 1.147.744-40	\$ 6.220.399-89
0-2	\$ 1.337.390-74	\$ 5.817.737-49
0-3	\$ 1.535.215-04	\$ 5.433.534-79
0,4	\$ 1.741.609,05	\$ 5.066.797-94
0-5	\$ 1.956.987-82	\$ 4.716.597-33
0-6	\$ 2.181.791-28	\$ 4.382.062-77
0-7	\$ 2.416.486-06	\$ 4.062.379-11
0-8	\$ 2.661.567-32	\$ 3.756.782-23
0-9	\$ 2.917.560-91	\$ 3.464.555-33
1	\$ 3.185.025-56	\$ 3.185.025-56

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 10. NBT valor actual en moneda extranjera
(ecuación 27)

A	i	S
0	\$ 10,803.53	\$ 166,634.69
0.1	\$ 13,347.41	\$ 148,773.61
0.2	\$ 16,147.60	\$ 132,802.24
0.3	\$ 19,231.07	\$ 118,502.69
0.4	\$ 22,628.00	\$ 105,684.25
0.5	\$ 26,372.23	\$ 94,179.77
0.6	\$ 30,501.74	\$ 83,842.62
0.7	\$ 35,059.19	\$ 74,543.92
0.8	\$ 40,092.61	\$ 66,170.30
0.9	\$ 45,656.07	\$ 58,621.88
1	\$ 51,810.57	\$ 51,810.57

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 11. Comprobación NBT VAN

$\alpha=1$	li	ls	2i	2s	3i	3s	4i	4s
FF en moneda de cierre	\$ 1,832,138.50	\$ 1,832,138.50	\$ 2,286,648.32	\$ 2,286,648.32	\$ 2,316,047.22	\$ 2,316,047.22	\$ 2,361,333.17	\$ 2,361,333.17
FF en moneda de inicio	\$ 1,340,000.00	\$ 1,340,000.00	\$ 1,350,840.01	\$ 1,350,840.01	\$ 1,177,923.58	\$ 1,177,923.58	\$ 1,085,090.79	\$ 1,085,090.79
CCPP en términos reales	21.32%	21.32%	21.23%	21.23%	21.26%	21.26%	21.34%	21.34%
VA FF $\alpha=1$	\$ 1,104,560.63	\$ 1,104,560.63	\$ 918,506.37	\$ 918,506.37	\$ 660,500.83	\$ 660,500.83	\$ 501,457.74	\$ 501,457.74
VAN $\alpha=1$	\$ 3,185,025.56							
$\alpha=0$	li	ls	2i	2s	3i	3s	4i	4s
FF en moneda de cierre	\$ 555,005.37	\$ 3,228,495.54	\$ 903,999.15	\$ 3,810,379.11	\$ 933,316.18	\$ 3,846,814.63	\$ 969,055.68	\$ 3,908,104.99
FF en moneda de inicio	\$ 442,458.84	\$ 2,181,166.88	\$ 640,515.57	\$ 1,905,520.81	\$ 630,614.42	\$ 1,509,476.24	\$ 658,796.02	\$ 1,257,318.19
CCPP en términos reales	2.81%	43.15%	0.97%	45.56%	0.22%	47.37%	-1.13%	48.90%
VA FF $\alpha=0$	\$ 309,079.82	\$ 2,121,586.01	\$ 307,391.45	\$ 1,835,727.07	\$ 205,357.26	\$ 1,457,446.49	\$ 144,077.43	\$ 1,227,825.69
VA FF $\alpha=0$ (i)	\$ 965,905.97							
VA FF $\alpha=0$ (s)	\$ 6,642,585.26							

Fuente: elaboración propia.

3.7. Validación matemática NBT y paridades tipos de cambio (paso 4)

En equilibrio, la diferencia en las tasas de inflación entre dos países, explica el precio expresado en dos monedas para un mismo bien (empresa). El valor de la firma se explica por el interés, el tipo de cambio de contado y futuro, los precios de productos e insumos y el costo del capital. Para corroborar la consistencia de cálculos en $\alpha = 1$, las magnitudes de flujos en moneda de cierre doméstica y tasa de costo de capital son transformadas en moneda inicial (términos reales). El Valor Actual de las magnitudes reales debe ser el mismo que el obtenido en los Cuadros 9 y en el anexo B, Cuadro B.10, expresadas en términos nominales, véase Cuadro 11.

El NBT triangular correspondiente al valor actual de los flujos reales, es el mismo que el obtenido a partir de los nominales: VA α - α , $\varepsilon(0)=\$965,905.97$; a , $\varepsilon(1)=\$3,185,025.56$; $a+\beta$, $\varepsilon(0)=\$6,642,582.26$. En moneda extranjera se corrobora la consistencia con α -corte=1, el cual se obtuvo del cociente entre el valor actual de los flujos de fondos en pesos y dólares (anexo B, Cuadros B.10 y B.12), véase Cuadro 12.

El valor en moneda extranjera de u\$ 51, 810.57 representa para $\alpha = 1$ el valor actual esperado en moneda extranjera de la corriente de flujos de fondos nominados en pesos, convertidos a tipos de cambio futuros, y actualizado a tasa de costo de capital en moneda extranjera y explica la relación presente en el tipo de cambio, ya que el cociente entre los valores actuales en pesos y en moneda extranjera expresan la paridad del tipo de cambio.

Cuadro 12. Comprobación NBT VAN u\$-VAN

$\alpha=1$	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
VA(FF \$)/ VA(FF u\$)	\$ 61.49	\$ 61.49	\$ 61.49	\$ 61.49	\$ 61.49	\$ 61.49	\$ 61.39	\$ 61.39
FF u\$ reales	\$ 21,792.16	\$ 21,792.16	\$ 21,968.45	\$ 21,968.45	\$ 19,156.34	\$ 19,156.34	\$ 17,675.01	\$ 17,675.01
CCPP en términos reales	21.32%	21.32%	21.23%	21.23%	21.26%	21.26%	21.34%	21.34%
VA FF u\$ $\alpha=1$	\$ 17,963.26	\$ 17,963.26	\$ 14,937.49	\$ 14,937.49	\$ 10,741.60	\$ 10,741.60	\$ 8,168.23	\$ 8,168.23
VAN u\$ $\alpha=1$	\$ 51,810.57							

Fuente: elaboración propia.

3.8. Desarrollo del modelo en MatLab mediante matrices

El anexo A desarrolla el mismo caso utilizando el programa MatLab®. El aporte consiste en programar, mediante matrices y tensores, los NBT correspondientes a cada una de las variables. Los argumentos, variables y salidas son expuestos en la sección A.3.

Conclusiones

El modelo propuesto es una alternativa válida para valorar empresas en marcha en contextos emergentes, volátiles y con un impacto significativo del tipo de cambio, tanto en el precio de las transacciones como en las proyecciones. Adicionalmente éste se erige como un modelo integral, cuyo punto de partida son las teorías de paridad, las cuales sirven de sostén para las proyecciones de los precios correspondientes a las variables macroeconómicas como tasas de interés y tipo de cambio. Permiten inferir y proyectar la inflación esperada de la economía emergente, la cual en casos como el analizado, se encuentra fuertemente explicada por la variación en el tipo de cambio. De las proyecciones correspondientes a las variables nominales, como la proyección de las variables reales, se obtienen los flujos de fondos y tasas de costo de capital, que culminan en la determinación del valor intrínseco de la firma, en términos nominales y reales, expresados en moneda local y extranjera, con tan sólo cuatro pasos. A esto cabe agregar, dentro de un marco integral y coherente con la lógica de las teorías de paridad en el marco de las finanzas internacionales y del modelo de descuento de flujo de fondos.

El trabajo aporta la matemática borrosa al modelo, en particular, a partir de la construcción de los valores para variables nominales como tasas de interés e inflación y variables reales (cantidades producidas), lo que permite que el tipo de cambio futuro esperado, flujos de fondos esperados y costo del capital esperado en moneda local y extranjera adquieren el formato de NBT. En tal sentido se brinda un abanico de posibles resultados según el grado de ambigüedad para α -cortes. En un nivel $\alpha = 1$ se expuso la consistencia del modelo en moneda extranjera y doméstica, como la paridad entre el NBT del descuento de flujos de fondos estimado con magnitudes financieras nominales y reales. La matemática borrosa es una herramienta de utilidad, en especial, para contextos caracterizados por la ambigüedad en los datos. Adicionalmente, se incorpora el álgebra matricial para las operaciones con NBT en el programa MatLab®, como alternativa al empleo de planillas de cálculo.

Referencias bibliográficas

- Argandoña, A. (2013). Irvin Fisher: un gran economista. (I. B. Navarra, Ed.) *Working Paper WP-1082* <http://www.iese.edu/research/pdfs/WP-1082.pdf>, 1-44.
- Bradley, M y Gregg, J. (2008). "Expected Inflation and The Constant Growth Valuation Model". *Journal of Applied Corporate Finance*, vol. 20, núm. 2, pp. 66-78.
- Buckley, J. (1987). "The Fuzzy Mathematics of Finance". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 21, pp. 257-273.
- Carlsson, C y Fuller, R. (2001). "On Possibilistic Mean Value and Variance Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 122, pp. 772-777.
- Carlsson, C y Fuller, R. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 139, pp. 315-326.
- Carlsson, C, Fuller, R, Heikkila, M. y Majlender, P. (2007). "A Fuzzy Approach to R&D Project Portfolio Selection". *International Journal of Approximating Reasoning*, núm. 44, pp. 93-105.
- Castro Monge, E. (2010). "El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas". *Revista Nacional de Administración*, vol. 2, núm. 1, pp. 31-54.
- Chiu, C y Park, C. (1994). "Fuzzy Cash Flow Analysis Using Present Worth Criterion". *Engineering Economist*, vol. 39, núm. 2, pp. 113-138.
- Chiu, C y Park, C. (1998). "Capital Budgeting Decisions with Fuzzy Project". *Engineering Economist*, vol. 43, núm. 2, pp. 125-150.
- Copeland, T., Koller, T. y Murrin, J. (2000). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (3 ed.). New York: Wiley.
- Damodaran, A. (2006). *Damodaran on Valuation* (Second ed.). New York, United State: John Wiley & Sons.
- Damodaran, A. (2009). Volatility Rules: Valuing Emerging Market Companies. *Working Paper*, <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/emergmks.pdf>, 1-38.
- Dubois, D y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. New York: Academic Press.
- Emery, D y Finnerty, J. (2007). *Corporate Financial Management* (3 ed.). New Jersey; NJ: Prentice Hall.
- Fabozzi, F y Fabozzi, D. (1996). *Bond Markets, Analysis and Strategies*. New Jersey, NJ: Prentice Hall. Englewood Cliffs.
- Fama, E y French, K. (2004). "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence". *Journal of Economics Perspectives*, vol. 18, núm. 3, pp. 25-46.

- Fornero, R. (2003). Finanzas de empresas en mercados emergentes. (S. A. Financiera, Ed.) *Anales de las XXIII Jornadas de docentes en Administración Financiera SADAF*, http://www.sadaf.com.ar/espanol/publicaciones/publicacion_individual.php?id=212, 107-125.
- Fornero, R. (2012). *Análisis financiero e inflación*. Mendoza, Argentina: Working Paper Universidad Nacional de Cuyo.
- Fuller, R. y Majlender, P. (2003). "On Weigthed Possibilistic Mean and Variance of Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 136, pp. 363-374.
- García Sastre, M. y Roselló Miralles, M. (2007). La lógica borrosa para valorar la incertidumbre en la técnica de valoración de opciones reales. (A. E. (AEDEM), Ed.) *DIALNET OAI Articles*, <http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409>, 1-22.
- Guerra, L, Magni, C. y Stefanini, L. (2014). "Interval and Fuzzy Average Internal Rate of Return for Investment Appraisal". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 257, pp. 217-241.
- Kaufmann, A., Gil Aluja, J. y Terceño, A. (1994). *Matemática para la economía y gestión de empresas* (Vol. I Aritmética de la Incertidumbre). Barcelona, España: Foro Científico S.L.
- Levy, M. (1997). *Finanzas internacionales: un estudio de mercados y administración financiera de empresas multinacionales* (Tercera ed.). México D.F: MacGraw Hill.
- Liao, S y Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Bionomial Approach". *Information Sciences*, núm. 180, pp. 2124-2133.
- López Dumrauf, G. (2014). "Currency Choice in Valuation: an Approach for Emerging Markets". *The Business and Economics Research Journal*, vol. 7, núm. 1, pp. 11-22.
- Mallo, P., Artola, M., Pascual, M., García, M. y Martínez, D. (2004). *Gestión de la incertidumbre en los negocios. Aplicaciones de la matemática borrosa*. Santiago de Chile: RIL editores.
- Milanesi, G. (2013). "El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera". *Estocástica: finanzas y riesgo*, vol. 3, núm. 2, pp. 95-118.
- Milanesi, G. (2014). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*, núm. 30, pp. 211-219.
- Milanesi, G. (2015). "Modelo Binomial Borroso, el valor del firma apalancada y los efectos de la deuda". *Estocástica: finanzas y riesgo*, vol. 5, núm. 1, pp. 9-43.

- Milanesi, G. (2016). "La tasa interna de retorno promedio borrosa: desarrollos y aplicaciones". *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, núm. 21, pp. 39-47.
- Milanesi, G. (2017, a). "Inflación y descuento de flujos de fondos en dos monedas. Un enfoque integral". *Revista Argentina de Investigación en Negocios*, vol. 3, núm. 1, pp. 89-108.
- Milanesi, G. (2017, b). "Valuación de empresas: enfoque integral para mercados emergentes e inflacionarios". *Estudios Gerenciales*, vol. 33, núm. 145, pp. 377-390.
- Modigliani, F-Cohn, R. (1984). "Inflation and Corporate Financial Management". *MIT Sloan School Working Paper*, pp. 1-37.
- Muzzioli, S. y Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*, núm. 28, pp. 861-867.
- Pratt, S. y Grabowski, R. (2008). *Cost Of Capital: Applications and Examples* (3 ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Rebiaz, B. (2007). "Fuzzines and Randomness in Investment Project Risk Appraisal". *Computer Operation Research Journal*, núm. 34.
- Tahn, J. y Velez Pareja, I. (2011). Will the deflated WACC please stand up? And the real WACC should sit down. *SSRN id1617669*, 1-17.
- Taylor, A. y Taylor, M. (2004). "The Purchasing Power Parity debate". *Journal of Economics Perspective*, vol. 18, núm. 4, pp. 135-158.
- Titman, S. y Grinblatt, M. (2002). *Financial Markets and Corporate Strategy*. NY: McGraw-Hill.
- Velez Pareja, I. (2006). "Valoración de flujos de caja en inflación. El caso de la regulación en el Banco Mundial". *Academia. Revista Latinoamericana de Administración*, núm. 36, pp. 24-49.
- Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Zadeh, L. (1965). "Fuzzy Sets". *Information Control*, vol. 3, núm. 8, pp. 338-353.
- Zdnek, Z. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*, núm. 207, pp. 1096-1103.

Anexo A

A.1. Representación matricial de un número borroso

Todo número borroso puede ser expresado a partir de sus cortes- α . De alguna manera esto es discretizarlo para distintos valores de su función de membresía. Para cada corte- α , la única información necesaria para definirlo son los límites inferior y superior.

Considerando lo anterior, se puede ver que existe una biyección entre los números borrosos expresados mediante sus cortes y las matrices de dos columnas. Cualquier número borroso expresado a partir de sus cortes se puede representar como una matriz de filas y columnas, donde cada fila representa un corte distinto, y las columnas representan los límites inferior y superior. De manera arbitraria podemos situar la máxima posibilidad en la última fila y la mínima posibilidad en la primera fila, los demás cortes quedan escalonados acorde.

Sin embargo, la aritmética matricial no resulta aplicable en su totalidad, es decir, hay operaciones entre números borrosos que no se pueden trasladar directamente a las matrices. Por tanto, es necesario incorporar algunas funciones simples que permitan realizar las operaciones básicas de los números borrosos usando matrices. La principal ventaja de esta representación es que muchos lenguajes de programación están diseñado para operar con matrices (y de manera general con tensores) lo que resulta en menor tiempo de cálculo y en procesos más simples cuando se implementan programas que tengan que realizar un gran número de operaciones entre números borrosos. Otra ventaja, es que algunas de las operaciones entre números borrosos pueden transferirse de manera directa a la representación matricial planteada.

A.2. Implementación de la aritmética borrosa

A continuación se presenta la aritmética de números borrosos a partir de sus cortes (Zadeh 1965). Dados dos números borrosos A y B , si los consideramos a partir de sus cortes- α es posible escribirlos como $A(\alpha) = [A_i(\alpha); A_s(\alpha)]$ y $B(\alpha) = [B_i(\alpha); B_s(\alpha)]$, donde el subíndice i hace referencia al límite inferior, y el subíndice s al límite superior de cada corte. De esta manera, los números borrosos se pueden pensar como un conjunto de intervalos cerrados, uno por cada corte que se considere. Entonces, las operaciones básicas quedan definidas de la siguiente forma:

- Suma: $A(\alpha) + B(\alpha) = [A_i(\alpha) + B_i(\alpha)]; A_s(\alpha) + B_s(\alpha)$
- Inverso de la suma: $-A(\alpha) = [-A_s(\alpha); -A_i(\alpha)]$
- Resta: $A(\alpha) - B(\alpha) = A(\alpha) + (-B(\alpha))$
- Producto: $A(\alpha) \cdot B(\alpha) = [\min_{\substack{j=i,s \\ k=i,s}}\{A_j(\alpha) \cdot B_k(\alpha)\}; \max_{\substack{j=i,s \\ k=i,s}}\{A_j(\alpha) \cdot B_k(\alpha)\}]$
- Inverso del producto: $\frac{1}{A(\alpha)} = [\frac{1}{A_s(\alpha)}; \frac{1}{A_i(\alpha)}]$ con $A_i(\alpha) \neq 0$ y $A_s(\alpha) \neq 0$ con y para todo α
- División: $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = A(\alpha) \cdot \frac{1}{B(\alpha)}$

Para poder incorporar esta aritmética a la representación matricial que se propone, primero definir algunas operaciones¹³ sobre las matrices. Dadas dos matrices \tilde{A} y \tilde{B} , con dos columnas y n filas cada una, se definen las siguientes operaciones:

- Permutación de columnas:¹⁴ $(\sigma(\tilde{A}))_{j1} = \tilde{A}_{j2}$ y $(\sigma(\tilde{A}))_{j2} =$
y para todo j
- Producto elemento a elemento:¹⁵ $(\tilde{A} * \tilde{B})_{ij} = \tilde{A}_{ij} \cdot \tilde{B}_{ij}$
- Inverso del producto elemento a elemento: $\eta(\tilde{A})_{ij} = \frac{1}{\tilde{A}_{ij}}$

Es importante notar que todas las operaciones anteriores son cerradas sobre el conjunto que nos interesa, es decir, devuelven como resultado matrices de n filas y columnas. Ahora se tienen las condiciones para incorporar la aritmética borrosa presentada antes a la representación matricial desarrollada. Considerese dos números borrosos A y B con sus respectivas representaciones matriciales \tilde{A} y \tilde{B} con n cortes- α , la aritmética borrosa queda representada de la siguiente manera:

¹³ Las operaciones que se definirán son de uso muy frecuente y de implementación sencilla en lenguajes de programación matriciales como MatLab, Python (NumPy) y R

¹⁴ En ocasiones puede resultar conveniente definir la permutación de columnas a partir de un producto matricial usando una matriz de permutación adecuada.

¹⁵ También conocido como producto de Hadamard que es asociativo, conmutativo y distributivo con la suma.

1. Suma: $A + B \rightarrow \tilde{A} + \tilde{B}$

Es la suma matricial usual.

2. Inverso de la suma: $-A \rightarrow -\sigma(\tilde{A})$

Permutación de columnas con signo opuesto.

3. Producto:

(a) Para empezar se debe definir una matriz auxiliar \tilde{D} de n filas y 4 columnas, como la concatenación de la matriz $\tilde{A} * \tilde{B}$ y $\tilde{A} * \sigma(\tilde{B})$, de manera que las dos primeras columnas de \tilde{D} son las dos columnas de $\tilde{A} * \tilde{B}$.

(b) Considerese la matriz \tilde{R} de n filas y 2 columnas. De forma que $\tilde{R}_{i1} = \min_{k=1,2,3,4} \{\tilde{D}_{ik}\}$ y $\tilde{R}_{i2} = \max_{k=1,2,3,4} \{\tilde{D}_{ik}\}$ y para todo i .

Se obtiene que $A \cdot B \rightarrow \tilde{R}$

4. Inverso del producto:¹⁶ $\frac{1}{A} \rightarrow \sigma(\eta(\tilde{A}))$

La matriz inversa del producto elemento a elemento con sus columnas permutadas.

A.3. Implementación del modelo en MatLab®

A.3.1. Implementación en MatLab® de las matemáticas borrosas

En la presente sección, primero se expone la implementación en MatLab de la aritmética borrosa para la representación matricial propuesta, a continuación se procede a desarrollar el modelo. En tal sentido es importante remarcar que la suma entre números borrosos como la adición y producto por escalares son un derivado natural del álgebra de matrices. En este caso, las operaciones fueron implementadas como funciones para luego ser utilizadas en el modelo. A continuación se presentan los argumentos para la suma y resta:

INVERSO DE LA SUMA:

function I = fuzz_invsum(A)

¹⁶ Solo para números borrosos definido sobre $\mathbb{R} +$

```
I = [-A(:,2) -A(:,1)]; %permutación de columnas con signo opuesto
end
```

A partir de la función anterior se puede programar la resta.

```
RESTA:
function R = fuzz_sub(A,B)
R = A + fuzz_invsum(B);
end
```

Después la programación para el producto y su inversa para la división:

```
PRODUCTO:
function P = fuzz_prod(A,B)
n = length(A(:,1)); %n es la cantidad de cortes
AUX1 = [B(:,2) B(:,1)];
D = [A.*B A.*AUX1]; %matriz auxiliar de 4 columnas

for i = 1:n %para todos los cortes se toma el mínimo y el máximo
P(i,1)=min(D(i,:));
P(i,2)=max(D(i,:));
end
end
```

```
INVERSO DEL PRODUCTO:17
function I = fuzz_invprod(A)
AUX = 1./A; % inverso elemento a elemento
I = [AUX(:,2) AUX(:,1)];
end
```

Utilizando la función anterior se programa la división.

```
DIVISIÓN:
function C = fuzz_div(A,B)
C = fuzz_prod(A,fuzz_invprod(B));
end
```

Una vez efectuado lo anterior, se definen las funciones auxiliares del modelo. En primer lugar, se define la función generadora de números borrosos

¹⁷ Solo para matrices con todos sus elementos en el conjunto de $\mathbb{R} +$

triangulares. Como todo NBT una grilla de valores de cortes- α y los extremos del número borroso triangular, extrapolado cada corte los vértices con el fin de obtener los valores para los extremos superior e inferior.¹⁸ A continuación se detallan los argumentos:

```
NBT:
function M = NBT(alpha_c,a,b,c)
li = alpha_c*(b - a) + a;
ls = alpha_c*(b - c) + c;
M = [li.' ls.'];
end
```

Para ilustrar con un ejemplo la función anterior, se pueden considerar los cortes (0; 0,25; 0,5; 0,75; 1) y los vértices (1; 2; 4). Donde el vértice 2 es el asociado a la máxima posibilidad. La aplicación de la función sería:

$$NBT((0; 0,25; 0,5; 0,75; 1), 1, 2, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1,25 & 3,5 \\ 1,5 & 3 \\ 1,75 & 2,5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

De la suma se desprende la implementación de la suma por páginas para un tensor¹⁹ que representa un número borroso temporal. Se puede programar recursivamente de la siguiente manera:

```
SUMA POR PAGINAS:
function S = fuzz_sum(A)
S = zeros(size(A(:,:,1)));
n = length(A(1,1,:)); %cuenta la cantidad de páginas
for i = 1:n
S = S + A(:,:,i);
end
end
```

¹⁸ Un desarrollo de la lógica de las matemáticas borrosas se puede encontrar en Zadeh (1965).

¹⁹ Un tensor es un elemento algebraico que generaliza el concepto de matriz.

La implementación de la potencia de números borrosos también se puede programar recursivamente a partir del producto de dos números borrosos representados como matrices:

```
POTENCIA:
function P = fuzz_pot(A,n)
P = ones(size(A));
for i=1:n
P = fuzz_prod(P,A);
end
end
```

A.3.2. Número borroso en tiempo discreto

La necesidad de utilizar la lógica borrosa en modelos dinámicos lleva a extender la representación matricial de los números borrosos, considerando el componente temporal. Si se considera el tiempo discreto t , con t un número natural y un número borroso A que puede variar en el tiempo, entonces decimos que A_t es el número borroso A en el periodo t . Para capturar los distintos estados que un número borroso puede tomar en el tiempo resulta natural extender nuestra representación matricial a tensores. Un tensor es un elemento algebraico que generaliza el concepto de matriz. En nuestro caso utilizaremos tensores de orden 3, es decir, que tendrán filas, columnas y páginas. Estas últimas serán las que designen cada periodo del tiempo discreto. Dado A , un número borroso que puede tomar distintos valores en el tiempo (número borroso temporal), tenemos que su representación tensorial \tilde{A} , es un tensor de orden 3, con n filas (una por cada corte α), 2 columnas y t páginas, donde t es el número de periodos de tiempo para los cuales está definido A . De esta manera, A_t es representado por la matriz \tilde{A}_t de n filas y 2 columnas de la página t del tensor \tilde{A} , que representa al número borroso temporal A . A continuación se muestra un ejemplo de representación tensorial \tilde{A} , que se corresponde con un número borroso temporal A para t periodos de tiempo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{121} \\ a_{211} & a_{221} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n21} \end{bmatrix}_{Pág_1} \quad \begin{bmatrix} a_{112} & a_{122} \\ a_{212} & a_{222} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n12} & a_{n22} \end{bmatrix}_{Pág_2} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} a_{11t} & a_{12t} \\ a_{21t} & a_{22t} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1t} & a_{n2t} \end{bmatrix}_{Pág_t} \quad (A.2)$$

En la lógica del MatLab®, otra manera de definir un tensor es como un conjunto ordenado de matrices, donde cada matriz es una página distinta. A modo de ejemplo, en el tensor \tilde{A} el elemento a_{i1k} representa el límite superior (porque corresponde a la primera columna) del i –ésimo corte- α correspondiente al periodo k del NB temporal A .

A.3.3. Las ecuaciones del modelo

La implementación en MatLab de las ecuaciones anteriores, y los valores iniciales de los insumos. Algunas consideraciones necesarias para la representación del modelo:

- a) Las ecuaciones 8 a 24 se referencian para un periodo t , quiere decir que se deben realizar todas las operaciones por páginas.²⁰
- b) Muchas de las ecuaciones contienen operaciones entre números borrosos y escalares. Con la representación matricial propuesta estas operaciones son directas, ya que la suma y el producto de una matriz por un escalar se realiza elemento a elemento.
- c) La determinación del valor del proyecto (ecuaciones 25, 26 y 27) requiere de la suma del flujo de fondos descontados sobre todos los periodos. Significa sumar sobre las páginas del número borroso temporal que representa el flujo de fondo descontado. Se utilizó una función que suma todas las páginas de un número borroso temporal.
- d) Otra función auxiliar necesaria para el modelo es la potenciación de números borrosos.

En primer lugar se define el periodo temporal a considerar ($t = 4$) a considerar, y se generan los números borrosos correspondientes a proyecciones de inflación doméstica, extranjera y cantidades producidas.

```
T = 4; %Cantidad de periodos considerados
%NBT para la inflacion extranjera de cada periodo
pi_e(:,1) = NBT(0:0.1:1, 0.0152, 0.0160, 0.0168);
pi_e(:,2) = NBT(0:0.1:1, 0.0146, 0.0154, 0.0162);
```

²⁰ La programación de todas las ecuaciones página por página se puede hacer usando un *loop*.

```

pi_e(:,3) = NBT(0:0.1:1, 0.0140, 0.0148, 0.0156);
pi_e(:,4) = NBT(0:0.1:1, 0.0134, 0.0142, 0.0150);
%NBT para la inflacion doméstica de cada periodo
pi_d(:,1) = NBT(0:0.1:1, 0.1842, 0.2292, 0.2743);
pi_d(:,2) = NBT(0:0.1:1, 0.1329, 0.1779, 0.2229);
pi_d(:,3) = NBT(0:0.1:1, 0.1023, 0.1473, 0.1923);
pi_d(:,4) = NBT(0:0.1:1, 0.0803, 0.1253, 0.1703);
%NBT para las cantidades de cada periodo
q(:,1) = NBT(0:0.1:1, 80000, 100000, 120000);
q(:,2) = NBT(0:0.1:1, 88000, 110000, 132000);
q(:,3) = NBT(0:0.1:1, 92000, 115000, 138000);
q(:,4) = NBT(0:0.1:1, 96000, 120000, 144000);

```

Los números borrosos anteriores están definidos para cada periodo que se considera, es decir, son números borrosos temporales en su representación tensorial. En la Gráfica A.3.1 se puede apreciar cada proyección para los periodos considerados.

A continuación se incorporan los demás insumos del modelo;

```

%Tasa real estimada para cada periodo
r_r = [0.0294, 0.0376, 0.0429, 0.0469];
%Tipo de cambio Spot proyectado
%Definicion auxiliar para calcular el tipo de cambio futuro F_n
S = 61.49*ones(11,2,5);
%Datos para el cálculo del costo promedio ponderado del capital
Wd = 0.4;
We = 1 - Wd;
tax = 0.35;
K_en = [0.371, 0.3602, 0.3539, 0.3493];
K_in = [0.2283, 0.1839, 0.158, 0.1396];
%Contribución marginal
cm = 44;
%Costo fijo

```

CF = 2000000;

%Incremento en el capital de trabajo

ct = 0.05;

%auxiliar para utilizar en el descuento de flujo de fondos

KAUX=ones(11,2,5);

KAUXx=ones(11,2,5);

Con todos los insumos definidos, se pueden aplicar todas las ecuaciones del modelo para calcular el valor de la firma.

for t=1:T %definimos todas las ecuaciones anteriores para cada periodo

r_dn(:,:,t) = r_r(t) + pi_d(:,:,t) + r_r(t) * pi_d(:,:,t); *%tasa nominal doméstica*

r_en(:,:,t) = r_r(t) + pi_e(:,:,t) + r_r(t) * pi_e(:,:,t); *%tasa nominal externa*

F_n(:,:,t) = fuzz_prod(S(:,:,t), fuzz_div(1+r_dn(:,:,t), 1+r_en(:,:,t))); *%tipo de cambio futuro*

S(:,:,t+1)=F_n(:,:,t);

k_on(t) = Wd * (1 - tax) * K_in(t) + We * K_en(t); *%costo capital (no borroso)*

%costo real del capital, usando la máxima posibilidad

K_or(t) = (k_on(t) + pi_d(length(pi_d), 1, t)) / (1 + pi_d(length(pi_d), 1, t));

%costo nominal del capital

K_on(:,:,t) = K_or(t) + fuzz_prod(1 + r_dn(:,:,t), 1 + r_en(:,:,t));

%costo de capital en moneda extranjera

K_ox(:,:,t) = fuzz_prod(K_on(:,:,t),fuzz_div(pi_e(:,:,t), pi_d(:,:,t)));

%contribucion marginal borrosa

CM(:,:,t) = cm * q(:,:,t);

%contribucion marginal borrosa en moneda de cada periodo

CM_n(:,:,t) = fuzz_prod(CM(:,:,t), 1 + pi_d(:,:,t));

%costo fijo borroso en moneda de cada periodo

CF_n(:,:,t) = CF * (1 + pi_d(:,:,t));

%inversion incremental en capital de trabajo

```

AUX(:,:,1)= zeros(11,2)
AUX(:,:,t+1) = ct * CM_n(:,:,t)
CTINC_n(:,:,t) = fuzz_sub(AUX(:,:,t+1), AUX(:,:,t));

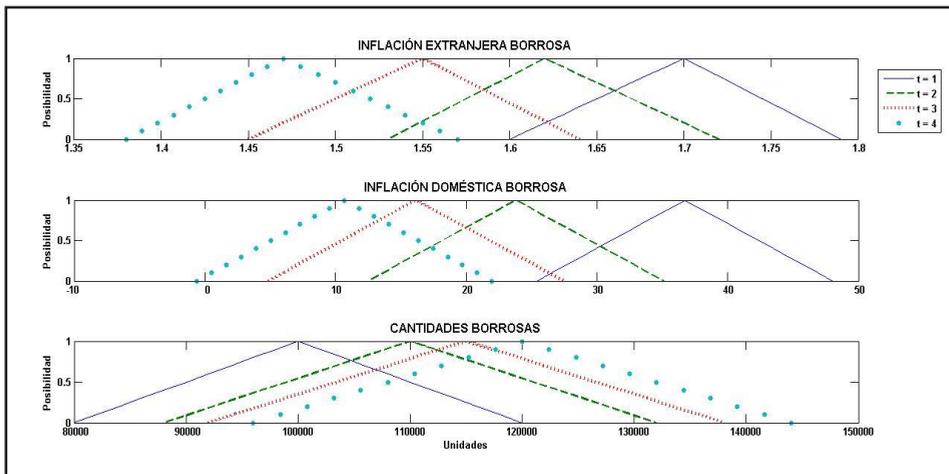
%flujo de fondos borrosos en moneda local y extranjera
FFL_n(:,:,t) = fuzz_sub(fuzz_sub(CM_n(:,:,t), CF_n(:,:,t)) * (1-tax),
    CTINC_n(:,:,t));
FFL_x(:,:,t) = fuzz_div(FFL_n(:,:,t), F_n(:,:,t));

%Auxiliares para descontar FFL
KAUX(:,:,t+1) = fuzz_prod(KAUX(:,:,t), 1 + K_on(:,:,t))
KAUXx(:,:,t+1) = fuzz_prod(KAUXx(:,:,t), 1 + K_ox(:,:,t))

%flujo de fondos descontados en moneda local y extranjera
FFLD_n(:,:,t) = fuzz_div(FFL_n(:,:,t),KAUX(:,:,t+1));
FFLD_x(:,:,t) = fuzz_div(FFL_x(:,:,t),KAUXx(:,:,t+1));
end

```

Gráfico A.3.1. Inflación y cantidades MatLab®



Fuente: elaboración propia.

Una vez efectuado lo anterior, sólo resta plantear los argumentos para estimar el valor actual utilizando la fórmula de suma sobre páginas.

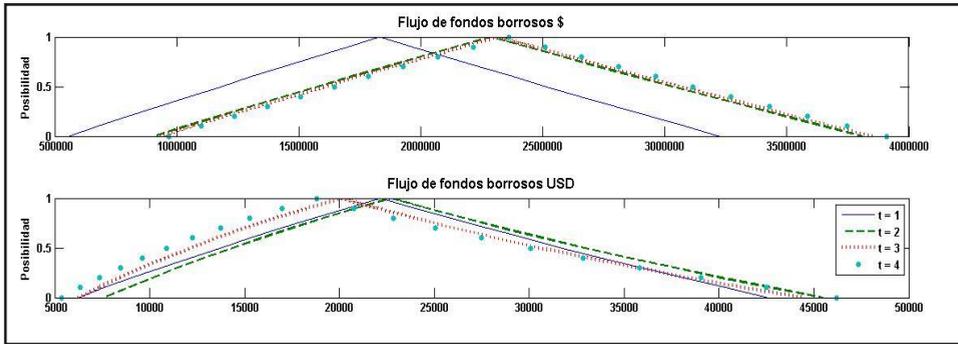
%VAN borroso en moneda local y extranjera

$$V_n = \text{fuzz_sum}(\text{FFLD}_n);$$

$$V_x = \text{fuzz_sum}(\text{FFLD}_x);$$

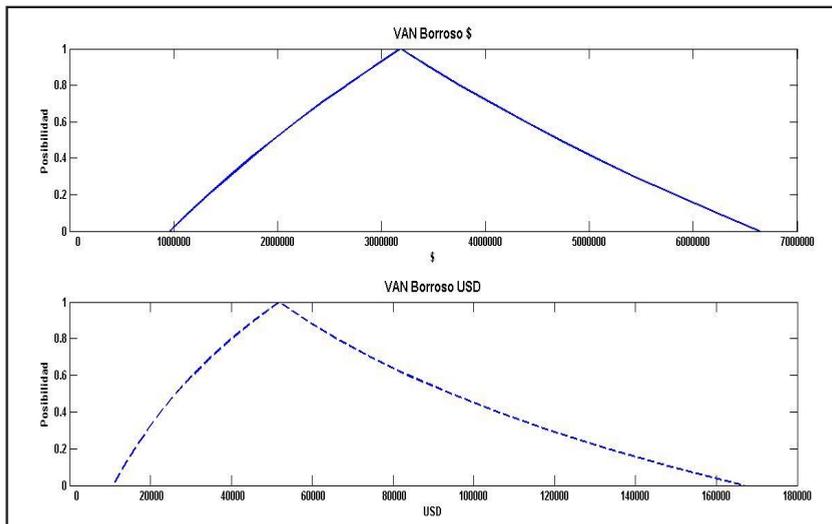
A continuación se presentan los graficos de NBT para las diferentes salidas, véase las Gráficas A.3.2 y A.3.3.

Gráfica A.3.2. Flujos de fondos en diferente monedas MatLab ®



Fuente: elaboración propia.

Gráfica A.3.3. VAN borroso en pesos y dólares MatLab ®



Fuente: elaboración propia.

Anexo B

Cuadro B.1. NBT inflación extranjera

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	1.60%	1.79%	1.53%	1.72%	1.45%	1.64%	1.38%	1.57%
0.1	1.61%	1.78%	1.54%	1.71%	1.46%	1.63%	1.39%	1.56%
0.2	1,62%	1,77%	1,55%	1,70%	1,47%	1,62%	1,40%	1,55%
0,3	1,63%	1,76%	1,56%	1,69%	1,48%	1,61%	1,41%	1,54%
0,4	1,64%	1,75%	1,56%	1,68%	1,49%	1,61%	1,42%	1,53%
0,5	1,65%	1,74%	1,57%	1,67%	1,50%	1,60%	1,43%	1,52%
0,6	1,66%	1,73%	1,58%	1,66%	1,51%	1,59%	1,44%	1,51%
0,7	1,67%	1,72%	1,59%	1,65%	1,52%	1,58%	1,45%	1,50%
0,8	1,68%	1,71%	1,60%	1,64%	1,53%	1,57%	1,46%	1,49%
0,9	1,69%	1,71%	1,61%	1,63%	1,54%	1,56%	1,46%	1,48%
1	1.70%	1.70%	1.62%	1.62%	1.55%	1.55%	1.47%	1.47%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.2. NBT inflación doméstica

A	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	25.44%	48.02%	12.52%	35.10%	4.86%	27.44%	-0.61%	21.97%
0.1	26.57%	46.89%	13.64%	33.97%	5.99%	26.32%	0.52%	20.84%
0.2	27.69%	45.76%	14.77%	32.84%	7.12%	25.19%	1.65%	19.71%
0.3	28.82%	44.63%	15.90%	31.71%	8.25%	24.06%	2.77%	18.58%
0.4	29.95%	43.50%	17.03%	30.58%	9.38%	22.93%	3.90%	17.45%
0.5	31.08%	42.37%	18.16%	29.45%	10.51%	21.80%	5.03%	16.32%
0.6	32.21%	41.24%	19.29%	28.32%	11.64%	20.67%	6.16%	15.19%
0.7	33.34%	40.11%	20.42%	27.19%	12.77%	19.54%	7.29%	14.06%
0.8	34.47%	38.98%	21.55%	26.06%	13.90%	18.41%	8.42%	12.94%
0.9	35.60%	37.86%	22.68%	24.94%	15.03%	17.28%	9.55%	11.81%
1	36.73%	36.73%	23.81%	23.81%	16.15%	16.15%	10.68%	10.68%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.3. Estimación puntual tasa costo del capital propio nominal y real: r_f proyectada ETTI nominal EE.UU, CR: Credit Risk Argentina (Damodaran), $E(RM)$ rendimiento mercado EE.UU, $E(RM)-r_f$: adicional por riesgo de mercado, β 1 coeficiente beta apalancado, k_e (dólares reales, pesos nominales, pesos reales)

R_f	CR	$E(Rm-r_f)$	β 1	K_e U\$, n	K_e \$, n	K_e \$, r
7.00%	7.64%	13.60%	0.9617	27.72%	71.72%	25.59%
6.36%	7.64%	13.60%	0.9617	27.08%	54.82%	25.05%
5.98%	7.64%	13.60%	0.9617	26.70%	44.92%	24.77%
5.71%	7.64%	13.60%	0.9617	26.43%	37.90%	24.59%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.4. Estimación puntual ccpp nominal y real estructura de capital constante (deuda 16%-capital propio 40%) y tasa de impuesto a las ganancias 35% anual

k_e , n	k_i , n	k_o , n	k_o r
71.72%	54.13%	65.87%	21.32%
54.82%	38.88%	50.09%	21.23%
44.92%	29.96%	40.85%	21.26%
37.90%	23.63%	34.29%	21.34%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.5. Estimación NBT cantidades

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	80000	120000	88000	132000	92000	138000	96000	144000
0,1	82000	118000	90200	129800	94300	135700	98400	141600
0,2	84000	116000	92400	127600	96600	133400	100800	139200
0,3	86000	114000	94600	125400	98900	131100	103200	136800
0,4	88000	112000	96800	123200	101200	128800	105600	134400
0,5	90000	110000	99000	121000	103500	126500	108000	132000
0,6	92000	108000	101200	118800	105800	124200	110400	129600
0,7	94000	106000	103400	116600	108100	121900	112800	127200
0,8	96000	104000	105600	114400	110400	119600	115200	124800
0,9	98000	102000	107800	112200	112700	117300	117600	122400
1	100000	100000	110000	110000	115000	115000	120000	120000

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.6. Estimación NBT contribución marginal en moneda de cierre

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 52.11	\$ 56.07	\$ 49.85	\$ 53.81	\$ 48.50	\$ 52.46	\$ 47.53	\$ 51.49
0.1	\$ 52.30	\$ 55.87	\$ 50.04	\$ 53.61	\$ 48.70	\$ 52.27	\$ 47.73	\$ 51.30
0.2	\$ 52.50	\$ 55.67	\$ 50.24	\$ 53.41	\$ 48.90	\$ 52.07	\$ 47.93	\$ 51.10
0.3	\$ 52.70	\$ 55.47	\$ 50.44	\$ 53.21	\$ 49.10	\$ 51.87	\$ 48.13	\$ 50.90
0.4	\$ 52.90	\$ 55.28	\$ 50.64	\$ 53.02	\$ 49.29	\$ 51.67	\$ 48.32	\$ 50.70
0.5	\$ 53.10	\$ 55.08	\$ 50.84	\$ 52.82	\$ 49.49	\$ 51.47	\$ 48.52	\$ 50.50
0.6	\$ 53.29	\$ 54.88	\$ 51.04	\$ 52.62	\$ 49.69	\$ 51.27	\$ 48.72	\$ 50.31
0.7	\$ 53.49	\$ 54.68	\$ 51.23	\$ 52.42	\$ 49.89	\$ 51.08	\$ 48.92	\$ 50.11
0.8	\$ 53.69	\$ 54.48	\$ 51.43	\$ 52.22	\$ 50.09	\$ 50.88	\$ 49.12	\$ 49.91
0.9	\$ 53.89	\$ 54.28	\$ 51.63	\$ 52.03	\$ 50.28	\$ 50.68	\$ 49.32	\$ 49.71
1	\$ 54.09	\$ 54.09	\$ 51.83	\$ 51.83	\$ 50.48	\$ 50.48	\$ 49.51	\$ 49.51

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.7. Estimación NBT contribución marginal por cantidades en moneda de cierre

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 4,168,405.57	\$ 6,728,106.23	\$ 4,386,477.69	\$ 7,102,764.19	\$ 4,462,069.40	\$ 7,239,926.65	\$ 4,563,117.00	\$ 7,415,272.95
0.1	\$ 4,288,861.89	\$ 6,592,592.48	\$ 4,514,010.42	\$ 6,958,668.28	\$ 4,592,304.23	\$ 7,092,375.76	\$ 4,696,690.34	\$ 7,263,630.69
0.2	\$ 4,410,110.70	\$ 6,457,871.23	\$ 4,642,414.91	\$ 6,815,444.11	\$ 4,723,450.44	\$ 6,945,736.25	\$ 4,831,214.67	\$ 7,112,939.43
0.3	\$ 4,532,152.01	\$ 6,323,942.47	\$ 4,771,691.14	\$ 6,673,091.69	\$ 4,855,508.03	\$ 6,800,008.10	\$ 4,966,690.00	\$ 6,963,199.17
0.4	\$ 4,654,985.82	\$ 6,190,806.21	\$ 4,901,839.11	\$ 6,531,611.02	\$ 4,988,476.98	\$ 6,655,191.33	\$ 5,103,116.33	\$ 6,814,409.90
0.5	\$ 4,778,612.12	\$ 6,058,462.45	\$ 5,032,858.83	\$ 6,391,002.09	\$ 5,122,357.30	\$ 6,511,285.93	\$ 5,240,493.65	\$ 6,666,571.62
0.6	\$ 4,903,030.92	\$ 5,926,911.18	\$ 5,164,750.30	\$ 6,251,264.90	\$ 5,257,148.99	\$ 6,368,291.90	\$ 5,378,821.96	\$ 6,519,684.34
0.7	\$ 5,028,242.21	\$ 5,796,152.41	\$ 5,297,513.52	\$ 6,112,399.47	\$ 5,392,852.06	\$ 6,226,209.23	\$ 5,518,101.28	\$ 6,373,748.06
0.8	\$ 5,154,246.01	\$ 5,666,186.14	\$ 5,431,148.48	\$ 5,974,405.78	\$ 5,529,466.49	\$ 6,085,037.94	\$ 5,658,331.58	\$ 6,228,762.77
0.9	\$ 5,281,042.29	\$ 5,537,012.36	\$ 5,565,655.18	\$ 5,837,283.83	\$ 5,666,992.30	\$ 5,944,778.02	\$ 5,799,512.89	\$ 6,084,728.48
1	\$ 5,408,631.08	\$ 5,408,631.08	\$ 5,701,033.63	\$ 5,701,033.63	\$ 5,805,429.48	\$ 5,805,429.48	\$ 5,941,645.19	\$ 5,941,645.19

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.8. Estimación NBT costos fijos en moneda de cierre

α	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 2,368,412.26	\$ 2,548,525.09	\$ 2,265,742.61	\$ 2,445,855.44	\$ 2,204,579.74	\$ 2,384,692.57	\$ 2,160,566.76	\$ 2,340,679.59
0.1	\$ 2,377,417.90	\$ 2,539,519.45	\$ 2,274,748.25	\$ 2,436,849.80	\$ 2,213,585.38	\$ 2,375,686.93	\$ 2,169,572.40	\$ 2,331,673.95
0.2	\$ 2,386,423.54	\$ 2,530,513.80	\$ 2,283,753.89	\$ 2,427,844.16	\$ 2,222,591.02	\$ 2,366,681.29	\$ 2,178,578.04	\$ 2,322,668.31
0.3	\$ 2,395,429.18	\$ 2,521,508.16	\$ 2,292,759.53	\$ 2,418,838.51	\$ 2,231,596.67	\$ 2,357,675.65	\$ 2,187,583.69	\$ 2,313,662.67
0.4	\$ 2,404,434.82	\$ 2,512,502.52	\$ 2,301,765.17	\$ 2,409,832.87	\$ 2,240,602.31	\$ 2,348,670.01	\$ 2,196,589.33	\$ 2,304,657.03
0.5	\$ 2,413,440.46	\$ 2,503,496.88	\$ 2,310,770.81	\$ 2,400,827.23	\$ 2,249,607.95	\$ 2,339,664.36	\$ 2,205,594.97	\$ 2,295,651.39
0.6	\$ 2,422,446.11	\$ 2,494,491.24	\$ 2,319,776.46	\$ 2,391,821.59	\$ 2,258,613.59	\$ 2,330,658.72	\$ 2,214,600.61	\$ 2,286,645.74
0.7	\$ 2,431,451.75	\$ 2,485,485.60	\$ 2,328,782.10	\$ 2,382,815.95	\$ 2,267,619.23	\$ 2,321,653.08	\$ 2,223,606.25	\$ 2,277,640.10
0.8	\$ 2,440,457.39	\$ 2,476,479.96	\$ 2,337,787.74	\$ 2,373,810.31	\$ 2,276,624.87	\$ 2,312,647.44	\$ 2,232,611.89	\$ 2,268,634.46
0.9	\$ 2,449,463.03	\$ 2,467,474.31	\$ 2,346,793.38	\$ 2,364,804.66	\$ 2,285,630.52	\$ 2,303,641.80	\$ 2,241,617.54	\$ 2,259,628.82
1	\$ 2,458,468.67	\$ 2,458,468.67	\$ 2,355,799.02	\$ 2,355,799.02	\$ 2,294,636.16	\$ 2,294,636.16	\$ 2,250,623.18	\$ 2,250,623.18

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.9. Estimación NBT capital de trabajo en moneda de cierre

α	l_i	l_s	2_i	2_s	3_i	3_s	4_i	4_s
0	\$ 208,420.28	\$ 336,405.31	\$ 219,323.88	\$ 355,138.21	\$ 223,103.47	\$ 361,996.33	\$ 228,155.85	\$ 370,763.65
0.1	\$ 214,443.09	\$ 329,629.62	\$ 225,700.52	\$ 347,933.41	\$ 229,615.21	\$ 354,618.79	\$ 234,834.52	\$ 363,181.53
0.2	\$ 220,505.54	\$ 322,893.56	\$ 232,120.75	\$ 340,772.21	\$ 236,172.52	\$ 347,286.81	\$ 241,560.73	\$ 355,646.97
0.3	\$ 226,607.60	\$ 316,197.12	\$ 238,584.56	\$ 333,654.58	\$ 242,775.40	\$ 340,000.41	\$ 248,334.50	\$ 348,159.96
0.4	\$ 232,749.29	\$ 309,540.31	\$ 245,091.96	\$ 326,580.55	\$ 249,423.85	\$ 332,759.57	\$ 255,155.82	\$ 340,720.49
0.5	\$ 238,930.61	\$ 302,923.12	\$ 251,642.94	\$ 319,550.10	\$ 256,117.86	\$ 325,564.30	\$ 262,024.68	\$ 333,328.58
0.6	\$ 245,151.55	\$ 296,345.56	\$ 258,237.52	\$ 312,563.25	\$ 262,857.45	\$ 318,414.59	\$ 268,941.10	\$ 325,984.22
0.7	\$ 251,412.11	\$ 289,807.62	\$ 264,875.68	\$ 305,619.97	\$ 269,642.60	\$ 311,310.46	\$ 275,905.06	\$ 318,687.40
0.8	\$ 257,712.30	\$ 283,309.31	\$ 271,557.42	\$ 298,720.29	\$ 276,473.32	\$ 304,251.90	\$ 282,916.58	\$ 311,438.14
0.9	\$ 264,052.11	\$ 276,850.62	\$ 278,282.76	\$ 291,864.19	\$ 283,349.61	\$ 297,238.90	\$ 289,975.64	\$ 304,236.42
1	\$ 270,431.55	\$ 270,431.55	\$ 285,051.68	\$ 285,051.68	\$ 290,271.47	\$ 290,271.47	\$ 297,082.26	\$ 297,082.26

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.10. Estimación NBT valor actual flujos de fondos en moneda de cierre

A	l_i	l_s	2_i	2_s	3_i	3_s	4_i	4_s
0	\$ 309,079.82	\$ 2,121,586.01	\$ 307,391.45	\$ 1,835,727.07	\$ 205,357.26	\$ 1,457,446.49	\$ 144,077.43	\$ 1,227,825.69
0.1	\$ 380,114.33	\$ 2,008,224.26	\$ 357,946.46	\$ 1,726,244.79	\$ 240,234.79	\$ 1,356,110.55	\$ 169,448.81	\$ 1,129,820.29
0.2	\$ 452,923.50	\$ 1,897,636.71	\$ 410,605.62	\$ 1,621,168.59	\$ 277,143.96	\$ 1,260,348.31	\$ 196,717.66	\$ 1,038,583.89
0.3	\$ 527,548.91	\$ 1,789,750.42	\$ 465,452.44	\$ 1,520,311.06	\$ 316,196.54	\$ 1,169,840.43	\$ 226,017.14	\$ 953,632.88
0.4	\$ 604,033.42	\$ 1,684,494.98	\$ 522,574.26	\$ 1,423,494.07	\$ 357,511.05	\$ 1,084,287.85	\$ 257,490.32	\$ 874,521.04
0.5	\$ 682,421.26	\$ 1,581,802.41	\$ 582,062.43	\$ 1,330,548.18	\$ 401,213.12	\$ 1,003,410.33	\$ 291,291.01	\$ 800,836.40
0.6	\$ 762,758.07	\$ 1,481,607.07	\$ 644,012.55	\$ 1,241,312.21	\$ 447,436.08	\$ 926,945.17	\$ 327,584.59	\$ 732,198.32
0.7	\$ 845,090.96	\$ 1,383,845.51	\$ 708,524.70	\$ 1,155,632.71	\$ 496,321.38	\$ 854,645.94	\$ 366,549.01	\$ 668,254.96
0.8	\$ 929,468.59	\$ 1,288,456.43	\$ 775,703.67	\$ 1,073,363.59	\$ 548,019.25	\$ 786,281.36	\$ 408,375.82	\$ 608,680.85
0.9	\$ 1,015,941.17	\$ 1,195,380.57	\$ 845,659.22	\$ 994,365.68	\$ 602,689.22	\$ 721,634.32	\$ 453,271.30	\$ 553,174.76
1	\$ 1,104,560.63	\$ 1,104,560.63	\$ 918,506.37	\$ 918,506.37	\$ 660,500.83	\$ 660,500.83	\$ 501,457.74	\$ 501,457.74

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.11. Estimación NBT flujos de fondos en dólares

A	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 6,195.51	\$ 42,606.96	\$ 7,583.75	\$ 45,459.91	\$ 6,232.88	\$ 44,485.03	\$ 5,387.77	\$ 46,260.14
0.1	\$ 7,620.11	\$ 40,326.59	\$ 8,832.67	\$ 42,740.69	\$ 7,293.51	\$ 41,380.37	\$ 6,338.91	\$ 42,551.70
0.2	\$ 9,080.56	\$ 38,102.34	\$ 10,133.99	\$ 40,131.55	\$ 8,416.44	\$ 38,447.47	\$ 7,361.78	\$ 39,100.87
0.3	\$ 10,577.70	\$ 35,932.75	\$ 11,489.79	\$ 37,627.81	\$ 9,605.11	\$ 35,676.46	\$ 8,461.43	\$ 35,889.16
0.4	\$ 12,112.40	\$ 33,816.37	\$ 12,902.28	\$ 35,224.98	\$ 10,863.18	\$ 33,058.08	\$ 9,643.31	\$ 32,899.52
0.5	\$ 13,685.55	\$ 31,751.84	\$ 14,373.72	\$ 32,918.83	\$ 12,194.52	\$ 30,583.67	\$ 10,913.28	\$ 30,116.22
0.6	\$ 15,298.09	\$ 29,737.81	\$ 15,906.53	\$ 30,705.30	\$ 13,603.25	\$ 28,245.09	\$ 12,277.63	\$ 27,524.70
0.7	\$ 16,950.97	\$ 27,773.01	\$ 17,503.21	\$ 28,580.57	\$ 15,093.74	\$ 26,034.73	\$ 13,743.14	\$ 25,111.53
0.8	\$ 18,645.18	\$ 25,856.18	\$ 19,166.37	\$ 26,540.95	\$ 16,670.63	\$ 23,945.43	\$ 15,317.11	\$ 22,864.30
0.9	\$ 20,381.73	\$ 23,986.13	\$ 20,898.77	\$ 24,582.97	\$ 18,338.83	\$ 21,970.49	\$ 17,007.40	\$ 20,771.49
1	\$ 22,161.9	\$ 22,116.9	\$ 22,703.30	\$ 22,703.30	\$ 20,103.60	\$ 20,103.60	\$ 18,822.48	\$ 18,822.48

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.12. Estimación NBT valor actual flujos de fondos en dólares

A	1i	1s	2i	2s	3i	3s	4i	4s
0	\$ 4,251.73	\$ 40,790.29	\$ 3,515.14	\$ 42,377.32	\$ 1,932.27	\$ 40,966.30	\$ 1,104.39	\$ 42,500.78
0.1	\$ 5,317.50	\$ 37,967.35	\$ 4,240.62	\$ 38,472.36	\$ 2,388.19	\$ 36,078.91	\$ 1,401.10	\$ 36,254.99
0.2	\$ 6,443.28	\$ 35,279.45	\$ 5,039.37	\$ 34,883.22	\$ 2,910.58	\$ 31,740.13	\$ 1,754.37	\$ 30,899.44
0.3	\$ 7,631.79	\$ 32,720.50	\$ 5,917.63	\$ 31,585.03	\$ 3,507.84	\$ 27,889.19	\$ 2,173.82	\$ 26,307.97
0.4	\$ 8,885.85	\$ 30,284.66	\$ 6,882.16	\$ 28,554.94	\$ 4,189.41	\$ 24,472.17	\$ 2,670.57	\$ 22,372.47
0.5	\$ 10,208.43	\$ 27,966.40	\$ 7,940.31	\$ 25,771.92	\$ 4,965.88	\$ 21,441.18	\$ 3,257.61	\$ 19,000.27
0.6	\$ 11,602.65	\$ 25,760.47	\$ 9,100.00	\$ 23,216.63	\$ 5,849.12	\$ 18,753.65	\$ 3,949.97	\$ 16,111.86
0.7	\$ 13,071.74	\$ 23,661.85	\$ 10,369.84	\$ 20,871.29	\$ 6,852.44	\$ 16,371.76	\$ 4,765.17	\$ 13,639.02
0.8	\$ 14,619.13	\$ 21,665.76	\$ 11,759.16	\$ 18,719.51	\$ 7,990.77	\$ 14,261.86	\$ 5,723.54	\$ 11,523.17
0.9	\$ 16,248.39	\$ 19,767.67	\$ 13,278.06	\$ 16,746.21	\$ 9,280.89	\$ 12,394.02	\$ 6,848.73	\$ 9,713.98
1	\$ 17,963.26	\$ 17,963.26	\$ 14,937.49	\$ 14,937.49	\$ 10,741.60	\$ 10,741.60	\$ 8,168.23	\$ 8,168.23

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.13. Bonos soberanos en pesos (IAMC al 29 de marzo de 2019),
CER: 41,85%

Pesos bonos ajustables por CER en \$	Sticker	TIR	DM	CER: 41.85%
BONCER 2020	TC 20	15.92%	0.96	57.77%
BOGAR 2020	NO 20	16.56%	0.72	58.41%
BONCER 2021	TC21	11.98%	2.11	53.83%
BONCER 2023	TC 23	10.64%	3.44	10.64%
BONCER 2025	TC 25	10.90%	4.91	10.90%
Cuasipar \$ Ley Arg reestructuración 2005	CUAP	10.35%	10.74	10.35%

Fuente: elaboración propia.

Cuadro B.14. Bonos soberanos en dólares (IAMC al 29 de marzo de 2019)

Dólar	Sticker	TIR	DM
BONAR 2020	A020D	14.02%	1.51
BONAR 2024	AY24D	13.66%	1.95
BONAR 2025	AA25D	14.64%	3.83
BONAR 2037	AA37D	12.07%	7.55

Fuente: elaboración propia.

Red neuronal autorregresiva difusa tipo Sugeno con funciones de membresía triangular y trapezoidal: una aplicación al pronóstico de índices del mercado bursátil

Sugeno Type Fuzzy Nonlinear Autoregressive Neural Networks with Triangular and Trapezoidal Membership Functions: An Application to Forecast the Stock Market Index

José Eduardo Medina Reyes*

Judith Jazmin Castro Pérez**

Agustín Ignacio Cabrera Llanos***

Salvador Cruz Aké****

(Fecha de recepción: 27 de octubre de 2019, Fecha de aceptación 26 de diciembre de 2019)

RESUMEN

La presente investigación desarrolla una comparación entre la nueva Red Neuronal Autorregresiva no Lineal Difusa y la Red Neuronal Autorregresiva para evaluar el pronóstico de Índices bursátiles. Para ello se aplica la metodología a la rentabilidad de cuatro índices accionarios, IPC, IBEX 35, S&P 500 y el Nikkei 225 en formato diario

* Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional (IPN), Ciudad de México, México
eduardomedina_94@yahoo.com, ORCID: 0000-0001-6320-9299

** Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional (IPN), Ciudad de México, México
castro.410210@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3412-2079

*** Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología,
Instituto Politécnico Nacional (IPN), Ciudad de México, México
aicllbuda@yahoo.com, ORCID: 0000-0003-3540-7313

**** Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional (IPN), Ciudad de México, México
salvador.ake22@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1452-377X

desde enero de 2015 hasta diciembre de 2018, adjuntando los primeros cinco días de enero de 2019 para pronóstico fuera de muestra. Se estimó una Red Neural Autorregresiva No Lineal con tres rezagos y con algoritmo de aprendizaje Bayesiano y la Red Neuronal Difusa fue estimada con tres rezagos y con el algoritmo Backpropagation. Los resultados muestran que los modelos propuestos generan un mejor pronóstico dentro y fuera de la muestra en comparación con la Red Neuronal Autorregresiva No Lineal. Lo anterior es consecuencia de que las redes neuronales pueden aprender de la dinámica de las series temporales y si se añade la teoría difusa, también pueden aprender de la incertidumbre inherente a las variables financieras, esta situación hace que el método propuesto sea mejor que la red neuronal tradicional.

Clasificación JEL: C01; C32; C45.

Palabras clave: Red neuronal difusa, función de pertenencia triangular, función de pertenencia trapezoidal, series de tiempo difusas.

ABSTRACT

This article compares the results obtained when forecasting the Stock Market Index applying a proposed Fuzzy Nonlinear Autoregressive Neuronal Network with those obtained using the Autoregressive Neuronal Network. For this purpose, the methodology is applied to four stock indices, IPC, IBEX 35, S&P 500 and the Nikkei 225 using daily data from January 2015 to December 2018, the first five financial days of January 2019 are added to carry out a forecast outside the sample. A Nonlinear Autoregressive Neuronal Network with three lags and Bayesian learning algorithms and the Fuzzy Nonlinear Autoregressive Neuronal Networks with three lags and a Backpropagation algorithm were used to calculate a forecast. The results have shown that the models proposed generate better forecasts considering in-sample and out-sample tests than the Nonlinear Autoregressive Neuronal Network. It was shown that the neural networks can learn from the dynamics of time series, and if fuzzy theory is added, they can also learn from the uncertainty around financial variables. This indicates that method proposed yields better results than the traditional network method.

Classification JEL: C01; C32; C45

Keywords: *Fuzzy Nonlinear Autoregressive Neuronal Network; Triangular Membership Function; Trapezoidal Membership Function; Fuzzy Time Series.*

Introducción

La presente investigación desarrolla la comparación entre la eficiencia de una nueva propuesta de Red Neuronal Autorregresivas basada en teoría difusa y la Red Neuronal Autorregresiva tradicional o Red Neuronal Autorregresiva No Lineal, para generar pronóstico de los índices bursátiles. Para realizar el estudio se tomaron los siguientes índices: IPC; IBEX 35; S&P 500 y Nikkei 225; en un formato diario desde enero de 2015 hasta diciembre de 2018, anexando los cinco primeros días de enero de 2019 para efectuar el

análisis fuera de muestra. El principal argumento de este documento es que la dinámica de las series de tiempo financieras puede modelarse con un mejor ajuste si se otorgan grados de membresía a la volatilidad.

Desde que la teoría de Series de Tiempo Difusas fue propuesta por Song y Chissom (1993a) se han generado varias aplicaciones en el pronóstico de series asociadas a temas como aplicaciones a universidades, economía, finanzas y otros. Se asume que la serie de tiempo es un conjunto difuso y por lo tanto puede ser analizado mediante relaciones de lógica difusas y razonamiento aproximado. Este modelo se basa en la incertidumbre y el conocimiento impreciso que contienen los datos de las series temporales. Song y Chissom (1993b) presentaron la definición de serie temporal difusa a partir de procesos esencialmente dinámicos en los que las observaciones son valores lingüísticos.

Tseng *et al.* (2001) a partir del modelo de series de tiempo ARIMA y el modelo de regresión difusa desarrolló una nueva metodología llamada modelo ARIMA-Difuso (Fuzzy-ARIMA). Éste se aplicó para pronosticar el tipo de cambio del dólar taiwanés contra el dólar americano. La importancia de este modelo es que proporciona a los tomadores de decisiones los mejores y peores escenarios posibles.

Tsaur (2012) elaboró un modelo de series temporales difusas con Cadenas de Markov para realizar pronósticos; mediante este modelo las series temporales difusas se modelan y se analizan mediante lógica difusa y el pronóstico se determina mediante inferencia difusa.

Otras formas de analizar las series temporales difusas fueron revisadas por Singh (2017); las principales características de sus investigaciones son: la determinación de la longitud de los intervalos, el establecimiento de relaciones de lógica difusa entre diferentes factores y la *desdifusificación* en un modelo de hibridación. También realizó una revisión de los trabajos que se han desarrollado con esta metodología.

Dash *et al.* (2016), desarrollaron una nueva metodología en la que consideran a la volatilidad de las series financieras como un proceso difuso. A partir de la ecuación de varianza del modelo EGARCH se crea una función de membresía gaussiana para modelar la volatilidad, y se genera un pronóstico a partir de reconocer que la volatilidad de las series de tiempo sigue un comportamiento normal. Se encontró que este modelo híbrido mejora significativamente los resultados con respecto a los modelos de menor complejidad. Pal *et al.* (2017) desarrollan un modelo que utiliza la técnica de Algoritmo Genético para decidir el tamaño y el número de intervalos y relaciones difu-

sas en la Serie de Tiempo Difusa. Este trabajo mejora el pronóstico con respecto a investigaciones anteriores sobre el tema.

Pal *et al.* (2018), desarrollan un estudio sobre el pronóstico de series temporales sobre diversos temas, donde se destaca el análisis de redes neuronales que modifican sus pesos sinápticos bajo modelos difusos tipo-2. Los resultados numéricos indican que su modelo logra captar la incertidumbre de las diversas situaciones en que está inmersa la sociedad. Otros trabajos similares son (Yu y Huarng, 2010); (Xiao, 2017); (Han, Zhong, y Han., 2018); (Egrioglu, Aladag y Yolcu, 2013); (Souza y Torres, 2018).

Srinivasan *et al.* (2019) analizan el pronóstico de las series temporales del mercado bursátil utilizando las Series Temporales Difusas y el Algoritmo de Búsqueda Gravitacional, partiendo de reconocer la incertidumbre de la acción a partir de su precio de apertura, máximo, mínimo y cierre. La metodología aplicada para este análisis muestra una mejora en comparación con los resultados de otras metodologías de Series Temporales Difusas.

Medina-Reyes *et al.* (2019), desarrollaron una serie de modelos mediante lógica difusa y modelos de varianza condicional, en los que se destaca la incorporación de parámetros difusos gaussianos a la ecuación de varianza de los modelos. Se encontró que los modelos híbridos, generan mejor pronóstico que los modelos tradicionales de econometría financiera.

Los sistemas difusos se han destacado por mejorar la solución de diversos problemas en los que existe ambigüedad en la información, y han sido de gran ayuda para identificar mejor las características de eventos difíciles de observar. Por tanto, esta investigación tiene por objeto incorporar los sistemas difusos para mejorar el aprendizaje de las redes neuronales (Mohammadian, 2020), (Cox, 2019).

El objetivo de este trabajo es realizar una comparación entre las redes neuronales autorregresivas tradicionales y los métodos difusos propuestos, para ello, la hipótesis es que los modelos difusos reconocen mejor la volatilidad de los índices bursátiles que los modelos tradicionales. Con el fin de mostrar la aplicabilidad y eficacia del método propuesto, se genera el pronóstico de los índices bursátiles Nikkei 225, IBEX 35, IPC y S&P 500. El resultado muestra que la metodología propuesta obtiene mejores pronósticos que los modelos tradicionales (Red neuronal autorregresiva no lineal).

La estructura de este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la primera sección se examinan los conceptos de series temporales difusas y redes adaptativas basadas en el modelo del sistema de inferencia difusa. En

la sección 2, se formulan y proponen el modelo híbrido de Series Temporales Difusas y Redes Neuronales No Lineales. En la sección 3, los modelos se aplican para pronosticar los índices bursátiles de EE. UU., España, México y Japón; y se comparan con los pronósticos obtenidos con la Red Neural Autorregresiva No Lineal. Por último, se presentan las conclusiones.

1. Revisión conceptual de los modelos de series temporales difusas y redes neuronales adaptativas basadas en sistemas de inferencia difusa

Las series de tiempo difusas se entienden según Song y Chissom (1994), como un proceso $Y(t)$ ($t = \dots, 0, 1, \dots$), un subconjunto de Z y el correspondiente discurso del conjunto difuso $\mu_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$), y tal que sea $F(t)$ una colección de $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots$ funciones de membresía. Entonces, $F(t)$ será conocida como una serie de tiempo difusa en $Y(t)$ ($t = \dots, 0, 1, \dots$). Donde el universo discurso Song y Chissom (1993a) es un conjunto difuso, de forma que su cota inferior y superior es delimitada por la información de la serie de tiempo.

$$U = [L_{bd}, U_{bd}] \quad (1)$$

Tomando a $F(t-1) = A_i$ y $F(t) = A_j$, se dice que existe una relación de lógica difusa entre $F(t-1)$ y $F(t)$, si $A_i \rightarrow A_j$. Por otro lado, las reglas IF-THEN de $F(t)$ en función de $F(t-1)$ se expresan como $F(t) = F(t-1) \circ R(t, t-1)$ esto se conoce como modelo de primer orden de $F(t)$ Song y Chissom (1993a).

También si $R(t, t-1) = R(t-1, t-2) \forall t$ entonces $F(t)$ será llamada serie de tiempo difusa en tiempo invariante, y en caso contrario, como serie de tiempo difusa en tiempo variante. De esta manera, si $F(t)$ es función de $F(t-1), F(t-2), \dots, F(t-n)$ se dice que es un modelo de orden superior $F(t-n), \dots, F(t-2), F(t-1) \rightarrow F(t)$ Song y Chissom (1993b).

Hasta el momento se asume que la serie de tiempo es un conjunto difuso y toda la información para conocer su dinámica está en su historia. Sin embargo, la dificultad de modelar series financieras obliga a utilizar modelos de mayor complejidad y como respuesta a ello se usan los modelos lineales difusos en combinación con modelos autorregresivos.

Otras formas de analizar las series temporales difusas fueron examinadas por Singh (2017) y Yu (2005), donde las principales características de las investigaciones son: la determinación de la longitud de los intervalos, el establecimiento de relaciones lógicas difusas entre diferentes factores, y la *desfuzzificación* de los valores de las series temporales difusas.

A partir de Wu *et al.* (2000), se propone un modelo de redes neuronales, donde la premisa fundamental es que la información que alimenta la red es un conjunto difuso. En cada fase de la red, los nodos pueden expresarse a través de funciones de pertenencia. Estas últimas, buscan extraer el grado de pertenencia de la información sobre el conjunto de estudio.

1.1. Redes neuronales adaptivas basadas en sistemas de inferencia difusos

Según Jang (1993), es necesario considerar una variable x que genera otra variable de salida z a través de una red neuronal, a partir de la cual se forma un modelo difuso de primer orden del tipo Sugeno, en el que las reglas de *If-Then* se determinan de la siguiente manera:

$$R_1: \text{if } x \text{ is } A_1 \text{ then } f_1 = p_1x + r_1 \quad (2)$$

$$R_2: \text{if } x \text{ is } A_2 \text{ then } f_2 = p_2x + r_2$$

En la primera fase de la estructura de red neuronal, cada nodo representa una variable de tipo lingüístico. En otras palabras, existe un subconjunto difuso para cada nodo de entrada de la red neuronal. En la segunda fase, cada nodo estará representado por una función de pertenencia, de la siguiente forma:

$$\mu_{ij}(x_i) = e^{-\frac{(x_i - c_{ij})^2}{\sigma_j^2}}; \quad i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, u. \quad (3)$$

Donde, $\mu_{it}(x_i)$ es una función de membresía con elementos x_i , σ_j^2 es el ancho y c_{ij} el centro de la función. Las variables que alimentan la red son r y el número de funciones de membresía es u . En la terce-

ra fase, cada nodo representa una parte de la regla difusa I_j y en la j – ésima regla R_j , su salida viene dada por:

$$\varphi_j = e^{-\frac{\sum_{i=1}^r (x_i - c_{ij})^2}{\sigma_j^2}} \quad (4)$$

$X = (x_1, \dots, x_r)$ y C_j es el centro de la j – ésima representa la unidad de la función de base radial. En la cuarta fase, los perceptrones se denotan como nodos normalizados. El número de nodos normalizados N es igual al número de nodos R .

$$\theta_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{k=1}^u \varphi_k} \quad (5)$$

En la quinta fase, cada nodo está representado por las variables de salida como la suma de las señales de entrada a esta fase, de tal manera que:

$$\theta_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{k=1}^u \varphi_k} \quad (6)$$

Donde y es el valor de la variable de salida y w_{2k} es el peso de cada regla. Los pesos están dados por:

$$w_{2k} = k_{j0} + k_{j1}x_1 + \dots + k_{jr}x_r \quad (7)$$

En conclusión, este modelo nos permite modelar las series temporales difusas utilizando los componentes de una red neuronal. Se asume, que las funciones de pertenencia son de tipo gaussiano, lo que permite identificar la pertenencia del valor de entrada en el subconjunto difuso. Por lo tanto, se reconoce que es posible desarrollar el pronóstico del mercado de valores mediante la teoría difusa y las redes neuronales artificiales.

2. Formulación de la Red Neuronal Autorregresiva Difusa No Lineal Híbrida: NARNET Triangular difusa y NARNET trapezoidal difusa

Esta sección muestra la estructura teórica de la Red Neuronal Autorregresiva Difusa para dos casos. En el primero, la red neuronal con función de membresía triangular y su capacidad de generar predicciones de la volatilidad de las variables financieras. Y en segundo, la red neuronal con función de membresía trapezoidal y sus cualidades teóricas para generar estimaciones de series de alta volatilidad. Estos modelos se construyeron a partir de dos metodologías existentes, las “Series Temporales Difusas” y las “Redes Neuronales Autoregresivas”.

La red neuronal NARNET Triangular Difusa (Fuzzy Triangular NARNET)¹ es un modelo de lógica difusa de primer orden del tipo Sugeno, y sus reglas *If-Then* en la capa de entrada se determinan de la siguiente manera:

$$R_1: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_1 \text{ then } f_1 = w_{11}y_{t-1} + w_{12}y_{t-2} + \dots + w_{n1}y_{t-n} \quad (8)$$

$$R_2: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_2 \text{ then } f_2 = w_{21}y_{t-1} + w_{22}y_{t-2} + \dots + w_{n2}y_{t-n}$$

$$R_3: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_3 \text{ then } f_3 = w_{31}y_{t-1} + w_{32}y_{t-2} + \dots + w_{n3}y_{t-n}$$

donde R representa las reglas *If-Then* de la serie de tiempo borrosa, A es el subconjunto triangular difuso para cada función f , que denota cada perceptrón con sus respectivos pesos sinápticos w . La Gráfica 1, muestra la función de membresía asociada a cada regla *If-Then* R que corresponde a un subconjunto difuso A . En este caso, los subconjuntos difusos son los niveles de volatilidad y las reglas *If-Then* son las funciones de aprendizaje difuso de la red neuronal de la primera capa.

Las reglas *If-Then* en la capa oculta son:

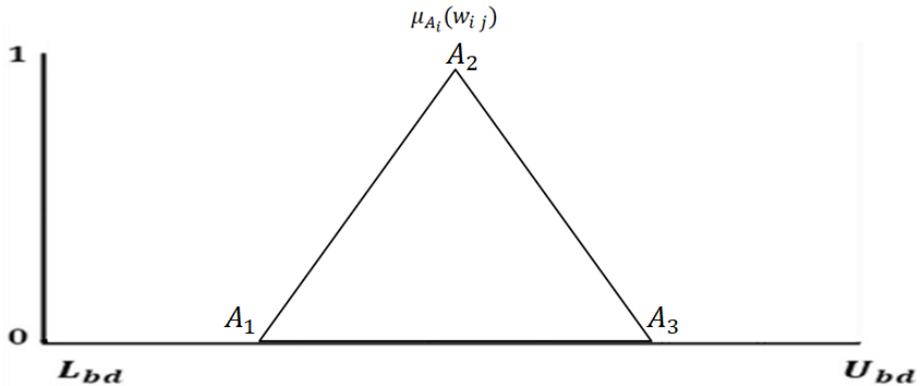
$$R_1: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_1 \text{ then } f_l = w_{k1}f_1 + w_{k2}f_1 \quad (9)$$

$$R_2: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_2 \text{ then } f_l = w_{m1}f_2 + w_{m2}f_2$$

$$R_3: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_3 \text{ then } f_l = w_{m1}f_3 + w_{m2}f_3$$

¹ NARNET por sus siglas en inglés Non Linear Autoregressive Neural Network, Red Neuronal Autorregresiva No Lineal Difusa Híbrida.

Gráfica 1. Función de Membresía Triangular



Fuente: elaboración propia en MatLab.

donde A es el subconjunto triangular difuso de cada f percepción difusa con sus respectivos pesos para la capa oculta de la red neuronal.

La ventaja de este método con respecto a la Red Neural Autoregresiva tradicional, es que el modelo propuesto aprende de la volatilidad de tres maneras: alta volatilidad, causada por buenas noticias; alta volatilidad, generada por malas noticias; y en baja volatilidad. Por ejemplo, la técnica propuesta genera un pronóstico con relación a la volatilidad de la serie financiera por medio de una función de membresía, lo que permite generar estimaciones según el grado de volatilidad.

La segunda red neuronal es la NARNET trapezoidal difusa (Fuzzy Trapezoidal NARNET). Se utiliza una red neuronal autorregresiva y un modelo difuso de primer orden del tipo Sugeno, para identificar sus componentes. Las reglas *If-Then* en la capa de entrada se determinan de la siguiente manera:

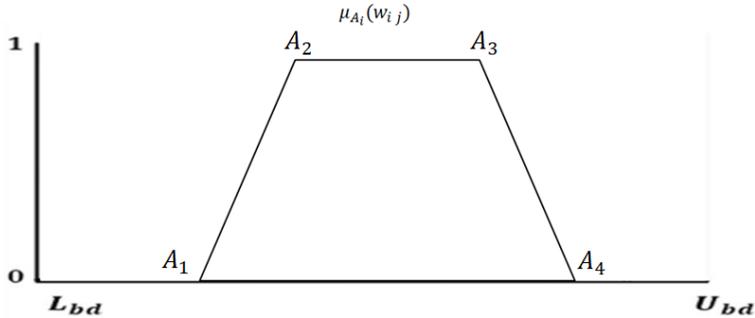
$$R_1: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_1 \text{ then } f_1 = w_{11}y_{t-1} + w_{12}y_{t-2} + \dots + w_{1n}y_{t-n} \quad (10)$$

$$R_2: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_2 \text{ then } f_2 = w_{21}y_{t-1} + w_{22}y_{t-2} + \dots + w_{2n}y_{t-n}$$

$$R_3: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_3 \text{ then } f_3 = w_{31}y_{t-1} + w_{32}y_{t-2} + \dots + w_{3n}y_{t-n}$$

$$R_4: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_4 \text{ then } f_4 = w_{41}y_{t-1} + w_{42}y_{t-2} + \dots + w_{4n}y_{t-n}$$

Gráfica 2. Función de Membresía Trapezoidal



Fuente: elaboración propia en MatLab.

donde R representa las reglas *If-Then* de la serie de tiempo difuso, A es el subconjunto difuso trapezoidal de cada función f asociado a un perceptrón difuso con sus respectivos pesos w . En este caso, se asume que la volatilidad puede capturarse a través de cuatro subconjuntos difusos.

En este sentido sea A el subconjunto difuso trapezoidal de cada función asociado a un perceptrón difuso con sus respectivos pesos w en la capa oculta de la red neuronal. Ahora las reglas de *If-Then* en la capa oculta son:

$$R_1: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_1 \text{ then } f_l = w_{k1}f_1 + w_{k2}f_1 \quad (11)$$

$$R_2: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_2 \text{ then } f_l = w_{m1}f_2 + w_{m2}f_2$$

$$R_3: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_3 \text{ then } f_l = w_{m1}f_3 + w_{m2}f_3$$

$$R_4: \text{if } y_{t-i} \text{ is } A_4 \text{ then } f_l = w_{m1}f_4 + w_{m2}f_4$$

En la primera fase de la red, cada nodo se concentra con la respectiva función de pertenencia del subconjunto difuso. Esto significa que y_t es la variable que alimenta cada nodo i y A_i es el subconjunto difuso denotado como valor lingüístico.

$$y_t = A_i$$

donde A_i es el conjunto difuso de y_t y expresa la serie temporal difusa. En específico, primero se usan las funciones de membresía de tipo triangular o trapezoidal y después, para mejorar la función de aprendizaje, la información se suaviza de la siguiente manera García *et al.* (2002):

$$z_{t-1} = \frac{y_{t-1} - \mu(y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-n})}{\sigma(y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-n})} \quad (12)$$

En la segunda fase, en la red neuronal, cada uno de los nodos está representado para una función determinada por las reglas *If-Then* (8) o (10). Esto significa que el nodo es la multiplicación de las diferentes señales y su suma es la salida.

$$f = w_1 z_{t-1} + w_2 z_{t-2} + \dots + w_n z_{t-n} \quad (13)$$

En la tercera fase, la salida del paso anterior se transforma a través de una función sigmoideal, así se tiene, la capa oculta se determina por las reglas *If-Then* (9) o (11).

$$f_s(f) = \frac{1}{1 + e^{-f}} \quad (14)$$

Por tanto, la capa oculta es denotada por la siguiente ecuación:

$$f_l = w_1 f_s + w_2 f_s \quad (15)$$

En el último nodo se realiza la suma de todas las señales de salida de la tercera fase y la variable de salida \hat{y}_t se representa como:

$$\hat{y}_t = f_l * \sigma(y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-n}) + \mu(y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-n}) \quad (16)$$

donde \hat{y}_t es el pronóstico de y_t , σ es la varianza de los valores pasados y μ representa la media de los valores pasados.

La función de costos se define por medio de la desviación media absoluta, tal como:

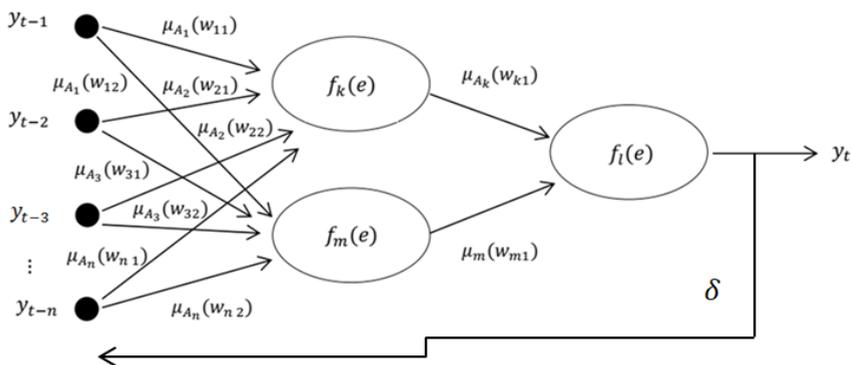
$$\epsilon = \frac{E|y_t - \hat{y}_t|}{n} \quad (17)$$

El algoritmo de aprendizaje de la red adaptativa basado en la inferencia difusa, está dado por las reglas *If-Then* y la observación de los parámetros de los modelos, lo que puede ser expresado por una combinación lineal de resultados generales expresado de la siguiente manera:

$$f = \overline{w_1}(p_1 y_t + r_1) + \overline{w_2}(p_2 y_t + r_2)$$

La principal ventaja de las redes neuronales difusas en relación con la red neuronal autorregresiva es que la red difusa permite decidir, además de los rezagos de las series temporales, la membresía de la volatilidad. En otras palabras, el método propuesto permite definir el aprendizaje de la red neuronal tanto en los patrones del pasado como en la función de membresía de la serie temporal.

Gráfica 3. Estructura del modelo Hybrid Fuzzy Nonlinear Autoregressive Neural Network



Fuente: elaboración propia.

3. Pronóstico de la Red Neuronal Autorregresiva Difusa Híbrida

Las Redes Neuronales Autorregresivas Difusas Híbridas se aplicaron a los datos diario de cuatro índices bursátiles: IPC, IBEX 35, S&P 500 y el Nikkei 225, desde enero de 2015 hasta diciembre de 2018, anexando los primeros cinco días de enero de 2019 para el análisis fuera de muestra (Yahoo!, 2019). Se estimó una Red Neural Autorregresiva No Lineal con tres rezagos, y un algoritmo de aprendizaje Bayesiano (NARNET), y se comparó con los resultados obtenidos con las redes neuronales difusas que se proponen en esta investigación.

El Cuadro 1, muestra los estadísticos generales de la rentabilidad de los índices bursátiles analizados, los resultados muestran que las cuatro variables tienen exceso de curtosis y distribución leptocúrtica, además la desviación estándar diaria está alrededor de 1% y la asimetría es negativa. De esta manera, las estadísticas indican que los valores extremos tienen una alta probabilidad de ocurrir, por lo que el pronóstico es aún más complicado de realizar. Por otro lado, la volatilidad en esta investigación se mide por la rentabilidad, y el modelo propuesto intenta estimar su comportamiento.

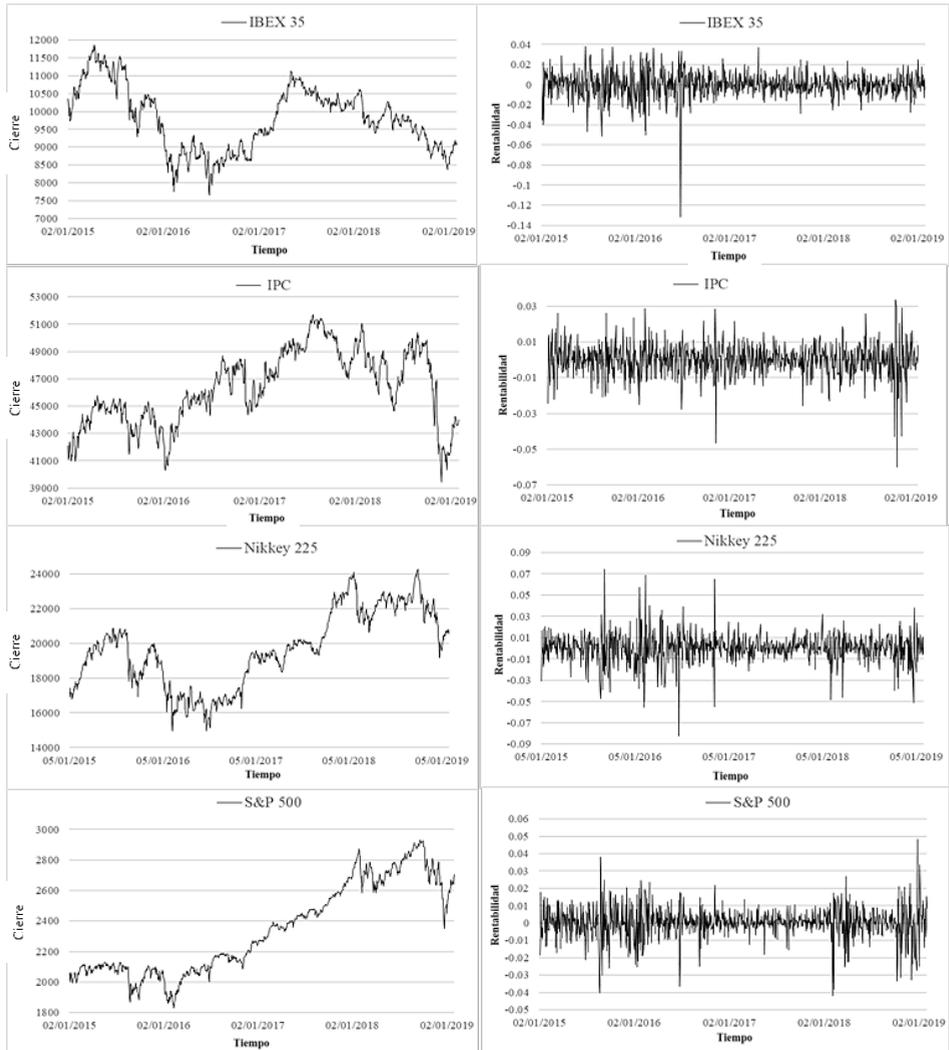
Los resultados se han compilado e ilustrado en una serie de gráficos y cuadros que se muestran en la Gráfica 4. La estructura de estos elementos se distribuye para tener en cuenta los índices bursátiles de México, Japón, EE. UU. y España. La razón para hacer esto, es identificar qué metodología puede modelar mejor la volatilidad de los diversos mercados. En este sentido, es importante reconocer los tres principales mercados del mundo, el europeo, el americano y el asiático (representados por un índice de cada continente).

Cuadro 1. Estadísticos generales de la rentabilidad de los índices bursátiles

Estadísticos \ índice Bursátil	IPC	IBEX 35	S&P 500	Nikkei 225
Media	0.0042%	-0.0129%	0.0266%	0.0177%
Desviación Estandar	0.86%	1.21%	0.87%	1.29%
Sesgo	-0.63	-1.39	-0.45	-0.34
Curtosis	4.6	14.29	3.88	5.58

Fuente: elaboración propia en Excel y MatLab con información de Yahoo Finance.

Gráfica 4. Cotización de cierre diario y rentabilidad de los índices bursátiles



Fuente: elaboración propia en Excel con información de Yahoo Finance.

La relación existente entre las variables económicas y los eventos sociales y políticos; causan cambios repentinos en el comportamiento de las variables financieras, y al mismo tiempo el incremento de la incertidumbre (medida por la volatilidad) ocasionando que el pronóstico sea cada vez más complicado (Rossi, 2013).

El Cuadro 2 ilustra los subconjuntos difusos de cada índice bursátil o las series temporales difusas asociadas a las variables. Las subsecciones (a, b, c y d) indican la función de pertenencia trapezoidal difusa del IPC,

Cuadro 2. Subconjunto Difusos

		IPC				Nikkei 225	
		L_{BD}	U_{BD}			L_{BD}	U_{BD}
a)	A1	-0.06	-0.01	b)	A1	-0.09	-0.01
	A2	-0.01	0		A2	-0.01	0
	A3	0	0.010		A3	0	0.010
	A4	0.01	0.04		A4	0.01	0.09
		IBEX 35				S&P 500	
		L_{BD}	U_{BD}			L_{BD}	U_{BD}
c)	A1	-0.06	-0.01	d)	A1	-0.06	-0.01
	A2	-0.01	0		A2	-0.01	0
	A3	0	0.010		A3	0	0.01
	A4	0.01	0.04		A4	0.01	0.05
		IPC				Nikkei 225	
		L_{BD}	U_{BD}			L_{BD}	U_{BD}
e)	A1	-0.06	-0.01	f)	A1	-0.07	-0.01
	A2	-0.01	0.012		A2	-0.01	0.01
	A3	0.012	0.04		A3	0.01	0.02
		IBEX 35				S&P 500	
		L_{BD}	U_{BD}			L_{BD}	U_{BD}
g)	A1	-0.06	-0.01	h)	A1	-0.06	-0.01
	A2	-0.01	0		A2	-0.01	0.005
	A3	0	0.02		A3	0.005	0.04

Fuente: elaboración propia.

Nikkey 225, IBEX 35 y el S&P 500, respectivamente, y las subsecciones (e, f, g y h) indican la función de pertenencia triangular difusa de la serie temporal. Hay que destacar que los subconjuntos de mayor amplitud en sus subconjuntos difusos son los de mayor incertidumbre (como lo indican sus estadísticos).

En el Cuadro 2 se define la clasificación de la volatilidad asociada a los índices bursátiles. Por ejemplo, la función de membresía trapezoidal IPC tiene cuatro pasos de comportamiento (subsección a) el primero corresponde a los subconjuntos $[-0.06, -0.01]$ asociado a volatilidad negativa (malas noticias), $[-0.01, 0]$ negativo estable (insignificante pero noticias negativas), $[0, 0.01]$ positivo estable (insignificante pero noticias positivas) y $[0.01, 0.04]$ positivo (buenas noticias); este subconjunto representa el aprendizaje clasificado de la *NARNET Trapezoidal Difusa* de cuatro grados.

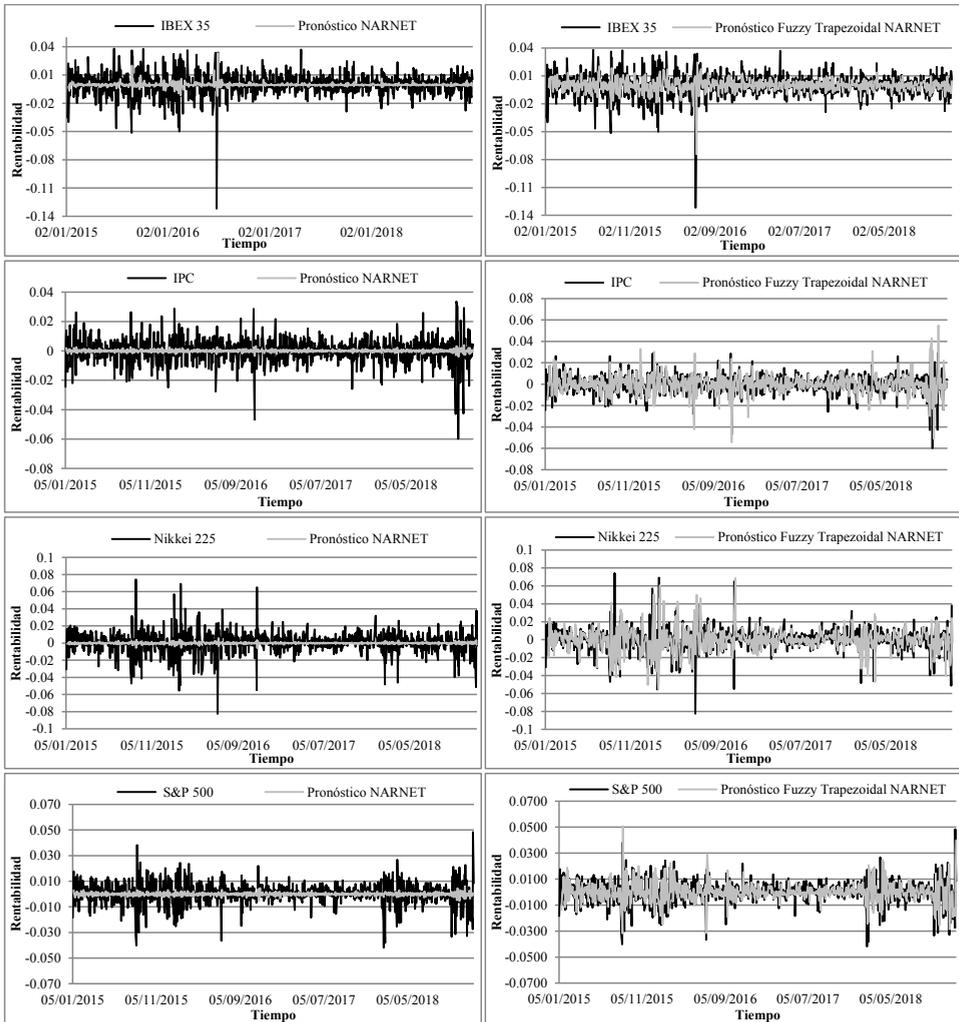
La subsección e define los subconjuntos difusos del índice Nikkei 225, $[-0,07, -0,01]$ asociados a volatilidad negativa (malas noticias), $[-0,01, 0,01]$ estable (noticias no significativas) y $[0,01, 0,02]$ positivo (buenas noticias); este subconjunto muestra el aprendizaje clasificado de la *Fuzzy Triangular NARNET* de tres grados. La interpretación de los conjuntos difusos asociados a otros índices bursátiles es la misma, la única diferencia son las cotas superior e inferior de cada subconjunto difuso.

La Gráfica 5 muestra la comparación entre el pronóstico de la *NARNET Trapezoidal Difusa* (lado derecho) y la *NARNET tradicional* (lado izquierdo), en ambos casos, la línea gris claro representa el pronóstico y la línea negra la rentabilidad. En el caso del IBEX 35, el método tradicional señala, que la estimación no captaba la alta volatilidad de esta variable, por otro lado, la red difusa genera un mejor pronóstico; como consecuencia de que se acerca más al comportamiento real. Esta situación es similar en el índice bursátil IPC, S&P 500 y el Nikkei 225, condición que se puede corroborar en el Cuadro 2, el cual indica que el error medio absoluto de la *NARNET Trapezoidal Difusa* es 0.13% menos que el modelo NARNET para el S&P 500, la red difusa del IBEX 35 tiene un error menor de 0.22%, el pronóstico difuso del IPC tiene un error inferior al 0.16% del pronóstico tradicional y por último la *NARNET Trapezoidal Difusa* aplicada al Nikkei tiene un error diario de 0.21% menor que la *NARNET tradicional*.

La Gráfica 6 indica la comparación de la *NARNET Triangular Difusa* (lado izquierdo) y la *NARNET tradicional* (lado derecho), en ambos casos representada por la línea gris claro. La predicción del IBEX 35 señala que el método propuesto genera una mejor estimación que la red tradicional,

esto se puede ver en la Gráfica 6 en que la predicción difusa se ajusta mejor al índice bursátil español que el modelo no-difuso. Una situación similar se da con el Índice Mexicano, el Índice de Estados Unidos y el Índice de la Bolsa de Valores de Japón.

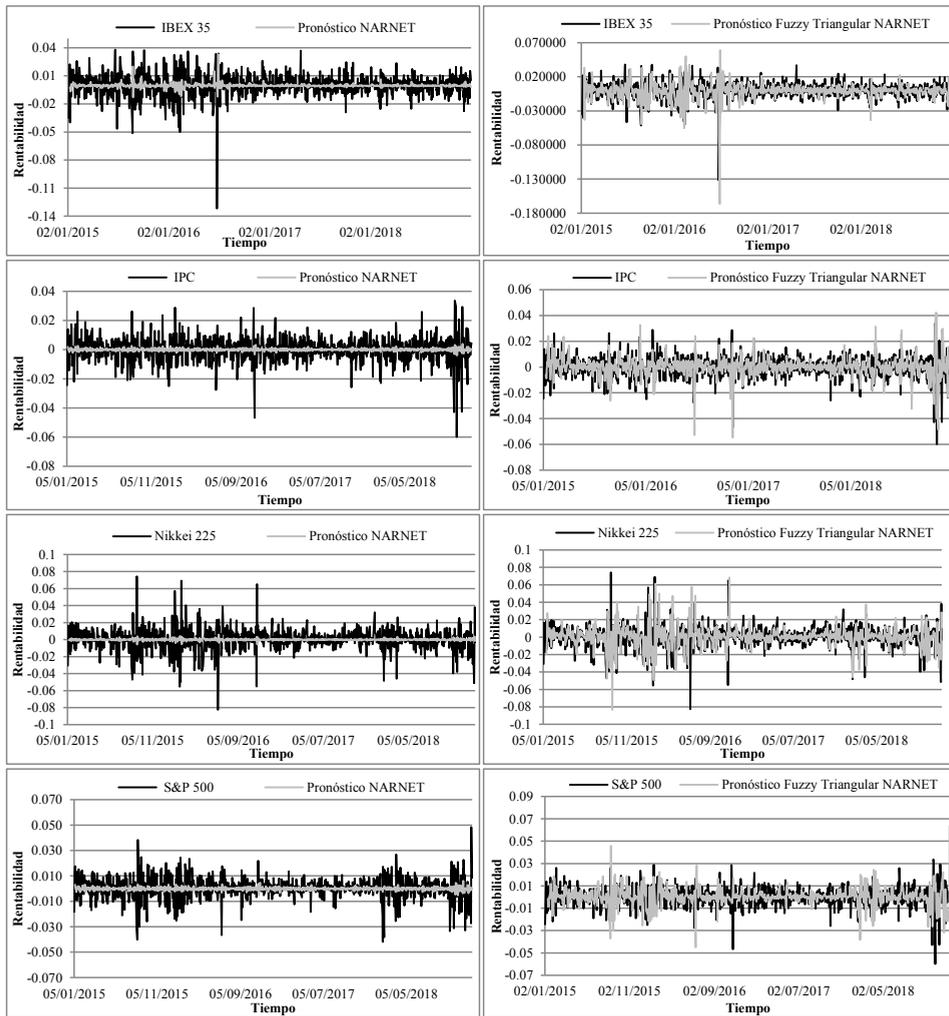
Gráfica 5. Comparación del pronóstico de los modelos NARNET Trapezoidal Difuso y NARNET tradicional



Fuente: elaboración propia en Excel y MatLab con información de Yahoo Finance.

Estos resultados muestran que el aprendizaje clasificado de las redes propuestas mejora significativamente la predicción de las variables de alta volatilidad, ya que al incorporar una función de membresía triangular al aprendizaje de las redes neuronales autorregresivas, se identifican tres

Gráfica 6. Comparación del pronóstico de los modelos NARNET Triangular Difusa y la NARNET tradicional



Fuente: elaboración propia en Excel y MatLab con información de Yahoo Finance.

grados de membresía de la volatilidad de las series temporales financieras, es decir, se obtienen los pesos sinápticos que modelan el comportamiento de la variable con un entorno positivo (buenas noticias), estable (noticias no significativas) y uno negativo (malas noticias); permitiendo así obtener mejores predicciones. Por otro lado, al incorporar la función de membresía trapezoidal, se clasifican cuatro grados de volatilidad, un entorno positivo (buenas noticias), estable positivo (noticias insignificantes pero positivas), estable negativo (noticias insignificantes pero negativas) y negativo (malas noticias); generando una mejor adaptación a la incertidumbre de la serie temporal.

La principal diferencia de los modelos propuestos es que depende de los grados de incertidumbre asociados a las series de tiempo financieras que las redes neuronales aprenderán mejor con una función triangular o trapezoidal. Por lo tanto, según el grado de volatilidad, se debe elegir la función de membresía que mejor se adapte a las condiciones de mercado estudiado.

El Cuadro 3 ilustra la comparación de la desviación media absoluta para los cuatro índices analizados, el principal resultado en relación con las redes difusas y la NARNET es que los modelos difusos tienen un error más bajo que el modelo tradicional, por ejemplo, el pronóstico difuso del S&P 500 tiene un 0.16% menor de error, el pronóstico difuso del IBEX 35 tiene un error 0.105 más bajo, en el pronóstico difuso del IPC el error es 0.14 más bajo que el de la red tradicional y el pronóstico difuso del Nikkei tiene un error 0.13% menor, para datos diarios en todos los casos.

Es importante reconocer que con la metodología propuesta se obtiene una mejora significativa en términos de reducción del error con respecto a los modelos tradicionales de redes neuronales y según (Medina-Reyes,

Cuadro 3. Comparación de la desviación media absoluta diaria

Índice Bursátil	<i>NARNET</i>	<i>NARNET</i>	<i>NARNET</i>
	<i>Trapezoidal Difusa</i>	<i>Triangular Difusa</i>	
IPC	0.4650%	0.4670%	0.6302%
IBEX 35	0.6146%	0.7392%	0.8378%
S&P 500	0.4626%	0.5814%	0.6288%
Nikkei 225	0.6749%	0.7594%	0.8870%

Fuente: elaboración propia en Excel.

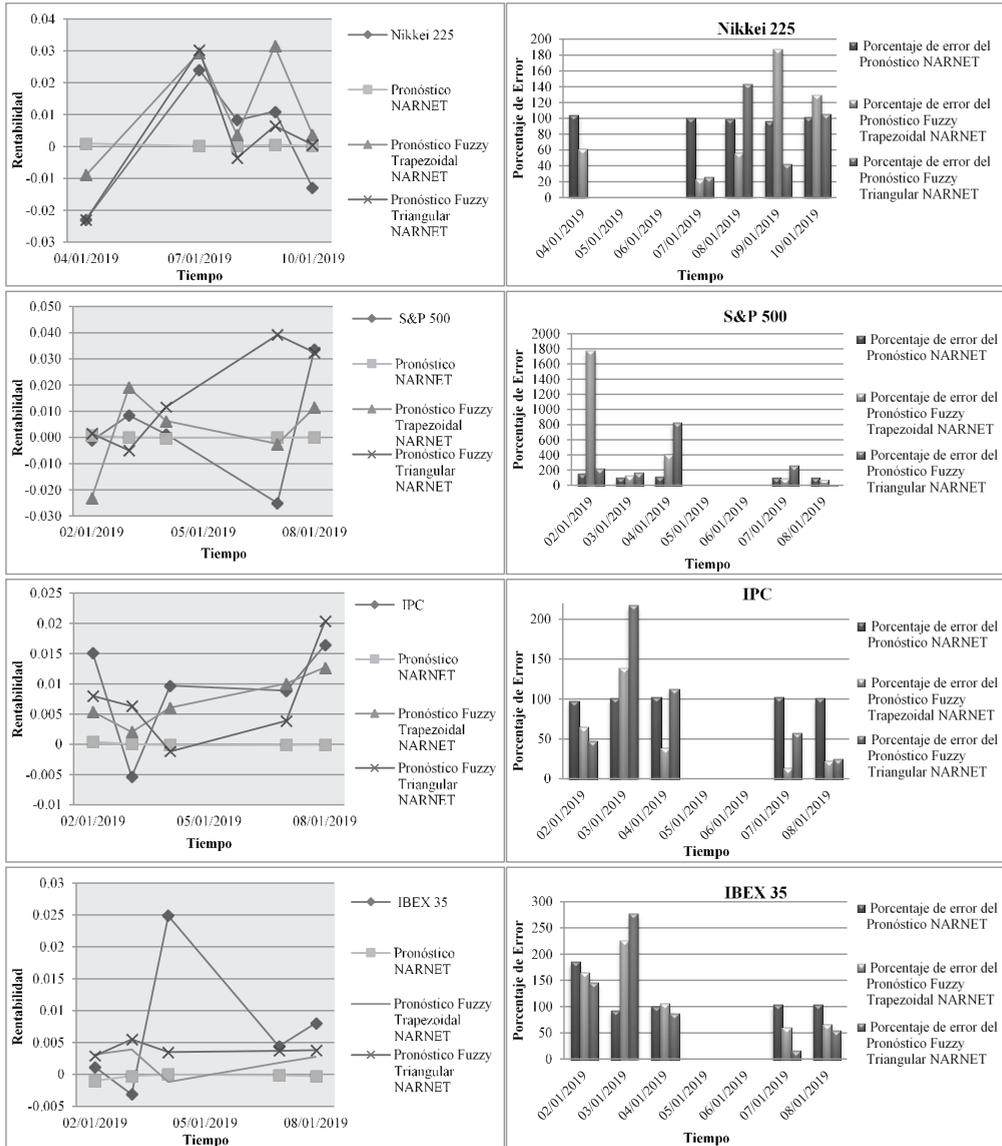
2019) esta mejora no sólo se da en las redes neuronales, sino también en los modelos lineales, (ARIMA) y no lineales (GARCH). Por lo tanto, los modelos propuestos modelan el comportamiento de las variables financieras mejor que los modelos y metodologías anteriores, mostrando que los modelos difusos son mejores que las metodologías mencionadas.

La Gráfica 7 muestra la comparación del modelo propuesto y la prueba de la red neuronal autorregresiva no lineal fuera de muestra durante los primeros cinco días cotizados por cada índice en 2019. En el lado derecho está el pronóstico del índice de acciones y en el lado izquierdo está el error porcentual de pronóstico, el pronóstico NARNET tradicional es la línea gris claro con marcadores cuadrados en los cuatro casos, se observa un pronóstico consistente en comparación con los valores reales (línea negra). Por otro lado, la línea gris claro es NARNET Trapezoidal Difusa, la cual genera un mejor pronóstico que la NARNET tradicional y en el caso del Nikkei 225 y el IPC, la línea gris claro tiene un comportamiento muy similar al valor real del índice bursátil. Es posible identificar que el pronóstico difuso se adapta mejor a las variaciones en la serie temporal de la muestra que la metodología tradicional de la red neuronal.

La Gráfica 7 también ilustra los resultados del pronóstico fuera de la muestra en escala de grises; la sección izquierda muestra el pronóstico de los 4 índices bursátiles. Se destaca que la predicción NARNET, denotada con la línea con marcadores cuadrados, tiende a ser una línea recta que pierde potencial de pronóstico a lo largo del tiempo. Por otra parte, un resultado destacable en la estimación fuera de muestra de los modelos basados en teoría difusa, indicados con las líneas con marcadores de triángulos y de equis, es que estos se adaptan mejor a la volatilidad de los mercados y generan buenos pronósticos en comparación con los modelos de redes bayesianas.

La *NARNET Triangular Difusa* genera una mejor estimación que el modelo tradicional en el Nikkei 225 y el IPC, pero para el S&P 500 y el IBEX 35 todos los modelos no tienen un buen pronóstico. Esto se puede apreciar en el porcentaje de error diario (gráfico de la izquierda) donde el error del índice de EE. UU. y España fue mayor que el de Japón y México. En este gráfico, algunos días no tienen valores debido a que para esos días el mercado no generó precios. La *NARNET Triangular Difusa* no generó error en el primer día de pronóstico en el Nikkey 225 y en los índices bursátiles fue el mejor modelo, pero en los días siguientes el error aumentó para los tres modelos. El S&P 500 tiene una alta volatilidad y los modelos no capturan su comportamiento,

Gráfica 7. Pronóstico fuera de muestra y porcentaje de error diario



Fuente: elaboración propia en Excel con información de Yahoo Finance.

pero el error disminuye en las predicciones de los siguientes días, la misma situación ocurre en el IBEX.

Por último, los modelos propuestos generan un mejor pronóstico dentro de muestra y fuera de muestra que la Red Neuronal Autorregresiva No Lineal. Por lo tanto se concluye que las redes neuronales pueden aprender de la dinámica de las series temporales y si se añade la teoría difusa también pueden aprender de la incertidumbre de las variables financieras. Esta situación hace que el método propuesto se considere mejor que la red tradicional.

Conclusión

Los modelos tradicionales de redes neuronales son generalmente aceptados en la ciencia económica por su gran contribución al estudio y pronóstico de la no linealidad de las series temporales financieras; en la presente investigación, el análisis se realiza con la metodología de las redes neuronales autorregresivas basadas en teoría difusa que incorpora en su estructura las funciones de membresía triangular y trapezoidal. Los resultados sugieren que la metodología propuesta genera una mejor estimación de la volatilidad de los índices bursátiles IBEX 35, S&P 500, IPC y Nikkei 225 en comparación con las redes neuronales tradicionales.

La mejora en la estimación de los modelos presentados se atribuye a la incorporación de un elemento muy relevante dentro de la teoría difusa, es decir, la función de membresía. En estos métodos se considera que la función de membresía como **clasificadora** de la volatilidad juega un papel de suma importancia para el pronóstico de las series temporales, apoyado específicamente en la identificación de los grados de incertidumbre asociados a las diversas condiciones económicas, políticas y sociales que pueden impactar en el comportamiento del mercado de valores.

El principal resultado obtenido es que la aplicación de la teoría difusa dentro de la metodología tradicional de redes neuronales constituye una contribución relevante en el estudio de la no linealidad de las series de tiempo financieras, esto se atribuye a que los modelos propuestos reconocen mejor la incertidumbre de las variables con gran volatilidad en su comportamiento, lo anterior se debe a que la combinación de ambas metodologías ocasiona un aprendizaje clasificado de la incertidumbre existente en las series temporales para lograr así pronósticos más precisos.

Un aspecto importante por destacar es que, al incorporar una función de membresía triangular al aprendizaje de las redes neuronales autorregresivas, se identifican tres grados de membresía de la volatilidad en las series de tiempo financieras. Es decir, se obtienen los pesos sinápticos que modelan el comportamiento de la variable con un entorno positivo (buenas noticias), estable (noticias no significativas) y negativo (malas noticias); permitiendo así obtener mejores predicciones. Por otro lado, al incorporar la función de membresía trapezoidal, se clasifican cuatro grados de volatilidad, un entorno positivo (buenas noticias), estable positivo (noticias insignificantes pero positivas), estable negativo (noticias insignificantes pero negativas) y negativo (malas noticias); generando una mejor adaptación a la incertidumbre de las series temporales. La principal diferencia entre los modelos propuestos consiste en que, dependiendo de la incertidumbre asociada a una serie temporal financiera, las redes neuronales aprenderán mejor con una función triangular o trapezoidal.

Otro hallazgo es que al realizar la comparación con investigaciones precedentes sobre el tema, la incorporación de la función de membresía en las redes neuronales se adapta de forma diferente, porque en lugar de suponer que la serie temporal tiene una función de membresía, la función se utiliza como clasificadora de la volatilidad, lo que permite variar los perceptrones para mejorar el aprendizaje de la no linealidad de las series temporales financieras.

Estos modelos no sólo pueden predecir el índice del mercado de valores, si no también otras variables financieras como los tipos de cambio, el flujo de caja, los tipos de interés, las acciones y otras variables multidisciplinarias con la característica de alta volatilidad en su comportamiento.

Referencias bibliográficas

- Cox, E. (2019). *The Fuzzy Systems Handbook: A Practitioner's Guide to Building, Using, and Maintaining Fuzzy Systems*/Book and Disk.
- Dash, R., y Dash, P. (2016). "An Evolutionary Hybrid Fuzzy Computationally Efficient EGARCH Model for Volatility Prediction". *Applied Soft Computing*, pp. 40-60.
- Egrioglu, E., Aladag, C. H., y Yolcu, U. (2013). "Fuzzy Time Series Forecasting With a Novel Hybrid Approach Combining Fuzzy c-means and Neural Networks". *Expert Systems with Applications*, pp. 854-857.

- Egrioglu, E., Aladag, C. H., Yolcu, U., Basaran, M. A., y Uslu, V. R. (2009). "A New Hybrid Approach Based on SARIMA and Partial High Order Bivariate Fuzzy Time Series Forecasting Model". *Expert Systems with Applications*, vol. 36, núm 4, pp. 7424-7434.
- García, J., López, A. M., Romero, J., García, A. R., Camacho, C., Cantero, J. L., Salas, R. (2002). "Hojas de cálculo para la simulación de redes neuronales artificiales". *Questtió*, núm. 26, pp. 289-305.
- Han, M., Zhong, K., y Han., B. (2018). "Interval Type-2 Fuzzy Neural Networks for Chaotic Time Series Prediction: A Concise Overview". *IEEE Transactions on Cybernetics*, pp. 1-12.
- Jang, J. R. (1993). "ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System". *IEEE Transactions on Systems*, pp.665-685.
- Medina-Reyes, J. E. (2019). "Studies of Fuzzy Time Series Models: An Application to the Forecast Exchange Rate, Mexican Peso/ American Dollar". *Research-Gate. (IPN Ed.)*, Thesis for: Master of Science, Advisor: Salvador Cruz Aké; Agustín Ignacio Cabrera Llanos, DOI:10.13140/RG.2.2.21331.53288.
- Medina-Reyes, J. E., Cabrera-Llanos, A. I., y Cruz-Aké, S. (2019). "FUZZY GARCH and FUZZY EGARCH Models with Gaussian parameters for forecast the Foreign Exchange Market". *IX FIMEF International Financial Research Conference* (p. 14). Merida, Yucatán: Fundación de Investigación IMEF .
- Mohammadian, M. (2020). "Modeling, Control, and Prediction using Hierarchical Fuzzy Logic Systems: Design and Development. In *Robotic Systems: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications*" (pp. 187-207). IGI Global.
- Pal, S. S., y Kar, S. (2017). "Fuzzy Time Series Model for Unequal Interval Length Using Genetic Algorithm". *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 205-216.
- Pal, S. S., y Kar, S. (2018). "A Hybridized Forecasting Method Based on Weight Adjustment of Neural Network Using Generalized Type-2 Fuzzy Set". *International Journal of Fuzzy Systems*, pp. 1-13.
- Rossi, G. D. (2013). "La Volatilidad en Mercados Financieros y de Commodities. Un Repaso de sus Causas y la Evidencia Reciente". *Invenio*, pp. 59-74.
- Singh, P. (2017). "A Brief Review of Modeling Approaches Based on Fuzzy Time Series". *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8(2), pp. 397-420.
- Song, Q., y Chissom, B. S. (1993a). "Fuzzy Time Series and its Models". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 54, pp. 269-277.
- Song, Q., y Chissom, B. S. (1993b). "Forecasting Enrollments With Fuzzy Time Series — Part I". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 54, pp. 1-9.

- Song, Q., y Chissom, B. S. (1994). "Forecasting Enrollments With Fuzzy Time Series Part II". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 62, pp. 1-8.
- Souza, P. V., y Torres, L. C. (2018). "Regularized Fuzzy Neural Network Based on Or Neuron for Time Series Forecasting". *Springer International Publishing AG*, part of Springer Nature, pp. 13-23.
- Srinivasan, y Lakshmi. (2019). "Stock Price Prediction Using Fuzzy Time-Series Population-Based Gravity Search Algorithm". *International Journal of Software Innovation*, pp. 50-64.
- Tsaur, R.-C. (2012). "A Fuzzy Time Series-Markov Chain Model with an Application to Forecast the Exchange Rate Between the Taiwan and US Dollar. *International Journal of Innovative Computing*". *Information, and Control*, núm. 8, pp. 4931-4942.
- Tseng, F.-M., y Tzeng, G.-H. (2002). "A Fuzzy Seasonal ARIMA Model for Forecasting. *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 126, pp. 367-376.
- Tseng, F.-M., Tzeng, G.-H., Yu, H.-C., y Yuan, B. J. (2001). "Fuzzy ARIMA Model for Forecasting the Foreign Exchange Market". *Fuzzy Sets and Systems*, núm. 118, pp. 9-19.
- Wu, S., y Er, M. J. (2000). "Dynamic Fuzzy Neural Networks; A Novel Approach to Function Approximation". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*
- Xiao, Q. (2017). "Time Series Prediction Using Bayesian Filtering Model and Fuzzy Neural Networks". *International Journal for Light and Electron Optics*, pp. 1-20.
- Yahoo (2019). *Yahoo! Finance*. Obtained from: <https://finance.yahoo.com/>.
- Yu, H.-K. (2005). "Weighted Fuzzy Time Series Models for TAIEX Forecasting". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, núm. 349, pp. 609-624.
- Yu, T. H.-K., y Huarng, K.-H. (2010). "A Neural Network-Based Fuzzy Time Series Model to Improve Forecasting". *Expert Systems with Applications*, pp. 3366-3372.

Desempeño de ocho de las criptomonedas de mayor capitalización de mercado

Performance of Eight of the Cryptocurrencies of Greater Market Capitalization

Francisco López-Herrera*

Luis Guadalupe Macías Trejo**

Oscar Valdemar de la Torre Torres***

(Fecha de recepción: 20 de noviembre de 2019, Fecha de aceptación 27 de enero de 2020)

RESUMEN

Este artículo muestra los resultados de un análisis del desempeño de ocho de los criptoactivos más importantes entre la gran variedad que actualmente existe en el mercado. Se estudia su riesgo de mercado con base en métricas ampliamente utilizadas para activos financieros. El análisis se complementa con la evaluación de su desempeño dentro de portafolios formados con criterios convencionales. Se encuentra un comportamiento bastante heterogéneo entre los activos estudiados, sugiriendo que tal comportamiento obedece a las características específicas de cada uno de ellos, más que a las características comunes como una clase específica de activos.

* División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.
francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx, ORCID: 0000-0003-2626-9246

** Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas.
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Morelia, Michoacán, México.

*** Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas.
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Morelia, Michoacán, México.
oscar.delatorre.torres@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9281-974X

Clasificación JEL: G12, G14, G19

Palabras clave: criptomonedas, portafolios, riesgo, Drawdown, VAR, Expected Shortfall.

ABSTRACT

This paper shows the results of an analysis of eight of the most important cryptocurrencies among the great variety that currently exists in the market. Their market risk is studied based on measures widely used in financial asset markets. The analysis is complemented by the evaluation of their performance within portfolios formed with also conventional criteria. A fairly heterogeneous behavior is found among the assets studied, suggesting that such behavior is due to the specific characteristics of each of them, rather than their common characteristics as a specific class of assets.

JEL Codes: G12, G14, G19.

Keywords: *Cryptocurrencies, Portfolios, Drawdown, VAR and Expected Shortfall.*

Introducción

Como consecuencia de la explosiva aparición de criptomonedas,¹ ha crecido el interés por parte de la academia en estudiar sus características, en particular el desempeño y el riesgo de mercado que presentan, pues además de facilitar las operaciones cambiarias y la obtención de financiamiento para las empresas, han alcanzado una gran popularidad por haberse convertido en novedosos vehículos de inversión. De acuerdo con Beneki *et al.* (2019), una criptomoneda es un medio digital de intercambio que ha captado gran atención por parte de las empresas, medios de comunicación, institutos financieros y gubernamentales e inversionistas. La moneda virtual o criptomoneda es un símbolo o sinónimo de valor considerado como un sistema de pago tecnológico, el cual ha continuado desarrollándose durante las dos últi-

¹ A lo largo de este trabajo se usa "criptomoneda" a diferencia de "criptoactivos" o "criptodivisas", para referirse a los medios digitales de intercambio que utilizan criptografía, por ser el término más utilizado, aunque formalmente no constituyen una moneda sino un activo.

mas décadas (Rogojanu y Badea, 2015). A su vez, Maftai (2014) explica que las criptomonedas tienen su fundamento en la idea de intercambiar valor sin la aprobación de una institución financiera.

Actualmente el número de criptomonedas disponibles en el mercado supera las cinco mil, sin embargo, la mayor parte de la investigación académica se ha centrado en Bitcoin (BTC), considerada la primera criptomoneda, la cual fue introducida en octubre de 2008 mediante la publicación de "The Bitcoin Whitepaper"² en forma anónima por un individuo o grupo de personas, bajo el seudónimo "Satoshi Nakamoto". A pesar de la gran y, al parecer, siempre creciente cantidad de nuevas criptomonedas, según Klein *et al.* (2018), el mercado es dominado por Bitcoin, Ethereum y Ripple que en conjunto rebasan el 60% de la capitalización total del mercado. El seis de marzo de 2019 esas monedas se mantenían junto con Litecoin, Tether, Bitcoin Cash, EOS y Tron, como las ocho criptomonedas de mayor capitalización de mercado.

Litecoin (LTC), creada en 2011 por Charlie Lee, es conocida como el primer sustituto de la Bitcoin, según Tu y Xue (2018) fue desarrollada con una versión modificada del algoritmo de Bitcoin. Ethereum,³ fue desarrollada por Vitalik Buterin, e inició su operación en 2015. Su objetivo fue que a través de su plataforma sea posible operar aplicaciones descentralizadas y colaborativas. El precio de su criptomoneda se ha incrementado notoriamente a pesar de su corto periodo de tiempo en el mercado. Por su parte, Ripple es considerado un activo digital orientado a transferencias bancarias y una opción de liquidación más eficiente para las instituciones financieras y los proveedores de liquidez que buscan un alcance global, porque el costo de sus transacciones es menor que el de otras criptomonedas. Tether es una criptomoneda con un valor destinado a reflejar el valor del dólar estadounidense. La idea original de su creación, según Wei (2018), fue tener una criptomoneda estable que pudiera fungir como dólar digital como un sustituto estable del dólar. EOS y BitcoinCash comparten características de eliminación de tarifas de transacción, descentralización y anonimato. Tron es una criptomoneda china creada en 2017 por Justin Sun, sus características son similares al resto de las criptomonedas y su uso principal es descentralizar los contenidos de internet de forma tal que artistas, creadores, músicos y au-

² El nombre del documento original es: Bitcoin a Peer to Peer Electronic Cash System.

³ Ethereum es la plataforma que provee el criptoactivo llamado Ether.

tores puedan compartir sus contenidos sin recurrir a intermediarios como Amazon, Facebook, Youtube y otros.

A pesar de que se pueden considerar como miembros de una misma clase de activos para efectos de inversión, se aprecia que existe en las criptomonedas cierto nivel de heterogeneidad originado porque sus características son muy particulares, prácticamente específicas a cada uno de esos activos. Con esa perspectiva, este artículo ofrece, a diferencia de los trabajos previamente efectuados sobre criptomonedas, el ser uno de los primeros en presentar un análisis del desempeño y riesgo de las ocho criptomonedas arriba mencionadas. Adicionalmente al análisis de su desempeño con base en medidas ampliamente utilizadas en los mercados financieros mundiales, este trabajo complementa investigaciones previas, y posiblemente contribuye a la administración de portafolios de inversión, mediante una mejora al perfil del riesgo de portafolios.

La estructura de este artículo es la siguiente: en la primera parte se ofrece una revisión de la literatura pertinente, seguida, en la sección de metodología, por la descripción de los indicadores de desempeño, que se utilizan, posteriormente en la sección correspondiente al análisis de los datos y resultados, y se finaliza con las conclusiones.

1. Revisión de literatura

Halaburda y Gandal, (2014) analizaron si hay oportunidades para el arbitraje triangular a través del comportamiento de los tipos de cambio de diferentes monedas virtuales considerando a Bitcoin, Litecoin, Peercoin, Namecoin, Feathercoin, Novacoin y Terracoin, durante una ventana de tiempo con precios diarios del 2 de mayo de 2013 al 1º de julio de 2014. Concluyeron que Bitcoin dentro de un portafolio diversificado incrementa significativamente el rendimiento ajustado por el riesgo debido a los altos rendimientos promedio y bajo nivel de correlación con otros activos financieros. Por su parte, Yermack (2013) examinó si el Bitcoin debe considerarse una moneda y concluye que el Bitcoin se comporta más como una inversión especulativa que como una moneda.

Ciaian *et al.* (2014), analizan la relación entre el precio, oferta y demanda de Bitcoin y algunos indicadores macrofinancieros globales utilizando datos para el periodo de 2009 a 2014. Mediante el modelo VAR (modelo de vectores autoregresivos) de Lütkepohl y Krätzig (2004), muestran que los fundamentales y el proceso de subasta tienen un impacto significativo en el

precio de Bitcoin. Posteriormente, Carrick (2016) analiza el valor y volatilidad de Bitcoin en tres diferentes contextos. Primero, Bitcoin en relación con las principales monedas del mundo: dólar australiano, franco suizo, euro, libra esterlina y el yen japonés. Segundo, Bitcoin en relación con las monedas de mercados emergentes. Tercero, el Bitcoin en relación con los ETF (Exchange-Traded Funds) de mercados emergentes de ETF. De igual forma llevó a cabo pruebas de desempeño (índice de Sortino e índice de Sharpe) para portafolios diarios del 11 de enero de 2011 al 31 de diciembre de 2015. Sus resultados sugieren que el Bitcoin posee características que lo hacen adecuado para funcionar como un complemento de las monedas de mercados emergentes, y existen formas de minimizar los riesgos de Bitcoin.

Balcilar *et al.* (2017) desarrollaron un estudio que emplea, en contraste, una prueba de causalidad no paramétrica en los cuantiles para analizar la relación causal entre el volumen de operaciones, los rendimientos y la volatilidad de Bitcoin sobre el conjunto de sus respectivas distribuciones condicionales. Su periodo de análisis fue del 19 de diciembre de 2011 al 25 de abril de 2016. La prueba muestra que el volumen puede predecir los rendimientos excepto en los regímenes del mercado de Bitcoin alcista y bajista. El resultado destaca la importancia de modelar la no linealidad y tener presente el comportamiento de la cola al analizar las relaciones causales entre los rendimientos de Bitcoin y el volumen de operaciones. Durante este mismo año Bariviera *et al.* (2017) analizaron las propiedades estadísticas del mercado a través de un estudio que compara el Bitcoin y la dinámica de monedas estándar bajo el enfoque de análisis de rendimientos en diferentes escalas. El periodo de análisis fue de 2011 hasta 2017 utilizando datos de transacciones de rendimientos de Bitcoin para probar la presencia de memoria larga en los rendimientos de la serie de tiempo. Posteriormente, se calculó el exponente de Hurst mediante el método DFA (Detrended Fluctuation Analysis) utilizando una ventana deslizante para medir dependencia de largo alcance. Sus resultados muestran que los exponentes de Hurst y el análisis multiescala cambian significativamente durante los primeros años de existencia de Bitcoin y tienden a estabilizarse en los últimos tiempos.

En Bouri *et al.* (2017) se muestra un análisis para conocer si el Bitcoin puede ser utilizado como cobertura y refugio para los principales índices mundiales de acciones, bonos, petróleo, oro, S&P500 y el índice del dólar estadounidense. Se utilizó el modelo de correlación dinámica condicional (DCC) propuesto por Engle (2002) para el periodo de análisis con datos

diarios y semanales de julio 2011 a diciembre 2015. Sus resultados muestran que el Bitcoin no es adecuado para ser utilizado como cobertura, y es adecuado sólo para fines de diversificación. Sin embargo, sugieren que el Bitcoin puede servir como un fuerte refugio seguro contra los movimientos semanales de bajas en las acciones asiáticas.

Por su parte, Blau (2018) busca hechos estilizados sobre la dinámica de los precios de Bitcoin y demostrar la hipótesis de que el comercio especulativo en Bitcoin es responsable de su inusual volatilidad. Lo anterior se lleva a cabo mediante el uso de una medida intuitiva del comercio especulativo propuesta por Llorente *et al.* (2002) que captura el nivel de autocorrelación inducida por el volumen. Sus resultados no muestran influencia en el aumento o desplome en el valor de Bitcoin a través del comercio especulativo durante el 2013 y tampoco se encontró evidencia de asociación directa del comercio especulativo con el inusual nivel de volatilidad de Bitcoin. Sin embargo, Corbet y Katsiampa (2018) siguiendo el enfoque propuesto por Nam *et al.* (2006), exploran si los rendimientos de criptomoneda, representados por el Bitcoin, presentan patrones de inversión asimétricos similares por hora, diarios y semanales para la ventana temporal de junio 2010 a febrero 2018. Sus principales resultados destacan evidencia de reversión asimétrica a la media en los rendimientos de Bitcoin.

Corbet *et al.* (2018), analizan las relaciones entre criptomonedas populares y una variedad de otros activos financieros, mostrando que las criptomonedas ofrecen beneficios en la diversificación para inversionistas con horizontes de inversión cortos, y la variación del tiempo refleja las crisis económicas y financieras externas. Por otra parte Lahmiri y Bekiros (2018) investigan, evalúan y detectan la estructura de correlación temporal multiescalar y caos en los rendimientos y precios del mercado virtual a lo largo de dos periodos distintos; primero, un periodo de régimen de bajo nivel durante el cual los precios aumentaron lentamente. Segundo, un periodo de régimen alto y turbulento donde los precios se incrementaron exponencialmente. Para esto, utilizaron y estimaron el exponente Lyapunov, Entropía de Shannon, el exponente de Hurst y derivación de espectros de singularidad o espectro multifractal durante periodos de tiempo (precio) de régimen alto y bajo. Sus resultados muestran que, a diferencia de los rendimientos, los precios incorporan y exhiben dinámicas caóticas.

Corbet *et al.* (2019) presentan una revisión sistemática de la literatura empírica con base en los principales temas asociados al mercado de criptomonedas, destacando investigaciones en el campo de mercados eficientes,

beneficios de la diversificación; y cibercriminalidad desde 2009. Así mismo, Braunis y Mestel (2019) muestran evidencia de los efectos y beneficios de portafolios de múltiples criptomonedas utilizando el modelo de media-varianza de Markowitz (1952) con datos diarios de las 500 criptomonedas de mayor volumen de capitalización del primero de enero de 2015 al 31 de diciembre de 2017. Concluyen que, al combinar varias criptomonedas el nivel de riesgo se reduce sustancialmente; además, la alta volatilidad del mercado de criptomonedas puede motivar a que los inversionistas que no estén dispuestos a correr un riesgo excesivo al invertir en criptomonedas en su forma individual puedan invertir en portafolios. Platanakis y Urquhart (2019), muestran evidencia en apoyo de la conveniencia de incluir bitcoins en portafolios convencionales de acciones y bonos.

Borri (2019), utiliza la covarianza para estimar el riesgo condicional de cola en el mercado para las criptomonedas (Bitcoin, Ether, Ripple y Litecoin). Sus resultados muestran que las criptomonedas están altamente expuestas al riesgo de la cola dentro del mercado de criptomonedas. Sin embargo, al relacionarla con otros activos globales, como en mercados de renta variable estadounidense o el oro, el riesgo condicional de cola no está presente. Si bien los rendimientos de las criptomonedas están altamente correlacionados, se encuentra que el riesgo puede ser reducido significativamente y que los portafolios pueden ofrecer mejores rendimientos ajustados al riesgo que las monedas individuales. Se puede decir que en parte los resultados de Borri confirman la evidencia presentada por Klein *et al.* (2018).

2. Aspectos metodológicos

Un elemento clave en la administración de los portafolios de inversión es la evaluación del desempeño pues sirve como una medida de control de calidad de las decisiones involucradas. En la medición del desempeño, el rendimiento y la volatilidad del mismo, o riesgo, juegan un papel muy importante. Bacon (2008) sostiene que desde la perspectiva de los inversionistas, la medida de riesgo en los rendimientos más sencilla podría estar relacionada con la duración de los periodos de pérdidas continuas, es decir, lo que se conoce como el Drawdown. De manera general, el Drawdown se mide como la declinación en términos porcentuales del valor del activo que se puede observar durante un periodo. En términos formales, se considera x^{max} como

el máximo local en el periodo $[0, T]$, que ocurre en el momento $t_{max} \in [0, T]$, se define el Drawdown en t , como:⁴

$$D_t = \frac{x^{max} - x_t}{x^{max}}. \quad (1)$$

El Drawdown máximo es la mayor declinación de valor que se observa en el periodo, es decir la pérdida de valor yendo desde el máximo alcanzado hasta el punto mínimo del periodo. En otras palabras, representa la máxima pérdida que se puede sufrir si se compra el activo al precio alcanzado en el máximo y se vende al precio correspondiente al mínimo.

Por su parte, el Drawdown promedio es el rendimiento negativo promedio durante un periodo de inversión:

$$\bar{D} = \left| \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{n} \right|, \quad (2)$$

D_i es el i ésimo Drawdown y n es el número total de Drawdowns, en ambos casos tomando como referencia el periodo total.

Como medida del *downside risk* o riesgo debido a la variabilidad de los rendimientos con un desempeño deficiente (por debajo) respecto de un rendimiento mínimo, r_T , que se establece como meta para el periodo de inversión, se puede utilizar la semi-desviación estándar:

$$\sigma_d = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\min[(r_i - r_T), 0]^2}{n}}. \quad (3)$$

De manera similar, para medir el *upside risk*, es decir, considerando los rendimientos que se encuentran por arriba de la tasa de rendimiento de referencia, se puede utilizar la siguiente variante:

$$\sigma_u = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{\max[(r_i - r_T), 0]^2}{n}}. \quad (4)$$

⁴ Véase Jorion, (2011), p. 95.

La razón (ratio) de pérdidas y ganancias de Bernardo y Ledoit es un caso especial de la razón Omega, la cual captura la información en los momentos de orden superior de la distribución de rendimientos, véase Bacon (2008), ajustando implícitamente por el sesgo y la curtosis. Esta razón se puede escribir como:

$$\text{Razón de Bernardo - Ledoit} = \frac{\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n \max(r_i, 0)}{\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n \max(0 - r_i, 0)} \quad (5)$$

Una medida ampliamente utilizada para cuantificar el nivel del riesgo de mercado de un activo es el Valor en Riesgo (VaR por el inglés *Value at Risk*), en términos sencillos es la máxima pérdida esperada que puede ocurrir bajo condiciones normales (regulares) dentro de un periodo de tiempo determinado y con un nivel de confianza dado. En términos formales, sea ξ una variable aleatoria que representa la pérdida, dado $0 < \alpha < 1$, el $VaR - \alpha$ de ξ es

$$VaR_{\alpha}(\xi) := \min\{c: \mathbb{P}[\xi \leq c] \geq \alpha\}. \quad (6)$$

$VaR_{\alpha}(\xi)$ puede interpretarse entonces como la pérdida mínima que no será excedida con probabilidad α o como el cuantil (percentil) α de la distribución de pérdidas o, en forma alternativa, como la pérdida más pequeña en el $(1 - \alpha) \times 100\%$ de los peores casos o la mayor pérdida en el $\alpha \times 100\%$ de los mejores casos.

Desde la perspectiva de la selección de portafolios, el modelo basado en el análisis de la media y varianza propuesto por Markowitz (1952), es ampliamente conocido y utilizado particularmente como consecuencia de la relativa facilidad para instrumentar la solución propuesta de Merton (1972). En términos simples, el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega^T \Omega \omega \\ \text{s. a.} \quad & \omega^T r = R_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^T \iota &= 1 \\ \omega_i &\geq 0, \forall i \in \omega.\end{aligned}\tag{7}$$

ω es un vector de variables de decisión, las proporciones o pesos de los activos que forman parte del conjunto de oportunidades factibles de inversión, Ω es la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de esos activos, μ es un vector de rendimientos esperados de los activos, R_p^* es un escalar representando el objetivo de rendimiento esperado y ι es un vector unitario. Al resolver el problema con diferentes objetivos de rendimientos es posible determinar la frontera eficiente o de portafolios óptimos (de mínimo riesgo para los diferentes objetivos).

A pesar de su relativa sencillez, el enfoque del análisis de media y varianza ha sido criticado desde diversos ángulos y, en particular, se han sugerido algunas alternativas para superar la limitación que tiene la varianza para tomar en cuenta las pérdidas en las colas cuando sus distribuciones están sesgadas hacia el lado de las pérdidas. Una opción es la minimización de la pérdida esperada (*Expected Shortfall*, ES), conocida también bajo nombres como Valor en Riesgo Condicional (CVaR), Valor en Riesgo Promedio (Average VaR, AVAR), VaR en la cola (Tail VaR) o Pérdida Esperada en la Cola (*Expected Tail Loss*, ETL). El ES representa la pérdida esperada en un nivel de confianza dado, cuando la pérdida es mayor que el VaR calculado a ese nivel de confianza:

$$ES_\alpha(\xi) := \mathbb{E}[\xi | \xi \geq VaR_\alpha(\xi)].\tag{8}$$

Es conveniente destacar que el ES ha sido también considerado como una medida coherente de riesgo, en el sentido de Artzner *et al.* (1999), por lo que el acuerdo de Basilea III propuso medir el riesgo del mercado con el ES en lugar del VaR, véase Chen (2014).

El problema de optimización del portafolio por medio de la minimización de la pérdida esperada sería no invertir en lo absoluto, es decir, la solución trivial al problema. Sin embargo, si se impone como restricción la inversión de todo el capital disponible, considerando además la restricción de ventas en corto, el problema del portafolio óptimo puede verse entonces como:

$$\begin{aligned} \min ES_{\alpha}(\omega^T r) \\ \omega^T \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0, \quad \forall i \in \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Análisis de los datos y resultados

Los precios de las criptomonedas estudiadas se obtuvieron del sitio web <https://coinmarketcap.com/>. Este trabajo considera toda la información disponible para cada una de las ocho criptomonedas analizadas, mismas que fueron seleccionadas por ser las de mayor capitalización de mercado al 6 de marzo de 2019. La información obtenida no es homogénea por lo que se tienen diferentes fechas iniciales (y número de observaciones disponibles) para cada una de las series de precios, en el Cuadro 1 se enuncian las fechas y número de observaciones de cada muestra.

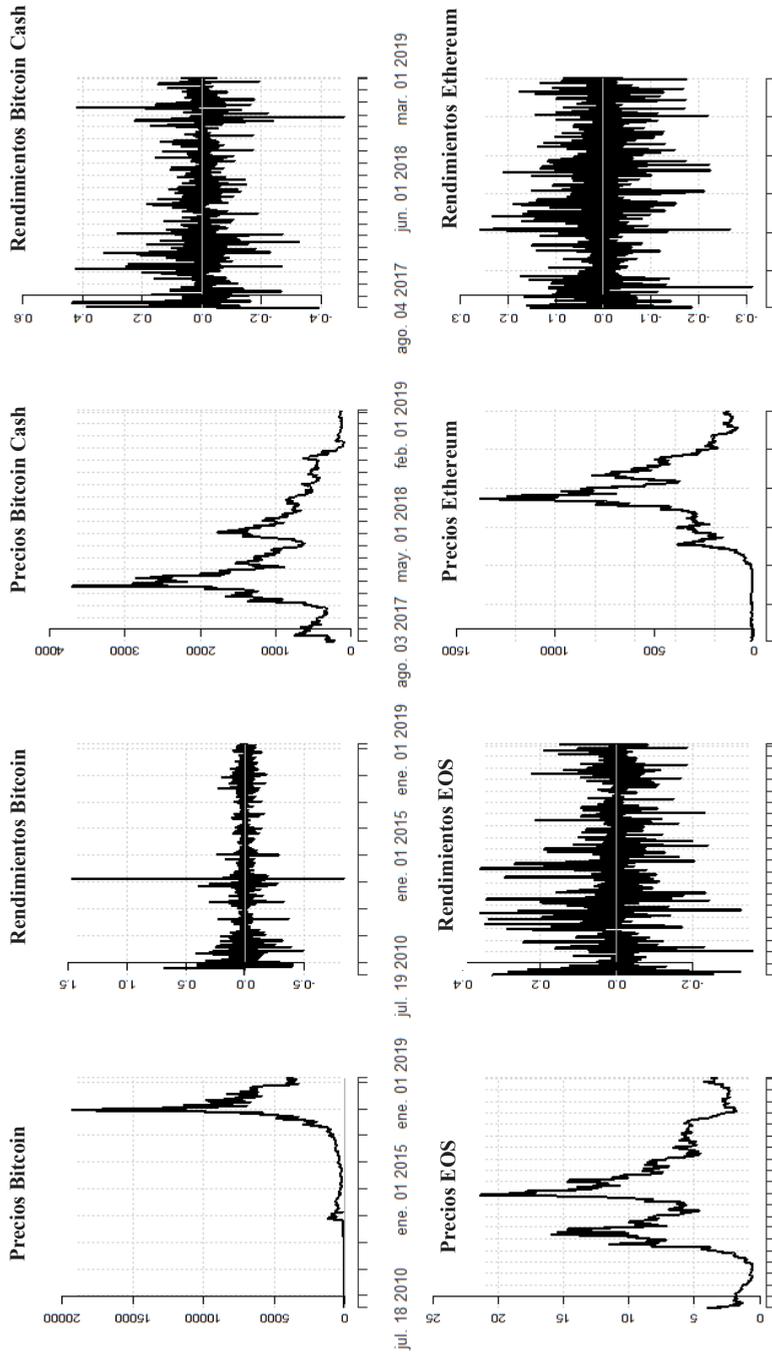
Cuadro 1 Periodo de análisis y tamaño de muestra

ACTIVO	Inicio	Fin	Observaciones
Bitcoin	Julio 18, 2010	Marzo 6, 2019	3,154
Litecoin	Agosto 24, 2016	Marzo 6, 2019	925
Ethereum	Marzo 10, 2016	Marzo 6, 2019	1,092
Ripple	Enero 22, 2015	Marzo 6, 2019	1,505
Tether	Abril 14, 2017	Marzo 6, 2019	691
BitcoinCash	Agosto 3, 2017	Marzo 6, 2019	581
EOS	Julio 2, 2017	Marzo 6, 2019	613
Tron	Noviembre 14, 2017	Marzo 6, 2019	478

Fuente: elaboración propia con datos de <https://coinmarketcap.com/>

La Figura 1 presenta el comportamiento de los rendimientos logarítmicos de Bitcoin, EOS, Bitcoin Cash y Ethereum. Los rendimientos de Bitcoin de 2015 hasta finales de 2016 presentan periodos estables, sin embargo, en periodos de alta volatilidad se encuentra por encima del +1.0 y -1.0. Así

Figura 1 Precios históricos y rendimientos de BTC, EOS, Bitcoin Cash, Ethereum



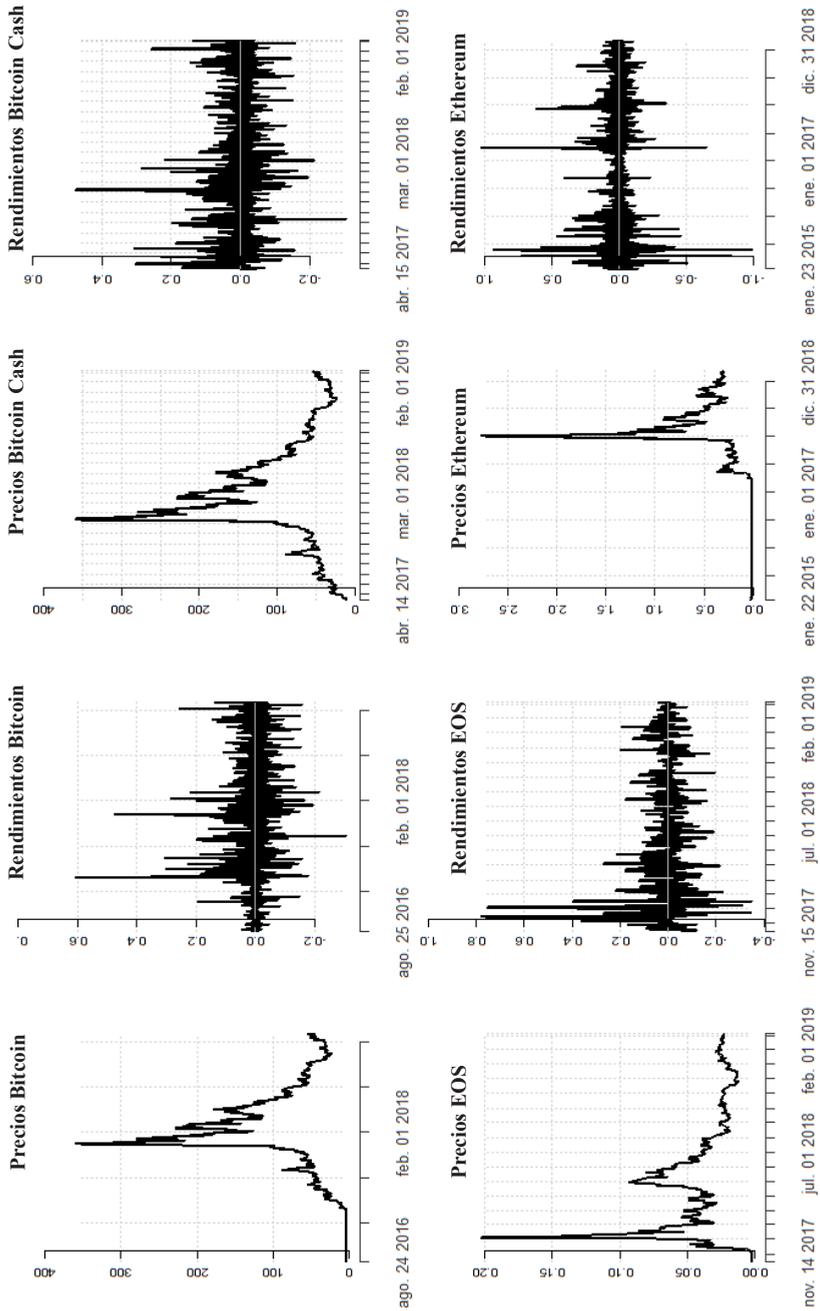
Fuente: elaboración propia con datos tomados de <https://coinmarketcap.com>.

mismo, se observan agrupaciones de volatilidad después de noticias influyentes como el caso presentado en Cheung, Roca y Su (2015) acerca de la noticia emitida por el gobierno chino sobre la prohibición de su uso por parte de los bancos, provocando una caída en su precio hasta la mitad de su valor. Otro ejemplo es presentado por Higgins (2014) acerca de la noticia en Ecuador promulgada por la Asamblea Nacional sobre la prohibición del uso de Bitcoin y otras criptomonedas descentralizadas. Se observan periodos prolongados de alta volatilidad en el caso de Bitcoin Cash, especialmente al principio de julio de 2017 y hasta finales de ese año. Aunque a principios de 2018 se muestra aparentemente estable, de julio 2018 en adelante presenta nuevamente periodos de alta de volatilidad; de acuerdo con Fry (2018), este comportamiento puede estar presente por el periodo de tiempo del análisis. Los rendimientos de Ethereum de 2016 a 2019 presentan múltiples periodos de alta volatilidad; sus precios presentan un incremento de su valor en 2017 para lograr una capitalización bursátil sin precedentes. En la actualidad esta criptomoneda es superada sólo por Bitcoin en la lista de capitalización del mercado de criptomonedas (CoinMarketCap, 2019). De EOS se destacan sus constantes periodos de alta volatilidad.

En la Figura 2 se muestra el comportamiento de los rendimientos logarítmicos de Litecoin, Tether, Ripple y Tron. Litecoin destaca en su comportamiento la característica de estabilidad ante un mercado tan volátil incrementando la atención por parte de los inversionistas porque, mientras algunas criptomonedas cayeron más de 50% durante las correcciones de mercado, Litecoin logró mantenerse con caídas menores al promedio observado durante las temporadas bajistas de 2017. Tether, presenta valores con mayor sesgo hacia lo positivo con una concentración de rendimientos alrededor de 0 pero acotados en su mayoría entre -0.2 y 0.2 al igual que Litecoin. Por su parte, Ripple a diferencia de Tether presenta rendimientos acotados entre -0.5 y 0.5. Finalmente, Tron presenta una concentración de rendimientos similares a Tether, pero con la diferencia de tener rendimientos acotados a -0.4 y 0.4. Lo que indica que Tether seguido por Tron muestran unas variaciones porcentuales diarias, menores a las de Ripple.

En el Cuadro 2 se presenta la frecuencia de rendimientos positivos (ganancias) y negativos (pérdidas), así como el análisis del Drawdown. Se observa que Ethereum es la criptomoneda que ha proporcionado el mayor porcentaje de rendimientos positivos diarios (48.12%) y que BitcoinCash es la de menor porcentaje (44.14%), existiendo una diferencia de casi 4 puntos porcentuales de diferencia entre ambas. En cuanto a los rendimientos ne-

Figura 2 Precios históricos y rendimientos de Litecoin, Tether, Tron, Ripple.



Fuente: elaboración propia con datos tomados de <https://coinmarketcap.com/>.

gativos, se puede ver que BitcoinCash es la de mayor frecuencia (55.86%), en tanto que Bitcoin únicamente ha presentado pérdidas durante el 40.06% de los días del periodo de análisis. En términos generales se puede decir que el comportamiento de las criptomonedas en ese sentido no es muy distinto; sin embargo, es conveniente señalar que este trabajo constituye una primera aproximación al análisis del problema. No obstante, a continuación, se profundiza en algunos aspectos que pueden ayudar a entender mejor el riesgo que representa el desempeño de estas criptomonedas como vehículos de inversión.

El análisis del Drawdown y el periodo de duración promedio de la caída y de la recuperación (también promedio) muestran claras diferencias, resultados que sugieren cierta heterogeneidad. Por ejemplo, Litecoin, Ethereum, BitcoinCash y Tron son los cuatro casos con menor duración de Drawdown, y las criptomonedas con la recuperación más rápida; también, tienen los valores de Drawdown promedio más bajos. Dado el menor rango de fluctuación y la menor duración del periodo de corrección, estas criptomonedas parecen ser adecuadas para inversión.

De acuerdo con el Cuadro 3, BitcoinCash es la segunda criptomoneda más riesgosa de acuerdo con el criterio del downside risk, sólo superada por EOS. Bajo ese criterio se podría decir que tanto Ripple como Bitcoin, en ese orden, son las alternativas menos riesgosas. Si se evalúa la pérdida potencial

Cuadro 2: Frecuencia de rendimientos diarios y Drawdown

	<i>Rendimientos (%)</i>		<i>Análisis del Drawdown</i>			
	$r_t > 0$	$r_t < 0$	Máximo (%)	Promedio (%)	Duración promedio*	Recuperación promedio*
<i>Bitcoin</i>	47.29	40.06	99.23	33.22	216.14	164.21
<i>Litecoin</i>	47.84	50.76	96.55	18.19	45.40	17.50
<i>Ethereum</i>	48.49	50.23	96.44	23.93	59.33	24.39
<i>Ripple</i>	44.28	51.13	99.99	50.06	752.50	368.50
<i>Tether</i>	48.12	51.74	96.55	21.41	52.08	19.23
<i>Bitcoin Cash</i>	44.14	55.86	99.36	46.86	96.00	1.50
<i>EOS</i>	45.91	51.14	95.85	77.63	203.67	53.33
<i>Tron</i>	46.96	53.03	98.12	34.39	78.00	20.5

¹ La duración y la recuperación (en ambos casos promedio) está medida en días

Fuente: elaboración propia con estimaciones efectuadas en Performance Analytics y R-Cram 3.5.3.

Cuadro 3: Down/(Up)side risk – Ganancias a pérdidas (G/P)-VaR y ES

	Downside	Upside ¹	Sesgo de la volatilidad	B-L ¹ (G/P)	VaR ² (%)	ES ² (%)
<i>Bitcoin</i>	0.0333	0.0552	1.4242	1.2194	19.18	33.23
<i>Litecoin</i>	0.0429	0.0543	1.8962	1.1463	15.22	18.42
<i>Ethereum</i>	0.0477	0.0456	1.1725	1.1119	17.40	22.37
<i>Ripple</i>	0.0258	0.0835	1.4081	1.0712	28.51	48.75
<i>Tether</i>	0.0469	0.0548	1.6136	1.0982	15.32	19.39
<i>Bitcoin Cash</i>	0.0560	0.0663	1.1975	0.9477	24.61	33.44
<i>EOS</i>	0.0568	0.0652	1.2391	1.0138	23.29	28.25
<i>Tron</i>	0.0520	0.0887	2.3339	1.1593	21.40	29.30

¹ Razón (ratio) de Bernardo Ledonit

² Horizonte de un día al 99% de confianza

Fuente: elaboración propia con estimaciones efectuadas en PerformanceAnalytics y R-Cran 3.5.3.

cuantificada con el VaR o con el ES o CVar se tiene que las mejores opciones son Litecoin y Theter, en tanto que Ripple es la que presenta un riesgo mayor. Tron tiene el upside risk más alto, seguida por Ripple, si embargo, se aprecia también que la primera de ellas (Tron) es la que muestra un mayor sesgo en la volatilidad, siendo Litecoin y Tether las que le siguen. El upside risk más bajo corresponde a Ethereum, siendo la criptomoneda con menor sesgo de la volatilidad. Estos resultados sugieren que, en términos de riesgo, existe una importante heterogeneidad en el desempeño de las criptomonedas. En cuanto a la relación entre ganancias y pérdidas (Omega), se observa que Bitcoin tiene el mejor registro, en tanto que Bitcoin Cash presenta la peor relación. De acuerdo con la razón de Bernardo y Ledoit, las mejores opciones son Bitcoin, seguida por Tron y Litecoin.

Con el objetivo de contar con un periodo igual de observaciones para la evaluación del desempeño de las criptomonedas analizadas dentro de portafolios, se tomaron en cuenta únicamente los rendimientos observados del 15 de noviembre de 2017 al seis de marzo de 2019, siendo un total de 325 rendimientos para cada una de ellas. Se estimaron 11 portafolios con base en la propuesta de Merton (1972) para resolver el problema de selección de portafolios planteado en Markowitz (1952) como la frontera eficiente o de portafolios eficientes u óptimos según el criterio de optimización de la relación media-varianza (rendimiento esperado y riesgo) con restricciones de

Cuadro 4: Ponderaciones, rendimientos esperados y riesgo de diez portafolios óptimos en media-varianza con restricción de ventas en corto

<i>Rendimiento</i>	-0.17	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.71
<i>Bitcoin</i>	91.86	60.17	44.74	29.30	13.86	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Tron</i>	0.00	10.88	18.08	25.29	32.49	40.18	53.49	74.73	95.97	98.10
<i>Bitcoin Cash</i>	0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Etherium</i>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Ripple</i>	6.44	10.11	8.93	7.75	6.58	4.86	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>EOS</i>	0.00	12.60	20.82	29.04	37.25	45.22	46.51	25.27	4.03	1.90
<i>Litecoin</i>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Tether</i>	1.52	6.25	7.43	8.62	9.82	9.74	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Suma</i>	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
<i>Desviación estándar</i>	4.97	5.63	6.28	7.05	7.91	8.84	11.30	11.30	13.12	13.31

Fuente: elaboración propia con estimaciones efectuadas en rutinas para R-Cran 3.5.3

Todas las mediciones son porcentajes.

Los rendimientos son diarios.

La columna del portafolio con rendimiento -0.17% corresponde al portafolio de mínimo riesgo (mínima varianza global).

El portafolio factible con máximo rendimiento corresponde a la inversión del 100% en Tron, cuyo rendimiento esperado es de 0.7189% con desviación estándar (riesgo) de 13.49%.

ventas en corto (no negatividad en las posiciones o pesos de cada activo en el portafolio), tal como se enuncia en la sección de aspectos metodológicos.

Las columnas del Cuadro 4 presentan 10 de los portafolios estimados, y en las filas centrales del cuadro se puede ver el peso o ponderación de cada activo. El portafolio de mínimo riesgo (mínima varianza global), está compuesto principalmente por Bitcoin con una participación de éste en el portafolio de casi 92%, complementándose con Ripple (6.44%), Tether (1.52%) y Bitcoin Cash (0.18%). Destaca de inmediato que en la medida que se busca un mayor rendimiento la participación de Bitcoin tiende a disminuir, hasta desaparecer. Tron y EOS que no forman parte del portafolio de mínima varianza global, están presentes en los demás portafolios, sin embargo, sólo la primera incrementa su participación en forma constante conforme se

buscan portafolios con mayor rendimiento esperado. En los demás casos se observa que las otras criptomonedas no forman parte de los portafolios óptimos, mientras que Ethereum y Litecoin no forman parte de ninguno de los portafolios óptimos. Debido a la restricción de ventas en corto, el portafolio con máximo rendimiento esperado está dado por una inversión de 100% de los recursos disponibles en Tron (0.7189% de rendimiento esperado y desviación estándar de 13.49%).

También, con los 325 rendimientos de cada criptomoneda observados entre el 15 de noviembre de 2017 y el seis de marzo de 2019 se estimaron los portafolios que minimizan el Expected Shortfall (ES) al 95% y 99% de confianza del Valor en Riesgo (VaR), otra forma de interpretar lo anterior, es considerar que representa la pérdida esperada en los percentiles correspondientes al 5% y 1% de la cola izquierda, en ambos casos con restricción de las ventas en corto; en el Cuadro 5 se presentan los resultados correspondientes. Destaca a simple vista que el peso de Tron en ambos portafolios es bastante similar (4.6175% y 4.97%, respectivamente). También llama la atención el drástico cambio que se observa en el peso de Bitcoin cuando el nivel de confianza pasa de 95 a 99%, lo mismo sucede, aunque de forma más moderada, en el caso del EOS. En la situación opuesta se encuentran las otras

Cuadro 5: Ponderaciones, rendimientos esperados y riesgo de portafolios que minimizan el Expected Shortfall con restricción de ventas en corto

<i>Nivel de confianza</i>	95%	99%
<i>Bitcoin</i>	1.6907	78.7010
<i>Tron</i>	4.6175	4.9700
<i>Bitcoin Cash</i>	15.2000	1.6704
<i>Etherium</i>	8.3579	0.0653
<i>Ripple</i>	1.5191	0.1062
<i>EOS</i>	1.3286	12.4567
<i>Litecoin</i>	62.0000	2.0100
<i>Tether</i>	5.3800	0.0178
<i>Suma</i>	100	100
<i>Rendimiento</i>	-0.1201	-0.0998
<i>Desviación estándar</i>	6.9252	5.2776

Todas las mediciones son porcentajes

Fuente: elaboración propia con estimaciones efectuadas en rutinas para R-Cran 3.5.3.

monedas, es decir se reduce su participación en el portafolio en la medida en la que se requiere un nivel más alto de VaR para considerar las pérdidas esperadas, siendo Litecoin el caso más extremo. Dado que tanto en el nivel de confianza del 95% como del 99% el rendimiento esperado es negativo, éstas pérdidas son mayores con un nivel de confianza de 95% y presentan también una mayor desviación estándar. Se puede concluir que la contribución de Bitcoin y EOS es importante para reducir el riesgo pues ambas apotan el 90% de la inversión en el portafolio con el VaR con un nivel de confianza de 99%.

Conclusiones

En este trabajo se analiza el desempeño de ocho de las principales criptomonedas (Bitcoin, Litecoin, Ethereum, Ripple, Tether, BitcoinCash, EOS y Tron) en términos de capitalización del mercado. En este estudio se observa que Ethereum es la criptomoneda que proporciona mayor porcentaje de rendimientos positivos diarios. Se observa que los ocho casos estudiados presentan comportamientos diferentes en episodios críticos como la caída de sus precios, es decir, existe un alto grado de heterogeneidad en el desempeño de los activos a pesar de la homogeneidad que podría esperarse al considerarlos como activos pertenecientes a una misma clase.

Es conveniente señalar también que esa heterogeneidad persiste cuando se considera la posibilidad de formar portafolios con ellas. De manera particular es de destacarse que los pesos de cada criptomoneda no siguen un patrón uniforme cuando se modifica el criterio de configuración de los portafolios, por ejemplo, cuando en lugar de seleccionarlos mediante el criterio de media y varianza de los rendimientos se seleccionan por medio de la pérdida esperada o VaR condicional (CvaR). Incluso cuando se cambia el nivel de confianza seleccionado, en este último caso, los pesos de algunos de los activos se modifican en forma drástica. Algunos de los activos analizados parecen tener poca importancia para contribuir a la administración del riesgo del portafolio mediante la diversificación pues ni siquiera son considerados como parte de un portafolio óptimo en el sentido de media y varianza; sin embargo, una vez que se entra en la zona de pérdidas podrían servir para mejorar la exposición al riesgo, minimizando la máxima pérdida esperada, aunque nuevamente la heterogeneidad muestra que la importancia de su contribución puede ser cambiante.

Evidentemente, la inversión en criptomonedas se puede considerar altamente riesgosa. Sin embargo, aunque la heterogeneidad que se ha mencionado podría resultar en la irrelevancia de algunas de ellas para la diversificación de portafolios, también podría permitir que no sólo las criptomonedas analizadas, sino otras también, a pesar de su menor importancia relativa en el mercado, pudieran ser de interés para la administración del riesgo mediante la diversificación de portafolios. Por tal motivo, es conveniente continuar con esta línea de investigación activa, extendiendo la agenda al análisis de otros aspectos de la dinámica que se ha observado en las criptomonedas. En particular, dada su heterogeneidad, es conveniente contar con una perspectiva clara de las características generales del riesgo que conlleva la inversión en ellas.

Referencias bibliográficas

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M. y Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, vol. 9 núm. 3, pp. 203-228. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>.
- Bacon, C. R. (2008). *Practical Portfolio Performance: Measurement and Attribution*. John Wiley & Sons Ltd. <https://doi.org/10.1002/9781119206309>.
- Balcilar, M., Bouri, E., Gupta, R., y Roubaud, D. (2017). Can Volume Predict Bitcoin Returns and Volatility? A Quantiles-Based Approach. *Economic Modelling*, 64 (August 2016), pp. 74-81. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2017.03.019>.
- Bariviera, A. F., Basgall, M. J., Hasperué, W., y Naiouf, M. (2017). Some Stylized Facts of the Bitcoin Market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, núm. 484, pp. 82-90. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.04.159>.
- Beneki, C., Koulis, A., Kyriazis, N. A., y Papadamou, S. (2019). Investigating Volatility Transmission and Hedging Properties Between Bitcoin and Ethereum. *Research in International Business and Finance*, núm. 48, (January), pp. 219-227. <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2019.01.001>.
- Blau, B. M. (2018). Price Dynamics and Speculative Trading in Bitcoin. *Research in International Business and Finance*, núm. 43 (May), pp. 15-21. <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2017.07.183>.
- Borri, N. (2019). Conditional Tail-risk in Cryptocurrency Markets. *Journal of Empirical Finance*, núm. 50 (August 2018), pp. 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2018.11.002>.

- Bouri, E., Molnár, P., Azzi, G., Roubaud, D. y Hagfors, L. I. (2017). On the Hedge and Safe Haven Properties of Bitcoin: Is it Really More than a Diversifier? *Finance Research Letters*, núm. 20, pp. 192-198. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.09.025>.
- Brauneis, A. y Mestel, R. (2019). Cryptocurrency-portfolios in a Mean-variance Framework. *Finance Research Letters*, núm. 28, (June 2018), pp. 259-264. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.05.008>.
- Carrick, J. (2016). Bitcoin as a Complement to Emerging Market Currencies. *Emerging Markets Finance and Trade*, vol. 52, núm. 10, pp. 2321-2334. <https://doi.org/10.1080/1540496X.2016.1193002>.
- Chen, J. M. (2014). Coherence Versus Elicitability in Measures of Market Risk. *International Advances in Economic Research*, núm. 20, pp. 355-356
- Cheung, A.; Roca, E. y Su, J.-J. (2015). Crypto-currency Bubbles: An Application of the Phillips-Shi-Yu (2013) Methodology on Mt. Gox Bitcoin Prices. *Applied Economics*, vol. 47, núm. 23, pp. 2348-2358.
- Ciaian, P., Miroslava, R. y D'Artis, K. (2014). The Economics of BitCoin Price Formation. *Applied Economics*, vol. 48, núm. 19, pp. 1799-1815. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/00036846.2015.1109038>.
- CoinMarketCap. (2019). <https://coinmarketcap.com/>.
- Corbet, S. y Katsiampa, P. (2018). Asymmetric Mean Reversion of Bitcoin Price Returns. *International Review of Financial Analysis*, (September), pp. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.10.004>.
- Corbet, S., Lucey, B., Urquhart, A. y Yarovaya, L. (2019). Cryptocurrencies as a Financial Asset: A Systematic Analysis. *International Review of Financial Analysis*, núm. 62, (September 2018), pp. 182-199. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.09.003>.
- Corbet, S., Meegan, A., Larkin, C., Lucey, B. y Yarovaya, L. (2018). Exploring the Dynamic Relationships Between Cryptocurrencies and Other Financial Assets. *Economics Letters*, núm. 165, pp. 28-34. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.01.004>.
- Engle, R. F. (2002). On the Law of Demand Werner Hildenbrand, Department of Economics, University of Bonn, Visiting the University of California, San Diego, CA 92037, U.S.A. *Mathematical Social Sciences*, vol. 20, núm. 3, pp. 306-307. [https://doi.org/10.1016/0165-4896\(90\)90014-X](https://doi.org/10.1016/0165-4896(90)90014-X).
- Fry, J. (2018). "Booms, Busts and Heavy-Tails: The Story of Bitcoin and Cryptocurrency Markets?". *Economic Letters*, núm. 171, pp. 225-229.
- Halaburda, H. y Gandal, N. (2014). Competition in the Cryptocurrency Market. *Ssrn*, núm. 14, pp. 1-32. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2506463>.

- Higgins, S. (2014). "Bangladesh Central Bank: Cryptocurrency Use is a 'Punishable Offense,'" *CoinDesk*, September.
- Jorion, P. (2011). *Financial Risk Manager Handbook Plus Test Bank: FRM Part I/ Part II*. Wiley finance.
- Klein, T.; Pham Thuc, H. y Walthera, T. (2018). Bitcoin is not the New Gold – A Comparison of Volatility, Correlation, and Portfolio Performance. *International Review of Financial Analysis*, núm. 59, pp. 105-116. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.07.010>.
- Lahmiri, S. y Bekiros, S. (2018). Chaos, Randomness and Multi-fractality in Bitcoin Market. *Chaos, Solitons and Fractals*, núm. 106, pp. 28-34. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.11.005>.
- Llorente, G., Michaely, R., Saar, G. y Wang, J. (2002). Dynamic Volume-Return Relation of Individual Stocks. *Review of Financial Studies*, vol. 15, núm. 4, pp. 1005-1047.
- Lütkepohl, H., y Krätzig, M. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press.
- Maftai, L. (2014). Bitcoin-Between Legal and Informal. *CES Working Papers*, vol. VI, núm. 3, pp. 53-59.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, vol. 7, núm. 1, pp. 77-91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>.
- Merton, R. C. (1972). "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 7, núm. 4, pp. 1851-1872.
- Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. Recuperado 28 de junio de 2019, a partir de <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
- Nam, K., Kim, S. W., y Arize, A. C. (2006). Mean Reversion of Short-horizon Stock Returns: Asymmetry Property. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, vol. 26, núm. 2, pp. 137-163. <https://doi.org/10.1007/s11156-006-7213-0>.
- Platanakis, E. y Urquhart A. (2019). Should Investors Include Bitcoin in their Portfolios? A Portfolio Theory Approach. *The British Accounting Review*. <https://doi.org/10.1016/j.bar.2019.100837>.
- Rogojanu, A. y Badea, L. (2015). The Issue of "true" Money in Front of the Bitcoin's Offensive. *Theoretical and Applied Economics*, vol. XXII, núm. 2603, pp. 77-90.
- Tu, Z. y Xue, C. (2018). Effect of Bifurcation on the Interaction Between Bitcoin and Litecoin. *Finance Research Letters*, (December), pp. 1-4. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.12.010>.

- Wei, W. C. (2018). The impact of Tether grants on Bitcoin. *Economics Letters*, 171, 19-22. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.07.001>
- Yermack, D. (2013). Is Bitcoin a Real Currency? An Economic Appraisal. *Elsevier*. <https://doi.org/10.1016/j.cub.2004.05.032>.

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

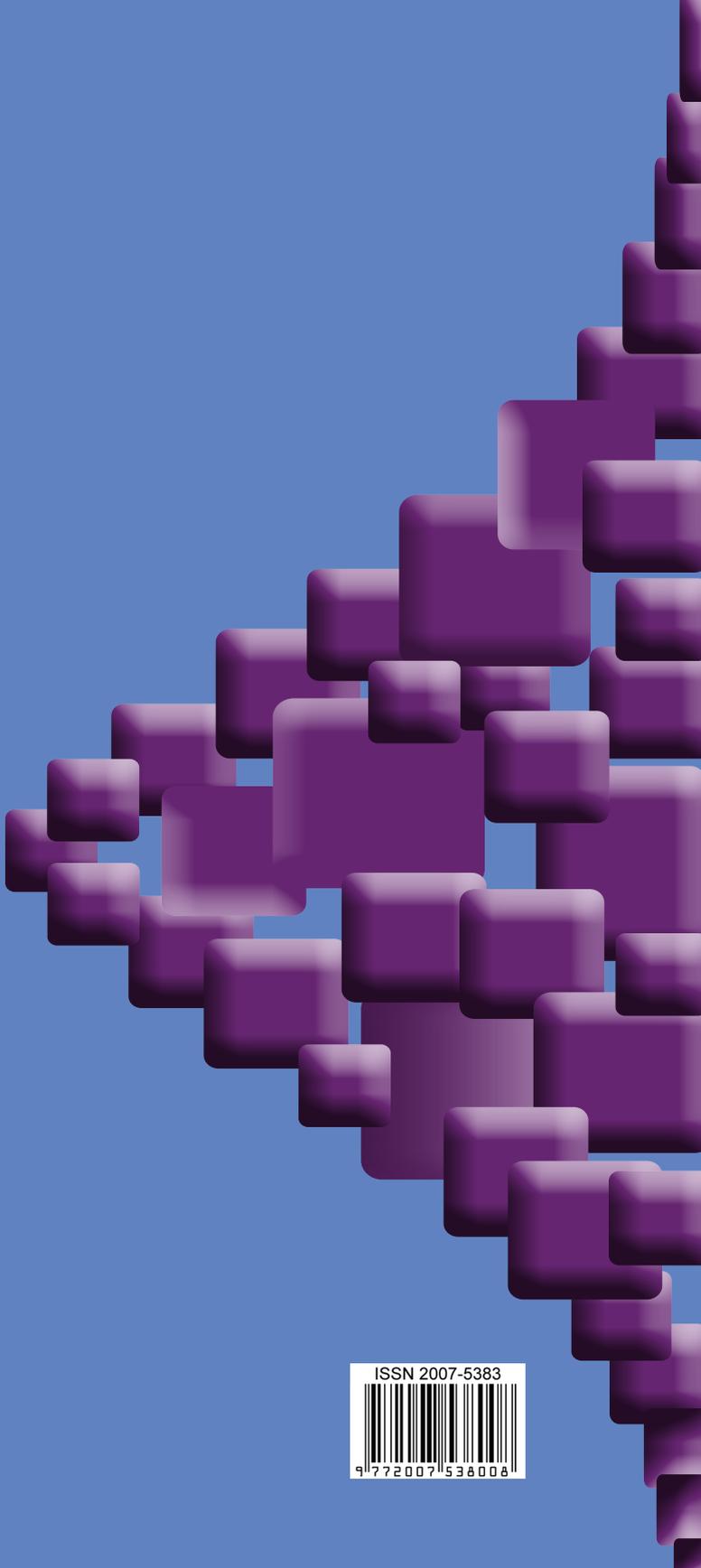
Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros



ISSN 2007-5383



9 772007 538008