

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Superficie de volatilidad de la Bolsa Mexicana de Valores: evaluación con el Modelo de Merton

Cristian M. Campuzano
Alejandra Cabello

Análisis comparativo entre el modelo ARMA y su versión continua CARMA sobre la dinámica del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Nallely Jacqueline Reyes-García
Francisco Venegas-Martínez
María Teresa Verónica Martínez-Palacios

How the use of Markov-Switching Sharpe Ratios can improve Mexican Pension Funds Investment Decisions

Oscar V. de la Torre Torres
Roberto J. Santillán-Salgado
Francisco López Herrera

Curvatura de Ricci como indicador de fragilidad en el contagio del COVID-19 y de los mercados financieros en el mundo

Guillermo Sierra Juárez

VOLUMEN 11, NÚMERO 1
ENERO - JUNIO 2021

Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. Eduardo Abel Peñalosa Castro

Unidad Azcapotzalco

Rector de la Unidad

Dr. Oscar Lozano Carrillo

Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Mtro. Miguel Pérez López

Jefe del Departamento de Administración

Dr. Jesús Manuel Ramos García

Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División de Ciencias Sociales y Humanidades

Dr. Alfredo Garibay Suárez

Comité Editorial

Presidenta

Dra. María G. Henaine-Abed
Departamento de Sistemas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Editora

Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Departamento de Administración,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Coeditor

Mtro. Carlos Zubieta-Badillo
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Cd. de México, México

Dirección de este número

Dra. María G. Henaine-Abed
Dra. Marissa R. Martínez-Preece
Mtro. Carlos Zubieta-Badillo

Consejo Editorial

Dr. Diego Agudelo-Rueda
Área de Mercados Financieros,
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Dr. Marco Avellaneda
División de Matemáticas Financieras
Instituto Courant
Universidad de Nueva York
Nueva York, EE. UU.

Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Onésimo Hernández-Lerma
Departamento de Matemáticas, CINVESTAV,
Instituto Politécnico Nacional.
Cd. de México, México

Dr. Francisco López-Herrera
Facultad de Contaduría y Administración,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Edgar Ortiz
Facultad de Ciencias Políticas y Sociales,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. de México, México

Dr. Dan Rosen
Facultad de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Universidad de Toronto,
Toronto, Canadá

Dra. Patricia Saavedra-Barrera
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Cd. de México, México

Dr. Roberto J. Santillán-Salgado
EGADE Business School
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de
Monterrey
Campus Monterrey,
Monterrey, Nuevo León, México

Dr. Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional,
Cd. de México, México

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 11, número 1

enero - junio 2021

Estocástica: finanzas y riesgo es una revista académica de acceso abierto, especializada en finanzas, dirigida a investigadores/as y académicos/as interesados/as en el análisis de los riesgos financieros y temáticas relacionadas con éstos, editada semestralmente por la Universidad Autónoma Metropolitana, en versión impresa y electrónica. Todos los artículos son sometidos a arbitraje bajo la modalidad doble ciego, los cuales pueden ser publicados en inglés o español. Su objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ESTOCÁSTICA: FINANZAS Y RIESGO. Volumen 11, número 1, enero–junio de 2021, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, Ciudad de México, México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200. Ciudad de México, México, teléfono 5553-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed, Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200, Ciudad de México, México, fecha de última modificación: el 15 de abril de 2021. Tamaño del archivo: 6.42 MB.

La información, opinión y análisis contenidos en esta publicación son responsabilidad de los autores.

CONTENIDO

Superficie de volatilidad
de la Bolsa Mexicana de Valores:
evaluación con el Modelo de Merton

Cristian M. Campuzano
Alejandra Cabello

5

Análisis comparativo entre el modelo ARMA y
su versión continua CARMA sobre la dinámica
del Índice de Precios y Cotizaciones de la
Bolsa Mexicana de Valores

Nallely Jacqueline Reyes-García
Francisco Venegas-Martínez
María Teresa Verónica Martínez-Palacios

33

How the use of Markov-Switching Sharpe
Ratios can improve Mexican Pension Funds
Investment Decisions

Oscar Valdemar de la Torre Torres
Roberto J. Santillán-Salgado
Francisco López Herrera

59

Curvatura de Ricci como indicador de
fragilidad en el contagio del COVID-19 y de
los mercados financieros en el mundo

Guillermo Sierra Juárez

Superficie de volatilidad de la Bolsa Mexicana de Valores: evaluación con el Modelo de Merton

Mexico's Stock Market volatility surface: Evaluation with Merton's model

Cristian M. Campuzano*

Alejandra Cabello**

(Fecha de recepción: 24 de agosto de 2020. Fecha de aceptación: 26 de octubre de 2020)

RESUMEN

El presente trabajo estima la superficie de volatilidad para opciones sobre futuros del índice accionario de México (S&P/BMV IPC) a partir de la volatilidad implícita la cual es calculada con el apoyo de la valuación del precio de una opción financiera de compra (*call*) aplicando el modelo de Merton de difusión con saltos; sus resultados se comparan con estimados basados en el modelo propuesto por Black y Scholes para la valoración de opciones. Considerando la relevancia teórica y práctica del problema de las superficies de volatilidad representa para la toma de decisiones del mercado, este trabajo propone un enfoque teórico y empírico; además se aborda este problema con la obtención de una solución cerrada.

Clasificación JEL: B26, C52, G13, G15, N16

Palabras clave: superficie de volatilidad, volatilidad implícita, modelo de Merton, modelo de Black-Scholes, Bolsa Mexicana de Valores

* Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad de México, México
Correo electrónico: cristian_ccs@comunidad.unam.automx

** Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad de México, México
Correo electrónico: acr2001mx@yahoo.com.mx

ABSTRACT

This paper estimates the volatility surface for futures options of The Mexican Stock Index (S&P/BMV IPC) based on the implied volatility; which is calculated applying the price of a financial call option using Merton's jump-diffusion model. The results obtained are compared with estimated data based on the model proposed by Black and Scholes for options valuation. Considering the theoretical and practical relevance that volatility surfaces represents for the market decision-making process, this paper proposes a theoretical and empirical approach. Volatility surface estimation is also addressed by obtaining a closed solution.

JEL Codes: B26, C52, G13, G15, N16

Keywords: *Volatility surface, Implicit volatility, Merton model, Black and Scholes model, Mexican Stock Market*

Introducción

La teoría de las opciones es uno de los pilares del desarrollo de las finanzas contemporáneas como ciencia. El modelo originalmente desarrollado por Black y Scholes, 1973 (B&S) pronto se convirtió en el modelo estándar para la valuación de opciones financieras, y al mismo tiempo utilizarse como el instrumento más popular e idóneo para la práctica, la docencia e investigación sobre el comportamiento de estos productos derivados en sus respectivos mercados. No obstante, pronto se identificaron algunas limitaciones pues el precio teórico obtenido con la fórmula de B&S distaba de la cotización de las opciones en el mercado. Entre las limitaciones identificadas, destaca el hecho que uno de sus insumos más importantes: la volatilidad, es constante, no es determinística, y no está disponible para su inmediata aplicación en dicho modelo. La pregunta relevante es ¿hasta qué punto los supuestos de estos autores son idóneos? Los supuestos críticos del modelo B&S asumen que las negociaciones bursátiles tienen lugar continuamente en el tiempo y que la dinámica de los precios del subyacente tiene una trayectoria de muestra continua (lognormal) con probabilidad uno (Black y Scholes, 1973).

Sin embargo, aunque la lógica interna del modelo es incuestionable y su desarrollo matemático correcto, el problema radica en el comportamiento cambiante de los mercados. Lo anterior resulta cierto en las últimas décadas, no sólo caracterizadas por profundas alzas y bajas, sino también por recurrentes crisis. Los análisis históricos sobre la volatilidad se vuelven in-

suficientes y quizás resulten erróneos para determinar el valor de una opción, debido que su producto subyacente presenta patrones de volatilidad diferentes a los históricos.

Tomando como punto de partida el modelo original, en poco tiempo se desarrollaron otros modelos que superaron parcialmente las limitaciones del primer modelo. En primer lugar, destaca el modelo que permite el pago de dividendos por parte del subyacente (Merton, 1973), y más tarde el modelo de valuación de opciones con saltos (Merton, 1976). Merton subraya que su modelo mantiene las características principales del modelo original; en particular que no depende de las preferencias de los inversionistas o del conocimiento sobre el rendimiento esperado del subyacente. Básicamente, es un modelo estocástico de difusión con saltos discretos que siguen una distribución Poisson en un proceso aleatorio browniano, en tanto que el tamaño de los saltos se distribuye normalmente.

El modelo de Merton y otras extensiones han sido aplicados ampliamente porque la inclusión de los procesos de difusión con saltos, en general, habilita el uso de distribuciones de probabilidad que se ajustan mejor a las series financieras de los mercados que con los procesos de difusión simple; además, proveen de una visión más completa sobre las fluctuaciones de los activos subyacentes y los riesgos de mercado, particularmente durante períodos de alta volatilidad, incluyendo períodos de crisis.

Igualmente, la relevancia del modelo de Merton se ha revalorado y magnificado en las últimas décadas debido a las repetidas crisis de los mercados financieros y sus rápidos contagios a nivel global, resultado de la creciente liberalización e integración económico-financiera. En este respecto, una medición, control y administración del riesgo eficiente requiere de respuestas instantáneas, inmediatas sobre el precio de una opción. El modelo de B&S no responde a esta necesidad puesto que para calcular el precio de la opción uno de los parámetros requeridos es la desviación estándar histórica, la cual rara vez se ajusta a la realidad instantánea del mercado.

La solución ha sido aplicar la volatilidad implícita de la opción; ésta se obtiene utilizando el valor intrínseco de la opción (valor cotizado en el mercado) y de manera inversa (utilizando B&S o una de sus extensiones) estimar la volatilidad, obteniéndose así la denominada volatilidad implícita. Puesto que su determinación emplea información instantánea del mercado, la volatilidad implícita representa cómo el mercado calcula la volatilidad del subyacente en el presente y su futuro comportamiento, durante la vida útil de la opción. Al respecto hay que anotar que la mayoría de las opciones

tienen plazos de corta duración, la mayoría de tres meses o menos.¹ Por tanto, desafortunadamente, se ha desarrollado en el mercado una visión cortoplacista.

La gráfica que traza el precio de ejercicio y la volatilidad implícita de un activo, el precio de ejercicio y la fecha de vencimiento, se le conoce como la superficie de volatilidad. En el modelo de B&S ésta se representa por una superficie plana puesto que su modelo presupone la misma volatilidad para el período analizado. En los modelos con volatilidad cambiante (incluyendo el modelo de Merton de 1976) a la gráfica de la función cuadrática de volatilidades implícitas que permiten visualizar la estructura de comportamiento del activo de referencia en relación a su precio de ejercicio, se le denomina “sonrisa” (*smile*) por su forma en u (son opciones *cercana al dinero* (*at the money*, ATM, por sus siglas en inglés)); a la gráfica que representa la función monótona de las volatilidades implícitas (de opciones *fuera del dinero* (*out of the money*, OTM), se le denomina “mueca” (*smirk*) (Reyes Meza y Santin Filloy, 2011).²

Cabe resaltar que desde 2006 el MexDer calcula y divulga el índice VIMEX con el propósito de estimar la volatilidad del mercado de valores nacional, calculando la volatilidad implícita de las opciones listadas en la Bolsa Mexicana de Valores. Constituye un importante desarrollo pues coadyuva a capturar el sentimiento del mercado, información que puede ser utilizada por los participantes en los mercados financieros para tomar sus decisiones de inversión, de cobertura con opciones, así como para identificar oportunidades de arbitraje. En cuanto al crecimiento (o debilitamiento del mercado) la relación entre el VIMEX y el índice bursátil (representativo de las operaciones del mercado) es inversa.

Considerando la creciente importancia del mercado mexicano de valores, así como su creciente negociación de opciones, el presente trabajo estima la superficie de volatilidad para opciones sobre futuros del S&P/BMV IPC a partir de la volatilidad implícita la cual es calculada con el apoyo de la valuación del precio de una opción financiera de compra (*call*) con el modelo

¹ Con las opciones LEAPS (Long-Term Equity Anticipation Securities) se ofrecen contratos de nueve meses y hasta de tres años. No son comunes y sus primas son altas.

² A dinero (*At the money*, ATM, por sus siglas en inglés), si el precio de ejercicio de la opción es igual al precio de mercado del subyacente. Si se encuentra por debajo la opción esta fuera del dinero (*out-of-the-money*, OTM), y si el precio de ejercicio de la opción supera el precio de mercado del subyacente, la opción se encuentra en dinero (*in-the-money*, ITM).

de Merton (1976) de difusión con saltos; sus resultados se comparan con estimados basados en el modelo propuesto por Black y Scholes (1973) para la obtención de superficies de volatilidad.

Lo anterior representa la contribución del presente estudio. Añade a la literatura financiera un estudio sobre el comportamiento de la volatilidad implícita en el mercado de valores mexicano. Además, compara dos modelos clásicos de las finanzas modernas; sus resultados guardan relevancia para inversionistas, coberturistas y operadores de arbitraje, y de manera especial ayuda a fomentar el desarrollo del propio MexDer. La muestra incluye el período que abarca del 24 de mayo de 2018 al 24 de mayo de 2019.

El trabajo consiste en cuatro secciones. Después de la presente introducción, la primera sección incluye una revisión de la literatura; la segunda parte resume aspectos teórico-metodológicos sobre superficies de volatilidad y presenta los modelos de ByS y Merton, resaltando sus diferencias; la tercera sección da cuenta de la información empleada, desarrolla el estudio empírico y discute los resultados; finalmente, en la última sección se presentan las conclusiones.

1. Revisión de la literatura

Como se apuntó anteriormente, la sonrisa de volatilidad es la relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio de una opción (Derman, 2003). Numerosos trabajos se han presentado en la literatura financiera estimando la volatilidad implícita de los mercados desarrollados; algunos estudios emplean suavizamientos sobre superficies de volatilidad empleando metodologías numéricas para encontrar la volatilidad implícita (Xu y Jia, 2019). Asimismo, se han implementado cálculos de superficies de volatilidad en mercados emergentes como el de India para el pronóstico de volatilidades futuras con un modelo de regresión, presentado en los trabajos de Poon y Granger (2003), así como de Varma y Agarwalla (2018).

En cuanto al uso de la distribución de Poisson, el trabajo de Andersen y Andreasen (2000) explica como los procesos de difusión con saltos de Poisson producen importantes mejoras del modelo particularmente en la precisión de la superficie de volatilidad. Específicamente desarrollan la metodología para el índice S&P 500 obteniendo resultados próximos a la volatilidad futura.

Kou (2002), aplica un doble proceso de difusión de salto exponencial. En este modelo, consideró la presencia de leptocurtosis alta, así como la presencia de dos colas pesadas en la serie. Para ilustrar que con su modelo se puede estimar la volatilidad implícita, el autor empleó datos de opciones sobre la LIBOR japonesa durante dos y nueve años. Además, Kou fue capaz de demostrar el cambio en la medida de volatilidad a una neutral en el riesgo.

Serna (2002) examina el efecto sonrisa sobre el comportamiento fuera de muestra en el mercado español de opciones sobre el futuro del índice IBEX-35. Se aplican funciones de volatilidad deterministas del precio de ejercicio de opciones de compra propuestos por Dumas, Fleming y Whaley (1998). La muestra incluye opciones de compra y venta de enero de 1994 a octubre de 2002. Los resultados obtenidos, señalan que los modelos paramétricos empleados, no mejoran significativamente el comportamiento del modelo de B&S para explicar los precios de mercado de las opciones. Se obtienen mejores resultados aplicando un modelo con volatilidades implícitas variables.

Villamil (2006) presenta tres alternativas para la valuación de opciones europeas, que sirven de antecedente para el cálculo de la superficie de volatilidad: la elasticidad constante de la varianza, el modelo de Merton de la difusión con saltos, y la volatilidad estocástica. Sus predicciones mejoran incluso el modelo de Black y Scholes implementando la simulación de Monte Carlo. El autor recomienda su uso para fortalecer la valuación de opciones europeas.

Por su parte, Belchior (2012) revisa el marco teórico sobre la relevancia de los saltos para la fijación de precios de opciones europeas sobre el índice S&P 500 como activo de referencia. Su análisis de las propiedades de series de rendimientos logarítmicos conlleva a la sugerencia de aplicar un modelo de difusión de salto específico para captar la dinámica del subyacente. El autor calibra el modelo para datos diarios de un período de 80 días de negociación previos y 80 días de negociación posteriores a la fecha considerada como el inicio de la crisis de 2008. Los resultados obtenidos confirman que, los valores con la modelación de difusión con saltos en la volatilidad implícita de los precios de las opciones son relevantes para su valoración.

Lochowski (2013) compara los modelos de Black y Scholes y Merton; empleando datos reales de nueve importantes empresas de diferentes sectores del mercado de valores de Varsovia, durante 2011. Dada la importancia de las compañías incluidas en la muestra, se asume que los inversionistas representaron un impacto mínimo en los precios. Sorprendentemente, aun-

que 2011 fue un año de intensas turbulencias, el modelo de Black y Scholes revela un mejor desempeño que el modelo de Merton y a pesar de que este último modelo permite modelar grandes desviaciones en el comportamiento del mercado.

Gugola (2016) desarrolla una comparación entre el modelo estándar de Black y Scholes con el modelo de difusión de saltos de Merton. Se enfatiza el comportamiento leptocúrtico de los rendimientos, así como la robustez de la sonrisa de volatilidad. La evidencia la obtiene calibrando la información del mercado, así como aplicando simulaciones numéricas. Los resultados muestran categóricamente que los modelos de difusión con saltos presentan un mejor desempeño que el enfoque clásico de movimiento Browniano.

Recientemente, Kimaro *et al* (2019) aplican el modelo de Merton con saltos a una muestra de acciones selectas de los mercados de Nairobi, Dar es Salam y Uganda. El período de análisis es de cinco años, del 1º de julio de 2013 al 1º de julio de 2018. La evidencia empírica señala que todas las acciones de los tres países presentaron un sinnúmero de saltos, comprobado con la presencia de valores no-cero en las intensidades de los saltos. También, la densidad de los rendimientos del modelo de Merton reveló la presencia de volatilidad y leptocurtosis; esto queda demostrado con la presencia tanto positiva como negativa del sesgo, así como del exceso de curtosis.

Otros autores examinan la fragilidad de la metodología utilizada inspirada en la volatilidad estocástica implícita (SVI) en los precios de las opciones para la modelación de superficies de volatilidad. Los resultados resaltan la sensibilidad de la volatilidad estocástica implícita en la función de penalización de ajuste. Nagy y Ormos (2019) comparan diferentes funciones de peso y proponen utilizar los pesos vega implícitos.³ Luego revelan la relación entre las ponderaciones de vega y la tarea de minimización de las diferencias de precios observadas y ajustadas, y muestran que las ponderaciones de vega implícitas pueden estabilizar el ajuste de SVI a las opciones no líquidas (Nagy y Ormos, 2019).

Para el caso de México cabe resaltar los estudios de Venegas-Martínez (2001) y de Reyes Meza y Santin Filloy (2011). Venegas-Martínez (2001), aunque no trata directamente sobre la superficie de volatilidad, emplea dos modelos de cobertura con opciones europeas; el subyacente, un conglome-

³ La definición y significado de vega se presenta más adelante en el contexto del cálculo de la volatilidad implícita, Sección 3.2.

rado mexicano importante, Grupo Carso está sujeto a un proceso con saltos. En el primer modelo, el precio de la opción es estimado como la media de los precios de las opciones caracterizadas por saltos secuenciales; en el segundo modelo, su precio es calculado mediante la minimización de la varianza el portafolio de las acciones del grupo. El autor desarrolla coberturas e investiga su estabilidad. La inmunización es temporal, lo que hace necesario evaluaciones periódicas o de rebalanceo de la cobertura para optimizar la protección contra cambios difusos e incluso catastróficos.

Por su parte, el trabajo de Reyes Meza y Santin Fillol (2011) es el único disponible en la literatura sobre la superficie de volatilidad en México, pero sobre un activo internacional negociado en México (a falta entonces de desarrollo de mercado de opciones en México). Calculan la volatilidad implícita de una opción europea sobre el ETF (*exchange traded fund*) Nasdaq 100 QQQ listado y negociado en el MexDer a través de Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC).⁴ Emplean el modelo de Black y Scholes-Merton (1973)⁵ suavizando la ecuación mediante un kernel y ajustando la curva mediante dos metodologías: el método de Newton-Raphson⁶ y el algoritmo de Brent-Dekker⁷ sin encontrarse una diferencia significativa. Las superficies de volatilidad obtenidas dan cuenta de los cambios en volatilidad de acuerdo con la fecha de vencimiento y los cambios en el valor implícito. Sin embargo, los autores recomiendan el algoritmo de Brent-Dekker por ser 15 veces más rápido comparado con el método de Newton-Raphson.

En resumen, la creciente volatilidad de los mercados a la par que la creciente negociación e importancia de opciones financieras ha revalorado la necesidad de estimar el precio de las opciones y futuro comportamiento de los activos y el mercado considerando la volatilidad implícita de opciones cuyo subyacente este sujeto a la probabilidad de saltos en el subyacente y

⁴ El Sistema Internacional de Cotizaciones de la Bolsa Mexicana permite al inversionista mexicano adquirir títulos listados en el mercado local pero que han sido emitidos en otros países. En junio de 2019 superó los 2,100 valores listados, de los cuales, 1,089 corresponden a Acciones y 1,041 a Exchange Traded Funds (BMV, 2019).

⁵ Algunos autores extienden la denominación del modelo (B&S) a Black-Scholes-Merton porque Merton les hizo sugerencias importantes mientras desarrollaban el modelo, en particular que no es necesario el equilibrio de mercado para la valuación de opciones; basta con que no exista oportunidades de arbitraje (Black, 1989). En este trabajo se utiliza el reconocimiento original: Black y Scholes (1973).

⁶ Denominado así por J. Lagrange al método originalmente desarrollado por Isaac Newton y posteriormente uno similar presentado por Joseph Raphson.

⁷ Algoritmo originalmente desarrollo por Dekker en 1969 y ligeramente modificado por Brent en 1971 (Bogatyreva et al., 2019).

rendimiento lognormal. El modelo de Merton (1976) ofrece esta alternativa con la aplicación de la distribución Poisson.

2. Superficies de volatilidad: Debate teórico-metodológico

2.1. Características de la superficie de volatilidad

Para la valuación de opciones se ocupa la metodología “directa”, que consiste en calcular el precio justo de la opción a través de diferentes modelos, utilizando la volatilidad histórica como referencia. En la práctica, para determinar la volatilidad implícita de los mercados de derivados se emplea ingeniería inversa. Esta volatilidad implica un problema de no unicidad para la valuación de opciones financieras, lo que nos introduce a la problemática de superficies de volatilidad. Dumas *et al.* (1998), Gonçalves y Guidolin (2006), ya modelaron con éxito la volatilidad implícita. Posteriormente, otros autores han confirmado la existencia de una relación dinámica entre índices accionarios y la superficie de volatilidad (Bernal y Guidolin, 2014; Gonçalves y Guidolin, 2016; y Lovreta y Silaghi, 2020).

El modelo de Black y Scholes predice un perfil plano para la superficie de volatilidad implícita (es decir, todas las opciones en el mismo subyacente deberían proporcionar la misma volatilidad implícita); no obstante, estudios empíricos que emplean otros modelos, han encontrado que las volatilidades implícitas de las opciones sobre acciones exhiben diferentes superficies de volatilidad. Además, se encuentra que el nivel de volatilidades implícitas cambia con el tiempo, modificando la forma de la superficie de volatilidad implícita a lo largo del tiempo.

La valuación de superficies de volatilidad representa una de las materias relevantes para las finanzas cuantitativas ya que refleja los sentimientos del mercado determinados por el consenso de la actitud de los inversionistas hacia un determinado activo o hacia el mercado en su conjunto; estimar la incertidumbre característica de la volatilidad del mercado es crucial para la selección de activos y la conformación de portafolios óptimos, es igualmente importante para el análisis y administración del riesgo, así como para la negociación de derivados y su aplicación para coberturas. El identificar la presencia de volatilidades cambiantes permite estimaciones más precisas del valor de las opciones, así como del comportamiento futuro del mercado.

Cabe resaltar que, aunque la importancia de la volatilidad implícita ya era conocida, la superficie de la volatilidad, la sonrisa de volatilidad no estu-

vo presente antes del lunes negro (19 de octubre de 1987); los grandes saltos en los precios y rendimientos bursátiles, y los once meses que se requirieron para su recuperación, generaron su aparición y estudio. Desde entonces la superficie de volatilidad ha estado presente en todas las crisis regionales e internacionales.⁸ En este respecto, cabe resaltar que el mercado es reticente a convalidar los precios al alza del subyacente a través de la valuación de precios de las opciones; al contrario, el mercado rápidamente convalida el precio a la baja del subyacente reduciendo el precio de la opción, disminuyendo igualmente el valor de la volatilidad implícita (Tagliafichi, 2008).

Sin embargo, la volatilidad inherente a un activo no es directamente observable. En general, la metodología para el cálculo de volatilidad implícita es la siguiente: dado el precio de la opción y conociendo el modelo de valuación (de B&S), se efectúa la aproximación de la volatilidad con métodos de análisis numérico de aproximación de raíces, como es el método de Newton-Raphson, y con la finalidad de no iterar al infinito, esta metodología restringe un margen de cambio en las diferentes soluciones.

2.2. Comparación de los Modelos de Merton y Black&Scholes

La hipótesis del presente trabajo considera que el método de valuación más próximo a las fluctuaciones del rendimiento del activo subyacente es el propuesto por Merton (1976) referido a “precios de opciones cuando los rendimientos de activos subyacentes son discontinuos,” aplicando un proceso estocástico de difusión con saltos; esto implica que la rentabilidad de un título en ocasiones presente variaciones extraordinarias propias de un mercado bursátil, seguido de periodos de variación normal. El modelo de Merton, antes mencionado, rompe con el supuesto más fuerte del modelo propuesto por Black y Scholes (1973) que limita al precio del activo subyacente a seguir un movimiento browniano geométrico a través del tiempo produciendo una distribución logarítmica normal del precio entre dos puntos en el tiempo, cuestión que no sucede en sucesos de crisis, de baja bursatilidad de activos o por simple desconfianza de los inversionistas.

En general el modelo de Merton está constituido por un proceso de difusión, similar al de Black-Scholes, pero integrando cambios inesperados co-

⁸ Entre las principales cabe destacar: crisis asiática de 1997; crisis financiera rusa, 1999; crisis dot-com, 2000; crisis el ataque a las Torres Gemelas de Nueva York en 2002; crisis subprime 2007-2008; crisis de la deuda soberana europea, 2010; crisis de altas tasas de interés, 2018; y a lo que hay que añadir la crisis de los mercados de 2020 debido a la pandemia del covid-19.

nocidos como saltos, que se representan mediante un proceso de Poisson, el cual podemos definir como un proceso de sucesos independientes. Los supuestos más importantes del modelo de Merton (1976) son los siguientes:

1. El número de sucesos en dos intervalos disjuntos siempre es independiente.
2. La probabilidad de que un suceso ocurra en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.
3. La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo suficientemente pequeño es muy baja.

Tomando en cuenta la fluctuación de precios y por consiguiente de rendimientos de un activo este enfoque es más realista que el modelo de Black y Scholes (B&S) el cual sólo establece pequeñas variaciones en periodos de tiempo relativamente cortos con una tendencia estable. A su vez el modelo B&S, asume ciertas condiciones óptimas, como son:

1. El activo sigue un movimiento geométrico browniano durante todo el tiempo, y produce una distribución log-normal para un precio entre dos puntos en el tiempo.
2. No hay pago de dividendos.
3. No existe costos de transacción e impuestos a lo largo de tiempo.
4. Las tasas de interés son iguales, las que cobran los prestamistas y las que pagan los prestatarios.
5. La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante en el tiempo.
6. La volatilidad del subyacente es constante en el tiempo.
7. La opción es del tipo europea, es decir, solo se puede ejercer hasta la fecha de vencimiento establecida.

Posterior a la publicación del artículo de Black y Scholes (1973) surgió la controversia con relación al hecho que los rendimientos de los derivados financieros no se encuentran normalmente distribuidos como supone el movimiento geométrico browniano, como un proceso de variación del precio de los activos financieros. Varios estudios empíricos han demostrado que, la distribución de los rendimientos no sigue una distribución normal sino una distribución asimétrica leptocúrtica y con sesgo; además se ha demostrado que la varianza de los precios no es finita. Adicionalmente, siempre estuvo presente el hecho de que la tasa de interés, insumo importante en la fórmula de B&S, es cambiante en el tiempo. El modelo de difusión con saltos (Merton,

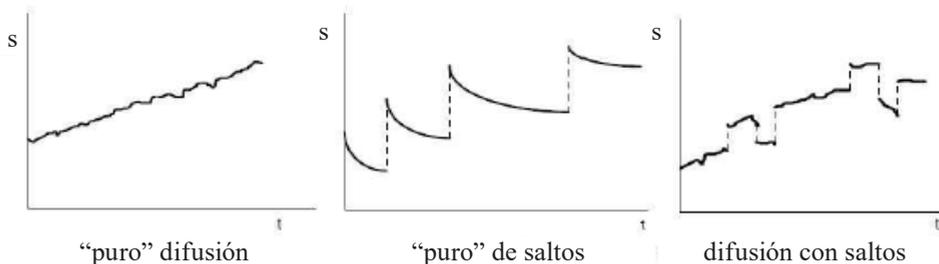
1976) ofrece una explicación a la primera inquietud, en tanto que en el modelo de volatilidad estocástica Hull y White (1987) consideraron el segundo aspecto, asumiendo que la tasa de interés instantánea sigue un proceso de distribución normal con reversión a la media.

De hecho, grandes saltos tienen lugar en los precios de los activos con cierta regularidad, y están presentes ante eventos importantes; de ahí que Merton (1976) propuso añadir un término de saltos en los procesos Brownianos (continuos), reconocidos por Black y Scholes, y obtener así un mejor modelo para capturar el comportamiento de los precios de los activos en los mercados, in't Hout (2017).

De esta manera, el desarrollo de difusión con saltos es un proceso mixto que combina el proceso de difusión puro lognormal sin saltos y el desarrollo puro de saltos; en el primero no hay saltos y las variaciones en intervalos de tiempo cortos tienen mínima importancia; en el proceso con saltos puro, todas las variaciones en los rendimientos del activo presentan una trayectoria, con grandes cambios, verdaderos saltos. El proceso intermedio combina ambos comportamientos, esto es, tramos de continuidad y episodios con saltos. Concretamente, los procesos con saltos se caracterizan por una trayectoria discontinua con probabilidad uno, en tanto que los procesos lognormales la trayectoria es continua y su probabilidad es igualmente de uno.

Los procesos anteriormente descritos se encuentran representados en la Gráfica 1, en donde se muestran los procesos estocásticos referentes al contraste que existe entre modelos de difusión “puros” y los modelos de difusión con saltos.

Gráfica 1. Procesos estocásticos teóricos generados por la variación de los rendimientos



Fuente: Lorenzo Alegría (1995).

El proceso de cambio radical en el precio de un activo financiero (y consiguientemente sus rendimientos) puede atribuirse a un salto como un proceso estocástico definido en tiempo continuo. En este proceso la probabilidad del cambio del precio del activo de manera extraordinaria y la magnitud del cambio no resultan esenciales, pero que existan en el precio observado si es necesario. Aunado a lo anterior, algunos estudios empíricos de los precios de los activos con una distribución log-normal y varianza constante, han mostrado la existencia de saltos que se deben a la prima de riesgo; sin embargo, teóricamente, cambios esporádicos en el precio de un activo se presentan en respuesta a algún anuncio de información y en algún momento surge el salto.

La ecuación diferencial parcial incluida en el trabajo de Merton (1976) presenta parámetros como: un proceso de Poisson dN con una intensidad de salto λ ; dW es un proceso de Gauss-Wiener; ambos procesos son independientes entre sí (ver ecuación 1), donde $(Y-1)$ es un porcentaje aleatorio en el cambio de precio del activo si el proceso de Poisson ocurre. A continuación, se presenta la ecuación diferencial estocástica propuesta en este modelo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t)(Y-1)dN(t) \quad (1)$$

Donde, la variable $\sigma S(t)dW(t)$ describe el cambio de rendimiento no esperado a través de un proceso lognormal del precio y $S(t)(Y-1)dN(t)$, la describe mediante la variación no normal del precio (proceso de salto); dN es un proceso Poisson con intensidad λ . La primera parte de la ecuación constituye la ecuación diferencial del modelo de Black y Scholes; la segunda parte el lado derecho identifica el proceso de saltos de diferentes tamaños N . Para poder registrar el número de saltos y sus diferentes tamaños se hace uso precisamente de la distribución Poisson.

La ecuación diferencial estocástica presentada en la ecuación 1, cuenta con las siguientes condiciones de frontera:

$$S(0) = S_0 \quad (2)$$

$$N(0) = 0 \quad (3)$$

$$\langle dW, Y \rangle = 0 \quad (4)$$

$$\langle dW, N \rangle = 0 \quad (5)$$

La valuación de las opciones financieras a partir del modelo de Merton, resolviendo la ecuación diferencial estocástica, puede representarse de la siguiente manera:

$$C(K, T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{rt+k\mu_j+\frac{k}{2}\sigma_j^2} (S(0)N(d_{1,k}) - KN(d_{2,k})) \quad (6)$$

$$d_{1,k} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + k(\mu_j + \sigma_j^2)\right)}{\sqrt{\sigma^2 T + k\sigma_j^2}} \quad (7)$$

$$d_{2,k} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + k(\mu_j + \sigma_j^2)\right)}{\sqrt{\sigma^2 T + k\sigma_j^2}} \quad (8)$$

Si λ es igual a 0, entonces la dinámica del rendimiento sería igual a la propuesta por Black y Scholes. Si un evento ocurre entonces (Y-1) es una función que produce un impulso finito de salto de S a S_Y .

2.3. Cálculo de la volatilidad implícita

El cálculo de la volatilidad implícita se genera cambiando la dirección de los modelos de valuación, dejando como incógnita la volatilidad y el precio de la opción (prima) queda como un dato que se obtiene del mercado; en este trabajo, la volatilidad se obtiene del mercado de derivados mexicano (MexDer). Esto implica que debemos utilizar el modelo de valoración de opciones que se utilice en la generalidad del mercado, con el fin de obtener un resultado congruente con los datos disponibles. Por otro, lado, cada opción contará con una determinada valuación de volatilidad implícita, por lo que ésta tiene que ser calculada para cada serie de opciones en la lista del mercado.

En general, el cálculo del precio de la opción depende del período de vencimiento, la tasa libre de riesgo, el precio de ejercicio de la opción, el precio actual del activo y la volatilidad histórica de dicho activo; siendo la volatili-

dad la única variable inobservable en el modelo y la cual se considera como un factor constante para el modelo B&S.

La volatilidad implícita funciona como factor de cobertura de riesgo, ya que pretende hacer una comparación con los datos de mercado y es coherente por qué el factor de riesgo o volatilidad no es constante. Entre algunos factores que la afectan son: la volatilidad del subyacente es diferente al de la opción; suposición errónea acerca del comportamiento normal logarítmico del subyacente; tiempo remanente para el vencimiento y el factor humano incuantificable representando los sentimientos del mercado.

3. Datos y evaluación empírica

3.1. Comportamiento de las series

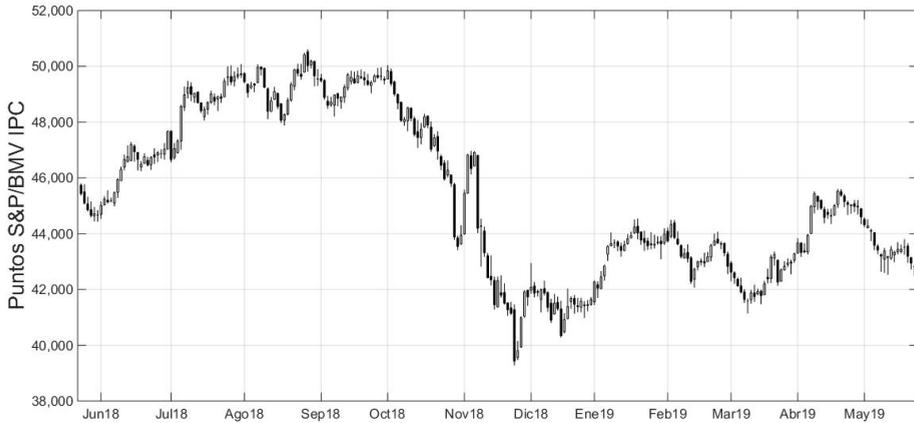
La muestra incluye la serie financiera diaria del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (S&P/BMV IPC), subyacente del estudio, que comprende el período 24 de mayo del 2018 al 24 de mayo del 2019; en total son 252 observaciones. Para el cálculo de las superficies de volatilidad se utilizó información divulgada en el *Boletín diario de opciones* de la Bolsa de Derivados de México, en tanto el precio spot se obtuvo de *Yahoo Finance Par*.

La Gráfica 2 resume la evolución de la serie bursátil durante el período de análisis; este trabajo emplea la serie financiera diaria de precios de cierre del S&P/BMV IPC y constituye el activo subyacente a valorar. La Gráfica 3 resume el comportamiento de sus rendimientos.

Gráficamente puede observarse el comportamiento irregular del índice de precios de la Bolsa Mexicana de Valores. Puede apreciarse la presencia de algunos saltos de intensidad variada, particularmente las caídas en noviembre y diciembre de 2018.

En dicho año, el índice de la bolsa mexicana de valores tuvo una pérdida de 15.63% descendiendo a 41,640.27 puntos de un máximo de 59,752.27 puntos en el año, la mayor caída desde 2008, cuando la baja fue de 24.23%. Durante el período analizado, el máximo de 50,187.8 puntos tuvo lugar en septiembre 8 y el mínimo de 39,807.28 puntos en noviembre 27. Este pobre desempeño estuvo marcado por la inquietud sobre las elecciones presidenciales en México, la renegociación del TLCAN, el conflicto China-Estados Unidos y las cuatro alzas en las tasas de interés de la Reserva Federal (cada vez 25 puntos base al rango de 2.25-2.50%, diciembre 19, 2018) estos dos últimos hechos afectaron fuertemente a los mercados financieros mundiales

Gráfica 2. Comportamiento del IPC, periodo del 24 de mayo de 2018 al 24 de mayo de 2019



Fuente: elaboración propia con base en información de Yahoo Finance.

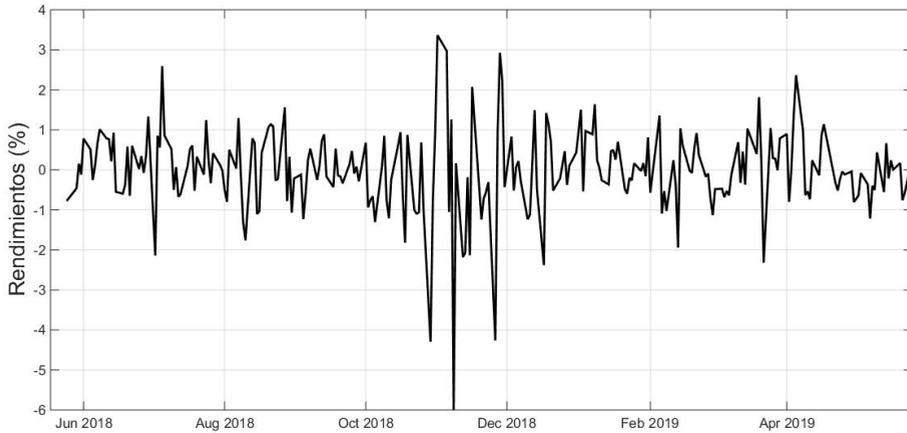
produciendo graves efectos de contagio entre las diversas bolsas globales (Banco de México, 2020; Ortiz *et al*, 2020).

El siguiente año la intensidad de las tensiones Estados Unidos-China bajó de tono, en tanto que la Reserva Federal, ya fuera de nuestro período de análisis, cambió en estrategia estimulando la liquidez de los mercados bajando tres veces las tasas de interés de septiembre de 2019 a marzo de 2020 al rango de 0.00-0.25%. No obstante, hacia mediados de 2019 la BMV todavía no recuperaba los niveles perdidos (Ortiz *et al*, 2020).

La Gráfica 3 confirma la presencia de saltos en el comportamiento de los rendimientos del IPC durante el período analizado. Los saltos son tanto positivos como negativos, éstos últimos son más profundos. Existen algunas características que no son adecuadas para determinar la volatilidad de los rendimientos del mercado de valores de México con el modelo de Black y Scholes. Las características básicas se resumen en la Tabla 1 y en la Gráfica 4 complementaria a las estadísticas básicas del histograma y a la curva de distribución de los rendimientos de la serie bajo análisis.

En cuanto al rendimiento general del período, puede observarse que éste es negativo. Una estrategia de comprar y sostener redundaría en pérdidas para los inversionistas. Por otro lado, ajustes ante la negatividad exógena inesperada de la crisis (al menos en su intensidad e incertidumbre sobre su aparición y temporalidad) alentaron saltos en el comportamiento dife-

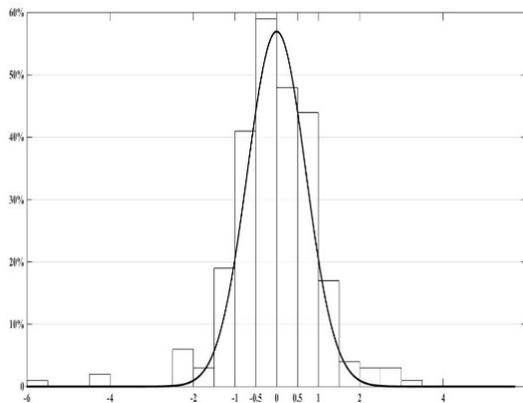
Gráfica 3. Tendencia de los rendimientos del IPC



Fuente: elaboración propia con base en información de Yahoo Finance.

Gráfica 4. y Tabla 1. Estadísticas básicas del IPC

Media	-0.03%
Mediana	-0.07%
Máximo	3.37%
Mínimo	-5.99%
Desviación estándar	1.05%
Sesgo	-0.94
Prueba JB	395.750
P- 95%	0



Fuente: elaboración propia – resultados obtenidos aplicando EViews 10.0.

rente a condiciones previamente conocidas. En ambos casos, la necesidad de cubrir rendimientos futuros es evidente destacando la importancia de opciones sobre el índice de la Bolsa Mexicana de Valores. Profundizando este análisis, resaltan tres hechos para la aplicación del modelo de Merton

con saltos y la distribución Poisson: en primer lugar, las series presentan un sesgo negativo a la izquierda; en segundo lugar, la serie de rendimientos es altamente leptocúrtica (8.862315). Dos hechos enfatizados en la evidencia de estudios recientes que incorporan saltos y la distribución Poisson en sus investigaciones (Kou, 2002; Gugola, 2016).

Finalmente, en tercer lugar, la estadística de Jarque-Bera indica la carencia de normalidad. De hecho, en la gráfica del histograma y la curva de distribución se observa la presencia de colas gruesas. En resumen, conforme a nuestra hipótesis, el modelo de Merton es más adecuado que el de B&S para medir la volatilidad de opciones financieras caracterizadas por procesos de difusión con saltos (al igual que sus subyacentes).

De acuerdo con la valuación tradicional a partir del modelo B&S, es necesario conocer la volatilidad histórica. En este caso, la volatilidad histórica calculada sobre los rendimientos del S&P/BMV IPC es de 1.05 y el valor esperado del rendimiento es de -0.03% de una función de probabilidad normal. Para apegarse al supuesto de normalidad sobre los rendimientos se grafica en la figura 4 un histograma del rendimiento contra una distribución normal teórica con media 0 y desviación estándar σ^2 de una función de probabilidad normal.

En el resumen teórico-metodológico del apartado 3, se señaló que para la valuación de la superficie de volatilidad del índice bursátil mexicano (subyacente) es necesario conocer la serie de opciones ofrecida en el mercado. En este caso, se valúa esta serie a partir del mercado primario de derivados mexicano del cual se emiten boletines diarios que contienen la información de mercado generada en las sesiones de negociación de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), así como avisos a los Socios Liquidadores y Operadores y al público en general. Particularmente, se empleó el boletín emitido el 31 de mayo del 2019 que contiene el precio de ejercicio con su respectiva valuación del precio de una opción de compra (*call*) y fecha de vencimiento (21 de junio de 2019 y 20 de septiembre de 2019); esta información es necesaria para la propia valuación de la volatilidad implícita. El boletín incluye una tabla-resumen de las principales posiciones realizadas por los inversionistas (volumen, valor nocional, interés abierto) que muestra que el valor esperado del índice bursátil es 42,500 puntos, frente a la expectativa mínima de 40,000 puntos. Cada fecha de vencimiento, antes mencionadas, contiene 60 precios *call* y 60 precios *put*, ya que se considera una paridad *call-put*; en este estudio sólo se evalúan los precios *call*.

3.2. Análisis empírico

El cálculo de las volatilidades implícitas se estimó aplicando la función *blsimpv* del software Matlab, que consiste en aplicar la operación de reversión al modelo de Merton, conociendo el precio de la opción *call* (cotización en el mercado). Con la función intrínseca antes referida se obtiene una aproximación de la volatilidad empleando análisis numérico de solución de raíces conocido como Newton Raphson. Este algoritmo es implementado para encontrar aproximaciones de las raíces de una función real; es importante que dentro de esta metodología se seleccione un valor lo suficientemente cercano a la raíz buscada, en este caso en particular el valor de frontera ocupado es la volatilidad histórica, ya que de lo contrario el método no encuentra una solución con convergencia global.

La metodología anterior fue propuesta por Fleming, Ostdiek y Whaley (1995). En la ecuación 9 se presenta la iteración propuesta para el cálculo de volatilidad implícita i -ésima. La ecuación (9) muestra la iteración de vega para el cálculo de volatilidades implícitas; Λ es la letra griega que mide la sensibilidad de la volatilidad de una opción con respecto a su volatilidad implícita σ (ecuación 9).⁹ Formalmente, es el coeficiente de la derivada del valor de la opción con respecto a dicha volatilidad implícita: $\Lambda_i = F\sqrt{T} \cdot N(d_1) \cdot e^{-rT}$; y la volatilidad implícita es:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{p_i - p}{\Lambda_i} \quad (9)$$

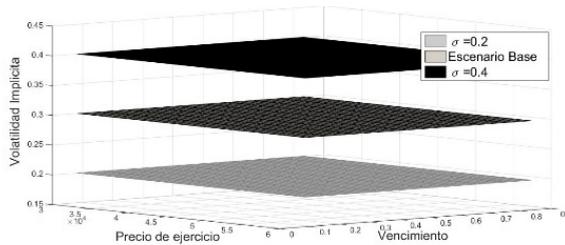
3.3 Resultados y discusión

Como se mencionó anteriormente, los datos utilizados para el cálculo de las superficies de volatilidad fueron obtenidos del *Boletín diario de opciones* de la Bolsa de Derivados de México y el precio spot fue obtenido de *Yahoo Finance*. La fecha para la valuación de las superficies de volatilidad es 31 de mayo del 2019 para opciones sobre futuros del el S&P 500 /IPC, esto como consecuencia de la metodología del mismo mercado para calcular el Índice de Volatilidad México (VIMEX).

⁹ Al conjunto de ocho derivadas del modelo de B&S que miden el riesgo de las opciones se le denomina "las griegas." Entre estas se encuentra tau (τ) o kappa (κ) o vega (Λ). Vega es la denominación más usada en la práctica, pero Vega no es precisamente una letra griega.

La Gráfica 5 indica la superficie de volatilidad generada con el modelo de Black-Scholes, donde se observa la existencia de tres escenarios con diferentes volatilidades. Las fechas de vencimiento ocupadas fueron desde 1 a 10 meses para poder generar la superficie. La volatilidad implícita es constante para cualquier precio de ejercicio. Se muestran tres escenarios de volatilidad ($\sigma=0.2, 0.3, 0.4$).

Gráfica 5. Superficie de volatilidad calculada a partir del modelo de Back-Scholes



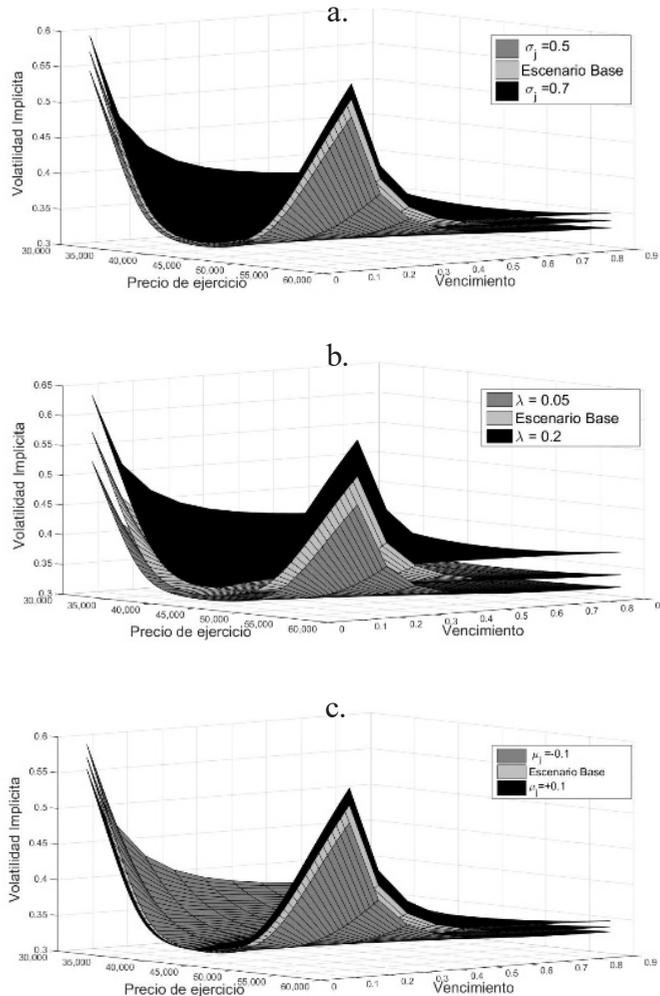
Fuente: elaboración propia.

Aplicando el modelo de Merton, la superficie es discontinua con saltos lineales y por el exceso de curtosis la superficie de volatilidad y leptocurtosis debe ser una sonrisa. En la figura 6 paneles a, b, c, se indica la superficie de volatilidad obtenida con este modelo; se generaron tres escenarios con la variación de los diferentes parámetros del modelo, como son: los rendimientos esperados en el salto, la intensidad del salto y la volatilidad del salto. Dichas superficies se evaluaron para las mismas fechas de vencimiento que aquellas del modelo B&S. Claramente, las superficies de la figura 6 mimetizan una sonrisa.

En la Gráfica 6 en el panel a) se muestra la superficie de volatilidad calculada a partir del modelo de Merton. La variación de los rendimientos con saltos corresponde a tres escenarios ($\mu_j = -0.1, 0, 0.1$). En el panel b) la superficie de volatilidad calculada a partir del modelo de Merton, muestra la variación de la volatilidad en los saltos para tres escenarios ($\sigma_j = 0.5, 0.6, 0.7$). Finalmente, en el panel c) la superficie de volatilidad también calculada a partir del modelo de Merton, muestra la intensidad del salto producido por el mercado para tres escenarios ($\lambda = 0.05, 0.1, 0.2$).

Como se observa en las gráficas, los modelos de Black-Scholes y Merton difieren en la volatilidad implícita; como se señaló previamente; el primero considera que la volatilidad es constante para cualquier precio de ejercicio

Gráfica 6. Superficie de volatilidad calculada a partir del modelo de Merton



Fuente: elaboración propia.

indicando una deficiencia de este modelo puesto que opaca las funciones de los instrumentos del mercado de derivados: cobertura de riesgos, arbitraje y especulación, principalmente la primera. De igual forma, la volatilidad implícita rompe con el supuesto de no arbitraje debido a que, si existe una variación de está propone dar paso a diferentes posiciones en otros mercados, lo que permitiría arbitraje. Como ya se anotó con anterioridad, el modelo de

Merton propone la inclusión de saltos combinado con un proceso de difusión, lo que hace más robusto el análisis de valuación de opciones financieras, ya que los mismos saltos promueven el arbitraje en estos instrumentos y de igual modo este modelo promueve la cobertura de riesgo ante sucesos imprevistos. La superficie generada por el modelo de Merton fortalece la noción de superficies de volatilidad para la toma de decisiones con incertidumbre.

Para construir la solución de la ecuación diferencial propuesta por Merton es preciso estimar cuatro parámetros, en especial el parámetro λ , en este caso con información histórica que refleja el activo subyacente como se reporta en la figura 2. Del mismo modo, para valuación de la opción es necesario considerar un precio “semilla” que es el último precio *spot* presentado en el mercado (42617.60 puntos). De igual forma, la tasa de interés útil para la valuación es la tasa objetivo promedio del primer trimestre del 2019 que presenta Banco de México que fue de 8%.

El parámetro λ recoge la intensidad del salto por unidad de tiempo; se encontró que el rendimiento del activo subyacente (IPC), puede experimentar cambios importantes, seguidos de periodos de escasa variación que corresponde al modelo de difusión de saltos; para el IPC el valor de λ para este periodo es 0.2., lo que el mercado debe tomar en cuenta para valorizar las opciones, en nuestro caso de compra, esto es, exigiendo una prima por el riesgo.

Es claro que la intensidad del salto resulta un factor predominante dentro del modelo Merton, ya que profundiza la posición de la opción; por tanto, es necesario considerar este salto para obtener una mejor aproximación del riesgo y valor de una opción, así como su impacto en el subyacente. Para la mejor toma de decisiones es necesario pesar las decisiones del agente con respecto a la volatilidad implícita ya que refleja las condiciones de mercado actuales y refuerza una posición más aproximada a las condiciones de mercado.

Varias alternativas se han desarrollado para elaborar indicadores (índices) que brinden los niveles de volatilidad que espera el mercado, para poder realizar mejores estrategias de cobertura y hacer más eficiente el manejo de portafolios; para calcularlos se utilizan opciones cuyos precios de ejercicio están a dinero (*at-the-money*, ATM). Los índices propuestos por algunos mercados de derivados se han constituido como indicadores fundamentales tanto en la negociación de opciones como en la percepción de la marcha del mercado en general. Estos índices proveen a los agentes económicos de

información valiosa para la toma de decisiones de inversión, cobertura e incluso arbitraje.

En la actualidad las propuestas para tener indicadores efectivos de la volatilidad futura se inclinan a favor de la obtención de la volatilidad implícita (VI). Es importante aclarar que independiente del modelo de valuación de opciones que se utilice existe tres problemas en el cálculo de dichos índices. Primero, las opciones no se presentan estrictamente *at the money* (ATM). Segundo, cuando al momento de valorar las opciones se presenta una distinción entre la VI de las opciones de compra y la VI de las opciones de venta puesto que en la práctica la calidad de los datos disponibles de mercado no siempre es oportuna. En tal situación se utiliza la volatilidad implícita de la opción más cercana a la fecha de vencimiento y más ATM; debido a que en ocasiones una opción estará más cerca ATM que otras, no se pueden generar series históricas homogéneas. Tercero, también es observable que las volatilidades implícitas no tienen un periodo de predicción constante puesto que dicho período va disminuyendo a medida que el tiempo avanza y se acerca la fecha de vencimiento de la opción.

Los inconvenientes antes mencionados son motivación para que los inversionistas exijan índices de volatilidad que conjunten plenamente la información contenida en las diferentes posiciones. Igualmente, para las autoridades regulatorias y las mismas instituciones bursátiles es de vital importancia la creación y difusión de índices de volatilidad robustos que fortalezcan la confianza de los agentes económicos en los mercados e instituciones financieras.

En este sentido, para terminar con la discusión cabe resaltar que el MexDer desarrolló un índice de volatilidad implícita conocido como Índice de Volatilidad México (VIMEX), basándose en la metodología de Fleming, Ostdiek y Whaley (1995). El VIMEX es el índice de la volatilidad esperada para el Mercado Accionario Mexicano en el corto plazo en donde se agrupa la información de las opciones de dicho mercado. Mide la volatilidad implícita para un solo contrato teórico de opción sobre el IPC que se encuentra cercano al dinero (ATM) y con un tiempo de vencimiento de 66 días hábiles.

Resalta el hecho que el modelo de valuación utilizado es el modelo Black (1976) el cual básicamente es un ajuste al modelo original de B&S a fin de valorizar opciones sobre títulos de endeudamiento. El VIMEX se divulga diariamente en la página del MexDer, tres veces al día entre las 8:00 y las 15:30 horas. Es de esperarse que el MexDer continúe con esfuerzos de esta naturaleza, particularmente considerando la presencia de repetitivas e intensas

crisis bursátiles, incluyendo la causada en la actualidad por la nefasta pandemia del covid-19.

Se debe prestar atención especial a que modelos de volatilidades implícitas y modelos de valoración de opciones, que se desarrollen en el futuro, dejen atrás el supuesto de homocedasticidad de las series de tiempo de las operaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, y las series económicas y financieras en general. El modelo de Merton de 1976 que hemos analizado en el presente trabajo es un paso adelante que se puede tomar, particularmente integrando en el mismo alternativas para tomar en cuenta la variabilidad de las tasas de interés.

Conclusiones

Esta investigación establece un marco de referencia sobre la relevancia de la volatilidad implícita y el cálculo de la superficie de volatilidad. El cálculo estimado del precio de las opciones empleando volatilidades no lineales acercan con mayor precisión al precio de mercado lo que a su vez convalida el precio futuro del subyacente; se evita así tomar decisiones con base en sobre o subvaluaciones y aprovechar en un período específico las oportunidades de inversión, cobertura y arbitraje.

Este trabajo señala contundentemente que el modelo de Merton de 1976 presenta ventajas sustantivas sobre el modelo de Black y Scholes de 1973. El modelo de Black y Scholes asume al movimiento geométrico Browniano como característico de los cambios en los precios de un activo, resultante de una distribución logarítmica normal; y además una volatilidad constante. Al contrario, el modelo de Merton 1976 permite valorizar opciones cuando los rendimientos de los activos de referencia siguen procesos estocásticos de difusión con saltos, capturados mediante un proceso Poisson; la varianza es cambiante en el tiempo.

El comportamiento inestable y volátil de la economía mundial en las últimas décadas ha impactado el desempeño bursátil global, incluyendo la BMV, lo que se refleja en saltos o perturbaciones que afectan su rendimiento de manera extraordinaria; el modelo de Merton, ajustándolo para incluir tasas de interés cambiantes puede ser una herramienta adecuada para el cálculo del valor de una opción bajo estas características y a su vez un índice de volatilidad que promueva la confianza de los agentes económicos en el mercado de valores.

Futuras investigaciones deben continuar y profundizar este tipo de estudios abordando en primer lugar el modelo de Merton y extensiones con modelos de volatilidad estocástica, entre otros, los modelos de Heston, (1993), Bates (1996), Cartea y del Castillo Negrete (2006), y Escobar y Fang (2020). El caso de los mercados emergentes caracterizados por frecuentes y severas turbulencias en sus mercados merece atención especial como un paso para fomentar el desarrollo de sus instituciones y mercados financieros.

Referencias bibliográficas

- Andersen, L., y Andreasen, J. (2000). "Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing", *Review of Derivatives Research*, vol. 4, núm. 3, pp. 231-262.
- Banco de México (2020). Bolsa Mexicana de Valores. Precios de cierre. Disponible en: <https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=7&accion=consultarCarritoDeSeries&idCuadro=CF57&locale=es>
- Bates, D. S. (1996). "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Phlx Deutschemark Options". *The Review of Financial Studies*, vol. 9, num. 1, pp. 69-107.
- Belchior, Diogo F. F. (2012). "Implied Volatility as a Forecast for Future Volatility; Evidence from European Market". *Dissertação de Mestrado*, Universidade Técnica de Lisboa. Instituto Superior de Economia e Gestão.
- Bernales, A. y Guidolin, M. (2014). "Can we Forecast the Implied Volatility Surface Dynamics of Equity Options? Predictability and Economic Value Tests", *Journal of Banking y Finance*, núm. 46, pp. 326-342.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, vol. 4, núm. 3, pp. 637-654.
- Black, F. (1976). "The Pricing of Commodity Contracts". *Journal of Financial Economics* 3, núms. 1-2, pp.167-179.
- Black, F. (1989). "How We Came Up with the Option Formula". *Journal of Portfolio Management*, vol. 15, núm. 2, pp. 4-7.
- Bogayreva, N., Grandez, R., Rodriguez Apolinar, S. y Soldevilla, A. (2019). *SABR: A Stochastic Volatility Model in Practice*. Master in Finance, Barcelona School of Economics, Pompeu Fabra University.
- Bolsa Mexicana de Valores (2019). Sistema Internacional de Cotizaciones. Disponible en: <https://blog.bmv.com.mx/2019/06/el-sistema-internacional-de-cotizaciones-sic-de-la-bmv-alcanzo-un-record-de-mas-de-2000-valores-listados/>

- Bolsa Mexicana de Valores (2020). Informes varios/Anuncios a la prensa.
- Cartea, A. y del-Castillo-Negrete, D. (2006). "Fractional Diffusion Models of Option Prices in Markets with Jumps". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. núm. 374, pp. 749-763.
- Derman, E. (2003). Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile. Estados Unidos. <http://emanuelderman.com/wp-content/uploads/2003/04/Amsterdam.pdf>
- Dumas, B., Fleming J. y Whaley R. (1998). "Implied Volatility Functions: Empirical Tests". *The Journal of Finance*, núm. 53, pp. 2059-2106.
- Escobar, M. y Fang, L. (2020). "Stochastic Volatility Models for the Implied Correlation Index: Evidence, Properties and Pricing". *Finance Research Letters*, vol. 35 (en prensa).
- Fleming, J., Ostdiek, B. y Whaley, R. E. (1995). "Predicting Stock Market Volatility: A New Measure". *The Journal of Futures Market*, vol. 15, núm. 3, pp. 265-302.
- Gonçalves, S. y Guidolin, M. (2006). "Predictable Dynamics in the S&P 500 Index Options Implied Volatility Surface". *The Journal of Business*, vol. 79, núm. 3, pp. 1591-1635.
- Gugola, N. (2016). "Merton Jump-Diffusion Model versus the Black and Scholes Approach for the Log-returns and Volatility Smile Fitting International". *Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol 109, núm. 3, pp. 719-773.
- Heston, S. L. (1993). "A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". *The Review of Financial Studies*, vol. 6, núm. 2, pp. 327-343.
- Hull, J. y White, A. (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities". *Journal of Finance*, vol.42, núm. 2, pp. 281-300.
- in 't Hout, K. (2017). "Merton Model". En: *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained. Financial Engineering Explained*. Palgrave Macmillan, London.
- Kou, S. y Wang, S. (2002). "A Jump-Diffusion Model for Option Pricing". *Management Science* núm. 45, pp. 1086-1101.
- Kimaro, N., Charles, W.M., Masania, V.G. y Ravi, M.T. (2019). "Merton's Jump Diffusion Model an Application to Stock Markets of East African Countries". *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering*, vol. 5, núm. 8, pp. 16-23.
- Lochowski, R. (2013). "The Geometric Brownian Motion Model vs. the Jump-Diffusion Model Applied to Selected WIG-20 Companies in the year 2011". En *Artículos Científicos, Aplicación de métodos cuantitativos en la gestión de*

- riesgos en actividades de inversión*, pp. 41-56. Universidad de Economía en Katowice, Polonia.
- Lorenzo Alegría, R. M. (1995). "Valoración de opciones: una contrastación del modelo de difusión de Merton". *Tesis Doctoral*. Universidad de La Rioja.
- Lovreta, L. y Silaghi, F. (2020). "The Surface of Implied Firm's Asset Volatility". *Journal of Banking and Finance*, vol. 112, pp. 1-18.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economics and Management Science*, núm. 4, pp. 141-183.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, vol. 3, nums 1-2, pp. 125-144.
- Nagy, L. y Ormos, M. (2019). "Volatility Surface Calibration to Illiquid Options". *The Journal of Derivatives*, vol. 26, num. 3, pp. 87-96.
- Ortiz, E., Cabello, A. y Sosa M. (2020). Financiarización y consumismo: multipolarismos y crisis Covid-19. *Documento de Investigación*. Programa de Posgrado en Ciencias Políticas y Sociales, Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Poon, S.-H. y Granger, C. W. (2003). "Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review". *Journal of Economic Literature*, vol. 41, núm. 2, pp. 478-539.
- Reyes Meza, L.G. y Santil Filloy, S. (2001). "Superficies de volatilidad: evidencia empírica del cálculo de volatilidad implícita de la opción ETF QQQ". *Estocástica. Finanzas y Riesgo*, vol. 2, num. 1, pp. 7-29.
- Tagliafichi, R.A. (2008). "La volatilidad, su cálculo y su incidencia en los precios de los derivados". *Palermo Business School*, num. 2, pp. 5-16.
- Varma, J. S. y Agarwalla, K. (2018). "Indian Equity Options: Smile, Risk Premiums, and Efficiency". *The Journal of Future Markets*, vol. 39, num. 2, pp. 1-14.
- Venegas Martinez (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: Una aplicación a los títulos de Carso". *Estudios Económicos*, vol. 16, num. 2 pp. 203-226.
- Villamil, J. (2006). "Modelo de valoración de opciones en tiempo continuo". Bogotá: *Cuaderno de Economía*, vol.25, num. 44, pp. 177-196.
- Xu, Z. y Jia, X. (2019). "The Calibration of Volatility for Option Pricing Models with Jump Diffusion Processes". *Applicable Analysis: An International Journal*, vol. 98, núm. 4, pp. 810-827.

Análisis comparativo entre el modelo ARMA y su versión continua CARMA sobre la dinámica del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Comparative analysis between the ARMA model and its continuous version CARMA on the Dynamics of the Price and Quotation Index of the Mexican Stock Exchange

Nallely Jacqueline Reyes-García*

Francisco Venegas-Martínez**

María Teresa Verónica Martínez-Palacios***

(Fecha de recepción: 17 de julio de 2020. Fecha de aceptación: 7 de enero de 2021)

RESUMEN

Esta investigación realiza un análisis comparativo entre la versión discreta de los modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA por su acrónimo en inglés) y su versión continua CARMA. Esta última es conducida por procesos de Lévy del tipo varianza gamma. Particularmente, se encuentra que la dinámica del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) se reproduce mejor con la distribución marginal del proceso CARMA ya que ésta permite capturar amplia-

* Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
njacqueline.reyesg@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7888-5430

** Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
fvenegas1111@yahoo.com.mx, ORCID: 0000-0003-1157-0298

*** Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
terevioleta@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-6338-131X

mente el exceso de curtosis, la asimetría en la volatilidad y las colas pesadas de la distribución empírica del IPC.

Clasificación JEL: C22, C32, C58, G17.

Palabras Clave: procesos de Lévy, modelo CARMA, procesos varianza gamma.

ABSTRACT

This paper carries out a comparative analysis between the discrete version of the Autoregressive Moving Average (ARMA) model and its continuous version CARMA. The latter is driven by a variance gamma type Lévy process. Particularly, it is found that the dynamics of the Price and Quotation Index of the Mexican Stock Exchange (IPC, its acronym in Spanish) is best reproduced using the marginal distribution of the CARMA process since this allows to assess more accurately kurtosis excess, volatility asymmetry and the effect of heavy tails on the IPC empirical distribution.

Classification JEL: C22, C32, C58, G17.

Keywords: Lévy processes, CARMA model, variance gamma processes.

Introducción

Un mejor modelado sobre la dinámica de los precios de los activos en los mercados financieros es una necesidad constante por parte de inversionistas y autoridades. Los hechos ocurridos en la crisis financiera asiática de 1997, la crisis hipotecaria estadounidense de 2007, y la crisis bursátil global de octubre de 2008 son recordatorios constantes de los efectos negativos en la mayor parte de las economías de todo el orbe por las caídas bruscas y repentinas en los precios de diversos activos.

Minsky (1992) propuso una teoría sobre las crisis en economías capitalistas en la que interrelaciona los ciclos, la expansión del sector financiero y la evolución de los sectores reales de la economía. Su teoría sostiene que la inestabilidad es consecuencia directa de los procesos dinámicos inherentes a la acumulación de capital, lo que significa que cuando una economía capitalista se encuentra en auge, los inversionistas tienden a sobrestimar las buenas noticias, lo que conlleva a una confianza futura exagerada y a sostener excedentes de inversión y deuda como patrones.

Las consecuencias que han dejado las crisis descritas anteriormente condujeron a: 1) graves problemas de liquidez, 2) altos niveles de inflación, 3) mayor desempleo y 4) un fuerte deterioro de la actividad económica (reducción significativa en el crecimiento). De acuerdo con Minsky (1992), sobrestimar las buenas noticias lleva a sobrestimar los precios de los activos

en los mercados financieros, lo cual tiende a dar información errónea a los inversionistas para su toma de decisiones.

El dinamismo que tienen los mercados financieros es importante no sólo para sus participantes, sino también para todos los sectores de la economía. Las crisis en los mercados financieros han llevado a los investigadores a mejorar la flexibilidad y confiabilidad estadística de los modelos que buscan capturar la dinámica de los precios de los diferentes activos disponibles. Incluso si no se puede predecir una irrupción o catástrofe, el objetivo de los gestores de riesgos, administradores de portafolios y reguladores; es limitar los daños y perjuicios potenciales (Rachev *et al.* 2011).

Las irrupciones se reflejan en las colas pesadas en las series de tiempo de los precios de los activos. En otras palabras, los eventos extremos presentan una mayor probabilidad de ocurrencia comparada, por ejemplo, con la que proporciona la distribución normal. Aunque la teoría clásica financiera supone que los rendimientos de los precios de los activos se distribuyen normalmente, la evidencia empírica, casi siempre, indica lo contrario. En el análisis de series de tiempo de rendimientos de activos financieros se mencionan frecuentemente diversos hechos estilizados, que incluyen sesgo, exceso de curtosis, colas pesadas y agrupamiento de volatilidad; características alejadas, por demás, del típico supuesto de normalidad. Para el caso mexicano véanse Rojas-Altamirano y Trejo-Pech (2014), Martínez-Palacios *et al.* (2015), Reyes-García *et al.* (2018) y Venegas-Martínez (2001).

En finanzas aplicadas, particularmente, en econometría financiera es frecuente para el análisis de series temporales que se utilicen modelos en tiempo discreto bajo el supuesto de normalidad. Un problema importante que presentan este tipo de modelos financieros es que han fracasado al no reflejar de forma realista el comportamiento de los rendimientos en los mercados financieros como aconteció en la crisis de 2008 (Rachev *et al.* 2011).

Los procesos autorregresivos y de medias móviles (ARMA del inglés Autoregressive Moving Average), fueron introducidos por Box y Jenkins (1970). Esta herramienta de predicción se basa en el análisis de las propiedades probabilísticas o estocásticas de las series de tiempo, en donde una variable se explica en función de sus valores pasados. En general, algunos de los supuestos más importantes que incorpora la metodología de Box y Jenkins (1970) son que las características esenciales de la serie permanecen constantes a través del tiempo, especialmente para los periodos futuros. Los residuos se distribuyen de forma normal y la serie de tiempo es estacionaria, es decir, su media, su varianza y su autocovarianza (en diferentes rezagos) son in-

variantes respecto al tiempo, es decir, permanecen iguales sin importar el momento en el cual se midan.

Por otro lado, los llamados modelos CARMA (del inglés Continuous-time Autoregressive Moving Average) y, en particular, los procesos autorregresivos en tiempo continuo (CAR) han cobrado, recientemente, especial interés en el modelado de la dinámica de precios de activos. Los pioneros de la literatura sobre procesos estocásticos estacionarios de tiempo continuo son Doob (1944), Bartlett (1946), Phillips (1959) y Durbin (1960). Más tarde, Brockwell (2001), introduce los procesos continuos CARMA asociados a procesos de Lévy.

Los modelos de umbral ARMA de Tong (1983) y (1990) han sido, particularmente exitosos, al modelar adecuadamente una amplia variedad de precios de activo. Así mismo, Brockwell (2001) realiza un análisis de los modelos ARMA de tiempo continuo, destacando sus propiedades básicas y su comparación con los modelos ARMA de tiempo discreto, así como un estudio de los procesos no lineales análogos a los de tiempo continuo de los modelos ARMA de umbral de Tong.

Brockwell *et al.* (2011) examinan las propiedades de procesos CARMA conducidos por los procesos de Lévy para modelar volatilidad estocástica. Los autores obtienen una clase mucho más amplia de procesos estacionarios de tiempo continuo de colas pesadas. También encuentran que, si el proceso de Lévy tiene momentos finitos de segundo orden, la estructura de la correlación del proceso CARMA es la misma que la del proceso CARMA gaussiano correspondiente.

La propuesta de investigación con respecto de la literatura actual será retomar la definición de un proceso CARMA gaussiano, permitiendo que los procesos de Lévy reemplacen el movimiento browniano como lo ejemplifica Brockwell. Y así se vinculará un modelo de media móvil autorregresivo continuo (CARMA) conducido por un proceso varianza gamma, lo que no se ha aplicado, hasta donde los autores saben, al mercado accionario mexicano. Con lo cual se podría evidenciar que los procesos lineales impulsados por procesos de Levy tienen la capacidad de incorporar saltos y así permitir el modelado de cambios abruptos e inesperados.

Este trabajo tiene como objetivo indagar cuál de los dos modelos ARMA discreto o ARMA continuo (CARMA) genera predicciones más adecuadas del IPC. Al respecto es importante mencionar que el proceso CARMA es conducido por un proceso de Lévy de tipo varianza gamma que podría capturar de manera más adecuada el exceso de curtosis y las colas pesadas.

Esta investigación se ha organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se presenta una descripción del estado del arte sobre los modelos ARMA tanto en su versión discreta como continua y se destaca la importancia de la utilización de los procesos de Lévy; en la sección 2 se establecen los supuestos básicos de cada modelo; en la sección 3 se realizan las aplicaciones empíricas de comparación; finalmente, en la sección 4 se discuten los resultados de las estimaciones; y por último se ofrecen las conclusiones.

1. Breve revisión bibliográfica del proceso CARMA

El supuesto de normalidad que se hace en las distribuciones de los rendimientos es poco o nada realista. Los modelos CARMA se utilizan frecuentemente para generalizar la fórmula de Black y Scholes (1973) y Merton (1973). El supuesto de que el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico browniano no refleja completamente la realidad del mercado ya que imposibilita considerar saltos bruscos hacia arriba o hacia abajo en los precios de los activos.¹ Y en tanto no se consideren dichos saltos, las colas pesadas y el exceso de curtosis no se podrán capturar de forma realista.² Por último es importante mencionar que para mejorar los supuestos del modelo de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) se propusieron los modelos de Lévy a finales de la década de 1980 y se han extendido en diversas direcciones para tener en cuenta las diferentes características de los precios y rendimientos de los activos.

Desde principios de 1990 se han realizado muchas investigaciones sobre los procesos de Lévy para describir la dinámica de los rendimientos de diversos activos. Los procesos de Lévy son procesos con incrementos estacionarios e independientes que tienen propiedades analíticas deseables y, la mayoría de las veces, reproducen adecuadamente las características estadísticas de los rendimientos. Las contribuciones pioneras de los modelos se deben a Bertoin (1996), Barndorff-Nielsen (1998) y Sato *et al.* (1999).³ Posteriormente se desarrollaron varios trabajos que utilizan procesos CARMA, entre los cuales destacan: Barndorff-Nielsen y Shephard (2002) que

¹ Véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2008).

² Un modelo de valuación de opciones que incorpora saltos en el precio del activo subyacente se encuentra en Merton (1976).

³ Para revisar la evolución y generalización de los procesos de Lévy véanse, por ejemplo, Applebaum (2004) y Schoutens (2003).

utilizaron un proceso de Lévy CAR(1) (o del tipo Ornstein Uhlenbeck) para construir un modelo de volatilidad estocástica;⁴ Todorov y Tauchen (2006) y Todorov (2011) que aplican el modelo Lévy CARMA(2,1) para modelar la volatilidad del tipo de cambio diario Deutsche Mark-Dólar estadounidense; y Brockwell y Marquardt (2005) que proponen el modelo CARMA integrado fraccionalmente para capturar la dependencia de largo plazo en las series de tiempo financieras.

Los rendimientos logarítmicos no se comportan de acuerdo con una distribución normal ya que la volatilidad cambia aleatoriamente con el tiempo y se agrupa. Las bondades del modelo Lévy-CARMA enmiendan esta deficiencia pues permiten que la distribución marginal del proceso CARMA sea asimétrica y de colas pesadas. Aunque existen diferentes procesos de Lévy, este trabajo únicamente considera los procesos de Lévy del tipo Varianza Gamma (VG) incorporados al modelo ARMA en su versión continua, porque se simulará una distribución varianza gamma y se comparará con el histograma del IPC durante el periodo de estudio.

2. Comparación de modelos

De cierta forma, los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (ARIMA)(p, d, q) son una generalización de los modelos ARMA(p, q) cuando este último es diferenciado, el cual tiene un comportamiento asintótico a un proceso ARMA (p, q). El caso general de un proceso ARMA(p, q) se representa mediante⁵

$$\phi(B)\bar{Z}_t = \theta(B)a_t, \quad (1)$$

en donde los polinomios $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son de orden p y q , respectivamente, es decir,

$$\bar{Z}_t - \phi_1\bar{Z}_{t-1} - \dots - \phi_p\bar{Z}_{t-p} = a_t - \theta_1a_{t-1} - \dots - \theta_qa_{t-q}. \quad (2)$$

Para que este proceso sea estacionario se requiere que la raíces de $\phi(x) = 0$ estén fuera del círculo unitario, y la condición para que sea inver-

⁴ Véase también Barndorff-Nielsen et al. (1998).

⁵ Véase Ramírez et al. (2011).

tible es que las raíces de la ecuación $\theta(x) = 0$ se encuentren también fuera del círculo unitario; si ambas cosas ocurren, el proceso admite las representaciones AR y MA.

Si el proceso original $\{\bar{Z}_t\}$ no presenta estacionariedad debido a una tendencia polinomial no determinista, es posible construir el proceso estacionario $\{W_t\}$ a partir de $\{\bar{Z}_t\}$ al aplicar un operador de diferencia ∇^d de orden d , lo que permite eliminar su tendencia. De tal manera que

$$W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \text{ para toda } t \quad (3)$$

Para el proceso $\{W_t\}$ se puede obtener un modelo ARMA, $\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$ lo que es equivalente a considerar un modelo ARIMA

$$\phi(B)\nabla^d \bar{Z}_t = \theta(B)a_t, \quad d \geq 1 \quad (4)$$

para $\{\bar{Z}_t\}$, en donde $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco. El término integrado se refiere a que Z_t se obtiene de la relación (3) por inversión del operador ∇^d dando una suma finita de W_t . De esta manera, un modelo ARIMA(p,d,q) indica que consta de un polinomio autorregresivo de orden p , de una diferencia de orden d y, de un polinomio de promedios móviles de orden q , de tal manera que:

$$ZW_t - \phi_1 W_{t-1} - \dots - \phi_p W_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \text{con } W_t = \nabla^d \bar{Z}_t \quad (5)$$

A continuación se presentan los fundamentos del proceso Lévy-CARMA. Para la construcción del modelo, primero se necesita describir algunos hechos fundamentales respecto a los procesos de Lévy. Para lo cual se retoma el trabajo de Brockwell (2009).

Considere un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq \infty}, P)$ donde F_0 contiene todos los conjuntos de probabilidad cero de F y la filtración (F_t) es continua por la derecha.

Definición 1: Proceso de Lévy. Un proceso adaptado $\{(L(t), t \geq 0)\}$ se dice que es de Lévy si:

- i. $L(0) = 0$ casi dondequiera.

- ii. $L(t) - L(s)$ es independiente de F_s , $0 \leq s < t < \infty$,
- iii. $L(t) - L(s)$ tiene la misma distribución que $L(t - s)$ y
- iv. $L(t)$ es continua en probabilidad.

También se supone que un proceso de Lévy es càdlàg⁶ (continuo por la derecha con límites izquierdos). La función característica de $L(t)$ $\phi_t(\theta) := E(\exp(i\theta L(t)))$, tiene la siguiente representación Lévy-Khintchine.

$$\phi_t(\theta) = \exp(t\xi(\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (6)$$

donde

$$\xi(\theta) = i\theta m - \frac{1}{2}\theta^2 s^2 + \int_{\mathbb{R}_0} \left(e^{i\theta x} - 1 - ix\theta 1_{\{|x|<1\}} \right) \nu(dx), \quad (7)$$

Para algún $m \in \mathbb{R}$ y $s \geq 0$. La medida ν está definida en los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta medida ν es conocida como la medida de Lévy del proceso L y satisface la condición $\int_{\mathbb{R}_0} \min(1, |u|^2) \nu(du) < \infty$. Si ν es la medida cero, entonces $\{L(t)\}$ es un movimiento browniano con $E(L(t)) = mt$ y $\text{Var}(L(t)) = s^2 t$. Si $m = s^2 = 0$ y $\nu(\mathbb{R}_0) < \infty$, entonces $L(t) = at + P(t)$ donde $\{P(t)\}$ es un proceso de Poisson compuesto con tasa del salto $\nu(\mathbb{R}_0)$ y distribución del tamaño del salto $\nu/\nu(\mathbb{R}_0)$. La constante a satisface

$$a = - \int_{\mathbb{R}_0} \frac{u}{1+u^2} \nu(du).$$

Muchas distribuciones para $L(t)$ pueden ser definidas dependiendo de la elección de la medida.

Teorema 1. (Lévy-Itô) Sea X_t un proceso de Lévy con distribución parametrizada por (β, σ^2, ν) , entonces X_t se descompone en $X_t = \beta t + \sigma B_t + J_t + M_t$ donde B_t es un movimiento browniano y

⁶ Es una denominación a funciones definidas sobre los reales y se refiere a una clase de objetos para los que se tiene continuidad lateral por la derecha y simultáneamente existen sus límites por la izquierda en todos sus puntos. Schoutens (2003). Las funciones càdlàg son útiles para los procesos estocásticos, donde se admite la existencia de saltos, en contraste con el movimiento browniano en el que sus realizaciones son continuas.

$\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, $t \geq 0$ es un proceso de punto de Poisson independiente con medida de intensidad ν . Los procesos J_t y M_t satisfacen,

$$J_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s| > 1\}} \quad (8)$$

y M_t es una martingala con saltos

$$\Delta M_T = \Delta X_t 1_{\{|\Delta X_t| > 1\}}. \quad (9)$$

En particular se cumple que:

$$Z \geq 0 \Leftrightarrow E(e^{-\lambda Z}) = \exp\left\{-\beta' \lambda - \int_{0, \infty} (1 - e^{-\lambda x}) \nu(dx)\right\} \quad (10)$$

de tal modo que para un proceso gamma $\beta' = 0$, $\nu(x) = f(x)dx$ con $f(x) = ax^{-1} \exp\{-bx\}$ y $x > 0$. Por lo tanto X_t se distribuye Gamma (at, b) .

La extensión de Brockwell (2001) del modelo CARMA gaussiano por procesos de Lévy con momentos finitos de segundo orden será empleado para permitir incrementos asimétricos y colas pesadas, los cuales son observados en series temporales de rendimientos de acciones o índices bursátiles. Considerando la revisión que se realiza en Iacus y Yoshida (2017) se retomará su definición.

Sean p y q enteros no negativos tales que $p > q \geq 0$, el proceso CARMA (p, q) está definido como:

$$a(D)Y_t = b(D)DL_t \quad (11)$$

donde a y b son polinomios

$$\begin{aligned} a(z) &= z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p \\ b(z) &= b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_{p-1} z^{p-1} \end{aligned}$$

con coeficientes a_1, \dots, a_p y b_0, \dots, b_{p-1} tales que $b_q \neq 0$ y $b_j = 0 \quad \forall j > q$ y D es el operador de diferenciación con respecto a t . El modelo CARMA (p, q) tiene la siguiente representación espacio-tiempo.

$$Y_t = \mathbf{b}^T X_t \quad (12)$$

donde X_t es solución al proceso p -dimensional para

$$dX_t = AX_t dt + \mathbf{e} dL_t \quad (13)$$

y la matriz A de $p \times p$ está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_p & \end{bmatrix}$$

\mathbf{e} y \mathbf{b} son vectores de $p \times 1$ definidos como

$$\mathbf{e} = [0, \dots, 0, 1]^T$$

$$\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{p-1}]^T$$

Si X_s tiene forma:

$$X_t = e^{A(t-s)} X_s + \int_s^t e^{A(t-u)} \mathbf{e} dL_u, \forall t > s \quad (14)$$

donde e^A es la matriz exponencial

$$e^A = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

y si la parte real de los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A son negativos, entonces X_t en (14) tiene una solución estacionaria en covarianza (Brockwell 2001). Es decir,

$$X_t = \int_s^t e^{A(t-u)} \mathbf{e} dL_u = \int_0^{+\infty} e^{Au} \mathbf{e} dL_u \quad (15)$$

con

$$E[X_t] = \frac{\mu}{a_p} \mathbf{e}$$

$$\text{Cov}[X_{t+h}, X_t] = \sigma^2 e^{Ah} \int_0^{+\infty} e^{Au} \mathbf{e} \mathbf{e}^T e^{AuT} du \quad \text{para } h \geq 0$$

donde $\mu = E[L_1]$ y $\sigma^2 = \text{Var}[L_1]$.

3. Comparación empírica

La aplicación empírica se realizará con el lenguaje de programación R para los modelos ARIMA y se utilizará el paquete *tseries*. También se utilizará el *software EViews* para contrastar los resultados. La información que se emplea del IPC son datos diarios desde enero 2007 a septiembre de 2009.

Por otra parte, para los modelos Lévy CARMA se emplea el trabajo de Iacus y Mercuri (2015) sobre el paquete R YUIMA, también en R, disponible en CRAN para la simulación y la estimación de modelos Lévy-CARMA. El paquete es muy flexible, en el sentido de que se puede elegir específicamente una distribución paramétrica de Lévy para los incrementos, lo que resulta bastante útil para este trabajo ya que el tipo de distribución sigue a un proceso varianza gamma VG.⁷

3.1. Modelo ARIMA

La teoría de las series temporales se basa en el supuesto de estacionariedad de segundo orden. Las series de tiempo a menudo no son estacionarias ya que pueden exhibir una tendencia lineal a lo largo del tiempo, o tienen un efecto estacional. Con la metodología Box-Jenkins se puede trabajar con una serie estacionaria y si no es estacionaria se puede diferenciar. Los pasos a seguir con la metodología Box-Jenkins son: a) verificar la estacionariedad

⁷ La clase de distribuciones de VG fue introducida por Madan y Seneta como modelo para los rendimientos sobre acciones VG, véanse Madan y Seneta (1990) y Madan et al. (1998).

de la serie, si ésta no es estacionaria, diferenciarla hasta alcanzar estacionariedad; b) identificar un modelo tentativo, c) estimar el modelo, d) verificar el diagnóstico (si éste no es adecuado, volver al paso b); y e) usar el modelo para pronosticar. En la Gráfica 1 se puede observar que el IPC no es estacionario.

Gráfica 1: Índice de Precios y Cotizaciones
enero de 2008 a septiembre de 2009



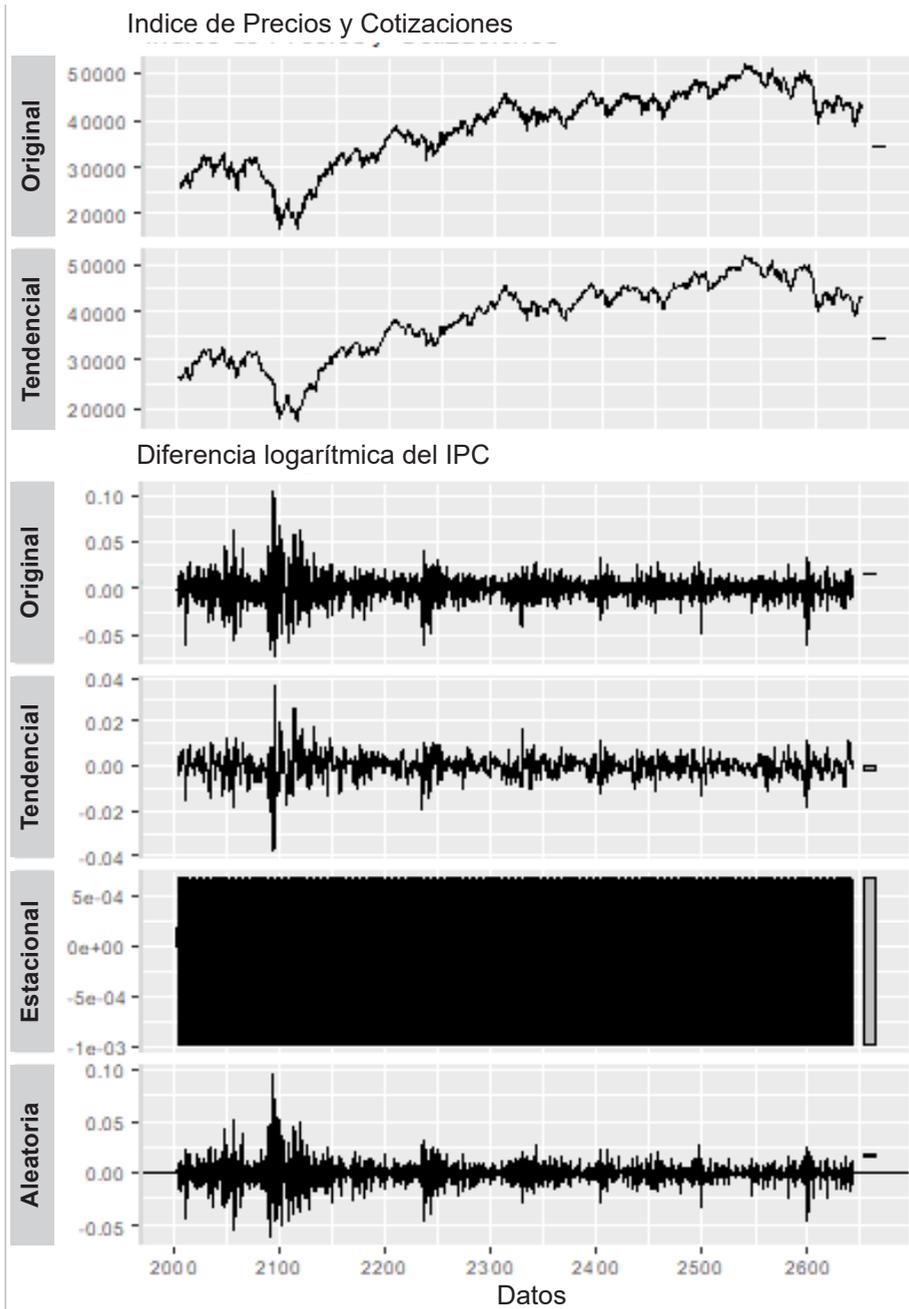
Fuente: elaboración propia a partir de datos obtenidos de Yahoo Finance.

En la Gráfica 2 se observa que la serie original muestra una tendencia creciente, además se tiene que eliminar el componente estacional. Se observa que cuando se considera la diferencia logarítmica, la tendencia desaparece y de esta manera la serie del IPC se vuelve estacionaria.

Al realizar la prueba de Dickey-Fuller aumentada se obtiene un nivel de significancia del 95% en la transformación logarítmica del IPC con un $p\text{-value} = 0.4309$. En la primera diferencia de dicha transformación se obtiene un $p\text{-value} = 0.01$ con lo que se comprueba que al utilizar una diferencia del logaritmo del IPC es suficiente para eliminar la tendencia.

En la Gráfica 3 se presenta la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). En el caso de la ACF de la serie logarítmica ésta tiene una caída lenta lo que indica que la serie no es estacionaria, en comparación con la serie diferenciada la cual sí es estacionaria.

Gráfica 2: Descomposición de serie temporal IPC

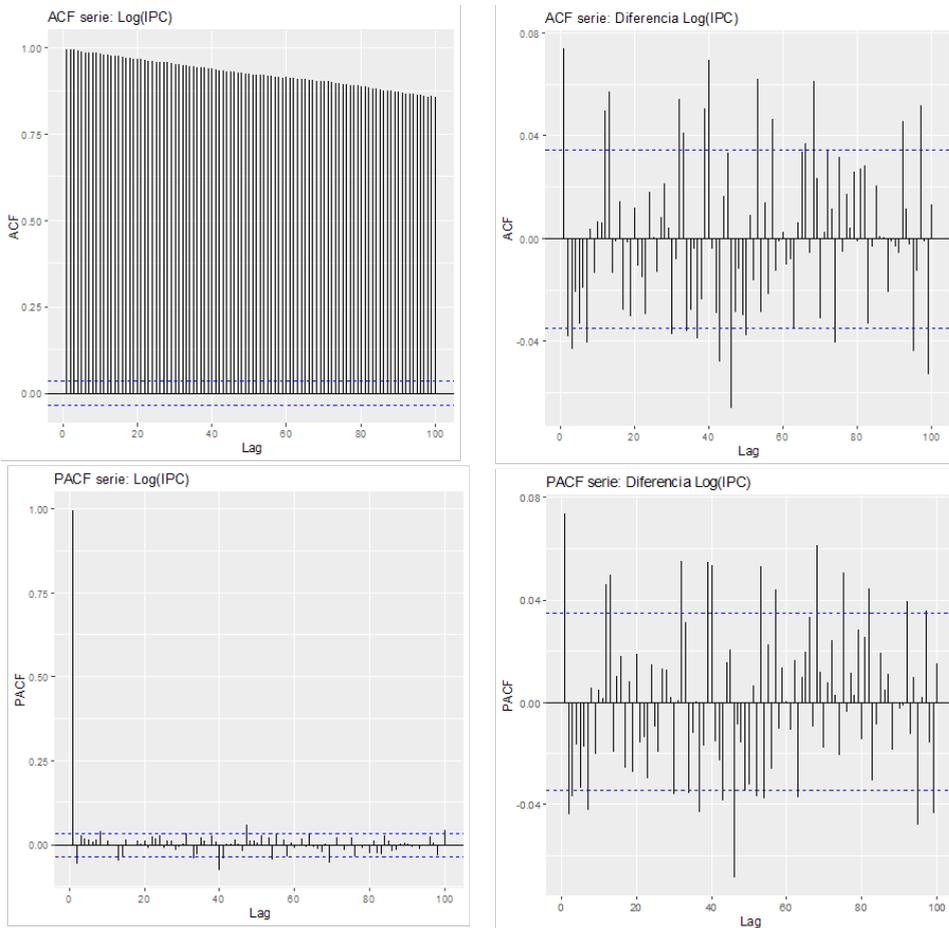


Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 3, en los paneles de residuos, se estimó el modelo ARIMA a través de las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) tanto de logaritmos del IPC como de sus diferencias. También se encontró que, de acuerdo con el criterio de Akaike, como se muestra en el Cuadro 1, el modelo que mejor se ajustó fue el ARIMA(2,1,1).

Para elegir el número de parámetros se consideran los tres criterios de información más comunes: el criterio de información (AIC) de Akaike, el criterio de información bayesiano (BIC) y el criterio de Hannan-Quinn (HQ).

Gráfica 3: Comparación ACF y PACF



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con Brooks (2014), ningún criterio es superior a otro. Por ejemplo, el criterio BIC es consistente pero ineficiente, AIC no es consistente, pero es más eficiente, por estas razones se muestran los tres criterios en el Cuadro 1.

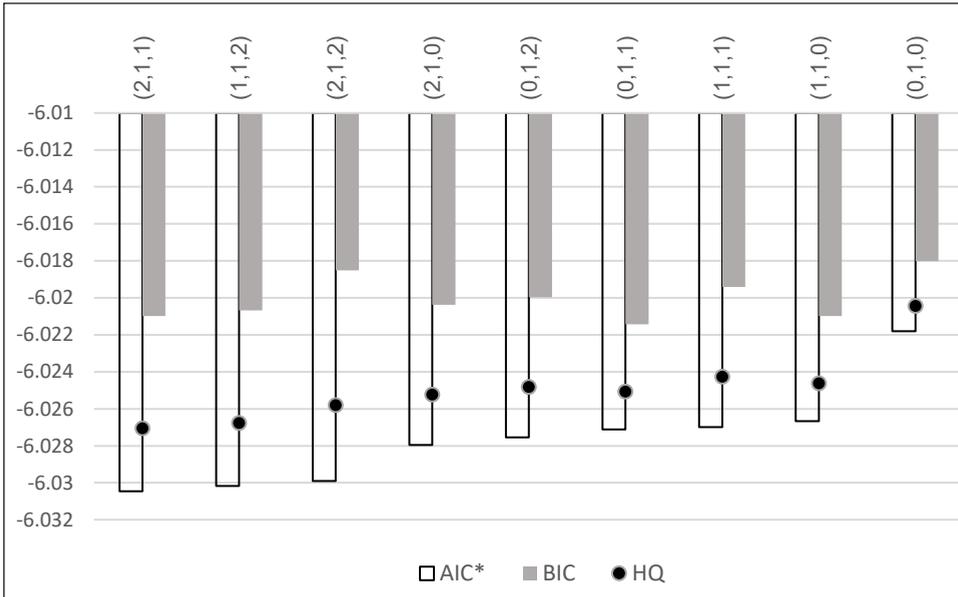
Cuadro 1: Criterios de selección por modelo

Variable dependiente: Diferencia Log(IPC)				
Modelo	LogL	AIC	BIC	HQ
(2,1)(0,0)	9653.738106462414	-6.030461316539009	-6.020975525775276	-6.02706048605576
(1,2)(0,0)	9653.272303445466	-6.030170189653416	-6.020684398889685	-6.026769359170169
(2,2)(0,0)	9653.835203172779	-6.029897001982988	-6.01851405306651	-6.02581600540309
(2,0)(0,0)	9648.740046468654	-6.027962529042909	-6.020373896431925	-6.02524186465631
(0,2)(0,0)	9648.073006364806	-6.027545628978004	-6.01995699636702	-6.024824964591405
(0,1)(0,0)	9646.383472455579	-6.027114670284736	-6.021423195826498	-6.025074171994788
(1,1)(0,0)	9647.194619428562	-6.02699663714285	-6.019408004531866	-6.024275972756251
(1,0)(0,0)	9645.664692486652	-6.026665432804156	-6.020973958345918	-6.024624934514208
(0,0)(0,0)	9636.894301406278	-6.021808938378924	-6.018014622073431	-6.020448606185625

Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 4 muestra los resultados del modelo que mejor se ajustó de acuerdo con los criterios AIC, BIC y HQ fue el ARIMA(2,1,1).

Gráfica 4: Comparación de criterios AIC, BIC y HQ por Modelo



Fuente: elaboración propia.

3.2. Modelos Lévy-CARMA

Para realizar la aplicación al IPC, se tomó la versión adaptada por Brouste, A., *et al.* (2014) en el paquete YUIMA quienes retoman a Iacus y Mercuri (2015). En vista de que el componente X_t de la ecuación (13) en el proceso CARMA no es observable, el procedimiento para la estimación con observaciones consta de tres etapas las cuales se pueden realizar con el paquete YUIMA.

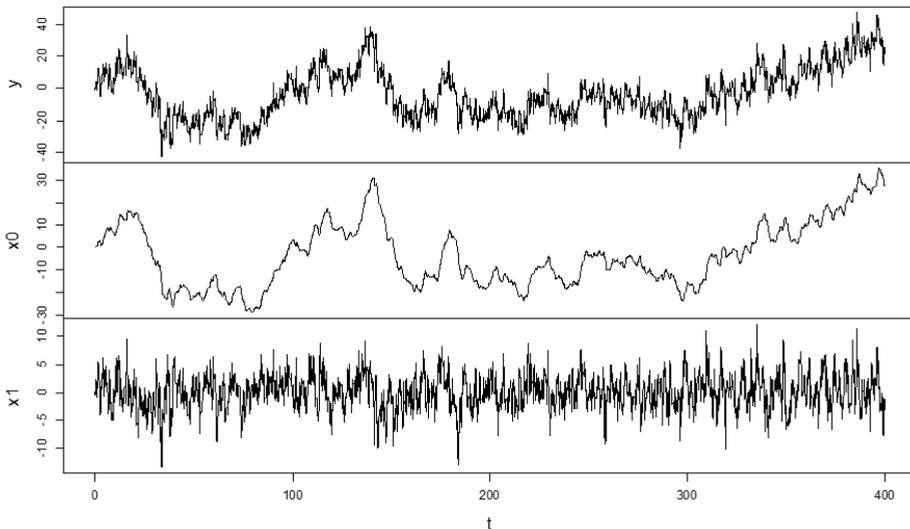
Primero se simula la trayectoria de un proceso CARMA (2,1) conducido por un proceso varianza gamma γ , posteriormente, se utiliza esta trayectoria para el procedimiento de estimación. Dado que el modelo es considerado una mezcla de normales, la estimación de máxima verosimilitud se realiza mediante un algoritmo de “Esperanza-Maximización” EM^8 de Karlis (2002)

⁸ El algoritmo EM se utiliza para aprender Mezclas Gaussianas, debido a su utilidad, es una herramienta importante en muchos procesos de aprendizaje automático o

y de acuerdo con lo propuesto por Iacus y Mercuri (2015) que se basan en el trabajo de Loregian *et al.* (2012) para el caso de varianza gamma.

Se realizaron 400 simulaciones de incrementos de Lévy para el modelo VG CARMA con fines comparativos y también se hizo el cálculo promedio de saltos para determinar el valor del parámetro de intensidad $\lambda = 12$, el cual se obtuvo dividiendo los 139 saltos entre 11.5 años que fue el horizonte de planeación de la muestra para la simulación. La Gráfica 5 muestra el modelo VG-CARMA (2,1) que se obtuvo con este parámetro y el uso del paquete YUIMA en R.

Gráfica 5: Modelo VG CARMA (2,1)



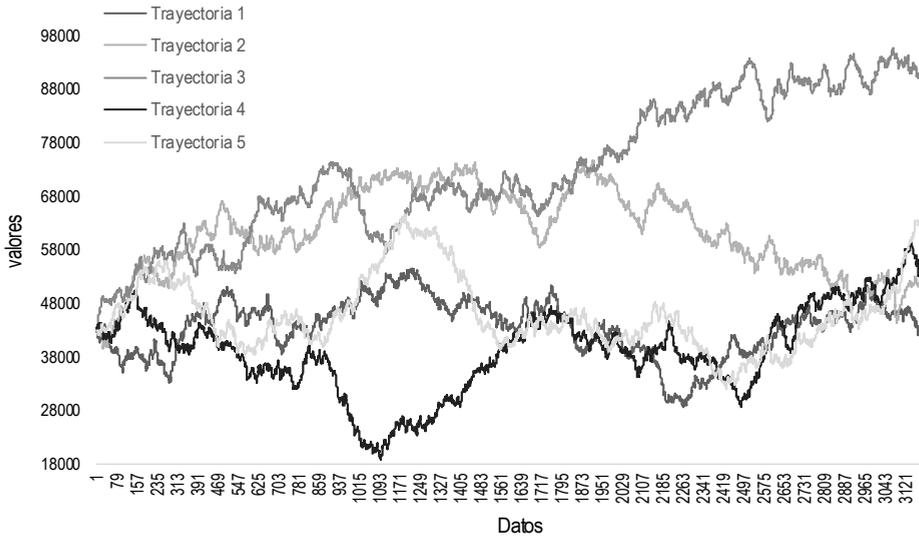
Fuente: elaboración propia con el paquete YUIMA en R⁹

A continuación, en la Gráfica 6, se muestran sólo cinco de las trayectorias que se obtuvieron con fines meramente ilustrativos; muchas simulaciones no se apreciarán.

Machine Learning por su capacidad para manejar información faltante y observar variables ocultas de acuerdo con McLachlan, G. J. y Krishnan, T. (2008).

⁹ The observed mean percentage variation of daily prices, provided by Valmer's CETES benchmark.

Gráfica 6: Simulación CARMA (2,1) $Y_0 = 43011.27$



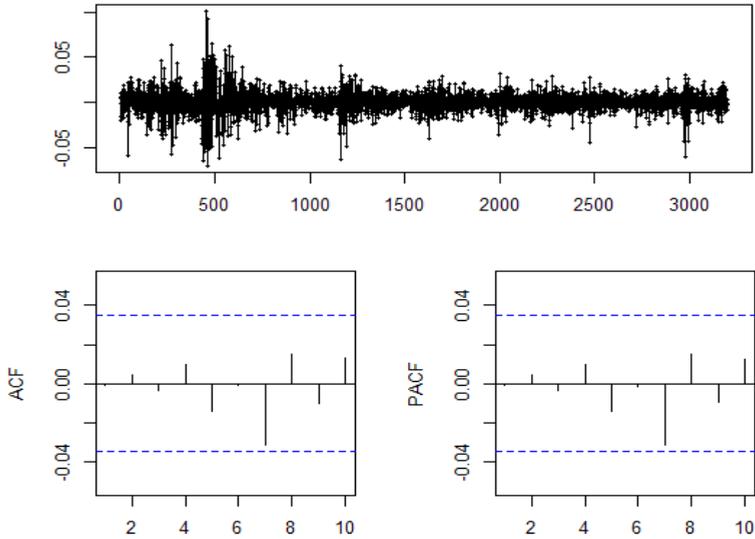
Fuente: elaboración propia con base en los resultados obtenidos.

4. Discusión de los resultados empíricos

A través del análisis residuos del modelo ARIMA se pudo corroborar el ajuste de la serie IPC diferenciada una vez, tal como se muestra en la Gráfica 7.

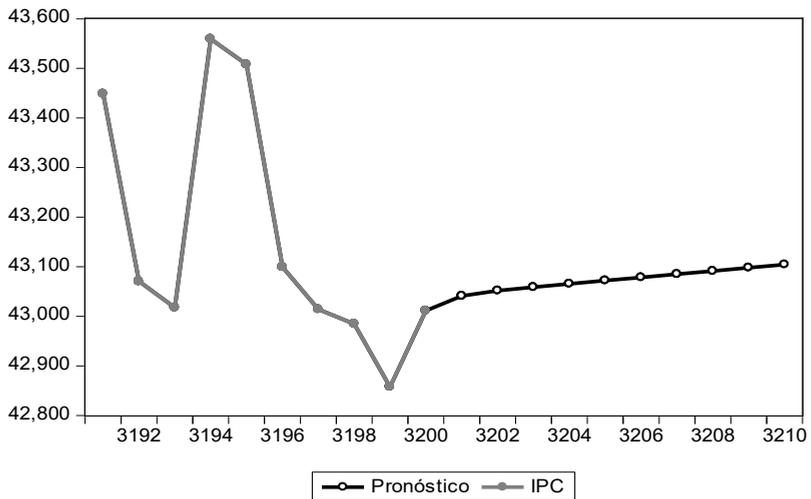
Con el fin de corroborar los resultados obtenidos con R, también se utilizó *EViews*, con el cual se obtuvieron más términos AR y MA de tal manera que el mejor modelo que se ajusta a la serie del IPC es un modelo ARIMA(3,1,4). Por el principio de parsimonia se elige el modelo ARIMA(2,1,1). Se realizó un pronóstico con el modelo ARIMA(2,1,1) con *EViews* para diez valores a futuro, es decir, 2 semanas en los mercados financieros. Los resultados se muestran en la Gráfica 8.

Gráfica 7: Residuos del Modelo ARIMA(2,1,1)



Fuente: elaboración propia.

Gráfica 8. Pronóstico ARIMA(2,1,1) en EViews



Fuente: elaboración propia.

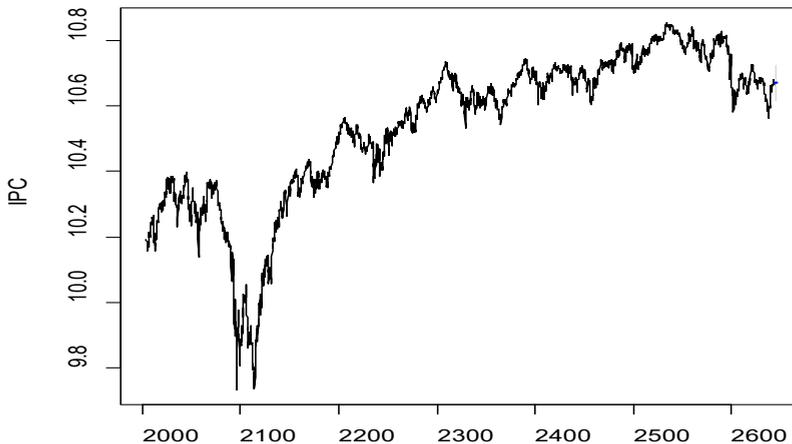
Cuadro 2: Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en EViews

Día	Precio de cierre IPC	Estimación del IPC EViews
01/10/2019	42937.16	43041.16711
02/10/2019	42222.90	43051.49851
03/10/2019	42443.31	43058.69698
04/10/2019	43416.90	43065.36401
07/10/2019	42952.29	43071.92198
08/10/2019	42535.14	43078.4464
09/10/2019	42501.92	43084.95511
10/10/2019	42929.76	43091.45484
11/10/2019	43214.60	43097.94918
14/10/2019	43299.53	43104.44039

Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 9 muestra el pronóstico ARIMA(2,1,1) en R. Considerando que el promedio de los precios de cierre del IPC del 1 de octubre de 2019 al 14 de octubre de 2019 fue de 42,845.3511721 puntos, entonces se concluye que los valores obtenidos por el pronóstico están sobrestimados de acuerdo con los resultados del Cuadro 2.

Gráfica 9. Pronóstico ARIMA(2,1,1) en R



Fuente: elaboración propia.

Cuadro 3: Resultados del pronóstico ARIMA(2,1,1) en R

		Pronóstico del IPC		
Día	Precio de cierre IPC	Promedio	Intervalo pronosticado	
01/10/2019	42937.16	43034.1816	42046.44	44044.6865
02/10/2019	42222.9	43036.7637	41595.6137	44527.8449
03/10/2019	42443.31	43036.3334	41281.5109	44866.1997
04/10/2019	43416.9	43035.903	41037.4359	45132.144
07/10/2019	42952.29	43035.903	40833.9858	45356.102
08/10/2019	42535.14	43035.4727	40655.9307	45554.2863
09/10/2019	42501.92	43035.4727	40496.0614	45734.1243
10/10/2019	42929.76	43035.4727	40348.5202	45900.8998
11/10/2019	43214.6	43035.0423	40211.1661	46057.2285
14/10/2019	43299.53	43035.0423	40081.8944	46205.7718

Fuente: elaboración propia.

Al considerar los valores del intervalo obtenidos por el pronóstico en R vistos en el Cuadro 3, se puede observar que todos los precios de cierre del IPC del 1º de octubre de 2019 al 14 de octubre de 2019 ocurrieron dentro del intervalo pronosticado. Pero si se realiza la comparación con el promedio del intervalo, se obtiene que los días 4, 11 y 14 de octubre se subestimaron los puntos del IPC, mientras que los demás días tuvieron un pronóstico sobrestimado. Para realizar la comparación de los pronósticos se presenta en el Cuadro 4.

Cuadro 4: Comparación estadística sobre los pronósticos

Parámetros	Precio de cierre IPC	Pronóstico ARIMA(2,1,1) EViews	Pronóstico ARIMA(2,1,1) R	Pronóstico trayectorias CARMA
Promedio	42845.351	43074.58945	43035.55873	51815.8471
Desviación estándar	402.7046475	20.65203519	0.725814337	10462.87983
Sesgo	-0.091810902	-0.144274651	-0.215349736	-0.086870307
Kurtosis	-1.289332021	-0.994656373	0.564577259	-0.659214883

Fuente: elaboración propia.

En el Cuadro 4 se puede observar el sesgo y la kurtosis que se obtuvieron con los modelos ARIMA y VG-CARMA. Como puede advertirse, el modelo CARMA al considerar procesos de Lévy, muestra más bondades estadísticas para replicar la dinámica del IPC que el modelo ARIMA.

5. Conclusiones

En esta investigación, el modelo CARMA ha mostrado replicar las propiedades estadísticas del IPC, lo cual lo convierte en una herramienta útil para la toma de decisiones de inversionistas y reguladores. Los resultados que arroja la investigación son consistentes con la hipótesis inicial del trabajo y aunque la asimetría de la volatilidad fue mejor capturada que la kurtosis con el modelo CARMA, deberían, por supuesto, considerarse en futuras investigaciones otros procesos y modelos más robustos.

Aunque, la ergodicidad del sistema sólo es capaz de capturar los efectos de kurtosis y asimetría que suceden dentro del mercado, este análisis permite elaborar pronósticos sobre el comportamiento del precio de cierre del IPC y sus rendimientos futuros ante efectos asimétricos en su volatilidad. Y dado que el principal objetivo del IPC es ser un indicador representativo del mercado mexicano accionario para servir como referencia y subyacente de productos financieros, sin duda, un pronóstico adecuado de éste es primordial para la toma de decisiones de inversionistas y reguladores.

Referencias bibliográficas

- Applebaum, D. (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. y Sørensen, M. (1998). "Some Stationary Processes in Discrete and Continuous Time". *Advances in Applied Probability*, vol. 30, núm. 4, pp. 989-1007.
- Barndorff-Nielsen, O. E. y Shephard, N. (2002). *Financial Volatility, Lévy Processes and Power Variation*. Unpublished book, Nuffield College.
- Bartlett, M. S. (1946). "On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series". *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 8, núm. 1, pp. 27-41.
- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*, vol. 121, Cambridge: Cambridge University Press.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, vol. 81, núm. 3, pp. 637-654.
- Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1970). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Holden-Day. San Francisco. CA.
- Brooks, C. (2014). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge University Press.
- Brockwell, P. J. (2001). "Continuous-time ARMA Processes". *Handbook of Statistics*, núm. 19, pp. 249-276.
- Brockwell, P. J. y Marquardt, T. (2005). "Lévy-driven and Fractionally Integrated ARMA Processes with Continuous Time Parameter". *Statistica Sinica*, pp. 477-494.
- Brockwell, P. J. (2009). "Lévy-driven Continuous-time ARMA Processes. In Handbook of Financial Time Series". Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 457-480.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A. y Yang, Y. (2011). "Estimation for Non-negative Lévy-driven CARMA Processes". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 29, núm. 2, pp. 250-259.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S. M., Kamatani, K., Koike, Y., Yoshida, N. (2014). "The YUIMA project: A Computational Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations". *Journal of Statistical Software*, vol. 57, núm. 4, pp. 1-51. <https://doi.org/10.18637/jss.v057.i04>
- Doob, J. L. (1944). "The Elementary Gaussian Processes". *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, núm. 3, pp. 229-282.

- Durbin, J. (1960). "Efficient Fitting of Linear Models for Continuous Stationary Time Series from Discrete Data" (No. MS249). North Carolina University at Chapel Hill Dept of Statistics.
- Karlis, D. (2002). "An EM Type Algorithm for Maximum Likelihood Estimation for the Normal Inverse Gaussian Distribution". *Statistics Probability Letter*, vol. 57, núm. 1, pp 43-52. DOI: 10.1016/S0167-7152(02)00040-8.
- Iacus, I. y Mercuri, L. (2015). "Implementation of Lévy CARMA model in Yuima package". *Computational Statistics*, vol. 30, núm. 4, pp. 1111-1141.
- Iacus, S. M. y Yoshida, N. (2017). *Simulation and Inference for Stochastic Processes with YUIMA*. Springer series in statistics. Springer, New York zbMATH.
- Loreigan A., Mercuri L. y Rroji E. (2012). "Approximation of the Variance Gamma Model with a Finite Mixture of Normals". *Statistis and Probability Letters*, vol. 82, núm. 2, pp. 217-224. DOI: doi.org/10.1016/j.spl.2011.10.004
- McLachlan, G. J. y Krishnan, T. (2008). *The EM Algorithm and Extensions*. John Wiley and Sons.
- Madan, D. B. y Seneta, E. (1990). "The Variance Gamma (VG) Model for Share Market Returns". *Journal of Business*, vol. 63, núm. 11, pp. 511-524.
- Madan, D. B., Carr, P. P. y Chang, E. C. (1998). "The Variance Gamma Process and Option Pricing". *Review of Finance*, vol. 2, núm. 1, pp. 79-105.
- Martínez-Palacios, T., Martínez-Sánchez, J. F. y Venegas-Martínez, F. (2015). "Consumption and Portfolio Decisions of a Rational Agent that has Access to an American Put Option on an Underlying Asset with Stochastic Volatility". *International Journal on Pure and Applied Mathematics*, vol. 102, núm. 4, pp. 711-732.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*, vol. 4, núm. 1, pp. 141-183.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, núm. 3, pp. 125-144.
- Minsky, H. P. (1992). "The Financial Instability Hypothesis". *The Jerome Levy Economics Institute Working Paper*, núm. 74.
- Phillips, A. W. (1959). "The Estimation of Parameters in Systems of Stochastic Differential Equations". *Biometrika*, vol. 46, núm. 1-2, pp. 67-76.
- Rachev, S. T., Kim, Y. S., Bianchi, M. L. y Fabozzi, F. J. (2011). *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*. John Wiley and Sons, vol. 187.
- Ramírez, A. O., Sánchez-Daza, A. y Venegas-Martínez, F. (2011). "Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC". *Análisis Económico*, vol. 26, núm. 62, pp. 31-50.

- Reyes-García, N. J., Venegas-Martínez, F. y Cruz-Aké, S. (2018). "Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para modelar la volatilidad de Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores". *Panorama Económico*, vol. 14, núm. 27, pp. 34-34.
- Rojas-Altamirano, O. y Trejo-Pech, C. (2014). "Financial Time Series: Stylized facts for the Mexican Stock Exchange Index compared to Developed Markets". *arXiv preprint arXiv:1412.3126*.
- Sato, K. I., Ken-Iti, S. y Katok, A. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Book Series: Wiley Series in Probability and Statistics.
- Todorov, V. y Tauchen, G. (2006). "Simulation Methods for Lévy-driven Continuous-time Autoregressive Moving Average (CARMA) Stochastic Volatility Models". *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 24, núm. 4, pp. 455-469.
- Todorov, V. (2011). "Econometric Analysis of Jump-driven Stochastic Volatility models". *Journal of Econometrics*, vol. 160, núm. 1, pp. 12-21.
- Tong, H. (1983). "Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis". *Lecture Notes in statistics*, núm. 21.
- Tong, H. (1990). "Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach". *Oxford University Press*.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. pp. 32, 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Segunda edición. Cengage Learning. México.

How the use of Markov-Switching Sharpe Ratios can improve Mexican Pension Funds Investment Decisions

Cómo el uso de Razones de Sharpe cambiantes según un proceso de Markov puede mejorar las decisiones de inversión de los portafolios de pensiones mexicanos

Oscar Valdemar de la Torre Torres*

Roberto J. Santillán-Salgado**

Francisco López Herrera***

(Fecha de recepción: 21 de diciembre de 2020. Fecha de aceptación: 8 de marzo de 2021)

ABSTRACT

Towards the end of the 20th century, as part of the encompassing structural reforms that modernized the Mexican economy after decades of an obsolete imports-substitution model, overregulated economic sectors, and state-controlled productive sectors, the creation of an individual savings account pension system to replace the “pay-as-you-go” anachronic pension system prevalent since 1943, was necessary given the country’s demographic trends.

The analysis presented in this paper uses a Markov-switching model to obtain the Sharpe ratio of different SIEFOREs portfolios for different subperiods and volatility regimes (normal and crisis). The results confirm that not all SIEFOREs are good (or bad)

* Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
oscar.delatorre.torres@gmail.com, Orcid: 0000-0001-9281-974X

** EGADE Business School, Tecnológico de Monterrey.
Roberto.santillan@itesm.mx, ORCID: 0000-0001-5162-1403

*** Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México
Francisco_lopez_herrera@yahoo.com.mx, Orcid: 0000-0003-2626-9246

performers all the time. This evidence suggests that awareness of market conditions conveys information that can support rational decisions about when to change savings from SIEFORES that are good performers during normal times to good performers during crisis periods. While these are preliminary findings, they represent a starting point for further analyses that should contribute to improved savers' decisions.

JEL Classification: C22, D81, G11, H55

Keywords: *Markov-Switching models, Sharpe ratio, Pension funds, Informed decision, Portfolio selection.*

RESUMEN

Hacia finales del siglo XX, como parte de las reformas estructurales que modernizaron la economía mexicana después de decenios de un modelo obsoleto de sustitución de importaciones, de sectores económicos sobre-regulados y sectores productivos controlados por el Estado, la creación de un sistema de cuentas de ahorro individual para reemplazar el sistema de pensiones "pay-as-you-go" prevalente desde 1943, resultó esencial en vista de las tendencias demográficas del país.

El análisis presentado en este documento hace uso de un modelo Markov-Switching para obtener la razón Sharpe de diferentes portafolios de SIEFORES, para diferentes subperíodos y regímenes de volatilidad (normal y crisis). Los resultados confirman que no todas los SIEFORES se desempeñan bien (o mal) todo el tiempo. Esta evidencia sugiere que el conocimiento de las condiciones del mercado proporciona información que puede sustentar decisiones racionales sobre el momento adecuado para cambiar los ahorros de las SIEFORES que ofrecen buenos rendimientos durante tiempos normales a las que ofrecen buenos resultados durante períodos de crisis. Si bien se trata de hallazgos preliminares, abren la puerta a nuevos análisis que deberían contribuir a mejorar las decisión que toman los ahorradores.

Classificación JEL: C22, D81, G11, H55

Palabras clave: cambio de régimen con modelos de Markov, razón de Sharpe ratio, fondos de pensión, decisiones informadas, selección de portafolios de inversión.

Introduction

During the last three decades of the 20th century, the Mexican economy experienced significant structural reforms. There was a complete overhaul of the state-owned productive sector during the 1980s, that reduced its direct participation in the production of goods and services; the economy was opened to foreign trade and investment (Mexico joined the General Agreement on Trade and Tariffs in 1985); and, there was an encompassing deregulation and privatization of different economic sectors

(transportation, mining, communications, etc.). These structural reforms, aimed to the modernization of the economy, faced severe headwinds due to the collapse of oil prices at a time when exports of that product represented a large percentage of Mexican Exports (80% in 1982) and a very significant component of the government tax revenues (30 %), in addition to a devastating earthquake in Mexico City and other nearby cities which destroyed critical urban infrastructure, added to the environmental uncertainty and resulted in very high inflation and very slow economic growth.

During the last decade of the 20th century the government realized that the traditional pay-as-you-go pension system faced an increasing long-term sustainability challenge due to changing demographics. The demographic growth rate had decreased from 3.5% annually during the 1960s to 2.4% by the early 1980s, 2% at the beginning of the 1990s, and only 1.5% in the first years of the 21st century.¹ Without a major reform, an increasingly smaller base of contributors would support a larger aging population. That is, as the base of the pyramid was shrinking in size, it was gradually being transformed into an “inverted” demographic pyramid.

After careful analysis of the different alternatives to face that challenge, the Mexican government opted for a system similar to Chilean pension scheme developed during the 1980s, based on individual savings accounts for workers, and managed by private entities. In 1997, the Mexican government took a step forward to reorient the pension system, beginning a transition from a non-funded, defined benefit pensions system, towards a defined contribution system in which the workers, the Mexican government, and the employer make monthly contributions to a individual retirement savings accounts. These resources are invested in different assets, and these along with market returns obtained are continuously reinvested until retirement. The vehicle through which these portfolios are managed, is known as SIEFOREs. This paper explores what would be the implications of having better informed decision-makers who advise Mexican workers on who to use SIEFOREs. To achieve this goal, a quantitative method that evaluates the performance of SIEFOREs during periods of relative stability and compares it to periods of high volatility is proposed.

Several research document the benefits and the hurdles attributable to private pension systems. Calderón-Colín, Domínguez and Schwartz (2009),

¹ Source: <http://www.worldometers.info/world-population/mexico-population/>

Martínez and Martínez (2014), Alonso, Hoyo and Tuesta (2014), De la Torre, Galeana and Aguilasocho (2015) and De la Torre, Galeana and Martínez (2015) address both, the macroeconomic and microeconomic consequences of private pension systems in different contexts and periods.

Calderón-Colín, Domínguez and Schwartz (2009) suggest that future pensioners select a SIEFORE subject to confusion, due to the noisy information they receive, and prove that the selection of SIEFORE is a response to non-related to performance factors, such as management companies expenditure in marketing,² the fact that funds are managed by a well known financial group or insurance company, and the number of sales representatives that these companies employ. In sharp contrast to a market where investors benefit from the competition among suppliers of services, the increasing number of competitors in the Mexican pension funds industry has had a limited impact in the reduction of financial costs to savers.

Currently, the only performance measure published by the industry's supervisor, the CONSAR,³ is the percentage variation of the stock value of each SIEFORE, and accordingly, investors have very limited information to choose among different SIEFOREs. That information does not reveal the quality of SIEFOREs' management nor how much risk is undertaken by their portfolios during periods of high and low volatility. So, there is a clear need for more detailed information about SIEFOREs' performance, management and riskiness, which should also be accompanied by an improved financial education of the population. Otherwise, the objective to empower citizens and let them take control of their pension fund savings is not likely to be attained. Better educated and better informed savers would allocate their savings to the best performing SIEFOREs, enhancing the demand elasticity for their services, and represent an important motivation for SIEFOREs' managers to continuously improve their performance (reduce their costs and reduce their fees), resulting in better pensions for the population.

This paper contributes to a better understanding of the characteristics of the industry that can enhance the long-term benefits enjoyed by future pensioners by studying the performance of SIEFOREs during periods of

² The acronym for the Mexican asset management company of a SIEFORE: Administradora de Fondos para el Retiro, AFORE. It is literally translated as "Retirement fund management company".

³ The acronym of Mexican regulatory entity for the Mexican pension system, specially for the supervision and regulation of SIEFORE: Comisión Nacional del Sistema del Ahorro para el Retiro or "National Retirement Savings Commission".

stability (normal periods) and periods of high volatility (crisis periods), with the use of Markov Switching econometric model that confirms that not all SIEFOREs are good (or bad) performers all the time. Good performers during normal periods are not so during periods of exacerbated turbulence and vice-versa. Market conditions convey information that can support rational decisions (when to change from one SIEFORE to another), to minimize risk and maximize returns.

The following section presents a brief literature review on Private Pension Fund Systems, with an emphasis on the recent evolution of the AFOREs/SIEFOREs system in Mexico. Section 1 presents a review of the literature on private pension fund systems, Section 2 introduces and describes the SIEFOREs mechanism and its recent evolution. Section 3 presents the performance evaluation methodology proposal, and the performance evaluation results. Finally, the last section concludes the analysis, summarizes the findings and suggests some guidelines on how decisions makers may improve the SIEFOREs system considering an information availability perspective.

1. A brief review of the literature on private pension funds systems

While the literature on pension systems in different parts of the world is extensive, this research is focused on Latin American defined benefit pension fund systems.

Albo *et al.* (2007) make actuarial projections to estimate the replacement rate and financial perspectives of Mexico's 1997 new pension system. Their methodology and results later inspired the studies of Alonso, Hoyo and Tuesta (2014) limited the growing fiscal cost of the previous pay-as-you-go scheme. Sixteen years on from its creation, the Retirement Savings System (SAR, who improved the analysis by incorporating the impact of educational levels in Mexico.⁴

Following Albo *et al.* (2007), Fuentes *et al.* (2010) make another review to the reforms to the Mexican pension system and talk about the fiscal benefits that the new system brought. While the various reforms implemented since 1997 had different fiscal and economic benefits, they reiterate the need to increase the replacement rate to attain international standards, and to

⁴ Specifically the financial education of the Mexican people.

introduce a universal pension system with portable rights across pension systems.

By focusing in the competitiveness of the pension fund management process in Mexico and other Latin American countries (Chile, Colombia, Costa Rica, El Salvador, Peru and Uruguay), Guillén (2011) uses Data Envelopment Analysis (DEA) to study the relative and absolute competitiveness of pension fund managers in those countries. He also performs a regression analysis with OLS, with fixed parameters and fixed time and country factors. The reported findings suggest that the Mexican case has an acceptable relation between its relative and absolute competitiveness, but policy makers must make legal improvements to enhance competitiveness.⁵ His results lead to the conclusion that even when pension funds could have an influence in financial markets given their relative size, they are exposed to systemic risks. Therefore, a more intense competition among SIEFOREs could lead them to achieve better performance and to reduce their exposure to financial markets' volatility.

Alonso *et al.* (2014), followed the steps of Albo *et. al.* (2007) and extend the latter by incorporating the "educational dimension". Their results suggest that, in order to increase the replacement rate and obtain better retirement conditions for individuals, the Mexican government should increase the whole mandatory contribution from 6.5% to 11.5% in 2017. If this happened, they suggest that the fiscal impact of pension payment could be reduced by 2.9% every year. They also suggest a periodically adjusted contribution system, (i.e., to change the total contribution), in response to changing economic conditions, and the creation of a single government-sponsored manager of pension funds. Finally, they argue, independent workers should be allowed to contribute for their retirement. This study is, by the length and depth of its proposals, a major contribution to the literature on modern pension fund systems.

Martínez-Preece and Venegas-Martínez (2014) study the performance of the Type 1 and Type 2 SIEFOREs with an equally weighted performance benchmark of each SIEFORE Type,⁶ using ARIMA-GARCH models. They do

⁵ A related final result that we hope to achieve with the implementation of our proposal.

⁶ Even though they didn't claimed the proposal of a performance benchmark as in De la Torre, Galeana and Martínez (2015) or De la Torre, Galeana and Aguilasocho (2015), they used and studied, as a methodological solution, an equally weighted performance benchmark of these two Type of SIEFOREs.

this in two different time periods: June, 1997 to August, 2004 and September 2004 to December 2010. They show that, in terms of the Sharpe ratio, the Type 2 SIEFORES underperformed the most conservative Type 1. This happened due to a higher volatility (as expected) and to the asymmetry of the GARCH process inherent to the time series. In their conclusions, they make some recommendations that are in line with proposal of this paper, such as the need of a better performance measure for the management of the SIEFORES and to inform the pension fund savers when they are in a scenario of higher volatility and potential loss.

Santillán-Salgado *et al.* (2016) made a similar review by studying the performance of the SIEFORES in different subperiods (1997-2012, 2004-2012 and 2008-2012), and found that the investment policy and life cycle profile of the SIEFORES has experienced changes. With the use of ARMA-FIGARCH models, the interpretation of their results concludes the presence of fractional integration in the returns time series. These authors again insist on the need of having more transparent public information that would allow savers to make more informed decisions regarding the SIEFORE in which they keep their savings.

Several papers mentioned in the brief review presented in this section consistently suggest that more informed decisions by investors would result in an increased competitiveness of SIEFORES. What this work intends to prove is that, had Mexican pension-savers during the period of analysis, had more complex and detailed information about the performance of different SIEFORES, and had there existed the administrative flexibility to allow them to switch from one SIEFORE to another in response to the quality of management and the conditions of the market, savers would have allocated their savings in a wiser and more profitable way. And, in the end, those conditions would have improved the performance of SIEFORES' managers through the pressure of competition.

2. Some Background on SIEFORES

The SIEFORES are mutual funds where the pension savings of Mexican workers, affiliated to the public social security system known as IMSS,⁷ are invested. There are five Types of SIEFORES: the basic Type 0 SIEFORE or SB0, and four additional Types. The higher the number in the name of

⁷ IMSS is an abbreviation of Instituto Mexicano del Seguro Social, or Mexican Social Security Institute.

the SIEFORE, the younger are the potential investors, e.g., SB4 or SIEFORE Type 4 is target to pension savers or investors with age under 36, SB3 has an investment policy for investors between 37 and 45 years old; SB2 focuses on workers between 46 and 59 years old, SB1 is for investors that are 60 years old or more and SB0 is for retired workers. The authorized investment policy for each Type of SIEFORE is given in Table 1. As mentioned, saving in SIEFOREs follows a life cycle investment policy.

Table 1. Investment levels used as IPS in the simulations

Asset Type restrictions (min/max)	SIEFORE Basica pensiones (SB0)	SIEFORE Basica 1 (SB1)	SIEFORE Basica 2 (SB2)	SIEFORE Basica 3 (SB3)	SIEFORE Basica 4 (SB4)
<i>Mexican Government bonds 1/</i>	(51%/100%)	(51%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Mexican corporate bonds 1/</i>	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Mexican equity market</i>	(0%/5%)	(0%/5%)	(0%/25%)	(0%/30%)	(0%/40%)
<i>Government and corporate global bonds 2/</i>	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Global equity markets 3/</i>	(0%/5%)	(0%/5%)	(0%/25%)	(0%/30%)	(0%/40%)
<i>Commodities 4/</i>	0%	0%	(0%/5%)	(0%/10%)	(0%/10%)
FX risk limits	SIEFORE Basica pensiones (SB0)	SIEFORE Basica 1 (SB1)	SIEFORE Basica 2 (SB2)	SIEFORE Basica 3 (SB3)	SIEFORE Basica 4 (SB4)
<i>FX denominated securities</i>	0%	(0%/20%)	(0%/20%)	(0%/20%)	(0%/20%)

1/ Only financial assets with a mxA or haigher credit score.

2/ Only asset with an A+ or higher credit quality.

3/ Only through benchmarks allowed in the Appendix M of the CONSAR (2016) rules

4/ In the present paper the commodities will be assumed as local assets even though they are US denominated.

Source: Based in CONSAR (2016).

Table 2. The SIEFORES analyzed in the present paper

Azteca	Inbursa	Principal	XXI Banorte
Banamex	Invercap	Profuturo GNP	
Coppel	Metlife	SURA	

Source: CONSAR (2014).

The SIEFORES covered in this analysis for each of the four investment Types are presented in Table 2.

These are the only SIEFORES for which daily information for the period from November 30, 2008 to December 30, 2014 is available.

To protect savers, there are legal restrictions that forbid investors to change from one SIEFORE to another. Workers must hold the same SIEFORE for, at least, a twelve-month period. As mentioned by Colín, Domínguez and Schwartz (2009), there is a lot of noise and, as a consequence, confusion in the selection of the best SIEFORE.

3. A performance metrics proposal and performance results

The main contribution of this work is the introduction of more refined measures to evaluate the performance of SIEFORES beyond the simple metrics published by CONSAR. In order to achieve that end, Sharpe ratios for “normal” and “crisis” periods for each SIEFORE Type are estimated.

The empirical analysis ranks the SIEFORES’ performance during normal and crisis periods, compared with the actual ranking method of the net return. In order to measure the performance in “normal” and “crisis” time periods, historical daily public mutual fund price of each SIEFORE is shown in table 2.

The percentage price variation reflects the net return paid by the SIEFORE between period t and period $t-1$. These public prices are published daily by the Mexican Stock Exchange and can be found in CONSAR (2016). In order to make the performance analysis, the historical prices from November 30, 2008 to December 31, 2014 are used. Even though the historical prices collected by CONSAR are given since 1997, it is important to mention that the actual investment policy authorized by CONSAR started in March of 2008 with five Types of SIEFORES but in February they were reduced to four. Therefore, November 30 2008 is chosen for two reasons. First, to start the analysis with nine months of historical data for a better fit of the initial values in the model and, second, CONSAR published the historical stock prices for each SIEFORE incorporating the value of the mergers and splits among SIEFORES since 2008. It is well known that, in 2008, Mexico had five Types of SIEFORES available to workers according to their age.⁸ In February 2013, two SIEFORES were merged, and the age range dis-

⁸ As it is in a life cycle investment style briefly described in the introduction section.

tribution changed, leaving only four Types of SIEFORES. The prices reported by CONSAR consider the merger effect in historical prices due to the aforementioned changes.

In order to analyze the data, the prices of each SIEFORE are compounded:

$$\Delta\%(P_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (1)$$

Hamilton's (1989) filter is used to calculate observed daily mean returns and their standard deviations for two regimes: a low volatility regime ($k=1$) and a high volatility regime ($k=2$), also identified as "normal" and "crisis" periods, respectively. Normal and crisis periods are a latent process that can be modeled with a two state Markovian process with a probability of being in regime of normal times ($k=1$) or crisis times ($k=2$) denoted with π_1 and π_2 respectively.

In order to determine these two parameters, the filter i was implemented in a Gaussian two-state Markovian process (each state k for each regime -normal or crisis):

$$\Delta\%(P_t) = \begin{cases} \mu_{k=1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \Phi(0, \sigma_{k=1}) & \text{if } \pi_1 > 0.5 \\ \mu_{k=2} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \Phi(0, \sigma_{k=2}) & \text{if } \pi_2 > 0.5 \end{cases} \quad (2)$$

It is important to remember that the observance of state k in t is modeled with a fixed transition probability matrix that contains the probability of being in regime $k=i$ in time t and transiting to regime $k=j$. This transition probability is denoted by $p_{i,j}$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Once the mean and standard deviation were estimated for each of the ten SIEFORES in the four investment regimes, a Markov-switching Sharpe ratio is estimated as follows:

$$S_{k=i} = \frac{\mu_{k=i} - E(\Delta\%rf)_{k=1}}{\sigma_{k=1}} \quad (4)$$

In the previous expression, $\mu_{k=i}$ and $\sigma_{k=i}$ are as previously defined in (2) and (3) and $E(\Delta\% rf)_{k=1}$ is the expected return for the risk free asset⁹ in the k 'th regime.¹⁰

Using the above mentioned methods, a ranking determined by the expected return and Sharpe ratios of each SIEFORE in each investment style or Type was estimated.

The historical performance of each Type of SIEFORE is presented in Tables 3 to 6, in terms of accumulated returns, along with daily mean return, standard deviation, and minimum and maximum values. The performance ranking in terms of net accumulated return of each SIEFORE¹¹ is shown in the last column. The three best SIEFOREs are shaded in grey.

Table 3. Performance of Type 1 SIEFOREs

Type I Siefores (exclusive for savers with age>60 years)						
SIEFORE	Accumulated Mean St.D.		Min	Max	Ranking (accumulated returns)	
	returns (%)	%Pt St.D. D%Pt				
<i>Azteca</i>	41.6939	0.0205	0.3016	-2.7631	3.7071	9
<i>Banamex</i>	56.0163	0.0261	0.3181	-2.9774	3.7608	2
<i>Coppel</i>	37.9507	0.0189	0.2608	-2.4035	3.4427	10
<i>Inbursa</i>	42.5623	0.0208	0.0515	-0.3473	0.5969	8
<i>Invercap</i>	49.9814	0.0238	0.5486	-5.1596	6.1683	4
<i>Metlife</i>	46.2641	0.0224	0.3341	-2.9513	4.0988	7
<i>Principal</i>	49.2131	0.0235	0.3097	-2.6327	3.8274	5
<i>Profuturo GNP</i>	48.9634	0.0234	0.3407	-2.4265	3.5459	6
<i>SURA</i>	60.2435	0.0277	0.3316	-2.6167	3.6709	1
<i>XXI Banorte</i>	54.1112	0.0254	0.2984	-2.6267	3.6851	3

Source: Prepared by authors with data of CONSAR (2014).

⁹ The observed mean percentage variation of daily prices, provided by Valmer's CETES benchmark.

¹⁰ The percentage variation of the 28 day CETES benchmark provided by Valmer and Economatica is used.

¹¹ This is done following CONSAR's information published in its web site.

Table 4. Performance of Type 2 SIEFORES

Type 2 Siefore (46<age<59)						
SIEFORE	Accumulated returns (%)	Mean %Pt	St.D. %Pt	Min	Max	Ranking (accumulated returns)
<i>MaxS_SB2</i>	78.6591	0.0341	0.2430	-1.6282	3.5249	
<i>Azteca</i>	54.7712	0.0257	0.4517	-4.2608	6.0676	7
<i>Banamex</i>	66.7534	0.0301	0.5897	-6.2040	7.5927	3
<i>Coppel</i>	49.3377	0.0236	0.3433	-2.6603	4.2136	8
<i>Inbursa</i>	45.4089	0.0220	0.1533	-1.3026	2.4528	10
<i>Invercap</i>	48.3325	0.0232	0.8957	-9.5861	10.6091	9
<i>Metlife</i>	57.9638	0.0269	0.5492	-4.9977	7.2582	5
<i>Principal</i>	57.3600	0.0267	0.4943	-4.2647	6.7360	6
<i>Profuturo GNP</i>	67.2276	0.0302	0.5934	-5.5666	8.0109	2
<i>SURA</i>	80.2124	0.0346	0.5868	-5.6833	7.6747	1
<i>XXI Banorte</i>	64.4401	0.0292	0.4874	-4.3543	6.1060	4

Source: Prepared by authors with data of CONSAR (2014).

Table 5. Performance of Type 3 SIEFORES

Type 3 Siefore (37<age<45)						
SIEFORE	Accumulated returns (%)	Mean %Pt	St.D. %Pt	Min	Max	Ranking (accumulated returns)
<i>Azteca</i>	54.5497	0.0256	0.4517	-4.2608	6.0676	7
<i>Banamex</i>	66.3378	0.0299	0.5897	-6.2040	7.5927	3
<i>Coppel</i>	48.9884	0.0234	0.3433	-2.6603	4.2136	8
<i>Inbursa</i>	45.2263	0.0219	0.1533	-1.3026	2.4528	10
<i>Invercap</i>	47.8636	0.0230	0.8957	-9.5861	10.6091	9
<i>Metlife</i>	57.4945	0.0267	0.5492	-4.9977	7.2582	5
<i>Principal</i>	56.8235	0.0265	0.4943	-4.2647	6.7360	6
<i>Profuturo GNP</i>	66.6194	0.0300	0.5935	-5.5666	8.0109	2
<i>SURA</i>	79.4187	0.0344	0.5869	-5.6833	7.6747	1
<i>XXI Banorte</i>	63.7382	0.0290	0.4874	-4.3543	6.1060	4

Source: Prepared by authors with data of CONSAR (2014).

Table 6. Performance of Type 4 SIEFOREs and their benchmark.

Type 4 Siefore (age<36)						
SIEFORE benchmark	Accumulated Mean St.D.			Min	Max	Ranking (accumulated returns)
	returns (%)	%Pt	%Pt			
<i>MaxS_SB4</i>	84.5739	0.0360	0.2868	-2.5008	4.4361	
<i>Azteca</i>	58.8722	0.0272	0.4567	-4.1835	6.0705	7
<i>Banamex</i>	77.5416	0.0337	0.6868	-7.0281	8.7374	2
<i>Coppel</i>	52.2202	0.0247	0.3689	-2.7509	4.4076	8
<i>Inbursa</i>	47.3222	0.0228	0.1891	-1.5881	2.8411	10
<i>Invercap</i>	51.9527	0.0246	0.9573	-9.6013	11.2249	9
<i>Metlife</i>	64.8502	0.0294	0.6035	-5.2141	7.4481	5
<i>Principal</i>	62.2513	0.0285	0.5517	-4.7023	7.2674	6
<i>Profuturo GNP</i>	77.4764	0.0337	0.6884	-6.7161	9.2224	3
<i>SURA</i>	91.8834	0.0383	0.6699	-6.4055	8.6372	1
<i>XXI Banorte</i>	68.6266	0.0307	0.5585	-4.7777	6.6833	4

Source: Prepared by authors with data of CONSAR (2014).

Tables 3 to 6 show a similar net return performance analysis to that of CONSAR. In all cases SURA, GNP and Banamex had the best results and Inbursa had the worst.

Tables 7 to 9 present the results of the expected return, risk and Sharpe ratios observed in each SIEFORE by using (2) and (4) i.e. the normal and crisis periods. The same Tables show the ranking of the ten SIEFOREs in each investment Type, given their observed Sharpe ratio in normal and crisis times. The new ranking is compared with the returns previously shown in tables 3 to 6. As expected, the best performing SIEFOREs with the original method are not always the best when one differentiates between normal and crisis periods. For example, SURA is a middle rank SIEFORE in normal times, but the second best performer in crisis times. As expected, Inbursa is the worst performer in normal times, but the most stable during crisis periods, suggesting the possibility of active investment management, as long as investors have the necessary information.

In order to determine the Sharpe ratio in normal and crisis times, daily 28 CETES yield to maturity is observed at time t in the secondary market

Table 7. Performance of Type 1 SIEFOREs during normal and crisis periods.

Gaussian MS analysis for Type 1 SIEFOREs					
Panel A SIEFORE MS parameters	Accumulated returns (%)	Expected return “normal”	Expected return “crisis”	Expected risk “normal”	Expected risk “crisis”
<i>MaxS-SBI</i>	72.8608	6.987***	20.641	2.1692	10.7210
<i>Azteca</i>	41.6939	6.2808***	1.8377	2.5344	8.1996
<i>Banamex</i>	56.0163	7.9772***	2.1275	2.6799	8.8850
<i>Coppel</i>	37.9507	6.6128***	-0.3589	2.1561	7.1758
<i>Inbursa</i>	42.5623	4.5389***	10.152***	0.4772	1.9336
<i>Invercap</i>	49.9814	8.5699***	-9.2593	4.0682	17.6880
<i>Metlife</i>	46.2641	7.607***	-0.422	2.8267	9.2518
<i>Principal</i>	49.2131	7.907***	0.3849	2.7015	8.2567
<i>Profuturo GNP</i>	48.9634	8.6142***	-0.6648	2.8248	8.7931
<i>SURA</i>	60.2435	7.786***	4.4733	2.9248	8.8978
<i>XXI Banorte</i>	54.1112	7.7262***	1.8701	2.5587	8.4907
Panel B SIEFORE MS rankings	Sharpe ratio “normal”	Sharpe ratio “crisis”	Sharpe ranking “normal”	Sharpe ranking “crisis”	Acumulated normal Ranking
<i>MaxS-SBI</i>	1.2216	1.4643			
<i>Azteca</i>	0.7669	-0.3786	9	5	9
<i>Banamex</i>	1.3583	-0.3168	2	3	2
<i>Coppel</i>	1.0554	-0.7388	7	9	10
<i>Inbursa</i>	0.4225	2.6942	10	1	8
<i>Invercap</i>	1.0404	-0.8029	8	10	4
<i>Metlife</i>	1.1568	-0.5798	6	7	7
<i>Principal</i>	1.3214	-0.5520	4	6	5
<i>Profuturo GNP</i>	1.5141	-0.6377	1	8	6
<i>SURA</i>	1.1792	-0.0527	5	2	1
<i>XXI Banorte</i>	1.3245	-0.3618	3	4	3

This table presents the normal and crisis periods expected return, risk and Sharpe ratios of Type 1 by using Hamilton’s (1998) filter. SIEFOREs. * means significant that the expected return is significant with 10% of probability, ** at 5% probability and *** at 1% probability.

Source: Prepared by authors using CONSAR (2014) data.

Table 8. Performance of Type 3 SIEFOREs during normal and crisis periods.

Gaussian MS analysis for Type 3 SIEFOREs					
SIEFORE	Accumulate return (%)	Expected return "normal"	Expected return "crisis"	Expected risk "normal"	Expected risk "crisis"
<i>MaxS-SB3</i>	80.4675	7.4087***	27.5168	2.2616	13.2726
<i>Azteca</i>	54.5497	8.0396***	2.555	3.7723	12.8368
<i>Banamex</i>	66.3378	11.2076***	-5.9178	4.4714	17.9074
<i>Coppel</i>	48.9884	8.5871***	-1.2068	3.0487	8.9592
<i>Inbursa</i>	45.2263	5.0423***	7.4191	1.2934	5.0257
<i>Invercap</i>	47.8636	7.5452**	-2.4154	6.3824	29.5054
<i>Metlife</i>	57.4945	10.6193***	-4.8003	4.5470	15.1421
<i>Principal</i>	56.8235	9.8238***	-3.4818	4.1774	13.9098
<i>Profuturo GNP</i>	66.6194	10.7755***	-2.8298	4.7552	16.8531
<i>SURA</i>	79.4187	10.4332***	1.8412	4.7747	17.5326
<i>XXI Banorte</i>	63.7382	9.8012***	-1.0482	4.3233	13.6834

SIEFORE	Sharpe ratio "normal"	Sharpe ratio "crisis"	Sharpe ranking "normal"	Sharpe ranking "crisis"	Accumulated returns ranking
<i>MaxS-SB3</i>	1.3581	1.7008			
<i>Azteca</i>	0.9815	-0.1860	8	3	7
<i>Banamex</i>	1.5365	-0.6065	1	8	3
<i>Coppel</i>	1.3940	-0.6864	2	10	8
<i>Inbursa</i>	0.5451	0.4928	9	1	10
<i>Invercap</i>	0.5026	-0.2494	10	4	9
<i>Metlife</i>	1.3816	-0.6434	3	9	5
<i>Principal</i>	1.3134	-0.6056	5	7	6
<i>Profuturo GNP</i>	1.3540	-0.4612	4	6	2
<i>SURA</i>	1.2767	-0.1769	6	2	1
<i>XXI Banorte</i>	1.2638	-0.4378	7	5	4

This table presents the normal and crisis periods expected return, risk and Sharpe ratios of Type 3 by using Hamilton's (1998) filter. SIEFOREs. * means significant that the expected return is significant with 10% of probability, ** at 5% probability and *** at 1% probability.

Source: Prepared by authors with data of CONSAR (2014).

Table 9. Performance of Type 4 SIEFOREs during normal and crisis periods.

Gaussian MS analysis for Type 4 SIEFOREs					
SIEFORE	Accumulate return (%)	Expected return “normal”	Expected return “crisis”	Expected risk “normal”	Expected risk “crisis”
<i>MaxS_SB4</i>	84.5739	7.7026***	27.9104	2.2650	15.4548
<i>Azteca</i>	58.8722	7.3399***	4.4955	4.1234	13.9030
<i>Banamex</i>	77.5416	11.9422***	-6.6582	5.6242	21.8903
<i>Coppel</i>	52.2202	8.9117***	-0.7887	3.3525	9.5121
<i>Inbursa</i>	47.3222	5.5227***	6.3058	1.6013	5.8973
<i>Invercap</i>	51.9527	7.6493**	-1.9218	7.4342	33.0012
<i>Metlife</i>	64.8502	11.6949***	-6.7435	5.4128	16.8809
<i>Principal</i>	62.2513	9.9803***	-3.8619	4.9847	16.2989
<i>Profuturo GNP</i>	77.4764	12.4356***	-6.1237	5.7758	20.3634
<i>SURA</i>	91.8834	11.9408***	-0.1402	5.7760	20.6066
<i>XXI Banorte</i>	68.6266	11.0362***	-5.5034	5.3858	16.2890
SIEFORE	Sharpe ratio “normal”	Sharpe ratio “crisis”	Sharpe ranking “normal”	Sharpe ranking “crisis”	Accumulated returns ranking
<i>MaxS_SB4</i>	1.4858	1.4861			
<i>Azteca</i>	0.7282	-0.0321	9	2	7
<i>Banamex</i>	1.3522	-0.5299	4	5	2
<i>Coppel</i>	1.3645	-0.6025	2	8	8
<i>Inbursa</i>	0.7403	0.2312	8	1	10
<i>Invercap</i>	0.4455	-0.2080	10	3	9
<i>Metlife</i>	1.3593	-0.6923	3	10	5
<i>Principal</i>	1.1321	-0.5402	7	6	6
<i>Profuturo GNP</i>	1.4021	-0.5434	1	7	3
<i>SURA</i>	1.3164	-0.2466	5	4	1
<i>XXI Banorte</i>	1.2438	-0.6413	6	9	4

This table presents the normal and crisis periods expected return, risk and Sharpe ratios of Type 4 by using Hamilton’s (1998) filter. SIEFOREs. * means significant that the expected return is significant with 10% of probability, ** at 5% probability and *** at 1% probability.

Source: prepared by authors with data of CONSAR (2014)..

(Banco de México 2016). Using Hamilton's filter for the CETE's rate, results in an expected risk-free rate of 4.3372% for the normal periods and 4.9423% for the crisis periods, so these values are used to estimate the Sharpe ratios as suggested in (4).

In table 7, the expected return in all Type 1 SIEFORES is significantly different from zero during normal periods, and only Inbursa has an expected return different from zero during crisis periods. This is due to the more stable historical performance that leads the SIEFORES to underperform their investment policy benchmark. Panel b) of the same Table presents the Sharpe ratio results for each SIEFORE in each volatility regime, and presents the ranking of each SIEFORE according to their Sharpe ratios for each volatility regime.

Conclusion

A defined benefit pension fund system should encourage competition among pension fund managers to motivate a search for better performance. Calderón-Colín, et al. (2009) and Guillen (2011) mention that there is low competition among Mexican pension funds (SIEFORES) due to informational asymmetry (noisy or uninformed decisions), and the absence of legal incentives.

The analysis presented in this paper uses Markov-switching models to calculate the Sharpe ratio ($S_{i,k}$) of SIEFORES for different sub periods, identifying two volatility regimes (normal with $k = 1$ and crisis with $k = 2$). The results confirm that not all SIEFORES are good (or bad) performers all the time. In some cases, good performers during normal periods are not so during crisis periods and vice-versa. This evidence suggests that awareness of market conditions conveys information that can support rational decisions to change savings from good performers during normal times to good performers during crisis periods. While this is a preliminary finding, it opens the door for further analyses that should lead to optimal investment decision rules.

The current Mexican legislation allow changes from one SIEFORE to another only every twelve months, so the implementation of a more informed and flexible investment framework requires the liberalization of the current legislation. However, the findings reported in this study give support to such an initiative, and should be regarded as evidence that the current legislation is too rigid, frustrating the opportunity that well informed rational investors improve their retirement savings returns in the long run.

More research is needed to fully understand the multiple areas of potential improvement to the current Mexican Pension Funds system. This is a first contribution in that direction, and we expect that others will follow. While the adoption of a modern Pension Funds System opens numerous possibilities, the main objective, which is to guarantee the living standards of future pensioners should be the highest priority.

References

- Albo, A. *et al.*, (2007). "Hacia el fortalecimiento de los sistemas de pensiones en México". *BBVA-Research*. Available at: http://www.bbva.com/KETD/fbin/mult/Haciaelfortalecimientodelossistemasdepensionesenmex_tcm346-189743.pdf?ts=1642013 [Accessed February 3, 2012].
- Alonso, J., Hoyo, C. y Tuesta, D. (2014). "A Model for the Pension System in Mexico: Diagnosis and Recommendations". *Journal of Pension Economics and Finance*, pp. 1-37. Available at: http://www.journals.cambridge.org/abstract_S147474721400016X.
- Banco de México (2016). "Vector de precios de títulos gubernamentales (on the run)". *Banco de México*. Available at: <http://www.banxico.org.mx/portalesEspecializados/tasas> [Accessed February 3, 2016].
- Calderón-Colín, R., Domínguez, E.E. y Schwartz, M.J. (2009). "Consumer Confusion: The Choice of Pension Fund Manager in Mexico". *Journal of Pension Economics and Finance*, vol. 9, núm. 1, p. 43. Available at: http://www.journals.cambridge.org/abstract_S1474747209004004.
- CONSAR (2016). SIEFORES Historical Prices. *SIEFORES*. Available at: <https://www.consar.gob.mx/principal/siefores{ }basicas/precios{ }de{ }bolsa{ }de{ }las{ }siefores.xls{ }&sa=U{ }&ved=0ahUKEwicpuOwpMDJAhWBGx4KHUBzA7o4ChAWCBcwCQ{ }&client=internal-uds-cse{ }&usg=AFQjCNHxFAXKqu5OAd06A1jFLaVeV4pq9w> [Accessed January 3, 2016].
- CONSAR (2014). SIEFORES Historical Prices. *SIEFORES*. Available at: https://www.consar.gob.mx/principal/siefores_basicas/precios_de_bolsa_de_las_siefores.xls&sa=U&ved=0ahUKEwicpuOwpMDJAhWBGx4KHUBzA7o4ChAWCBcwCQ&client=internal-uds-cse&usg=AFQjCNHxFAXKqu5OAd06A1jFLaVeV4pq9w [Accessed February 3, 2015].
- CONSAR (2016). "Summary of Limits Contained in the Investment Regime Applicable to SIEFORES Pension Funds, as per Disposiciones que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las SIEFORES". *Información*

- financiera*. Available at: http://www.consar.gob.mx/normatividad/pdf/normatividad_emitida/circulares/Disposiciones_de_caracter_general_regimen_de_inversi?n_20160104.pdf [Accessed February 3, 2015].
- De la Torre, O. *et al.* (2015). "A Minimum Variance Benchmark to Measure the Performance of Pension Funds in Mexico". *Contaduría y Administración UNAM*, vol. 61, núm. 3.
- De la Torre, O.V., Galeana, E. y Aguilasocho, D. (2015). "An Actual Position Benchmark for Mexican Pension Funds Performance". *Economía Teoría y Práctica*, núm. 43, pp.133–154.
- Fuentes, E., García, A. y Escrivá, J. (2010). "Las reformas de los sistemas de pensiones en latinoamerica". *BBVA-Research*. Available at: http://www.bbvaresearch.com/KETD/fbin/mult/Lasreformasdelossistemasdepensionesenlatinoamerica_tcm346-238550.pdf?ts=1642013.
- Guillén, J. (2011). "Latin American Private Pension Funds' Vulnerabilities". *Economía Mexicana. Nueva época*, vol, XXnúm. 2, pp. 357–378.
- Hamilton, J.D. (1989). "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle". *Econometrica*, vol. 57, núm. 2, pp. 357–384.
- Martínez-Preece, M.R. y Venegas-Martínez, F., (2014). "Análisis del riesgo de mercado de los fondos de pensión en México un enfoque con modelos autorregresivos". *Contaduría y Administración*, vol. 59, núm. 3, pp. 165–195. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0186104214712690>.
- Meucci, A. (2007). *Risk and Asset Allocation*, New york: Springer Berlin Heidelberg.
- Ruppert, D. (2011). *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*, Springer Berlin Heidelberg.
- Santillán, R., Martínez, M. y López, F. (2016). "Análisis econométrico del riesgo y rendimiento de las SIEFORES". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, vol. 11, núm. 1, pp.29–54.

Appendix 1. The use of Markov-Switching Sharpe ratios of the SIEFOREs in a partially informed scenario

In this Appendix is presented the decision-making algorithm that a theoretical group of pension savers would have followed if they have had access to the Markov-Switching Sharpe Ratios such as the ones presented in table 3 and tables 7 to 9, along with the probability of being in “normal” or “crisis” periods. The assumption stated is that even if the investors had access to this information, they suffer the impact of some externalities such as the fact that their SIEFORE is managed by a division of a big financial institution, or that the marketing efforts of their SIEFORE lead them to decisions not entirely informed. It is also assume that the impact of the legal restriction to move retirement proceedings only once a year has an impact in the investment levels. Therefore, in order to simulate the partially informed scenario portfolio the next algorithm is followed:

Definitions:

$S_{i,j}$ = Sharpe ratio of the i-th SIEFORE at time, given the k-regime.

$I_{MaxSharpe}$ = The Max Sharpe portfolio that measures the performance of all the SIEFOREs in a given Type or investment regime such as SB1, SB2, SB3 or SB4.

$E(\Delta\%I_{MaxSharpe})_k$ = The expected return, observed at t, of the Max Sharpe portfolio, given the k volatility regime.

$\sigma(\Delta\%I_{MaxSharpe})_k$ = The expected risk or standard deviation, observed at t, of the Max Sharpe portfolio, given the k volatility regime.

$E(\Delta\%SB_i)_k$ = The expected return, observed at t, of the i-th SIEFORE, given the k volatility regime.

$\sigma(SB_i)_k$ = The expected risk or standard deviation, observed at t, of the i-th SIEFORE, given the k volatility regime.

$P(k = 2 | \Delta\%I_{MaxSharpe})$ = The probability that the performance or investment policy of the SIEFOREs in a given investment style or Type is in regime 2 or “crisis”, given the pas observed data of the benchmark.

Algorithm:

For February 2010 to December 2014

1. To calculate the Markov Switching values of $E(\Delta\%SB_i)_k$ and $\sigma(SB_i)_k$ by using all the historic data of $\Delta\%SB_i$ at t in each SIEFORE.
2. To calculate, the expected return $E(\Delta\%I_{MaxSharpe})_k$ and risk $\sigma(\Delta\%I_{MaxSharpe})_k$ of the performance benchmark, along with the probability of being in regime 2 or "crisis" time. $P(k = 2 | \Delta\%I_{MaxSharpe})$
3. To define the regime k as follows:

$$k = \begin{cases} 1 & \text{if } P(k = 2 | \Delta\%I_{MaxSharpe}) > 50\% \\ 2 & \text{if } P(k = 2 | \Delta\%I_{MaxSharpe}) \leq 50\% \end{cases}$$

4. For all the SIEFOREs in the simulated Type or investment regime determine the smoothed or actual Markov-Switching Sharpe ratio, by using as risk free rate the monthly rate of the 28 day CETES:

$$S_{i,k} = \frac{E(SB_i)_k - rf}{\sigma(SB_i)_k}$$

5. To calculate the investment level in each SIEFORE by using the next expression:

$$w_i = \begin{cases} \frac{S_{i,k}}{\sum S_{i,k}} & \text{if } S_{i,k} \geq 0 \\ 0\% & \text{if } S_{i,k} < 0 \end{cases}$$

6. To use the investment level in each SIEFORE to calculate the weighted mean return of the simulated portfolio P :

$$\Delta\%P_t = \sum_{j=1}^N w_j \Delta\%SB_{j,t}$$

end

By running this, we used a base-100 value at January 2010 in each SIEFORE Type by using the SIEFORES described in table 2.

Appendix 2. The use of Markov-Switching Sharpe ratios of the SIEFORES in a fully informed scenario.

In order to simulate the portfolio of this scenario, we followed the same definitions and steps of the algorithm given in Appendix 1. The only difference in this scenario is that we relaxed the actual legal restriction that allows Mexican investors to change their savings to another SIEFORE only once a year. Had this happened, we assume that all investors are fully informed with our performance metric and all change their proceedings to the best performer SIEFORE (the one with the highest Markov-Switching Sharpe ratio). To do this, we change only the step 5 of the algorithm of Appendix 1 with this one:

5. To calculate the investment level in each SIEFORE by using the following expression:

$$w_i = \begin{cases} 100\% & \text{if } S_{i,k} = \max(S_{i,k}) \\ 0\% & \text{if } S_{i,k} < \max(S_{i,k}) \end{cases}$$

Curvatura de Ricci como indicador de fragilidad en el contagio del COVID-19 y de los mercados financieros en el mundo

Ricci Curvature as an indicator of fragility in the contagium of COVID-19 and in financial markets around the world

Guillermo Sierra Juárez*

(Fecha de recepción: 21 de diciembre de 2020. Fecha de aceptación: 6 de abril de 2021)

RESUMEN

El presente trabajo presenta una forma alternativa en la medición del comportamiento de contagios ya sea en salud como el caso de las pandemias o en los mercados financieros utilizando el concepto matemático de curvatura. Utilizando este indicador de la geometría diferencial, aplicado a otras áreas del conocimiento como la física, con la intención de medir la robustez o fragilidad de ciertos sistemas en casos discretos como en la teoría de gráficas. El modelo se aplica en dos casos: al crecimiento de los contagios COVID-19 de distintos países del mundo y a la caída en distintos índices de bolsas representativas. Los resultados de la aplicación del indicador de curvatura Ollivier-Ricci muestran consistencia con el comportamiento de las series entre curvatura y fragilidad.

Clasificación JEL: C02, C63, E37, G01

Palabras clave: COVID-19, crisis financiera, Ricci, curvatura, fragilidad.

ABSTRACT

This paper presents an alternative method to measure the behavior of contagions, either in health, such as pandemics, or in financial markets, using the mathematical concept of curvature. This concept of differential geometry used in other areas of knowledge, such

* Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA
Universidad de Guadalajara
gsierra@cucea.udg.mx, ORCID: 0000-0002-1927-834X

as physics, is applied in this paper to measure the robustness or fragility of certain systems in discrete cases such as graph theory. The model is applied in two instances: The growth of COVID-19 infection in different countries and in representative stock market indices around the world. The results of the application of the Ollivier-Ricci curvature indicator show consistency with the behavior of curvature and fragility of the series.

JEL Classification: C02, C63, E37, G01

Keywords: *COVID-19, Financial Crisis, Ricci, Curvature, Fragility.*

Introducción

El tema de los contagios en las pandemias y en los mercados financieros ha sido ampliamente estudiado en la literatura y especialmente en la actualidad con la aparición del COVID-19. En el caso de contagios de enfermedades ésta se esparce mediante virus, bacterias u otro agente infeccioso y la transmisión es de persona a persona. Sin embargo, en el caso de contagios en la información financiera el comportamiento de contagio se da a través de medios de comunicación electrónicos, es decir, por correos electrónicos, redes sociales o búsquedas en los navegadores que con un evento que lo dispare se transmite y sirve de indicador de crecimiento y caída de precios.

El impacto inmediato y de corto plazo en la economía y mercados financieros ha sido devastador en todo el mundo y en particular para México. La pandemia del COVID-19 no sólo ha impactado al sector real de la economía y de igual forma los mercados financieros, sino que además, la pandemia ha afectado las cadenas de producción, la movilidad de trabajadores, el turismo, el transporte y casi todas las industrias han entrado en crisis como poco veces se ha visto en el pasado.

El tema de las pandemias, así como de los contagios en el mundo financiero y sus modelos es muy amplio y variado y han mostrado avances muy significativos.

Un punto de vista alternativo o complementario al estudio de los contagios es analizar la robustez o fragilidad de los sistemas económicos y de salud utilizando una idea relativamente nueva a través del concepto de curvatura.

Si bien, este concepto fue introducido desde un inicio en las matemáticas en el marco de la geometría diferencial particularmente la curvatura de Ricci, también ha tenido aplicaciones en varias áreas del conocimiento, por ejemplo, en física en el desarrollo de la relatividad, gravitación y teoría de campos, sobre todo explicando la actuación de una fuerza como la deformación de la geometría sobre todo en espacios continuos y utilizando el formalismo tensorial se construye el conocido tensor de Ricci.

Estos conceptos de curvatura se han aplicado también en los mercados financieros tratando explicar la existencia de arbitraje, es decir, cuando existe dicha curvatura en alguno de los mercados como son: el de divisas, acciones o en el mercado de derivados se puede interpretar como la aparición de oportunidades de arbitraje, Ilinski (1998, 2001)

El concepto de curvatura puede extenderse combinándose con la teoría de gráficas para establecer la robustez de los nodos o agentes participantes construyendo el caso discreto de curvatura de Ricci que en ese caso se aplicara a los mercados financieros y al crecimiento en el contagio entre países de la pandemia de COVID-19. Existen distintas formas de discretizar la curvatura en una gráfica, pero las más comunes son Curvatura Ollivier-Ricci y Curvatura Forman-Ricci.

El objetivo del presente trabajo es medir la fragilidad o robustez del contagio del COVID-19 en diez países y de diez índices de bolsa en mercados financieros alrededor del mundo durante el 2020. Se propone como hipótesis de investigación que en los periodos de mayor contagio tanto en la pandemia como en los mercados se vea reflejado una mayor curvatura en cada una de las series, en un mayor riesgo sistémico y en una mayor fragilidad. El documento se encuentra distribuido de la siguiente manera: primeramente se hace una introducción de los objetivos y del tema del artículo. En la siguiente sección se revisa la literatura relacionada con el tema robustez y medición de curvatura, además de los hechos estilizados. Posteriormente en la sección dos y tres se presenta los modelos propuestos y sus aplicaciones. Para finalmente, en la sección cuatro, ofrecer los resultados obtenidos y en la última sección las conclusiones.

1. Revisión de la Literatura

En la siguiente sección se presenta una revisión de la literatura con especial interés en el concepto de curvatura de gráficas y su relación con la fragilidad

o robustez en los casos de mercados financieros y de la salud, como el caso de la pandemia.

En (Tse Ch. *et al.* 2010) se presenta un trabajo que estudia cómo redes complejas son construidas para estudiar la relación de precios de cierre de bolsas de valores principalmente de Estados Unidos. Las acciones se representan por nodos y las aristas representan las correlaciones cruzadas de los rendimientos y del volumen de transacciones en cada periodo, además utilizan una aproximación *winner-take-all* para determinar si dos nodos están conectados. Los resultados sugieren que la variación del precio de las acciones está fuertemente influenciado por un pequeño número de acciones y propone una nueva aproximación para la inclusión en un índice y compararlo con los existentes. Entre otras cosas, se concluye, que el mercado es altamente dominado por acciones del sector financiero.

En Cushing D. *et al.* (2019) se clasifican todas las gráficas cúbicas con curvatura de Ollivier-Ricci y curvatura Bakry-Émery, como no negativas en cualquier momento y se muestra que ambas nociones de curvatura negativa son gráficas prisma a Möbius ladders. El trabajo es importante porque introduce una calculadora de curvatura como herramienta en línea para calcular este indicador en distintas variantes de las nociones de curvatura. El trabajo considera las nociones de curvatura de Ricci en gráficas discretas y algunas adaptaciones principalmente como Bakry-Emery y Ollivier- Ricci. Según el autor, las nociones de curvatura discreta han sido aplicadas al estudio de redes biológicas discretas, además de cuantificar el riesgo sistémico y fragilidad de sistemas financieros, en el estudio del fenómeno de congestión en redes bajo un proceso de difusión del calor y en el estudio de problemas de gravedad cuántica.

Sandhu *et al.* (2015) mencionan que las interacciones de células pueden ser modeladas como un sistema dinámico complejo representado por gráficas ponderadas y la funcionalidad de tales redes, incluyendo la medida de robustez, desempeño y eficiencia son asociadas a la topología y geometría de la gráfica subyacente. El trabajo revisa las nociones de curvatura en gráficas ponderadas e investiga las propiedades de las redes geométricas derivadas de estudios genómicos a gran escala en el caso del cáncer. Se encontró que las redes de células con cáncer exhiben mayores curvaturas que en su contraparte de células normales y la formulación matemática de la propuesta alcanza una solución exacta para calcular cambios en la curvatura, la cual era no factible computacionalmente utilizando los métodos previos conocidos.

Por otra parte, Ollivier Y. (2009, 2010) recuerda la definición de curvatura Ricci de espacios métricos en términos de distancias usuales y distancias en pequeñas esferas cercanas (distancia Wasserstein) respecto a sus centros, esta definición se extiende naturalmente a cualquier espacio métrico. El trabajo considera entre otras cosas una generalización de Ricci considerando la curvatura Bakry-Émery Ricci que incluye un movimiento browniano con tendencia en una variedad Riemanniana.

Samal *et al.* (2018) realizan una comparación empírica de dos nociones distintas de curvatura de Ricci discreta para gráficos o redes: la curvatura de Forman-Ricci y la curvatura de Ollivier-Ricci. El trabajo destaca que estas dos discretizaciones de la curvatura de Ricci se desarrollaron basándose en diferentes propiedades de la noción clásica y por tanto arrojan información sobre diferentes aspectos de la estructura y el comportamiento de la red, sin embargo, a partir de un análisis computacional en una amplia gama de modelos y redes del mundo real muestra que las dos discretizaciones de la curvatura de Ricci están altamente correlacionadas en muchas redes. Además de las posibles implicaciones teóricas de su trabajo, la estrecha relación entre las dos discretizaciones tiene implicaciones prácticas por las que se puede emplear la curvatura de Forman-Ricci en lugar de la curvatura de Ollivier-Ricci para un cálculo más rápido en redes más grandes del mundo real siempre que el análisis basto sea satisfactorio.

Por otro lado, en Sia *et al.* (2019) identifican estructuras comunitarias en una red compleja que resultan de crucial importancia para el entendimiento de la función, organización, solidez y seguridad del sistema. Su trabajo presenta un nuevo enfoque en la curvatura de Ollivier-Ricci inspirada en la identificación de comunidades en redes complejas y se demuestra que la base geométrica intrínseca de dicha curvatura ofrece un enfoque natural para descubrir estructuras comunitarias inherentes dentro de una red basada en la interacción entre entidades. Se desarrolla un algoritmo de identificación de comunidades basado en la curvatura de Ollivier-Ricci y en la idea de la eliminación secuencial de bordes curvados negativamente sintomáticos de interacciones altas (por ejemplo, el tráfico). Finalmente, el algoritmo construido puede identificar comunidades con una precisión de rendimiento mejor o comparable y descubrir estructuras jerárquicas más nerviosas de la red, lo que abre nuevas vías geométricas para el análisis de la dinámica de redes complejas.

En Sandhu *et al.* (2016) se menciona que para medir el riesgo sistémico y la fragilidad de los sistemas financieros es muy importante analizar

la eficiencia del mercado, de igual forma, para decidir sobre la asignación en un portafolio y para contener los contagios financieros, consideran que los sistemas financieros pudieran representarse como gráficas ponderadas que caracterizan la compleja red de agentes que interactúan e intercambian flujo de información (por ejemplo, deuda, rendimiento de acciones y propiedad de los accionistas). Su trabajo muestra que la fragilidad es una característica del comportamiento del mercado y que los colapsos financieros son precedidos invariablemente por cambios en la robustez a nivel del sistema. En un trabajo previo, los autores sugieren que la curvatura de Ricci, que es una característica geométrica clave de una red determinada, se correlaciona negativamente con el aumento de la fragilidad de la red. Para ilustrar esta propuesta, los autores examinan los rendimientos diarios de un conjunto de acciones del índice S&P 500 (Standard and Poor's 500) durante un período de 15 años para resaltar el hecho de que los cambios correspondientes en la curvatura de Ricci constituyen un "sello distintivo" financiero. Este trabajo sienta las bases para comprender como poder diseñar sistemas bancarios y regulaciones de una manera que pueda combatir las estabilidades financieras expuestas en época de crisis.

En Barros de Souza *et al.* (2020), enmarca su estudio dentro de la nueva enfermedad del coronavirus COVID-19 que está alcanzando escalas sin precedentes y menciona que existen numerosos modelos epidemiológicos clásicos que intentan cuantificar las métricas epidemiológicas donde por lo general para pronosticar epidemias, los enfoques clásicos necesitan estimaciones de parámetros, como la tasa de contagio o el número de reproducción básico. Los autores proponen un enfoque geométrico, libre de parámetros y basado en datos para acceder al surgimiento de un estado pandémico mediante el estudio de las curvaturas de las redes Forman-Ricci y Ollivier-Ricci.

La curvatura discreta de Ollivier-Ricci se ha utilizado con éxito para pronosticar el riesgo en las redes financieras y se sugiere que esos estudios pueden proporcionar resultados análogos para las series de tiempo de la epidemia de COVID-19. Los autores calculan ambas curvaturas, primero en un modelo de "juguete" de series de tiempo epidémicas con retrasos, lo que nos permite crear redes epidémicas. Al hacerlo, pueden verificar que las curvaturas de Ollivier-Ricci y Forman-Ricci pueden ser una estimación sin parámetros para identificar un estado pandémico en la epidemia simulada. Sobre esta base, se estiman las curvaturas de Forman-Ricci y Ollivier-Ricci para redes de epidemias reales creadas a partir de series de tiempo de epidemias de COVID-19 disponibles en la Organización Mundial de la Salud

(OMS). Ambas curvaturas permiten detectar los primeros signos de alerta del surgimiento de la pandemia, y la ventaja del método propuesto consiste en proporcionar un marcador de datos geométricos tempranos para el estado de la pandemia, independientemente de la estimación de parámetros y el modelado estocástico. El trabajo abre la posibilidad de utilizar geometría discreta para estudiar redes epidémicas y se concluye que la curvatura Ricci es un fuerte indicador del estado pandémico de la red de la epidemia del COVID-19.

En el trabajo de Tannenbaum (2015), se presenta la noción geométrica de curvatura con la idea de estudiar la robustez de redes del cáncer. El problema es motivado por el problema de heterogeneidad de células cancerosas y es un ejemplo de profunda relación entre los conceptos de evolución darwinianos y la termodinámica Boltzmann. La idea es que la entropía macroscópica incrementa bajo colisiones moleculares microscópicas, mientras la evolución macroscópica puede ser parcialmente explicada vía el incremento de entropía, el razonamiento es en la línea con los que presenta su trabajo que utiliza la curvatura para cuantificar la robustez de la red.

El trabajo de Akguller (2021) muestra que si bien las discretizaciones de la curvatura Ricci ya se han aplicado a sistemas complejos, éstas no se habían aplicado a conjuntos blandos. Recordando que dichos conjuntos blandos son estructuras matemáticas para modelar sistemas múltiples donde básicamente son sistema de conjuntos y donde es posible establecer un espacio métrico y que a través de un embebido se puede proponer una discretización de la curvatura de Ricci. Las curvaturas tipo Forman u Ollivier que siguieren, cuantifican la decisión entre el tamaño del parámetro y la cardinalidad de la participación de los elementos del universo parametrizados.

En ese estudio se pregunta si el concepto geométrico definido, determina las estadísticas para los modelos de conjuntos blandos y se discuten dos ejemplos para esta pregunta. El primer ejemplo de Ricci aplica el modelo en accidentes laborales de conjuntos blandos ocurridos en Turquía 2013-2014 y es comparada con la distancia de Wasserstein de las distribuciones de curvatura. El segundo ejemplo hace uso de las curvaturas de Ricci como indicador en el modelo de los conjuntos blandos en un sistema financiero mientras el sistema esta estresado, estos ejemplos de la vida real muestran que las curvaturas de Ricci discretas para conjuntos suaves ofrecen estadística efectivas

Finalmente, Saucan (2019) menciona que se ha introducido recientemente la discretización Forman de la curvatura Ricci en redes no dirigidas.

La curvatura Forman-Ricci en diversos modelos y en redes no dirigidas del mundo real revela que en la medida de curvatura varios aspectos de la organización de redes complejas no dirigidas aunque muchas redes importantes de la vida real sea dirigidas por naturaleza y la definición de redes no dirigidas es inadecuada para el análisis de tales redes. El trabajo es una extensión de la curvatura de Forman-Ricci para redes no dirigidas partiendo de las redes dirigidas y compara dicho resultado con la curvatura Forman-Ricci con la adaptación de redes dirigidas con otra noción discreta de curvatura de Ricci. Sin embargo, las medidas mencionadas de curvatura no tienen en cuenta las correlaciones de orden superior entre vértices por lo que se ajusta la definición original de Forman a la de Ricci para tener en cuenta el complejo simplicial dirigido y se explora el potencial aumentando la curvatura Forman-Ricci en redes complejas dirigidas.

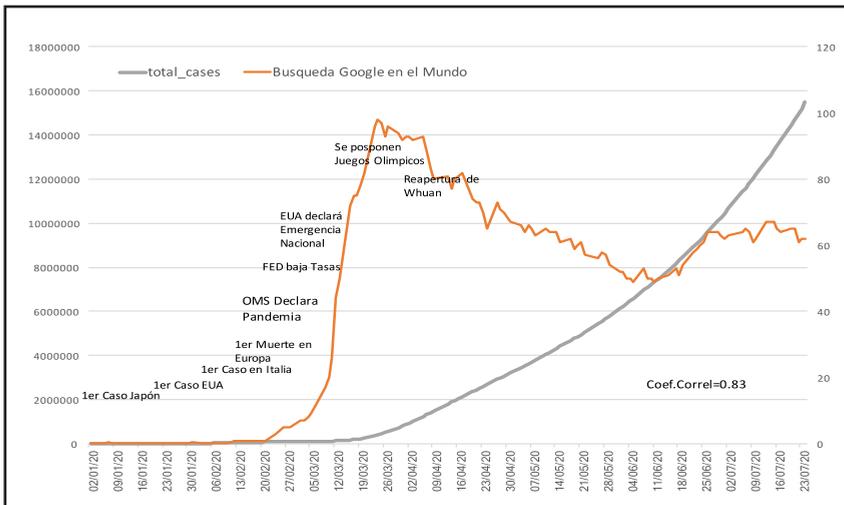
1.1. Hechos estilizados

El brote del coronavirus COVID-19 y su dispersión alrededor del mundo en 2020, como se ha mencionado ha traído consecuencias negativas al sistema financiero mundial. En la Gráfica 1 se observa el aumento de contagios a nivel mundial en contraste con la búsqueda del término COVID-19 en el Internet, concretamente en el buscador Google, donde se puede observar que son los anuncios sobre la pandemia y sus posibles consecuencias de situaciones de tipo económico y financiero las que tienen efectos más inmediatos y determinantes en el contagio de la información en general y en particular para los *traders* financieros, en varios casos más que el mismo número creciente de enfermos alrededor del mundo, al menos en el corto plazo.

En los hechos, la llegada de la epidemia principalmente a Estados Unidos y Europa, así como la declaración de pandemia por parte de la OMS, el movimiento de la tasa de interés por parte de la Federal Reserve System (FED) y la guerra comercial del petróleo provocaron un crecimiento desmedido de búsquedas en el Internet. Por otra parte, en la Gráfica 1, se aprecia un rápido crecimiento y una posterior caída suave, que anticipa el crecimiento real de los contagios y se observa una correlación mínima entre estas dos variables.

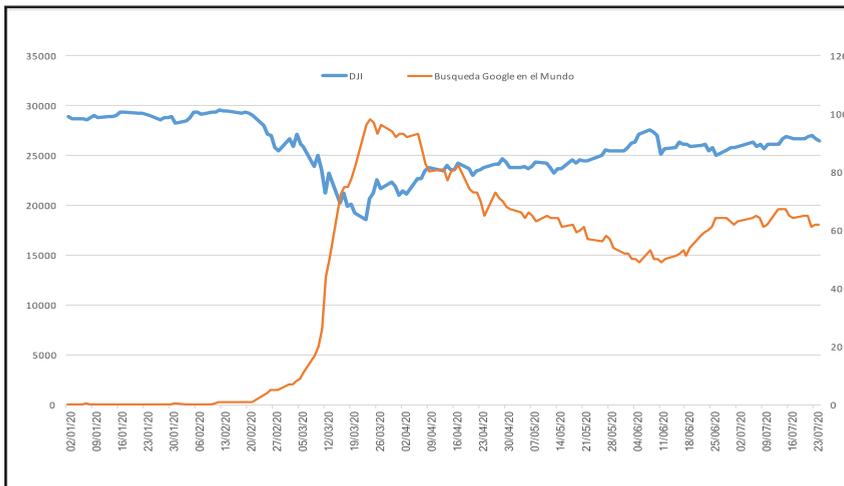
En la Gráfica 2 se observa una correlación negativa entre las búsquedas en Google de la población general en el mundo de la palabra COVID-19 (que en particular pueden ser una muestra representativa de los *traders*) y los anuncios económicos y financieros, así como los propios de la pandemia, con la caída en los mercados mundiales representados por un típico índice mun-

Gráfica 1. Crecimientos de contagios de COVID-19 y efecto en la búsqueda en Google en el mundo



Fuente: elaboración propia <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> y Google Trends.

Gráfica 2. Búsqueda en Google y comportamiento del Índice Accionario en el Mundo



Fuente: yahoo finance y Google Trends.

dial como el Dow Jones (DJI). En otra palabras, de la pandemia real de enfermedad humana se puede pensar que se pasa a una pandemia financiera de acciones humanas de los *traders* por medio de la comunicación instantánea de las redes sociales o el Internet como en este caso.

2. El Modelo

En esta sección se presenta el marco teórico con los antecedentes y fundamentos técnicos para el cálculo de la curvatura, en particular la curvatura Ollivier-Ricci en el contexto de la teoría de gráficas (nodos, aristas y conexiones) con la intención de poder estimar la fragilidad y robustez en el comportamiento del crecimiento de la pandemia COVID-19 y de los mercados financieros. En primer lugar se presentara una revisión de conceptos básicos de geometría diferencial, con las definiciones basadas en Sandhu (2016).

Sea X una variedad Riemanniana (la generalización de una superficie suave en cualquier dimensión). Se pueden medir distancias X y definir la longitud de una curva γ las geodésicas son curvas que localmente tiene la distancia más corta entre dos puntos de esa variedad X , tales curvas son básicas para introducir el concepto de curvatura

Dado un punto $x \in X$ sea T_x el espacio tangente en x y sea $u_x, w \in T_x$ vectores unitarios ortogonales. Si atravesamos el campo a lo largo de la curva geodésica γ en x en dirección de w , denotamos un punto final de la travesía por $y \in X$. Existe un conjunto de vectores tangentes en y , pero solo interesa un vector tangente específico denotado $u_y \in T_y$ el cual debería ser el mismo que u_x , es decir, si quiere comparar dos vectores tangentes que viven en espacios diferentes en forma canónica, esto se hace a través de lo que se conoce como transporte paralelo.

Debido a la curvatura, las geodésicas a lo largo de u_x y u_y (denotadas por $exp_x t u_x$ y $exp_y t u_y$, respectivamente, t denota el parámetro de curvatura) que pudieran converger o divergir uno al otro, con esto en mente se puede definir la curvatura de Ricci a través de una curva seccional, otra vez u_y el cual es un transporte paralelo $deu = u_x$ desde x a y en la dirección w , para $\varepsilon, \delta > 0$ suficientemente pequeños.

$$d(exp_x \varepsilon u_x exp_y \varepsilon u_y) = \delta \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K(u, w) + o(\varepsilon^3 + \varepsilon^3 \delta) \right) \quad (1)$$

el término $K(u,w)$ denota una curva seccional en x en el plano tangente (u,w) , entonces la curvatura Ricci es simplemente obtenida por el promedio en todas las direcciones de u .

Por otra parte, para el caso discreto la medición de curvatura en la teoría de gráficas se apoyara en los conceptos siguientes:

La curvatura de Ricci puede servir como indicador del riesgo sistemático en redes y particularmente de la fragilidad en mercados financieros, en un sentido intuitivo, la curvatura es una desviación de un objeto geométrico de lo plano, que es el caso geométrico más simple. Desde el punto de vista de la geometría euclidiana el contexto, el grado de aplanamiento refleja la conectividad e interdependencia entre los nodos sobre todo los distantes y entonces la generalización de curvatura y aplanamiento para espacios discretos como redes son modelados por gráficas ponderadas.

Considere la siguiente definición de robustez (y por ende de fragilidad), dada una red, uno puede considerar una perturbación aleatoria que resulta de la perturbación de algo observable, más formalmente, sea $q_\delta(t)$ que denote la probabilidad que la media se desvíe por más de δ de su valor original en algún tiempo t , bajo suposiciones estándar $q_\delta(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y la tasa relativa a la cual el sistema se relaja y devuelve su medida de estado no perturbado, su fragilidad y se expresa por la siguiente expresión,

$$R := \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \log_\delta(t) \right) \quad (2)$$

lo que significa que si R es grande, hay un rápido retorno al estado original (esto se conocerá como robustez) y si R es pequeña, significa un lento regreso al estado original (fragilidad). En el área de termodinámica, es bien conocido que la entropía y sus funciones de cambio de grandes desviaciones son muy cercanas, el teorema de fluctuación es una expresión de este hecho para redes y puede expresarse en términos de fragilidad y entropía S_e

$$\Delta S_e \Delta F \leq 0 \quad (3)$$

Por otro lado, sea X una variedad Riemanniana, si se consideran las siguientes superficies concretas: una esfera, un paraboloides hiperbólico (conocida como silla de montar) y una superficie plana, se denotan los vértices del triángulo geodésico en cada una de las superficies por x_0, x_1, x_2 . Se puede

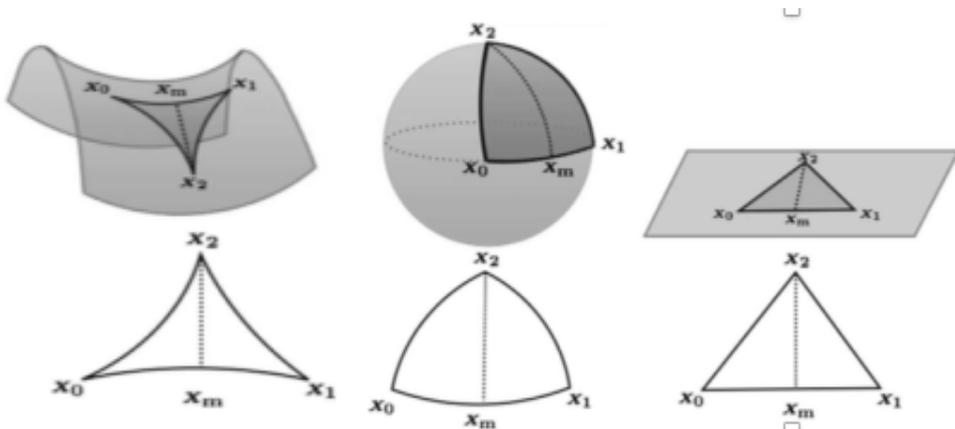
plantear en cada uno, un triángulo geodésico que es una curva cuya distancia es la longitud más corta entre los puntos. Supongamos x_m es el punto medio de la curva geodésica que conecta x_0 y x_1 , si X posee una curvatura seccional no negativa (esfera o superficie plana), la siguiente expresión se mantiene para todos los triángulos suficientemente pequeños

$$d(x_2, x_m)^2 \geq \frac{1}{2}d(x_2, x_0)^2 + \frac{1}{2}d(x_2, x_1)^2 - \frac{1}{4}d(x_0, x_1)^2 \quad (4)$$

donde d es la distancia en X , esta desigualdad muestra que en espacios curvados positivamente los triángulos son más inflados que los triángulos euclidianos y si X tiene curvatura seccional negativa, la superficie será más delgada que su contraparte euclidiana (ver Gráfica 3).

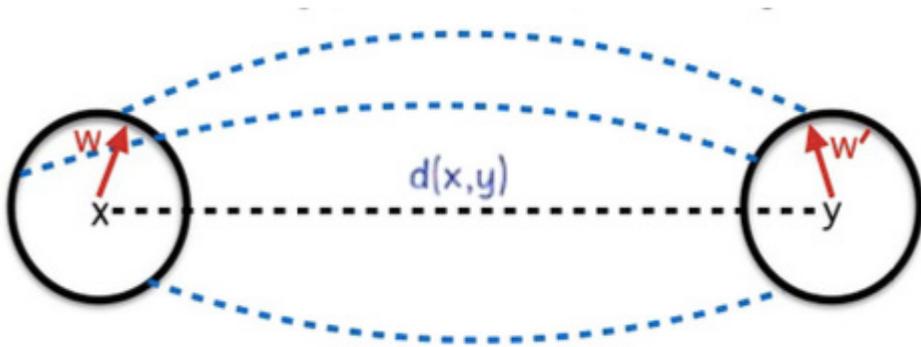
En el caso de la teoría de redes y gráficas se necesita una noción equivalente para expresar este comportamiento y se utilizará la noción de curvatura de Ricci a partir del trabajo de Ollivier para redes discretas. La idea es motivada porque la distancia entre dos pequeñas esferas(geodésica) es menor que la distancia entre sus centros en un espacio curvado y mayor que la distancia de los centros en un espacio curvado(ver Gráfica 4).

Gráfica 3



Fuente: elaboración propia con base en De Sandhu (2016).

Gráfica 4



Fuente: propia con base en De Sandhu (2015),

La curvatura Ollivier-Ricci para redes es definida de la siguiente forma: Sea $G = (V, E)$ una gráfica ponderada no direccionada, donde V y E denotan sus vértices y aristas respectivamente, la función de longitud de trayectoria $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ se define como la longitud más corta entre dos nodos, induce una métrica para un conjunto de nodos de G . La vecindad de un nodo $x \in V$ es un subconjunto de nodos conectados por una arista y se denota por π_x . Sea $\alpha \in [0,1]$ y $x \in V$ definido como μ_x^α una medida de probabilidad sobre un conjunto de nodos como

$$\mu_x^\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & \text{si } y = x \\ \frac{1-\alpha}{\text{deg}(x)} & \text{si } y \in \pi_x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

En particular, sea (X,d) el espacio métrico equipado con una medida de probabilidad $\{\mu_x: x \in X\}$, se define la curvatura Ollivier-Ricci a lo largo de la geodésica que conecta x, y

$$\kappa(x, y) = 1 - \frac{W(\mu_x^\alpha, \mu_y^\alpha)}{d(x,y)} \quad (6)$$

donde W_1 denota la distancia Wassertein-1 y d es la distancia tradicional en X , esto sería el análogo discreto de la curvatura de Ricci. Donde μ_x

y μ_y juegan el papel de las esferas geodésicas, por tanto la distancia entre centros $d(x, y)$ es comparada con la distancia entre las esferas μ_x y μ_y , vía Wassertein-1. Para el caso de las gráficas ponderadas se tiene

$$d_x = \sum_y w_{xy} y \mu_x(y) = w_{xy} / d \geq 2 \quad (7)$$

donde d_x es la suma de todos los vecinos del nodo x y w_{xy} denota la ponderación del edge que conecta al nodo x y y ($w_{xy} = 0$ si $d(x, y) > 1$). Por otro lado, recordando la distancia Wassertein y otros conceptos de teoría de transporte, dicha distancia es definida de la siguiente forma

$$W_p(\mu_1, \mu_2) := \left(\inf_{\mu \in \Pi(\mu_1, \mu_2)} \iint d(x, y)^p d\mu(x, y) \right)^{1/p} \quad (8)$$

donde X es una medida de métrica equipada con distancia d y $\Pi(\mu_1, \mu_2)$ es un conjunto de acoplamientos entre μ_1 y μ_2 que tiene la misma masa y el p -ésimo momento, el acoplamiento entre μ_1 y μ_2 es una medida μ en $X \times X$ tal que (son las marginales de μ)

$$\int_y \mu(x, y) = d\mu_1(x), \int_x \mu(x, y) = d\mu_2(x) \quad (9)$$

Para completar estas ideas, se define la distancia Wassertein en un espacio de medidas discretas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y sean μ_1 y μ_2 dos distribuciones con la misma masa y sea $d(x, y)$ la distancia entre x y $y \in X$, entonces $W_1(\mu_1, \mu_2)$ puede ser definida como sigue

$$W_1(\mu_1, \mu_2) = \min_{\mu} \sum_{i,j=1}^n d(x_i, x_j) \mu(x_i, x_j) \quad (10)$$

donde $\mu(x, y)$ es un acoplamiento sujeto a las siguientes restricciones

$$\mu(x, y) \geq 0 \text{ para } x, y \in X \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu(x, y_i) = \mu_1 \text{ para } x \in X \quad (11 \text{ a})$$

$$\sum_{i=1}^n \mu(x_i, y) = \mu_2 \text{ para } y \in X \quad (11 \text{ b})$$

que para el costo se encuentra en el acoplamiento de la masa de movimiento definida por μ_1 y μ_2 que correspondería a la de mínimo esfuerzo.

3. Aplicación del Modelo

Esta sección está fundamentada en el marco teórico de la sección anterior y se utiliza el cálculo del estimador de curvatura de gráficas Ollivier-Ricci, además de la calculadora de curvatura de gráficas desarrollada en <http://www.mas.ncl.ac.uk/graph-curvature/> que se convierte en una herramienta poderosa que facilita el cálculo de manera práctica haciendo uso con una interface del *software* de *Python graphcurvature.py*.

La calculadora mencionada en el párrafo anterior, está diseñada en un modelo de cliente-servidor con una estructura distribuida que descarga el trabajo computacional de los posibles usuarios de máquina y browser de web a una máquina o servidor remotos. Los cálculos numéricos sofisticados y los problemas de optimización están en lugar del lado del servidor y una vez realizados simplemente regresa los resultados al usuario de la máquina.

Del lado del usuario la calculadora de curvatura gráfica provee en forma de *website* hospedado en el Internet público. El *website* provee una interface de usuario gráfico (GUI) permitiendo una entrada de gráfica y manipulación con cálculos de curvatura gráfica desplegada dentro de la gráfica.

Del *software* del lado del cliente, permite a los usuarios definir gráficas para el cálculo de curvatura Ollivier-Ricci de dos formas: la primera con una gráfica que sea cargada dentro del *software* construyendo una matriz adjunta llamada JSON, o bien de una segunda forma donde intuitivamente el usuario puede dibujar gráficas interactuando con el *website* usando el *mouse*.

El presente trabajo estima la fragilidad en los mercados financieros y la producida durante el contagio de la pandemia del COVID-19 en 2020. En lo que respecta a la información, se seleccionan diez índices de bolsas de valores representativas en los diferentes continentes en el siguiente periodo de tiempo del 11 de noviembre de 2019 al 9 de noviembre de 2020 obtenidas las series de yahoo.finance (Tabla 1). Por otra parte, se hace una selección del crecimiento de contagios en diez distintos países alrededor de mundo en el periodo de tiempo del 21 de enero de 2020 al 9 de noviembre de 2020, consiguiendo los datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data> (ver Tabla 2) y que no necesariamente coinciden con los países donde se encuentran las bolsas de valores. Finalmente se considera

el caso combinado de ambas series el periodo de estudio es del 13 de febrero de 2020 al 9 de noviembre de 2020.

Debido a que el estudio se divide por los efectos en mercados financieros y por contagios en países, se presentan a continuación los datos de los índices de las bolsas y de los países que se analizarán.

A partir de la información de las series de datos de los índices del mercado y del crecimiento del número de contagios mencionada en las Tablas 1 y 2 respectivamente, como paso siguiente se calculan los rendimientos aritméticos de ambas series y posteriormente se estima su matriz de coeficientes de correlación. Más adelante, asociando a cada índice de bolsa o cada país como un nodo en una gráfica (primero por grupos de índices, luego por grupos de países y luego combinando ambos) se conectan mediante aristas a otros países o bolsas según sea el caso siguiendo el criterio *winner-take-all* (Tse Ch. *et al.* 2010). Dos nodos están conectados si el valor absoluto de su correlación es mayor que un valor umbral de 0.6 (para no considerar la dirección de la arista y el umbral puede cambiar) y por supuesto hay que notar los nodos no pueden estar conectados consigo mismo en este tipo de gráfi-

Tabla 1. Índices de bolsas consideradas en el estudio de fragilidad de Mercados

Símbolo	Nombre del Índice
DJI	Dow 30
TA125.TA	TA125
00001.SS	SSE Composite Index
GDAXI Index	DAX Performance
BVSP	IBOVESPA
N100	EURONEXT 100
MXX	IPC
N225	NIKKEI 225
GSPC	S&P 500
RUT	RUSELL 2000

Tabla 2
Países considerados en el estudio de fragilidad por pandemia COVID-19

Países
México
EUA
Japón
Reino Unido
China
Emiratos Árabes
Brasil
Alemania
Italia
Taiwan

cas. Esta forma de determinan la ponderación de las aristas con los nodos se aplicara a distintos casos y distintas ventanas móviles (en una aproximación de una por vez por mes en 2020).

Una vez construidas las matrices de ponderación, se utiliza el software para el cálculo de la curvatura Ollivier-Ricci y se estima el promedio de los valores para cada caso de su red y en cada ventana temporal.

Se plantearon ventanas temporales (mensuales) para cada uno de los siguientes casos del indicador de curvatura Ollivier-Ricci

- 1) Redes de mercado con índices de bolsas de valores indicadas en la tabla 1.
- 2) Redes de pandemia con valores del crecimiento de contagios de la tabla 2.
- 3) Simultáneamente, una red con índices de las bolsas de valores indicadas en la tabla 1 y valores del crecimiento de contagios de la tabla 2.
- 4) Simultáneamente, red con un valor de una bolsa representativa mundial (DJI), crecimiento de contagios de COVID- 19 (consideran-

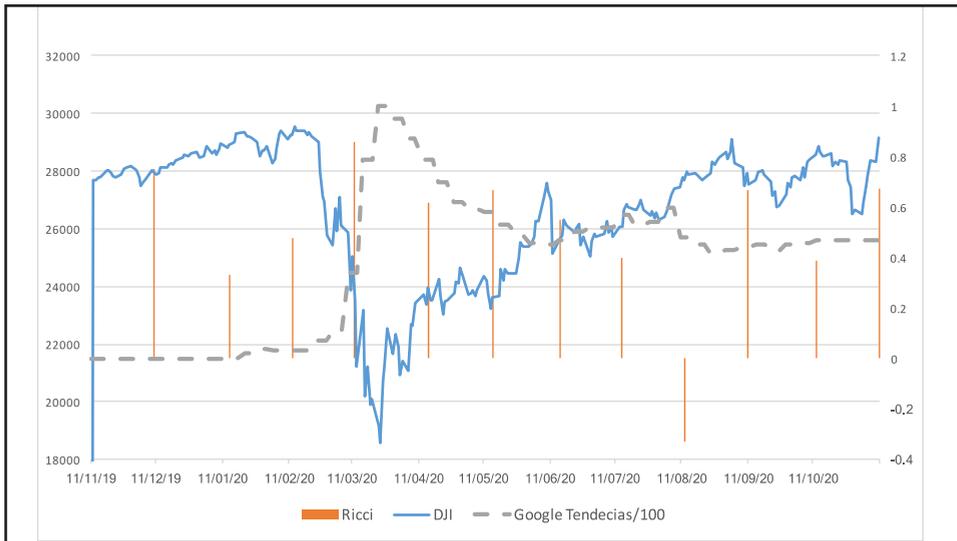
do a nivel mundial) y comportamiento de búsquedas de la palabra COVID-19 mundial en Google trends.

Al final se compara el promedio obtenido del estimador de curvatura Ollivier- Ricci en cada uno de los cuatro casos mencionados anteriormente y para diferentes ventanas de tiempo mensuales. En la siguiente sección se mostrarán los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

4. Resultados

Con el marco de la teoría utilizada de la sección 1 y el modelo y su aplicación secciones anteriores 2 y 3 a continuación se presentan los resultados obtenidos del cálculo del promedio del estimador Curvatura Ollivier-Ricci. A partir de los diez índices de las bolsas del mundo de la tabla 1 en la siguiente Gráfica 5 aparece la curvatura Ollivier-Ricci, en contraste con los comportamientos históricos de un índice representativo del mercado y las búsquedas en Google Trends, los gráficos de las redes generadas para el cálculo de la curvatura pueden consultarse en el apéndice A.

Gráfica 5. Comparativo Mercado DJI y Promedio de la Curvatura de Ollivier-Ricci Mensual (Bolsas del mundo)



Fuente: elaboración propia con datos de google trends, yahoo finance.

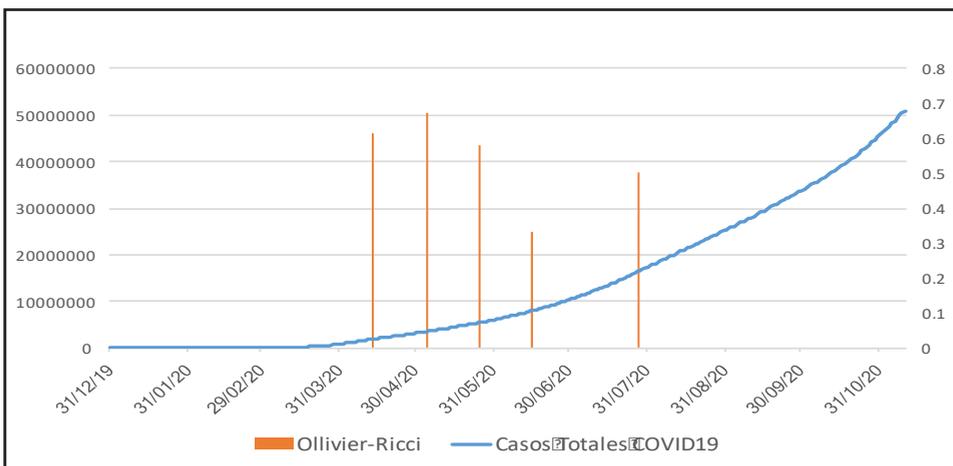
En la gráfica 5 se presenta el contraste del promedio de la curvatura Ollivier-Ricci con un índice representativo mundial como es el DJI y el reporte de la búsqueda de la palabra COVID-19 en Google Trends (reescalado). Se puede apreciar en la misma gráfica que en general los mayores valores de la curvatura corresponden a las principales caídas de DJI tal vez con un pequeño desfase en el tiempo. Si se compara el valor de la curvatura con las búsquedas en Google, se observa el efecto contrario, mayores valores de la curvatura o valores constantes se relaciona mayores búsquedas en Google del COVID-19. Un resultado atípico ocurre en agosto de 2020.

Como segundo caso se analiza el contagio de COVID-19 dado entre diez países del mundo (tabla 2) y se estima nuevamente la curvatura Ollivier-Ricci. En la Gráfica 6 donde aparece con un comparativo del crecimiento mundial.

El periodo inicial de máximo crecimiento corresponde a los valores más altos de la curvatura Ollivier-Ricci y hay varios meses, sobre todo en los meses finales de 2020, que la curvatura es cero.

Como tercer caso, ahora en una misma red se incluyen un combinado de los dos grupos anteriores, es decir, los índices de bolsa y el crecimiento de

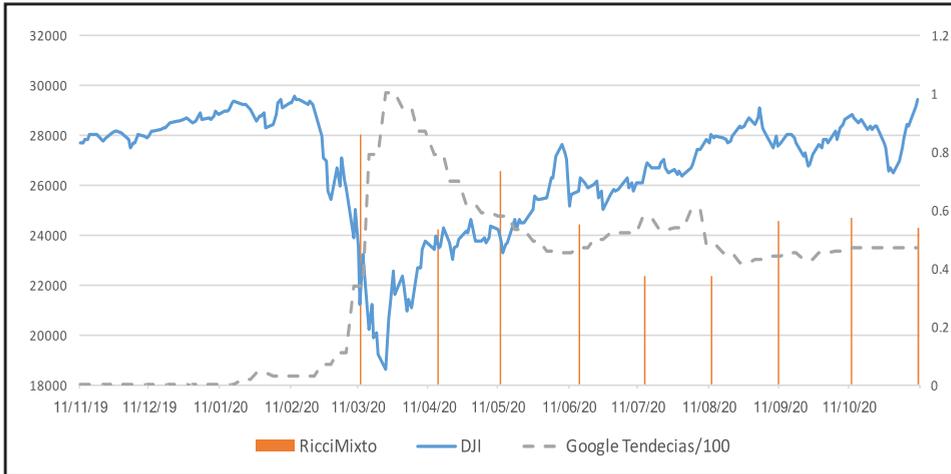
Gráfica 6. Comparativo contagio COVID-19 mundial y Curva Ollivier-Ricci mensual



Fuente: elaboración Propia con datos de:
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

contagios de COVID-19 y se estima en una sola gráfica el índice Ollivier-Ricci, en otras palabras, para un total de 20 nodos, teniendo el cuidado de coincidencias en periodos (que provoca un reducción en los datos de las series). El resultado se muestra en la Gráfica 7.

Gráfica 7. Comparativo Mercado DJI y Curvatura de Ollivier-Ricci mensual (COVID-19-Mercado)



Fuente: elaboración Propia con datos de <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Nuevamente se calcula el estimador de curvatura Ollivier-Ricci de los 20 datos combinados y se compara con un índice representativo del mercado mundial como es el DJI y las búsquedas en Google Trends sobre el COVID-19. Se puede observar otra vez que la curvatura es mayor en periodos de caída de los mercados (DJI) o incremento de búsquedas. Es de notar, que los mayores valores de la curvatura ocurren en las intersecciones de estas dos últimas series.

Como último análisis, se consideran solamente la serie histórica para tres nodos, la del COVID-19, el DJI y el Google Trends. Como resultado la curvatura siempre es cero excepto en el caso de agosto a septiembre de 2020, incluso no aunque se haga el mismo ejercicio con desfase de un mes no cambia el resultado.

Conclusiones

El efecto de contagio en los mercados financieros internacionales (a través de índices representativos), y de contagios de salud en el mundo por ejemplo de la pandemia COVID-19 (utilizando los reportes de crecimiento de contagios), pueden ser analizados de una forma novedosa mediante los conceptos de robustez y/o fragilidad de sus estructuras.

La herramienta utilizada en el presente trabajo es el concepto de curvatura, específicamente la curvatura Ollivier-Ricci para casos discretos, con teoría de gráficas, que sirve como indicador del riesgo sistemático y de movimientos de *crash* o caídas, donde el grado de curvatura refleja la conectividad entre nodos. Un incremento en el indicador de curvatura está correlacionado negativamente con la fragilidad del sistema o bien la robustez con la habilidad de la red para dispersar posibles perturbaciones. En resumen, la medida de curvatura está relacionada con las caídas de los mercados y con la aparición de arbitraje financiero.

En el caso del crecimiento de la pandemia de COVID-19, entre los meses de marzo y mayo del 2020 se muestran los valores más grandes de la curvatura Ollivier-Ricci entre los diez países seleccionados en la Tabla 1 y que muestra consistencia con lo comentado en el párrafo anterior, sobre la relación de curvatura y crecimientos o caídas de los valores de las series. Con lo anterior se confirma la hipótesis inicial de que una mayor fragilidad y crecimiento de contagios en la pandemia está relacionada a mayores valores de curvatura y que a su vez refleja en un mayor riesgo sistémico o de incremento de contagios.

En el caso de comportamiento del valor de índices de bolsas alrededor del mundo, la caída (o *crash*) está vinculada a los más grandes valores de la curvatura, sobre todo en el mes de marzo de 2020, seguido de otras pequeñas caídas en meses posteriores. De forma gráfica se compara las búsquedas en Google de la palabra COVID-19, como un posible factor intrínseco de contagio de la pandemia a los mercados. Como en el párrafo anterior se comprueba la hipótesis de una mayor fragilidad, riesgo o posibilidad de crisis están asociados a mayores valores de curvatura.

Al combinar simultáneamente nodos de países en pandemia con nodos de índices de bolsas, si bien no existen interacciones entre ambos grupos (la combinación es una suma lineal), si se refuerza en cada caso el valor de la curvatura, siendo mayor el valor de este en las caídas de las bolsas. Un factor curioso es que en la intersección de ambas curvas (DJI y Google) se encuentran los mayores valores de curvatura.

El trabajo de investigación puede continuarse en varias direcciones, por ejemplo: si se incrementa la frecuencia de las ventanas móviles del tiempo, o bien si se agregan otros países distintos, o bien utilizando diferentes metodologías de la estimación de la curvatura, o tal vez incluyendo conceptos como el de flujo de Ricci o de comunidades.

Referencias bibliográficas

- Akgüller, Ö. (2021). Discrete Ricci Curvature-based Statistics for Soft Sets. *Soft Comput* 25, 599–612 doi.org/10.1007/s00500-020-05171-5.
- Barros de Souza D., Cunha J., Figueiroa E., Correia J., Da Silva H., De Lima J.L. Filho, Albuquerque J., Santos F., (2020). “Using Discrete Ricci Curvatures to Infer COVID-19 Epidemic Network Fragility and Systemic Risk”. *medRxiv* doi.org/10.1101/2020.04.01.20047225.
- Cushing D., Kangaslampi R., Lipiäinen V., Liu S Stagg G. (2019). «The Graph Curvature Calculator and the Curvatures of Cubic Graphs. *Experimental Mathematics*, DOI: 10.1080/10586458.2019.1660740.
- Ilinski K.; Kalinin G. (1998). “Black-Scholes Equation from Gauge Theory of Arbitrage; PDF. [en línea]”, Disponible en <http://arxi.org/abs/hep-th/971203>. Recuperado en octubre 2014;
- Ilinski K. (2001). *Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing*. John Wiley and Sons, NY USA.
- Ollivier Y. (2009). “Ricci Curvature of Markov Chains on Metric Spaces”. *J. Funct. Anal*, 256:3, 810–864.
- Ollivier Y. (2010). “A Survey of Ricci Curvature for Metric Spaces and Markov Chains, Probabilistic Approach to Geometry”. *Adv. Stud. Pure Math.* 57, 343–381
- Samal, A., Sreejith, R.P., Gu, J. (2018). “Comparative Analysis of Two Discretizations of Ricci Curvature for Complex Networks”. *Sci Rep* 8, 8650 (2018). doi.org/10.1038/s41598-018-27001-3
- Sandhu, R., Georgiou, T., Reznik, E. *et al.* (2015). “Graph Curvature for Differentiating Cancer Networks”. *Sci Rep* 5, 12323. doi.org/10.1038/srep12323
- Sandhu, T. T. Georgiou, A. R. Tannenbaum, (2016). “Ricci Curvature: An Economic Indicator for Market Fragility and Systemic Risk”. *Sci. Adv.* 2, e1501495.
- Saucan, R.P. Sreejith, R.P. Vivek-Ananth, Jürgen Jost, Areejit Samal, (2019). Discrete Ricci Curvatures for Directed Networks. *Chaos, Solitons & Fractals* 118, (2019), 347-360. doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.031.

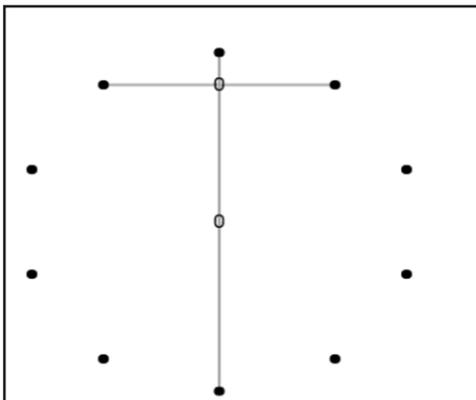
- S Sia, J., Jonckheere, E. & Bogdan, P. (2019). "Ollivier-Ricci Curvature-Based Method to Community Detection in Complex Networks". *Sci Rep* 9, 9800. doi.org/10.1038/s41598-019-46079-x
- S Tannenbaum A., Sander C., Zhu L., Sandhu R., Kolesov I., Reznik E., Senbabaoglu, Gergiou T. (2015). Ricci Curvature and Robustness of Cancer Networks. arXiv:1502.04512v2
- Tse Ch., Liu j., Lau F., (2010). "A Network Perspective of the Stock Market", *Journal of Empirical Finance*, 17(4), 659-667 doi.org/10.1016/j.jempfin.2010.04.008.

Apéndice A

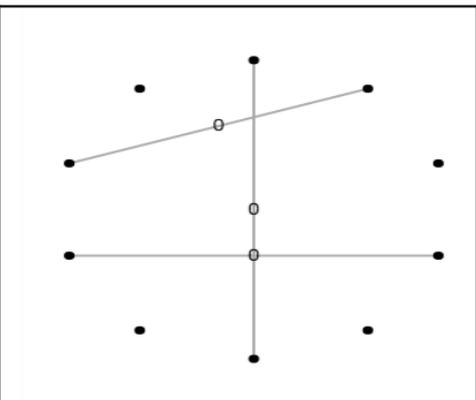
Gráficas Pandemia COVID-19 (10 países del mundo)

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando Graph curvature calculator v0.7.2 para 14 meses consecutivos utilizando las series históricas de Contagios de COVID-19 en 10 países representativos del mundo, donde cada país nodo representa un país.

Gráfica 1a

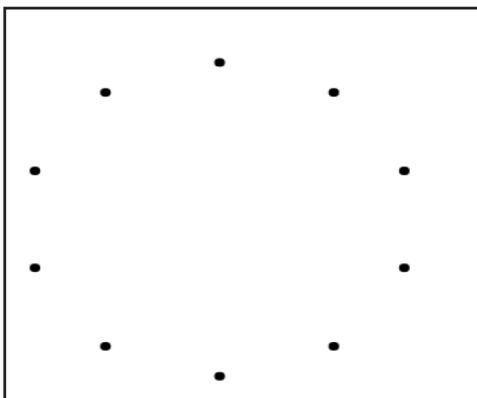


Gráfica 2a

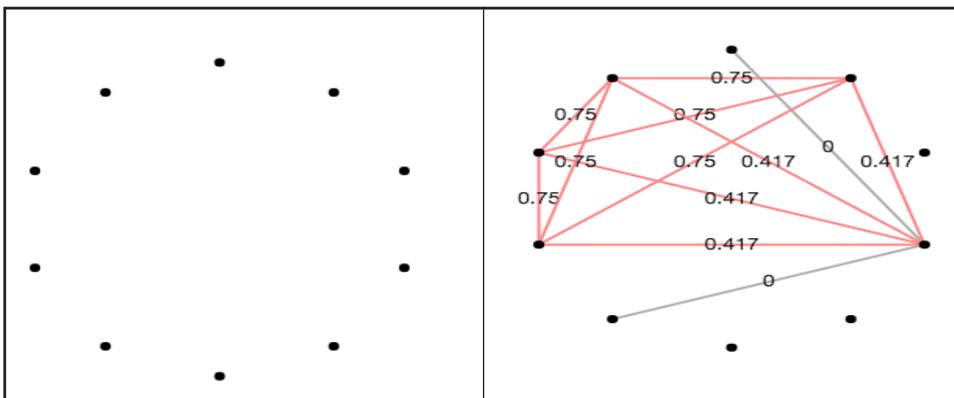


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 3a

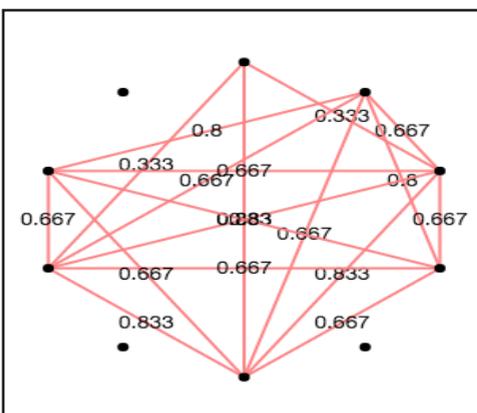


Gráfica 4a

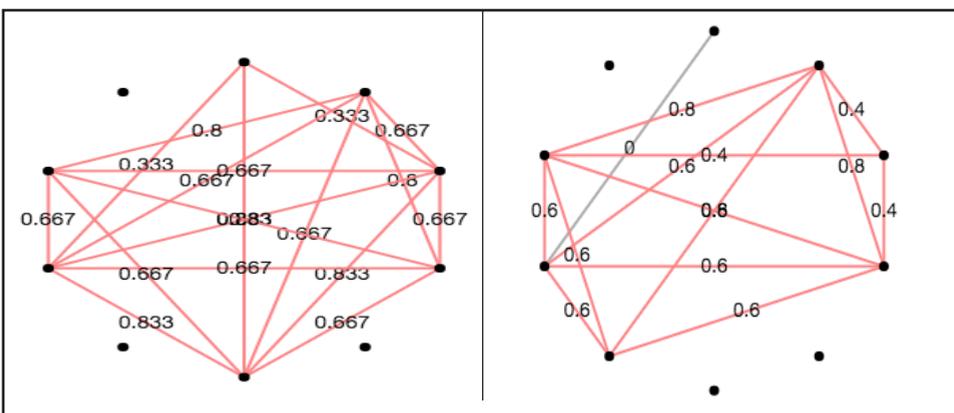


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 5a

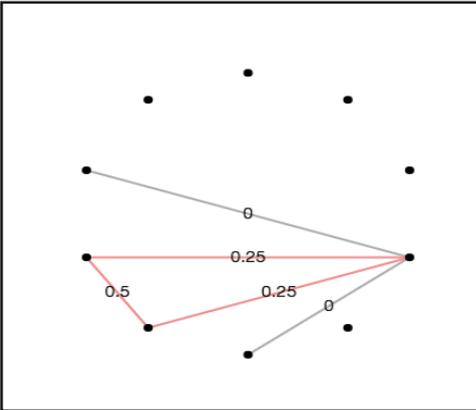


Gráfica 6a

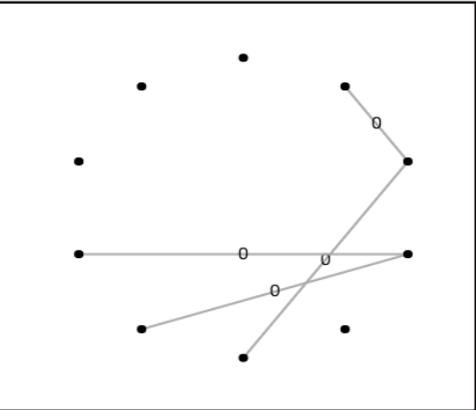


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 7a

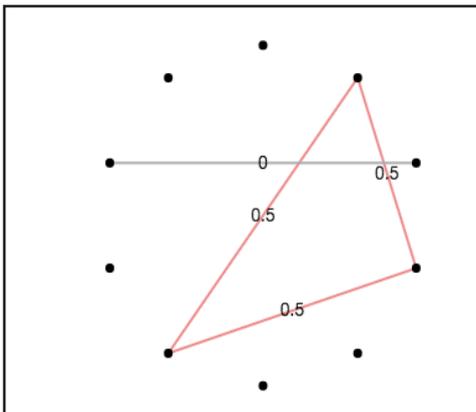


Gráfica 8a

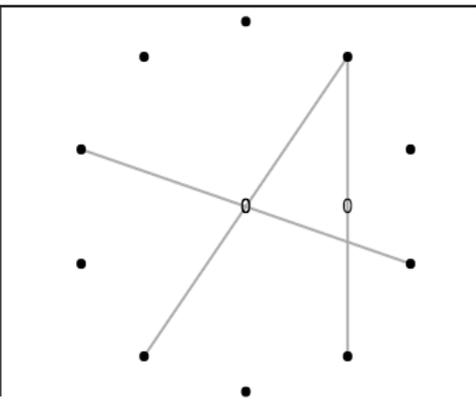


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 9a

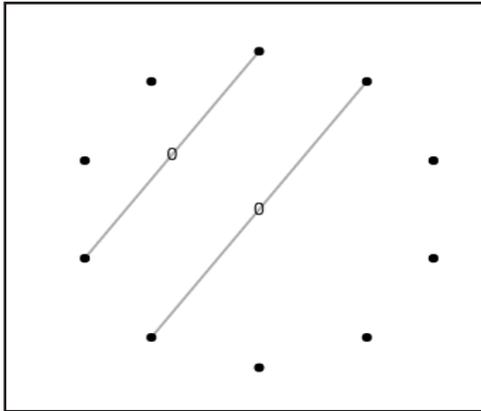


Gráfica 10a

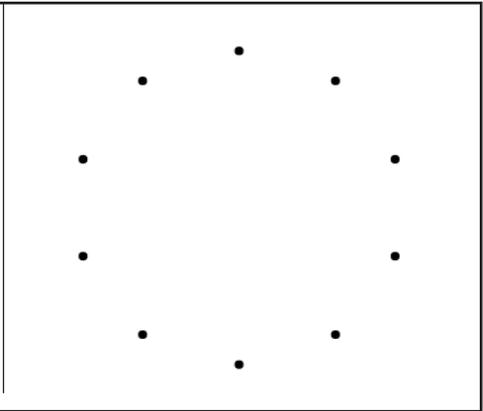


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 11a

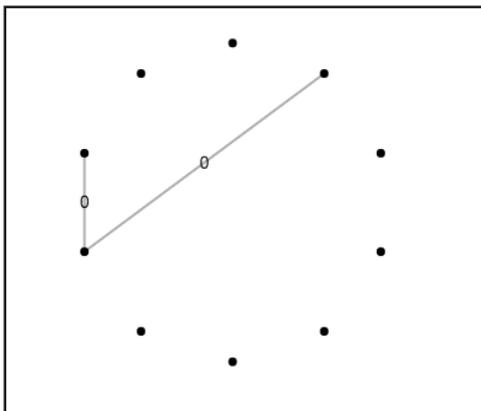


Gráfica 12a

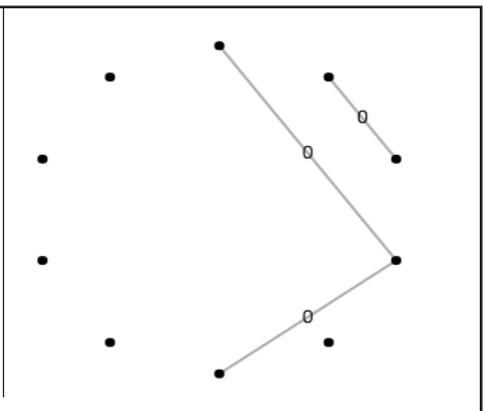


Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 13a



Gráfica 14a



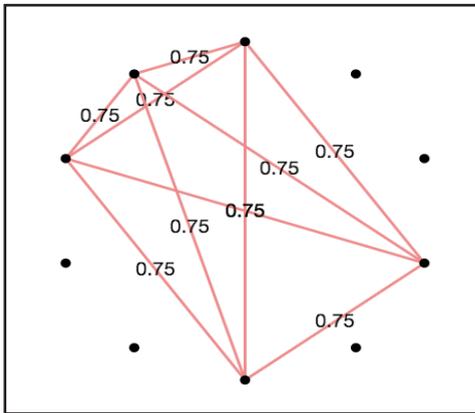
Fuente: elaboración propia
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Apéndice B

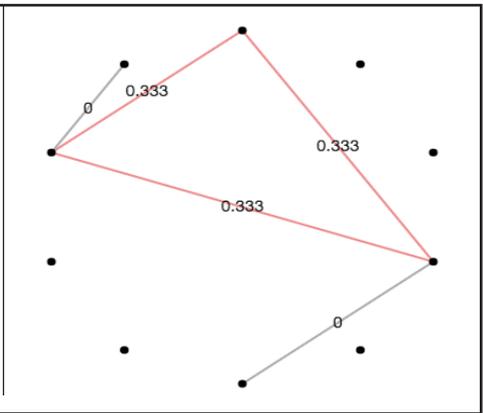
Gráficas Bolsas de Valores (10 Bolsas en el mundo)

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando *Graph curvature calculator* v0.7.2 para 12 meses consecutivos utilizando las series históricas de Bolsas en 10 países representativos del mundo, donde cada nodo representa un índice de bolsa de valores.

Gráfica 1 b

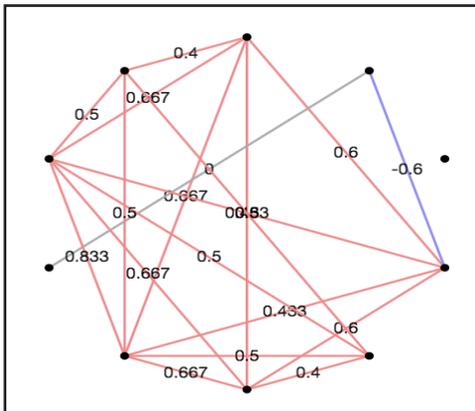


Gráfica 2 b

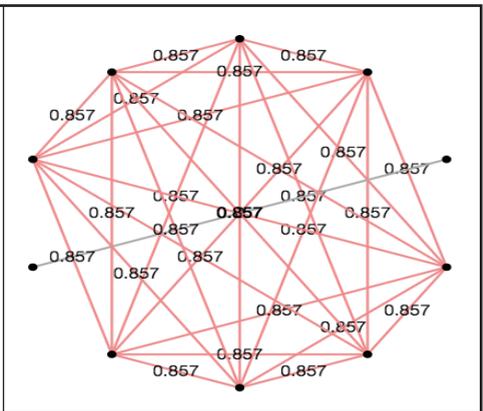


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 3 b

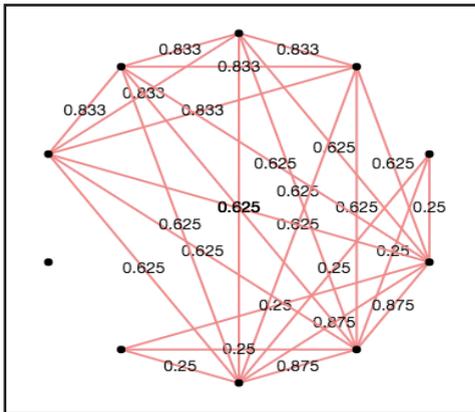


Gráfica 4 b

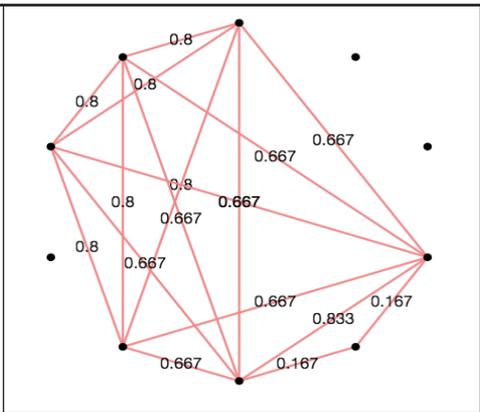


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 5 b

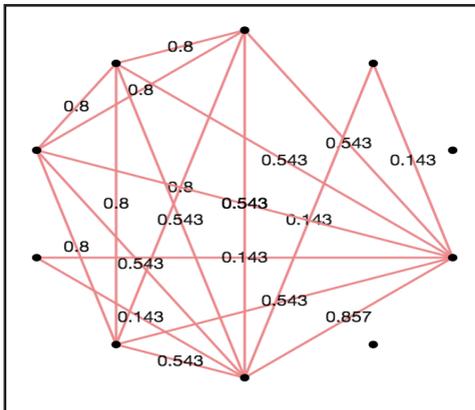


Gráfica 6 b

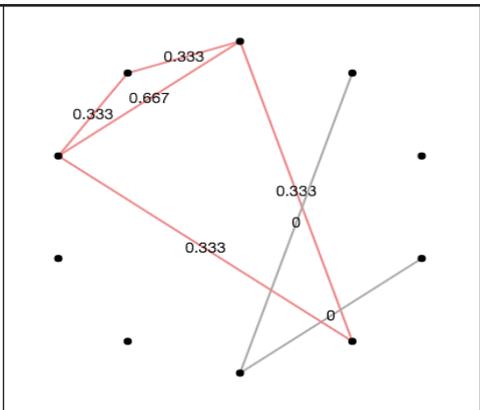


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 7 b

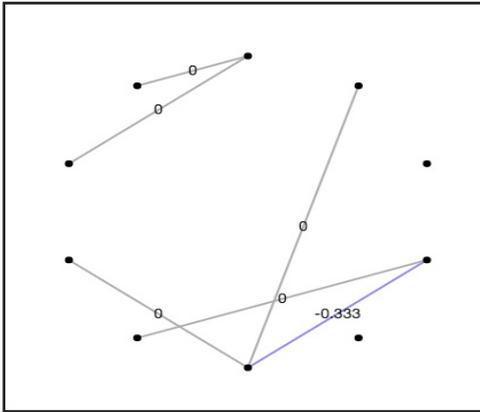


Gráfica 8 b

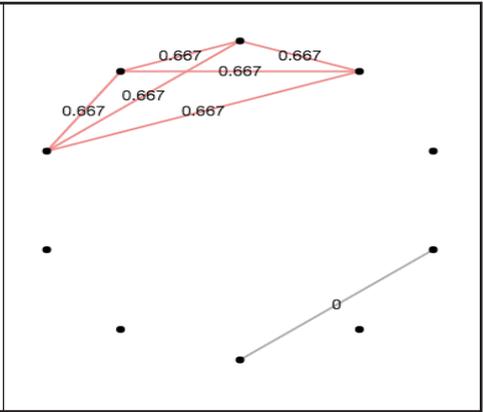


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 9 b

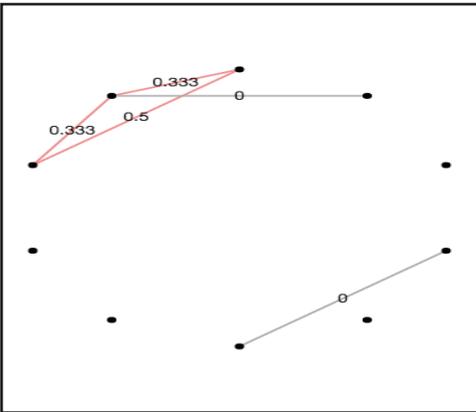


Gráfica 10 b

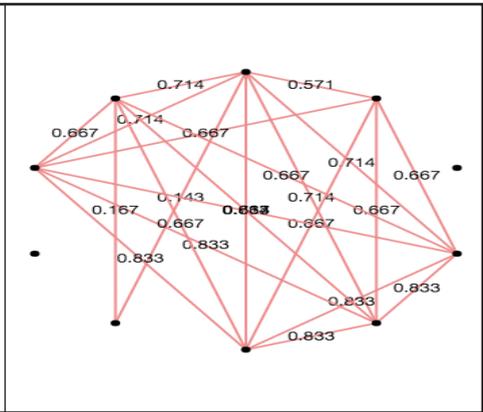


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 11 b



Gráfica 12 b



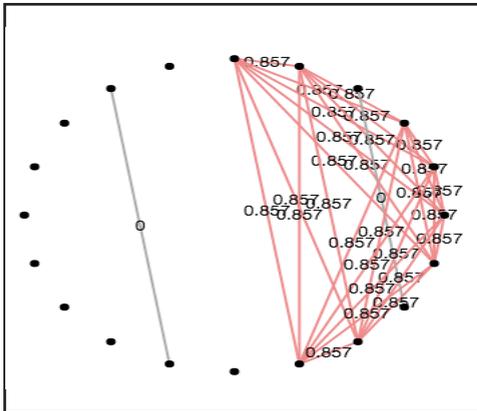
Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Apéndice C

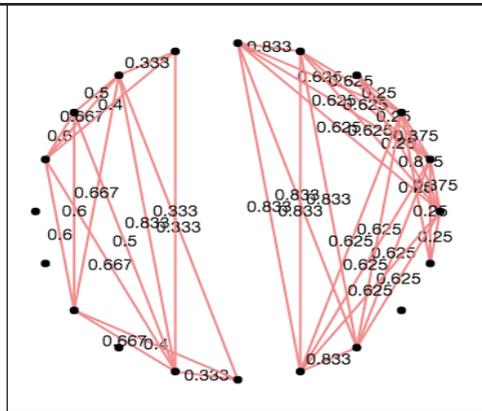
Gráficas Pandemia COVID-19- Bolsas de Valores países del mundo

Las gráficas siguientes representan el resultado de la Curvatura Ollivier-Ricci utilizando Graph curvature calculator v0.7.2 para 9 meses consecutivos utilizando las series históricas de Contagios y Bolsas en 10 países representativos del mundo, donde cada nodo representa un índice de bolsa de valores o los contagios de un país, es decir, el combinado de los casos anteriores.

Gráfica 1 c

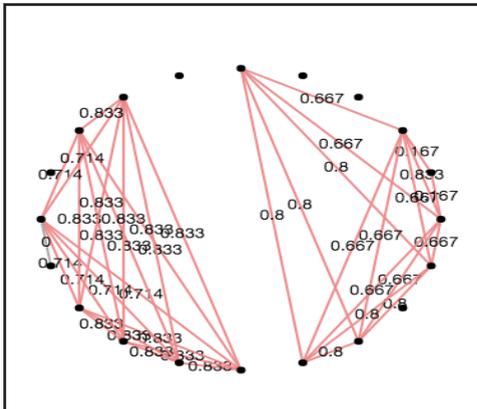


Gráfica 2 c

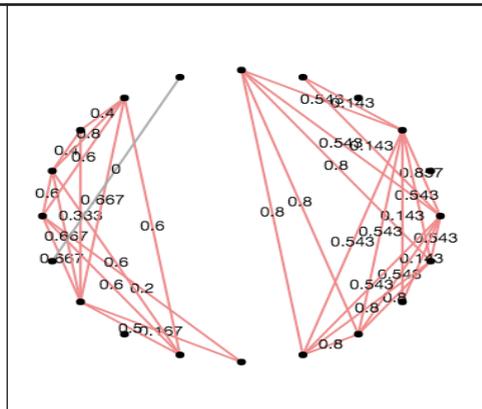


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance

Gráfica 3 c

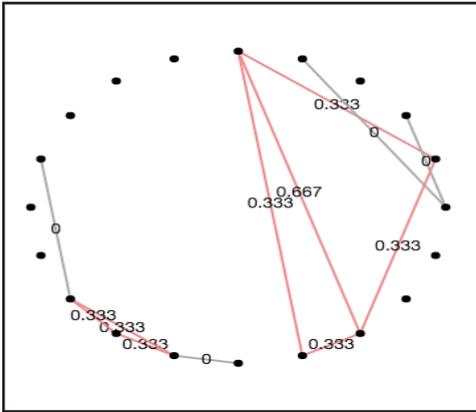


Gráfica 4 c

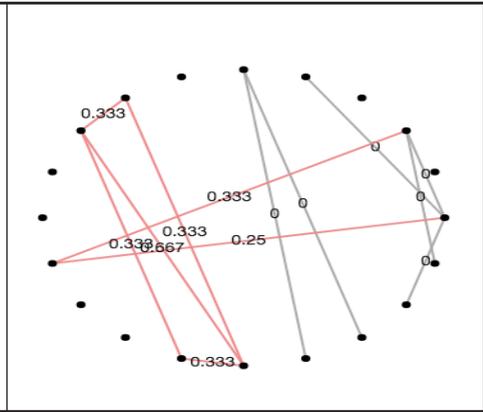


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 5 c

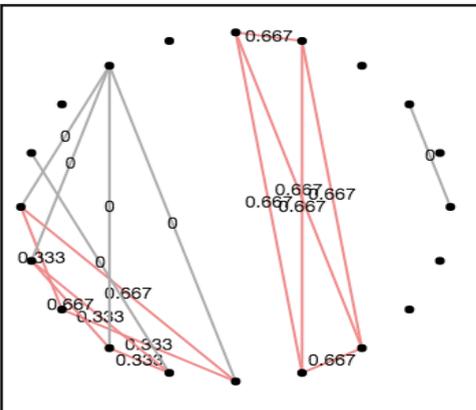


Gráfica 6 c

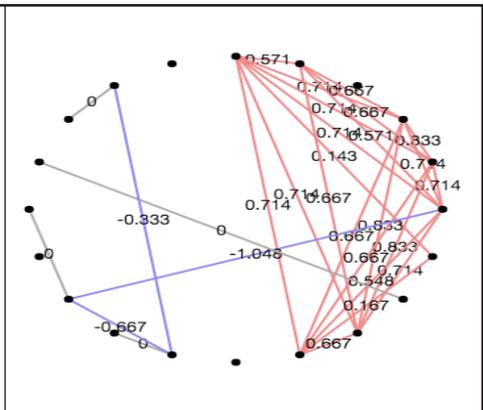


Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 7 c

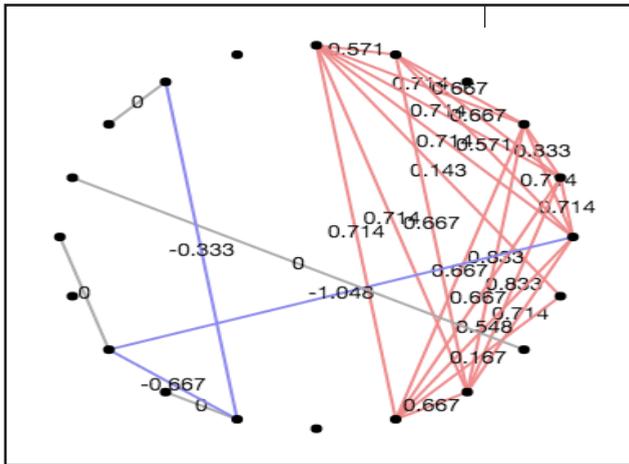


Gráfica 8 c



Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

Gráfica 9 c



Fuente: elaboración propia, Yahoo Finance
<https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>

CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

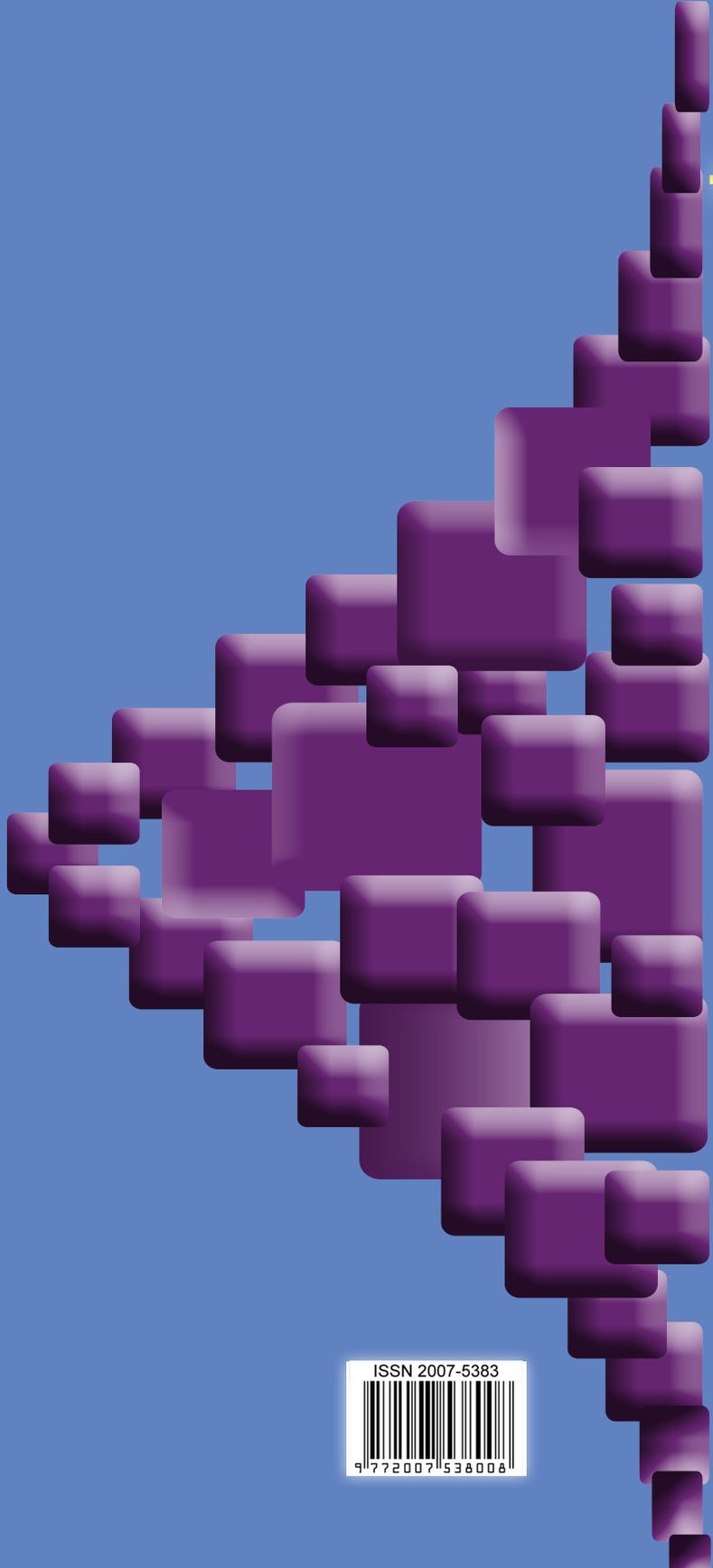
Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
CAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros



ISSN 2007-5383



9 772007 538006